Cursul 1 Calcul vectorial

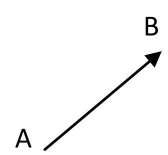
Vectori liberi. Operaţii cu vectori liberi.
Descompunerea unui vector liber după două sau trei direcţii.
Produs scalar.Produs vectorial. Produs mixt

Vectorii sunt unelte matematice folosite când avem de-a face cu sisteme inginereşti, mărimi mecanice sau fizice care nu pot fi caracterizate printr-un singur număr. Mărimi precum distanţa, temperatura, timpul sau masa se exprimă printr-un singur număr. Aceste mărimi se numesc ***mărimi scalare***.

Forţa necesită o mărime şi o singură direcţie şi se numeşte ***mărime vectorială***. Alte exemple de mărimi vectoriale sunt viteza unui punct în mişcare sau segmentul de dreaptă orientată care uneşte două puncte. Acestea presupun cunoaşterea mai multor elemente şi se reprezintă grafic prin ***vectori***.

Definiţia 1. Se numeşte ***vector legat*** orice pereche ordonată de puncte din spaţiul euclidian tridimensional (spaţiul geometriei elementare).

Notăm cu $\overrightarrow{AB}$ vectorul legat corespunzător perechii de puncte (A,B). Punctul A se numeşte originea vectorului, iar punctul B extremitatea sa. Grafic, un vector legat $\overrightarrow{AB}$ se reprezintă printr-o săgeată cu originea în A şi cu vârful în B.



Exerciţiu. Clasificaţi următoarele mărimi ca fiind scalare sau vectoriale

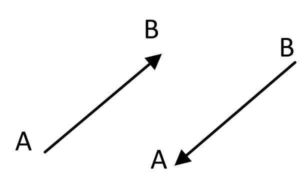
a) Aria — R: scalar
b) Forţa gravitaţională — R: vector
c) Densitatea — R: scalar
d) Acceleraţia — R: vector

Orice vector legat este caracterizat de

a) Origine (punctul A);
b) Mărime (distanţa de la A la B), notată $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = dist(A,B)$;
c) Direcţia (direcţia dreptei AB);
d) Sensul (sensul de la A către B).

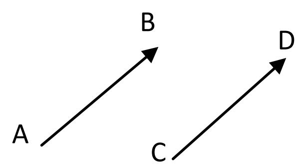
Observaţii: 1) Vectorul $-\overrightarrow{AB}$ se numeşte ***opus*** vectorului $\overrightarrow{AB}$ (cei doi vectori au aceeaşi direcţie, aceeaşi mărime, dar sensuri opuse).

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



2) Vectorul nul $\vec{0}$ are lungimea 0 şi direcţia nedefinită.

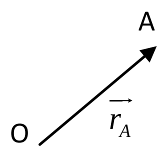
Definiţia 2. Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ se numesc ***echivalenţi*** dacă au acelaşi suport sau suporturi paralele, au aceeaşi mărime şi acelaşi sens.



Definiţia 3. Mulţimea tuturor vectorilor liberi echivalenţi cu un vector legat $\overrightarrow{AB}$ se numeşte ***vector liber*** determinat de vectorul legat $\overrightarrow{AB}$.

Vom nota vectorii liberi cu litere mici cu săgeată deasupra $\vec{a}$.

Mulţimea tuturor vectorilor liberi o vom nota cu V_3.

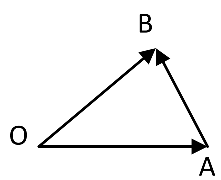


Vectorul $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r_A}$ se numeşte ***vectorul de poziţie*** al punctului *A*.

Operaţii cu vectori liberi

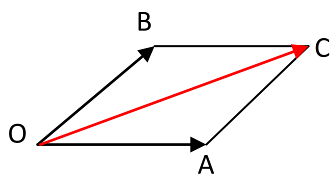
1. Adunarea vectorilor

Regula triunghiului:



$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

Regula paralelogramului



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (diagonala paralelogramului construit pe $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$)

Proprietăţi:

- Comutativitate: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V_3$;
- Asociativitate: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right), \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$;
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \forall\, \vec{a} \in V_3$;
- $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}, \quad \forall\, \vec{a} \in V_3$.

Deci $\left(V_3, +\right)$ grup abelian.

2. Înmulţirea cu scalari

Fie $\vec{a} \in V_3$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Vectorul $\lambda \cdot \vec{a}$ are următoarele proprietăţi:

a) Are aceeaşi direcţie cu $\vec{a}$;
b) Mărimea lui este $|\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$;
c) Sensul lui este acelaşi cu al lui $\vec{a}$ dacă $\lambda > 0$ şi sens opus lui $\vec{a}$ dacă $\lambda < 0$.
d) Dacă $\lambda = 0$, atunci $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Proprietăţi:

a) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
b) $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \left(\mu \cdot \vec{a}\right), \forall \vec{a} \in V_3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
c) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}, \forall \vec{a} \in V_3, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
d) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V_3$, 1 este elementul unitate din $\mathbb{R}$.

Definiţia 4. Prin ***versor*** înţelegem orice vector de lungime 1.

Exemplu: $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$ este versorul vectorului liber $\vec{a}$.

Definiţia 5. Doi vectori se numesc ***coliniari*** dacă au suporturi paralele sau coincid.

Propoziţia 1. Dacă $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ sunt doi vectori coliniari nenuli, atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$ unic, astfel încât $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Observaţie: Doi vectori liberi nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Teorema 1. Vectorii nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nenule simultan, astfel încât $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$.

Propoziţia 2. Dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt necoliniari, atunci $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ dacă şi numai dacă $\alpha = \beta = 0$.

Teorema 2. (Descompunerea unui vector după două direcţii necoliniare) Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$ vectori liberi necoliniari şi $\vec{c}$ un vector liber coplanar cu $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Atunci există α şi $\beta \in \mathbb{R}$ unic determinaţi astfel ca $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Definiţia 6. Trei vectori se numesc ***coplanari*** dacă suporturile lor sunt paralele cu acelaşi plan.

Propoziţia 3. Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt trei vectori liberi necoplanari şi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, atunci $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Teorema 3. (Descompunerea unui vector după trei direcţii) Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt trei vectori liberi necoplanari şi $\vec{v} \in V_3$. Atunci există şi sunt unici scalarii α, β, γ astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Observaţie: Trei vectori liberi nenuli $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă există $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}$.

Reper cartezian

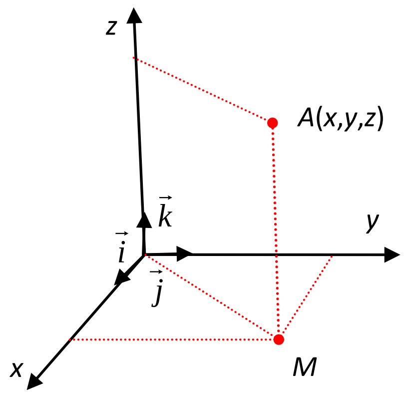
Fie O un punct fixat din spaţiu şi trei axe Ox, Oy şi Oz, perpendiculare două câte două. Prin axă se înţelege o dreaptă pe care s-a fixat un punct, numit ***origine***, un sens şi o unitate de măsură.

Notăm cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versorii celor trei axe Ox, Oy şi Oz. Mulţimea $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se numeşte ***reper cartezian***.

Fie A un punct din spaţiu. Atunci există $x, y, z \in \mathbb{R}$ unice astfel încât

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.1}$$

Numerele x, y, z se numesc ***coordonatele lui A în raport cu reperul cartezian*** $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ şi se notează $A(x, y, z)$. Expresia (1.1) se numeşte ***expresia analitică*** a vectorului $\overrightarrow{OA}$.



Propoziţia 4. Dacă $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$, atunci

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

Exemplu: Fie două puncte $A(1,2,3)$ şi $B(0,1,-2)$. Atunci

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}.$$

Produsul scalar

Definiţia 7. Fie $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$. Se numeşte ***produsul scalar*** al vectorilor liberi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, numărul

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}),\ daca\ \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0,\ daca\ \vec{a} = \vec{0}\ sau\ \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

Propoziţia 5. Doi vectori $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ sunt ortogonali (adică au suporturi perpendiculare) dacă şi numai dacă $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Proprietăţi:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (comutativitate) $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V_3$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (distributivitatea produsului scalar faţă de adunare) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$;

3. Dacă

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

atunci

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3 .$$

Exemplu. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 1\cdot 5 = 2 - 6 + 5 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \vec{a}$ şi $\vec{b}$ nu sunt ortogonali.

4. $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Exemplu. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

$$\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} .$$

Corolar.

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} .$$

Aplicaţii:

1. Se dau vectorii

$$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$
$$\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} .$$

Să se calculeze:

a) $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{v}$, $3\vec{u}$, $3\vec{u} + 5\vec{v}$;

b) $\left\|\vec{u}\right\|$, $\left\|\vec{v}\right\|$.

2. Se dau punctele $O(0,0,0), A(12,-4,3), B(3,12,-4)$ şi $C(2,3,-4)$. Se cere:

a) Să se arate că triunghiul AOB este isoscel;

b) Să se arate că triunghiul AOC este dreptunghic;

c) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC;

d) Să se afle măsura unghiului A.

Soluţie. $\overrightarrow{OA} = 12\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

a) $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 13 = \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \Rightarrow \Delta AOB$ isoscel.

b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA}$ este ortogonal pe $\overrightarrow{OC} \Rightarrow \Delta AOC$ este dreptunghic în O.

c) $\overrightarrow{AB} = -9\vec{i} + 16\vec{j} - 7\vec{k}$; $\overrightarrow{AC} = -10\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}$; $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} - 9\vec{j}$;

$$\left.\begin{array}{l} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{386} \\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{198} \\ \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{82} \end{array}\right| \Rightarrow P_{\Delta ABC} = \sqrt{386} + \sqrt{198} + \sqrt{82}.$$

d) $\cos\widehat{A}=\dfrac{251}{\sqrt{386}\cdot\sqrt{198}}\left(=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}\right).$

3. Se dau vectorii $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\lambda\vec{k},\ \lambda\in\mathbb{R}$. Să se determine λ astfel încât unghiul dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ să fie de 60°.

Soluţie. $\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{5}$

$\left\|\vec{b}\right\|=\sqrt{10+\lambda^2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$

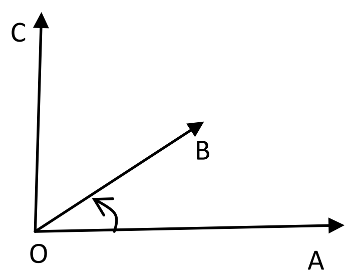
$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10+\lambda^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{10+\lambda^2}=2\sqrt{5}\Rightarrow$$

$\lambda^2=10\Rightarrow\lambda=\pm\sqrt{10}$.

Produsul vectorial

Definiţia 8. Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori liberi necoliniari. Se numeşte ***produsul vectorial*** al lui $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi se notează $\vec{a}\times\vec{b}$ vectorul caracterizat prin:

1) Direcţie perpendiculară pe planul format de suporturile lui $\vec{a}$ şi $\vec{b}$;
2) Sens dat de regula burghiului, adică sensul său coincide cu sensul de înaintare al unui burghiu care se roteşte de la $\vec{a}$ la $\vec{b}$ cu un unghi minim;
3) Mărime $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\cdot\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.



Proprietăţi:

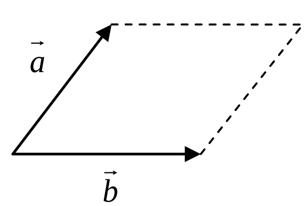
1) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b},\ \forall\vec{a},\vec{b}\in V_3$ (anticomutativ);
2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$, $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$;

$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$, $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$;

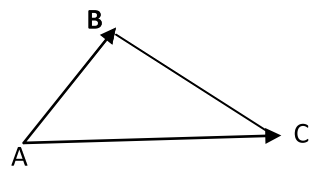
distributivitatea produsului vectorial faţă de adunare;

3) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=0$ sau $\vec{b}=\vec{0}$ sau $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari.

Interpretarea geometrică a produsului vectorial



Aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|$.



$$A_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|.$$

Expresia analitică a produsului vectorial

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Produsul mixt

Definiţia 9. Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$. Se numeşte **produs mixt** şi se notează $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ un număr definit astfel

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Proprietăţi:

1) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right),\quad \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3;$

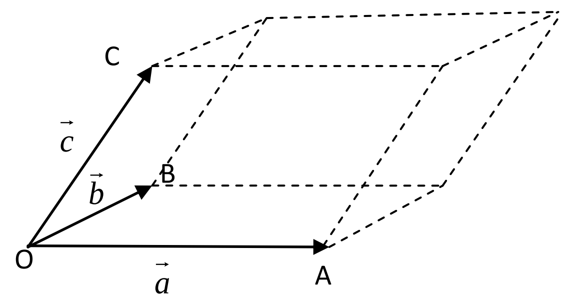
   $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right),\quad \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3;$

2) $\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\overrightarrow{a_1},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right),\quad \forall\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\in V_3;$

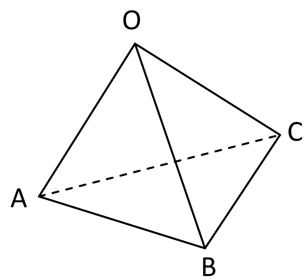
3) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0\Leftrightarrow$ vectorii $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sunt coplanari.

Interpretarea geometrică

Volumul paralelipipedului oblic contruit pe $\vec{a},\vec{b}$ şi $\vec{c}$ este egal cu $\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.



Volumul tetraedrului *OABC* este $\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

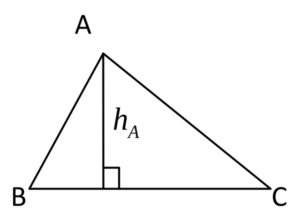


Expresia analitică

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Aplicaţii: 1. Fie $A(-1,1,2)$, $B(2,3,-1)$ şi $C(1,-2,0)$. Să se afle aria triunghiului *ABC* şi lungimea înălţimii corespunzătoare vârfului *A*.

Soluţie: $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$



$$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k},\ \overrightarrow{AC}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}\ \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-13\vec{i}-13\vec{k}.$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=13\sqrt{2}\Rightarrow S=\frac{13\sqrt{2}}{2}$$

$$S=\frac{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot h_A}{2}\Rightarrow h_A=\frac{2\cdot S}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{27}}=\frac{13\sqrt{6}}{9}.$$

$$\overrightarrow{BC}=-\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$$

2. Să se afle volumul tetraedrului *ABCD*, $A(1,1,-3)$, $B(2,-1,1)$, $C(3,3,1)$ şi $D(-1,4,2)$.

Soluţie: $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$

$\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 74 \Rightarrow V = \frac{37}{3}$.

3. Să se arate că punctele $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ şi $D(2,1,3)$ sunt coplanare.

Soluţie: Trebuie să demonstrăm că $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0$

$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ $\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0 \Rightarrow$

A, B, C, D coplanare.

Cursul 2

Planul şi dreapta în spaţiu

În acest curs sunt prezentate ecuaţiile planului şi dreptei în spaţiu, precum şi probleme metrice relativ la plan şi dreaptă.

Planul în spaţiu

Ecuaţia generală a unui plan este o ecuaţie algebrică de gradul I, de forma $Ax+By+Cz+D=0$. Enunţăm acest rezultat prin următoarea teoremă.

Teorema 1. Pentru orice plan *P* din spaţiu există $A,B,C\in\mathbb{R}$ nu toate nule, astfel încât ecuaţia planului *P* este $Ax+By+Cz+D=0$.

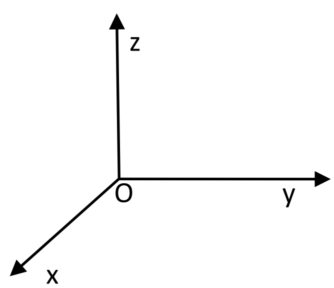
Reciproc, mulţimea punctelor $M\left(x,y,z\right)$ care verifică o ecuaţie de forma $Ax+By+Cz+D=0$, cu $A,B,C\in\mathbb{R}$ nu toate nule este un plan.

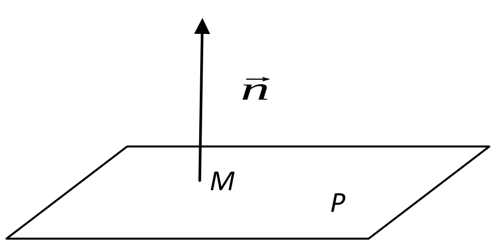
***Cazuri particulare de plane**:* *Planele de coordonate*

Planul *xOy* are ecuaţia *z=0*.

Planul *xOz* are ecuaţia *y=0*.

Planul *yOz* are ecuaţia *x=0*.





Vectorul $\vec{n}$ se numeşte *vector normal* la planul *P*.

Definiţia 1. Doi vectori necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ care au dreptele suport paralele cu un plan *P*, se numesc *vectori directori* ai planului *P*.

Definiţia 2. Un vector nenul $\vec{n}$ se numeşte *vector normal* la planul *P* dacă dreapta suport a vectorului este perpendiculară pe planul *P*.

Ecuaţii ale planului în spaţiu

1. Ecuaţia planului P care trece prin $M(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular pe vectorul nenul $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{1.1}$$

Exemple: 1) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin $M(0, -1, 2)$ şi este perpendicular pe vectorul $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$.

2) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin $M(1, 2, -3)$ şi este perpendicular pe vectorul $\vec{n} = 4\vec{i} + 5\vec{k}$.

2. Ecuaţia planului care trece $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralel cu direcţiile vectorilor $\vec{v}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ şi $\vec{v}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.2}$$

Observaţie. Aceeaşi ecuaţie se poate scrie sub forma *ecuaţiei parametrice vectoriale*

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_2}, \tag{1.3}$$

unde $\overrightarrow{r_0}$ şi $\vec{r}$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor M_0, respectiv M, iar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_2}$ (condiţia de coplanaritate).

Ecuaţia (1.3) este echivalentă cu ecuaţiile scalare (parametrice)

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l_1 + \mu l_2 \\ y = y_0 + \lambda m_1 + \mu m_2 \\ z = z_0 + \lambda n_1 + \mu n_2 \end{cases}. \tag{1.4}$$

Exemple: 1) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin $M(1, 2, -3)$ şi este paralel cu vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ şi $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

2) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin $M(2,1,0)$ şi este paralel cu vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

3. Ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i), i = 1,2,3$ este

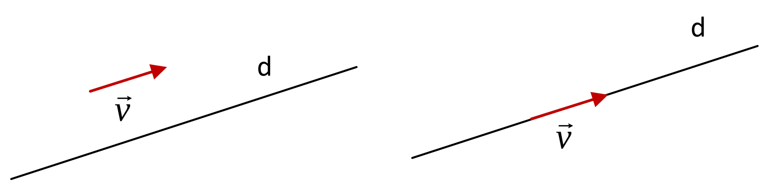
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.5)$$

Exemple: 1) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_1(1,2,-3)$, $M_2(1,0,1)$ şi $M_3(1,2,0)$.

2) Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctele $M_1(0,1,0)$, $O(0,0,0)$ şi $M_2(-1,1,2)$.

Dreapta în spaţiu

Definiţia 3. Se numeşte *vector director* al direcţiei dreptei *d* orice vector liber nenul $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, a cărui direcţie coincide cu direcţia dreptei *d* (*Fig.*)



Teorema 2. Ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ şi are ca vector director vectorul $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ sunt

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (1.6)$$

Observaţie. Ecuaţia (1.6) este echivalentă cu *ecuaţia parametrică vectorială*

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

sau cu *ecuaţiile scalare*

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m,\ \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \tag{1.8}$$

Observaţie. În cazul în care cel mult doi dintre numitorii din ecuaţia (1.6) sunt zero se folosesc aceleaşi ecuaţii, convenind ca dacă un numitor este zero, trebuie egalat şi numărătorul respectiv cu zero.

Ecuaţiile (1.6) se numesc *ecuaţiile canonice* ale dreptei în spaţiu.

Exemple. 1) Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul *M*(*1; 2; 3*) şi are direcţia $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.
2) Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul *M*(*1; 0; 2*) şi are direcţia $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Observaţie. Pentru $t \in \mathbb{R}$ un parametru real, $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} = t$, rezultă

$$\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases}$$

şi de aici se obţin *ecuaţiile parametrice* ale dreptei

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + tn \end{cases} \tag{1.9}$$

Exemple. 1) Să se scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul *M*(*1; 2; 3*) şi are direcţia $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

2) Să se scrie ecuaţiile parametrice dreptei care trece prin punctul *M*(*1; 0; 2*) şi are direcţia $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Propoziţia 1. Ecuaţiile canonice ale *dreptei determinată de două puncte* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sunt

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1.10}$$

Exemple. 1) Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctele $M_1(1,2,-3)$ şi $M_2(1,0,1)$.

2) Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctele $M_1(1,0,-1)$, $M_2(2,2,1)$.

3) Să se scrie ecuaţiile laturilor triunghiului *ABC*, unde *A*(1;-2; 4); *B*(3; 1;-3); *C*(5; 1;-7). Să se determine un vector director al fiecărei laturi.

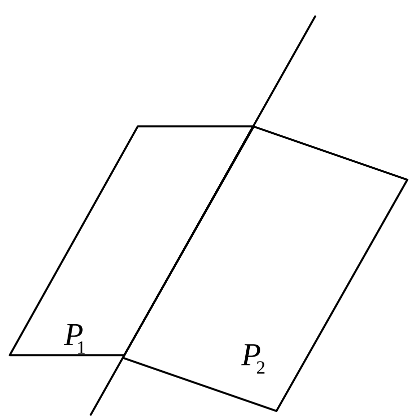
4) Să se scrie ecuaţiile medianelor triunghiului *ABC*.

Propoziţia 2. Ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a planelor neparalele $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ şi $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ sunt

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{-\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_1}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}, \tag{1.11}$$

unde $M(x_0,y_0,z_0)$ este un punct oarecare fixat pe această dreaptă, adică o soluţie particulară a sistemului

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$



Exemplu. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei *d* de ecuaţii

$$\begin{cases}3x-y+2z+15=0\\ 5x+9y-3z-1=0\end{cases}$$

Fascicol de plane

Definiţia 4. Se numeşte *fascicol de plane* mulţimea tuturor planelor care conţin o dreaptă dată. Această dreaptă se numeşte *axa fascicolului*.

Fie dreapta de ecuaţii

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \tag{1.13}$$

Prin orice dreaptă trece o infinitate de plane.

Teorema 3. Ecuaţia oricărui plan din fascicolul determinat de drepta (1.12) este

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0 \tag{1.14}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nu sunt simultan nuli.

Aplicaţii practice – Probleme metrice

1. *Distanţa de la un punct la un plan*

Propoziţia 3. Distanţa de la un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ la un plan $(P)\quad Ax + By + Cz + D = 0$ este

$$d(M, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.15}$$

Distanţa de la punctul M la planul P este egală cu lungimea vectorului *MM'*, unde *M'* este proiecţia punctului *M* pe planul *P*.

Exemplu. Să se calculeze distanţa de la punctul $M(1,0,2)$ la planul $(P)\quad 2x + y - z + 3 = 0$.

2. Distanţa de la un punct la o dreaptă în spaţiu

Propoziţia 4. Distanţa de la un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ la dreapta Δ de ecuaţie $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ este

$$d(M,\Delta) = \frac{\left\| \overrightarrow{MM_1} \times \vec{v} \right\|}{\|\vec{v}\|}, \tag{1.16}$$

unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$ este un punct al dreptei Δ şi $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ este vectorul director al dreptei.

Exemplu. Să se calculeze distanţa de la punctul $M(-1,1,2)$ la dreapta $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$.

3. Distanţa dintre două drepte

Fie dreptele d_1 şi d_2 de ecuaţii

$$d_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$
$$d_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Dacă dreptele sunt concurente, distanţa dintre ele este zero.

Dacă dreptele sunt paralele, distanţa dintre ele poate fi calculată conform (1.16), unde M_1 este un punct pe dreapta d_1, iar $\overrightarrow{v_2}$ este vectorul director al dreptei d_2

$$d(M_1, d_2) = \frac{\left\| \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{v}_2 \right\|}{\|\vec{v}_2\|}$$

sau

$$d(M_2, d_1) = \frac{\left\| \overrightarrow{M_2M_1} \times \vec{v}_1 \right\|}{\|\vec{v}_1\|}$$

unde M_2 este un punct pe dreapta d_2, iar $\overrightarrow{v_1}$ este vectorul director al dreptei d_1.

Dacă dreptele nu sunt nici paralele, nici concurente, distanţa dintre d_1 şi d_2 este lungimea perpendicularei comune celor două drepte.

Fie $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ vectorii directori al dreptelor d_1 şi respectiv d_2, iar $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Atunci

$$d\left(d_1, d_2\right) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right\|}. \tag{1.17}$$

4. *Unghiul a două plane*

Definiţie. Unghiul a două plane este unghiul facut de doi vectori normali.

Propoziţia 5. Unghiul a două plane de vectori normali $\vec{n}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ şi $\vec{n}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ este dat de

$$\cos\theta = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{1.18}$$

Exemplu. Să se calculeze unghiul între planele $2x - y + z + 3 = 0$ şi $x + y - 2z + 1 = 0$.

Observaţii. 1. Două plane de ecuaţii $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ şi $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2. Planele sunt paralele dacă şi numai dacă $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

5. *Unghiul a două drepte*

Fie două drepte de vectori directori $\vec{v}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ şi $\vec{v}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$. *Unghiul celor două drepte* este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$. Notând cu α acest unghi, măsura lui se obţine din relaţia

$$\cos\alpha = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{1.19}$$

Observaţii. 1. Două drepte sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$, ceea ce este echivalent cu $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

2. Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă $\overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

6. *Unghiul dintre o dreaptă şi un plan*

Fie P un plan de vector normal $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ şi d o dreaptă de vector director $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$. Dacă dreapta este paralelă sau conţinută în plan, unghiul dintre d şi P este zero, iar altfel unghiul, notat cu α este dat de relaţia

$$\sin\alpha = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{1.20}$$

Exerciţii recapitulative

1. a) Să se reprezinte grafic în sistemul de axe xOy punctele A(2,3), B(1,-2), C(4,0), D(-3,-2).
   b) Să se determine vectorii de poziţie ai punctelor de la exerciţiul 1.
   c) Reprezentaţi grafic aceşti vectori de poziţie.
2. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ şi $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.
   a) Reprezentaţi grafic vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.
   b) Calculaţi $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$.
   c) Calculaţi $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$.
   d) Calculaţi aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.
3. Se dau punctele $A(1,0,2)$, $B(-1,0,-3)$, $C(2,1,3)$ şi $D(3,1,4)$.
   a) Scrieţi vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
   b) Calculaţi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$.
   c) Calculaţi perimetrul triunghiului *ABC*.
   d) Calculaţi aria triunghiului *ABC*.
   e) Calculaţi volumul tetraedrului *ABCD*.
   f) Calculaţi volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
   g) Scrieţi ecuaţiile laturilor triunghiului *ABC*.

Curs 3

Spaţii vectoriale

Definiţia1. Dacă $n \geq 2$ este un întreg, şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un ***vector n-dimensional***. Mulţimea acestor vectori se notează cu $\mathbb{R}^n$.

Un spaţiu vectorial implică patru elemente: două mulţimi *V* şi *K*, şi două operaţii algebrice numite adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari.

Definiţia 2. Fie *K* un corp de numere ($K = \mathbb{C}$ sau $K = \mathbb{R}$) şi *V* o mulţime de elemente pe care s-au definit două operaţii (legi de compoziţie):
I. $+ : V \times V \rightarrow V$ (lege aditivă);
II. $\cdot : K \times V \rightarrow V$ (lege multiplicativă sau înmulţire cu scalari).
$(V, +, \cdot)$ se numeşte ***spaţiu vectorial*** peste corpul *K* şi notăm *V*/*K* dacă cele două legi verifică axiomele:

- în raport cu operaţia de adunare V este un grup comutativ (abelian), adică

1. $x+y = y+x, \forall x, y \in V$;
2. $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in V$;
3. $\exists 0 \in V$ astfel încât $\forall x \in V : x + 0 = 0+x = x$;
4. $\forall x \in V, \exists -x \in V$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

- înmulţirea cu scalari satisface condiţiile

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \; \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$;
2. $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha \cdot (\beta \cdot x), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$;
3. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$;
4. $1 \cdot x = x, \forall x \in V$, 1 elementul unitate din *K*.

Elementele mulţimii *V* se numesc ***vectori***, iar elementele lui *K* se numesc ***scalari***.
Vom nota, în general, vectorii cu litere latine, iar scalarii prin litere greceşti.

Exemple

1. V_2, V_3 mulţimea vectorilor liberi din plan, respectiv din spaţiu este spaţiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari.
2. Spaţiul $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n ori} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n} \right\}$ (sau mai general K^n, unde K este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), împreună cu operaţiile

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \text{ şi}$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

formează spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$, (respectiv peste $\mathbb{C}$).
De exemplu, în $\mathbb{R}^2$,

$$(1;-3) + (0;2) \; = \; (1;-1); \; 2 \cdot (3;-2) \; = \; (6;-4).$$

În $\mathbb{R}^3$,

$$(2;1;-2) + (3;0;-1) = (5;1;-3); (-2)\cdot(3;1;0) = (-6;-2;0).$$

Înzestrat cu cele două legi de compoziţie, $\mathbb{R}^n$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial. Vectorul nul este 0 =(0; 0; …; 0), iar opusul vectorului $x = (x_1;\ldots;x_n)$ este vectorul $-x = (-x_1;\ldots;-x_n)$. Proprietăţile din Definiţia 2 se verifică imediat. Astfel, $\mathbb{R}^n$ se poate organiza ca $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial. Elementele lui $\mathbb{R}^n$ se numesc vectori (linie) reali n-dimensionali (vezi Definiţia1).

3. $M_{m,n}(K)$ mulţimea matricelor cu *m* linii şi *n* coloane este un spaţiu vectorial peste *K* în raport cu operaţiile de adunare a matricelor şi înmulţirea cu numere a matricelor.
4. Spaţiul $\mathbb{R}_n[X]$ al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad $\leq n$ este spaţiu vectorial în raport cu adunarea polinoamelor şi înmulţirea polinoamelor cu numere.
5. Spaţiul $C([a, b])$ al funcţiilor continue definite pe intervalul $[a, b]$

$$C([a, b])=\{f \,/\, f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \text{ continuă}\}$$

formează spaţiu vectorial în raport cu operaţiile

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$$

Elementul neutru este $0_V = f_0(x) = 0$ (funcţia identic nulă) , iar simetricul lui *f* este $(-f)(x) = -f(x)$.

Proprietăţi (***Reguli de calcul într-un spaţiu vectorial***)

1. $\alpha(x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$, $\forall x;\ y \in V; \alpha \in K$;
2. $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$, $\forall x \in V; \alpha, \beta \in K$;
3. $0 \cdot x = 0_V$, $\forall x \in V$;
4. $(-1) \cdot x = -x$, $\forall x \in V$;
5. $\alpha \cdot 0_V = 0_V$, $\forall \alpha \in K$;
6. $\alpha \cdot x = 0_V \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0_V$.

Demonstraţie:

1. $\alpha(x - y) + \alpha y = \alpha[(x - y) + y] = \alpha x$.
2. $(\alpha-\beta)x + \beta x = [(\alpha-\beta) + \beta]x = \alpha x$.
3. În proprietatea 2 se ia $\alpha = \beta$.
4. Rezultă din proprietăţile 2 şi 3.
5. Rezultă din 1, luând $x=y$.
6. Din 3 şi 5, $0 \cdot x = \alpha \cdot 0_V = 0_V$.

Reciproc, dacă $\alpha x = 0_V$ şi $\alpha \neq 0$, atunci există α^{-1} (K fiind corp), deci

$\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V$. Dar $\alpha^{-1}(\alpha x) = (\alpha^{-1}\cdot\alpha)x = 1 \cdot x = x$, deci $x = 0_V$.

Subspaţii vectoriale

Definiţia 3. O submulţime V' a spaţiului vectorial V peste corpul K este un ***subspaţiu vectorial*** al lui V dacă V' este spaţiu vectorial în raport cu cele două operaţii restricţionate la V'.

Sunt evidente următoarele teoreme:

Teorema 1. O condiţie necesară şi suficientă ca submulţimea V' ⊂ V a spaţiului vectorial V peste corpul K să fie subspaţiu vectorial este ca V' să fie stabilă în raport cu cele două operaţii, adică

a) $x + y \in V'$, $\forall x, y \in V'$;

b) $\lambda x \in V'$, $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in V'$.

Propoziţia 1. (Criteriul subspaţiului) O condiţie necesară şi suficientă ca submulţimea V' ⊂ V a lui V peste corpul K să fie subspaţiu vectorial este ca $\lambda x + \mu y \in V'$ $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall x, y \in V'$.

Exemple

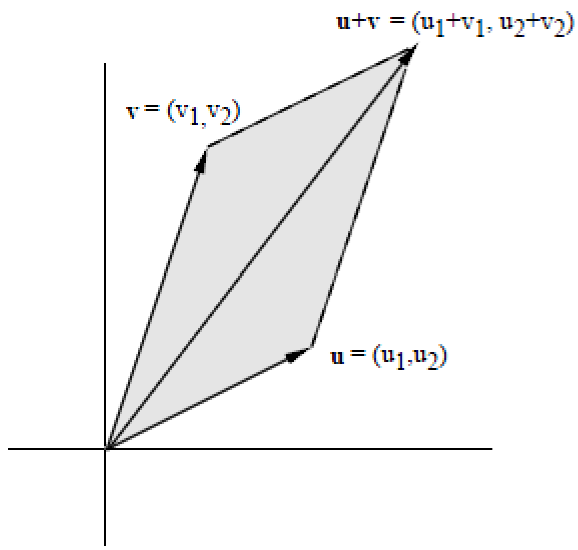
1. În orice spaţiu vectorial V mulţimea $\{0_V\}$ şi V sunt subspaţii vectoriale, numite subspaţii vectoriale improprii sau triviale.
2. În $\mathbb{R}^n$ considerăm, pentru orice $1 \le i \le n$, mulţimile

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x = (x_1;\ \ldots;\ x_{i-1};\ 0_{\mathbb{R}};\ x_{i+1};\ \ldots;\ x_n)\}$$

Se demonstrează uşor că V_i este subspţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

3. Adunarea vectorilor din $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$ este uşor vizualizată cu ajutorul regulii paralelogramului, ca în figură, pentru vectori din $\mathbb{R}^2$.

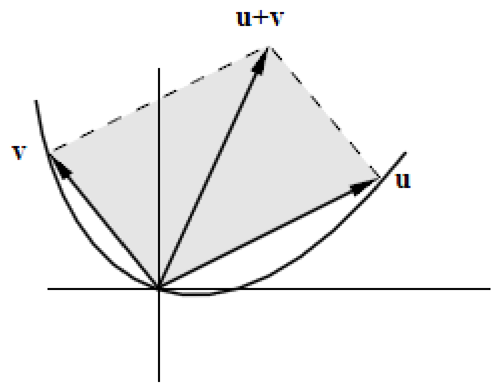
.



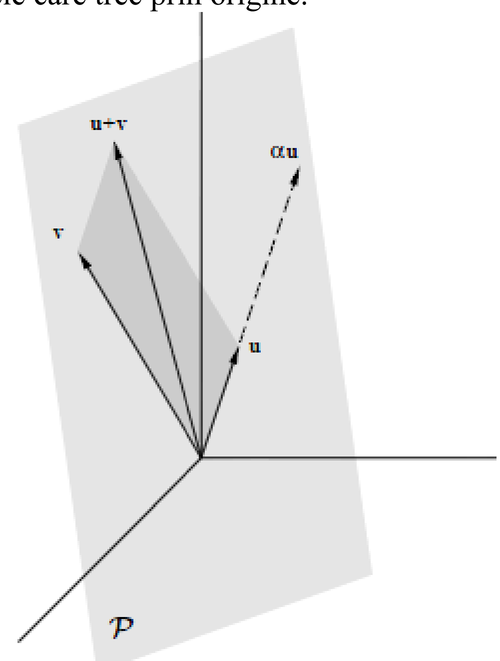
Orice dreaptă care trece prin origine este subspaţiu al lui $\mathbb{R}^2$ (orice punct de pe aceste drepte are coordonatele $(x, \alpha x)$).

În schimb, dreptele care nu trec prin origine nu formează subspaţiu vectorial deoarece orice subspaţiu trebuie sa conţină vectorul nul.

Curbele din $\mathbb{R}^2$ nu formează nici ele subspaţii vectoriale deoarece, aşa cum se vede în figura următoare există puncte de pe curbă **u** şi **v** asfel încât **u+v** nu se află pe curbă, deci prima condiţie din Teorema 1, nu este îndeplinită.



În consecinţă, în $\mathbb{R}^2$ singurele subspaţii sunt cele triviale şi dreptele care trec prin origine.
În $\mathbb{R}^3$, subspaţiile improprii şi dreptele care trec prin origine sunt din nou subspaţii vectoriale, dar aici mai sunt subspaţii şi planele care trec prin origine.



Dacă *P* este un plan care trece prin origine, aşa cum se vede şi în figură, suma a doi vectori din *P*, se află tot în *P*, iar înmulţirea cu scalari este bine definită (rezultatul este tot un vector din *P*).

Combinaţii liniare. Sisteme de generatori

Definiţia 4. Fie *V*/*K* un spaţiu vectorial şi $x_i \in V, i=\overline{1,n}, \alpha_i \in K, i=\overline{1,n}$. Se numeşte ***combinaţie liniară*** a vectorilor x_i, $i=\overline{1,n}$ cu scalarii α_i, $i=\overline{1,n}$ vectorul $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

Numerele α_i se numesc *coeficienţii* combinaţiei liniare.

Exemplu. Fie spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ şi vectorii $x = (2, 3, 1)$, $y = (5, 1,- 3)$, $z = (2, –1, 0)$.
Atunci combinaţiile liniare ale acestor vectori sunt de forma

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = (2\alpha_1,\ 3\alpha_1,\ \alpha_1) + (5\alpha_2,\ \alpha_2,\ -3\alpha_2) + (2\alpha_3,\ -\alpha_3,\ 0) =$$
$$= (2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3,\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_1 - 3\alpha_2).$$

Definiţia 5. Fie V/K un spaţiu vectorial şi $M \subset V$, $M \neq \emptyset$. Se numeşte ***spaţiu generat de mulţimea M*** şi se notează cu $sp(M)$ mulţimea tuturor combinaţiilor liniare cu vectori din M şi coeficienţi din K.

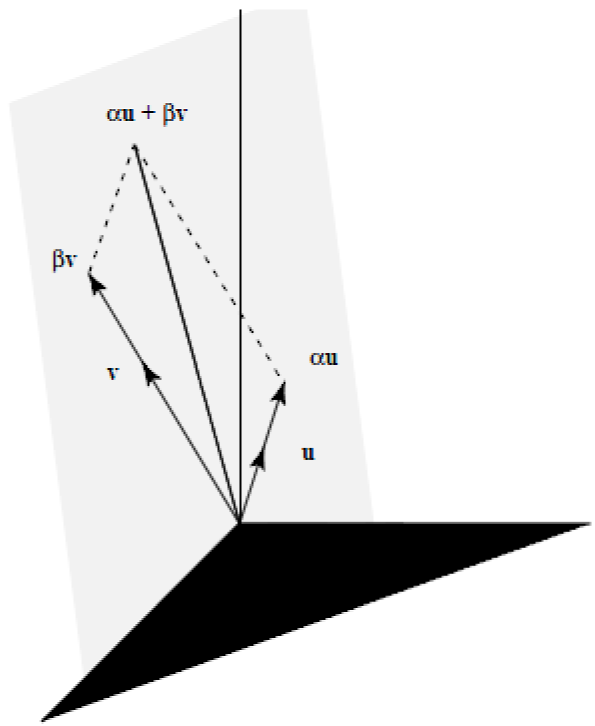
Exemplu.

Fie spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$, vectorii $e_1 = (1,\ 0,\ 0), e_2 = (0,\ 1,\ 0), e_3 = (0,\ 0,\ 1)$ şi $M = \{e_1, e_2, e_3\}$. Atunci $sp(M) = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),\ \alpha_i \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}^3$.

Definiţia 6. Fie V/K spaţiu vectorial şi $M \subset V$, $M \neq \emptyset$. Submulţimea M se numeşte ***sistem de generatori*** pentru spaţiul V, dacă spaţiul generat de M este egal cu V, deci dacă $sp(M) = V$.

Interpretare geometrică

Dacă $\boldsymbol{u} \neq 0$ este un vector din $\mathbb{R}^3$, atunci ***sp(u)*** este mulţimea dreptelor care trec prin origine şi prin ***u***.
Combinaţiile liniare a doi vectori **u** şi **v**, $sp(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, unde u şi v sunt vectori nenuli şi necoliniari, este, după cum se vede şi în figură, planul care trece prin origine şi conţine cei doi vectori.



Definiţia 7. Spaţiul vectorial V/K se numeşte de ***dimensiune finită*** dacă admite un sistem finit de generatori.
Exemplu. $\{e_1, e_2, e_3\}$ constituie un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$. În concluzie, $\mathbb{R}^3$ are dimensiune finită.

Dependenţă şi independenţă liniară

Definiţia 8. Fie V/K spaţiu vectorial şi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$. Spunem că vectorii x_i, $i = \overline{1,n}$ sunt ***liniar independenţi*** (sau că mulţimea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este o **mulţime liberă**), dacă din $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_V$ rezultă $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Definiţia 9. Fie V/K spaţiu vectorial şi un sistem de vectori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$. Vectorii x_i, $i = \overline{1,n}$ se numesc ***liniar dependenţi*** (sau **mulţime legată**) dacă există $\alpha_i \in K$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_V$.

Exemple

1. Pentru V_3 mulțimea vectorilor liberi, $M = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ este un sistem liniar independent.
   Demonstraţie. Din $\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} = \vec{0}$, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, deci sistemul de vectori este liniar independent.
2. În $\mathbb{R}^3$, vectorii $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ sunt linear independenţi.
3. În $\mathbb{R}^n$, vectorii $e_1 = (1; 0; \dots; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; \dots; 0)$; $\dots$; e_n sunt linear independenţi.
4. În $\mathbb{R}^3$, vectorii $x_1 = (1; 0; 2)$, $x_2 = (0; 1; 1)$, $x_3 = (1; 1; -3)$ sunt liniar dependenţi deoarece $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
5. În $\mathbb{R}^3$, vectorii $x_1 = (1; 0; 1)$, $x_2 = (0; 1; 0)$, $x_3 = (2; 0; 0)$ sunt liniar independenţi.
   Demonstratie Din $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, rezultă

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

Deci sistemul este liniar independent.

Bază. Dimensiune

Sistemele de vectori care sunt simultan şi sisteme de generatori şi liniar independente vor juca un rol fundamental în ceea ce urmează.

Definiţia10. Fie V/K un spaţiu vectorial şi $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$. B se numeşte ***bază*** în spaţiul vectorial V dacă:

1. B este liniar independentă;
2. B este un sistem de generatori pentru V.

Teorema 2. Fie V/K spaţiu vectorial, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$, B este bază. Rezultă că pentru oricare $x \in V$, există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ unic determinați astfel încât:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i .$$

Numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se numesc ***coordonatele*** vectorului *x* în raport cu baza *B*. Vom scrie *x*=($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$).

Demonstraţie.

Fie *B* = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bază, şi fie *x* ∈ *V*. Din faptul că B este sistem de generator, rezultă că există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. Presupunem prin absurd că există şi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ astfel încât $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$.

Atunci $0_V = x - x = \underbrace{(\alpha_1 - \lambda_1)}_{\beta_1} e_1 + \underbrace{(\alpha_2 - \lambda_2)}_{\beta_2} e_2 + \dots \underbrace{(\alpha_n - \lambda_n)}_{\beta_n} e_n$, şi cum *B* e sistem liniar independent

$\Rightarrow \beta_i = 0, \ \forall\, i = \overline{1,n} \Rightarrow \alpha_i = \lambda_i, \forall\, i = \overline{1,n}$, deci scrierea este unică.

Exemple

1. Vectorii $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ formează ***baza canonică*** în $\mathbb{R}^3$.

2. În $\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\right\}$ şi fie vectorii $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$; atunci $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază în $\mathbb{R}^n$, numită ***bază canonică.***

Demonstraţie:

- Sistem liniar independent

Din $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0_V \Rightarrow$

$\alpha_1 (1, 0, \dots, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_n (0, 0, \dots, 0, 1) = 0_V \Rightarrow$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ liniar independent.

- Sistem de generatori

Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow x = x_1 (1, 0, \dots, 0) + x_2 (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n (0, 0, \dots, 0, 1) =$

$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \Rightarrow x \in sp(B)$.

Dar *x* oarecare ⇒ *B* sistem de generatori.

3. În spaţiul $\mathbb{R}_n[X]$ al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad ≤ *n*, fie vectorii $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, \dots, e_{n+1} = x^n$. Atunci mulţimea $B = \{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ este bază canonică.

Teorema 3. Vectorii $x_1, x_2, \dots, x_p$ sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă matricea coordonatelor lor în baza B are rangul p.

Aplicaţia 1. Verificaţi liniar independenţa vectorilor

a) $x_1 = (1, 2, -1), x_2 = (2, -1, 0), x_3 = (4, -7, 2)$;

b) a) $x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (1, 1, 0), x_3 = (1, 1, 1)$.

Aplicaţia 2. Să se arate că mulţimea B={(2,2,-1), (2,-1,2),(-1,2,2)} este o bază în $\mathbb{R}^3$ şi să se determine coordonatele vectorului x=(1,1,1) în raport cu această bază.

Aplicaţia 3. Să se afle coordonatele matricei $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ în raport cu baza canonică din $M_2(\mathbb{R})$, adică

$$e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Definiţia 11. Spunem că spaţiul vectorial V este de ***dimensiune n*** sau ***n-dimensional*** şi se notează $\dim_K V = n$ dacă există în V n vectori liniar independenţi şi orice n + 1 vectori sunt liniar dependenţi. În acest caz spaţiul se numeşte ***finit-dimensional***. Spaţiul vectorial care conţine un sistem liniar independent infinit se numeşte ***infinit-dimensional***.

Exemple

1) $\dim \mathbb{R}^n = n$

2) $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$

3) $\dim V_3 = 3$

Teorema 4. Într-un spaţiu vectorial V de dimensiune n există o bază formată din n vectori; mai mult, orice sistem de n vectori liniar independenţi din V constituie o bază a lui V .

Teorema 5. Dacă B = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este bază în V, atunci $\dim_K V = n$.

Teorema 6. (Teorema bazei incomplete) Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n. Pentru orice parte liberă S $=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ din V , p < n, există vectorii x_{p+1}; …; x_n din V astfel încât $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n\}$ să fie bază în V.

Matricea de trecere de la o bază la alta. Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi B = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, B' = $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ două baze ale sale. Putem exprima vectorii din baza B' în baza B. Pentru orice vector $f_j,\ j=\overline{1,n}$ există şi sunt unici $c_{ij} \in K$ astfel încât

$$f_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ \ldots\ + c_{n1}e_n = \sum_{j=1}^{n} c_{j1}e_j\ ,$$
$$\vdots$$
$$f_i = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + \ \ldots\ + c_{ni}e_n = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}e_j\ ,$$
$$\vdots$$
$$f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ \ldots\ + c_{nn}e_n = \sum_{j=1}^{n} c_{jn}e_j\ .$$

Matricea

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Se numeşte ***matricea de trecere*** de la baza B la baza B'.

Teorema 7. Matricea de trecere de la o bază la alta este nesingulară.

Teorema 8. Fie dim $V = n$, iar C matricea de trecere de la baza B la baza B'. Dacă $x \in V$, are coordonatele $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ în baza B şi are componentele $(x_1', x_2', \dots, x_n')$, în baza B' , atunci

$x_{[B]} = \mathrm{C}x_{[B']}$ şi $x_{[B']} = \mathrm{C}^{-1}x_{[B]}$, unde $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, iar $x_{B'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

Aplicaţia 4. Fie B={ $e_1 = (-1,1), e_2 = (2,3)$ } şi B'={ $f_1 = (1,3), e_2 = (3,8)$ }.

a) Să se verifice dacă sistemele de vectori B şi B' formează baze.
b) Să se găsească matricea de trecere din baza B în baza B'.
c) Dacă $x_{[B']} = (2,1)$, găsiţi coordonatele lui x în baza B.
d) Dacă $x_{[B]} = (-1,0)$, găsiţi coordonatele lui x în baza B'.

Dimensiunea unui subspaţiu vectorial

Teorema 8. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi S un subspaţiu vectorial al lui V. Atunci:

a) $\dim_K(S) = \dim_K(V)$ dacă şi numai dacă V = S;

b) dacă S este subspaţiu propriu al lui V, atunci $\dim_K(S) < \dim_K(V)$;

c) S admite un suplement S_1 şi avem:

$$\dim_K(V) = \dim_K(S) + \dim_K(S1).$$

Teorema 9. (**Grassmann**) Dacă S_1 şi S_2 sunt subspaţii vectoriale finit dimensionale ale lui V , atunci

$$\dim_K(S1 + S2) = \dim_K(S1) + \dim_K(S2) - \dim_K(S1 \cap S2).$$

Cursul 4

Matrice. Rangul unei matrice.

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare.

Metoda eliminării a lui Gauss

Definiţie O matrice $m \times n$ este o serie de mn intrări, numite elemente, aranjate în m linii şi n coloane. În cazul în care o matrice se notează cu A, elementul din rândul i şi coloana j se notează cu a_{ij} şi matricea se scrie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemple de matrice

- Matrice 1x3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Matrice 3x1 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Matrice 2x2 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Matrice 3x3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

O matrice ***pătratică*** este o matrice în care numărul de linii m este egal cu numărul de coloane n.

Egalitatea a două matrice. Egalitatea a două matrice înseamnă că, dacă A şi B sunt egale, atunci fiecare este o copie identică a celeilalte.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \end{pmatrix}$. Aflaţi x astfel încât $A=B$.

Adunarea a două matrice. Adunarea de matrice A şi B este definită numai în cazul matricele au acelaşi număr de rânduri şi cu acelaşi număr de coloane. Să considerăm $A = \left[a_{ij} \right]$ şi

B = $\left[b_{ij}\right]$ să fie matrice m × n. Matricea m × n formată încât elementul din linia *i* şi coloana *j* este $a_{ij}+b_{ij}$ pentru fiecare *i* şi *j* este matricea A + B .

Ex. Pentru $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ A+B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

Înmulţirea unei matrice cu scalari. Să considerăm matricea *m* × *n,* A = $\left[a_{ij}\right]$ şi λ un scalar (real sau complex). În cazul în care *A* este înmulţit cu λ, şi se scrie λA, fiecare element din A este înmulţit cu λ pentru a obţine matrice *m* × *n,*

$$\lambda A = \left[\lambda a_{ij}\right].$$

Ex. Pentru λ =2 şi $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix},\ \lambda A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

Înmulţirea matricelor. Este important să observaţi că, atunci când produsul AB este definit, produsul BA este în general diferit sau poate să nici nu fie definit.

Se pot înmulţi matrice de tip *m*x*n* cu matrice *n*x*p,* iar rezultatul este o matrice de tip *m*x*p.*

Ex. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$. Rezultatul este

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot2+2\cdot3\\ (-1)\cdot1+4\cdot2+5\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 22\end{pmatrix}.$$

Tema 1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Determinaţi care înmulţiri pot fi efectuate şi în acest caz calculaţi: AB, BA, AC, CA, ABC, CAB, AD, DA, CD, DC, ACD, DAC.

Transpusa unei matrice. . Să considerăm matricea *m* × *n,* A = $\left[a_{ij}\right]$. Atunci ***transpusa lui A***, notată de A^T este matricea obţinută schimbând liniile în coloane pentru a produce o matrice *n*x*m,* $A^T=\left[a_{ji}\right]$.

Ex. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Determinantul unei matrice. Fiecare matrice pătratică, are ca element asociat un singur număr determinant al lui *A*. Dacă *A* este o *n* ×*n* matrice, determinantul lui A este indicat prin afişarea elementelor lui A între două bare verticale, după cum urmează:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Ex. Determinant de ordinul 2. $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -4\end{vmatrix}=1\cdot(-4)-2\cdot 5=-14$.

Determinant de ordinul 3

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 6\end{vmatrix}=1\cdot 3\cdot 6+2\cdot 2\cdot 1+(-1)\cdot 0\cdot 4-1\cdot 3\cdot(-1)-4\cdot 2\cdot 1-6\cdot 0\cdot 2=18+4+3-8=17$$

$$\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{matrix}$$

Rangul unei matrice. Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă. Spunem că matricea *A* are ***rangul*** r şi notăm $rang\ A=r$, dacă *A* are un minor nenul de ordin *r*, iar toţi minorii lui *A* de ordin mai mare decât *r* (dacă există) sunt nuli.

Aplicaţie. Calculaţi rangul matricelor

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Inversa unei matrice.Dacă $\det A\neq 0$, atunci A este inversabilă şi $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^{*}$.

Ex. Calculaţi inversa matricei $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$, deci A este inversabilă.
- $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Complemenţii algebrici
  $\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1 \quad \delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$
  $\delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3 \quad \delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$
- $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Aplicaţie. Calculaţi inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Aplicaţie la spaţii vectoriale. Fie B={ $e_1 = (-1,1), e_2 = (2,3)$ } şi B'={ $f_1 = (1,3), f_2 = (3,8)$ }.

a) Să se verifice dacă sistemele de vectori B şi B' formează baze.
b) Să se găsească matricea de trecere din baza B în baza B'.
c) Dacă $x_{[B']} = (2,1)$, găsiţi coordonatele lui *x* în baza B.
d) Dacă $x_{[B]} = (-1,0)$, găsiţi coordonatele lui *x* în baza B'.

Sisteme de ecuaţii liniare

Forma generală a unui sistem de *m* ecuaţii liniare cu *n* necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

unde:

- $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt *necunoscutele sistemului,*

- numerele a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ sunt *coeficienţii necunoscutelor,*
- $b_1, b_2, \dots b_m$ sunt *termenii liberi* ai sistemului.

Unui sistem liniar îi asociem următoarele matrice:

- $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matricea sistemului,
- $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ matricea termenilor liberi.
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ matricea necunoscutelor,
- $\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ matricea extinsă a sistemului care se obţine adăugând la matricea A coloana termenilor liberi.

Definiţia 1. Se numeşte ***soluţie a sistemului de ecuaţii liniare*** un sistem ordonat de n numere $(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)^t$ astfel încât înlocuind necunoscutele $x_1, x_2 \dots, x_n$ respectiv prin $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$ este verificată fiecare din ecuaţiile sistemului.

Definiţia 2. Un sistem este

- ***compatibil*** dacă are cel puţin o soluţie,
- ***compatibil determinat*** dacă are soluţie unică,
- ***compatibil nedeterminat*** dacă are o infinitate de soluţii,
- ***incompatibil*** dacă nu are soluţii.

Metode de rezolvare a sistemelor liniare.

1) Metoda lui Cramer permite rezolvarea sistemelor liniare de n ecuaţii cu n necunoscute având determinantul asociat matricei sistemului nenul.

Teorema 1. Dacă sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.2}$$

are determinantul Δ nenul, atunci soluţia sa utilizând metoda lui Cramer este $(x_1,\ldots,x_n)$, unde $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$, $i=\overline{1,n}$, Δx_i, $i=\overline{1,n}$ fiind determinantul obţinut din Δ prin înlocuirea coloanei corespunzătoare coeficienţilor necunoscutei x_i, $i=\overline{1,n}$ cu coloana termenilor liberi, adică

$$\Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) Metodă de rezolvare a sistemelor liniare de m ecuaţii cu n necunoscute.

1) Se determină $\operatorname{rang} A$.

2) Se alege un minor principal $\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$.

3) Se precizează: necunoscutele principale $x_1,\ldots,x_r$ şi secundare $x_{r+1}, x_{r+2} \ldots, x_n$ şi de asemenea ecuaţiile principale (ecuaţiile $1, 2 \ldots, r$) şi ecuaţiile secundare (celelalte $m-r$ ecuaţii). Dacă există ecuaţii secundare se calculează minorii caracteristici (minorul obţinut din minorul principal, prin bordarea acestuia cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi şi câte una din liniile rămase); numărul minorilor caracteristici este egal cu numărul ecuaţiilor secundare şi este egal cu $m-r$.

4) Se stabileşte dacă sistemul (1.1) este compatibil.

Teorema 2. (Teorema lui Rouche) Un sistem de ecuaţii este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Teorema 3. (Teorema Kronecker – Capelli). Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul să fie compatibil este ca $\mathbf{rang}A = \mathbf{rang}\tilde{A}$.

5) Dacă sistemul este compatibil soluţia sa se obţine prin rezolvarea sistemului principal format din ecuaţiile rezultate trecând în membrul drept termenii care conţin necunoscutele secundare şi atribuind acestor necunoscute secundare valori arbitrare):
   - dacă numărul necunoscutelor secundare este 0 sistemul este compatibil determinat;
   - dacă există necunoscute secundare, sistemul este compatibil nedeterminat; numărul necunoscutelor secundare arată gradul de nedeterminare.

3) Metoda transformărilor elementare (Metoda eliminării a lui Gauss)

Metoda transformărilor elementare este de fapt procedeul de reducere a necunoscutelor, scris, eventual, sub formă matriceală. În cazul sistemelor de două ecuaţii cu două necunoscute, această metodă este de fapt metoda reducerii.

Există 3 tipuri de transformări elementare

- Schimbarea a două ecuaţii;
- Înmulţirea unei ecuaţii cu un scalar nenul;
- Adunarea unei ecuaţii înmulţite cu un scalar la o altă ecuaţie.

Exemplul 1. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ -x+y=5 \end{cases}$.

Sistemul	Matricea extinsă şi transformările elementare
$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ -x+y=5 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$\Big\downarrow L_2+\frac{1}{2}L_1$$

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ \frac{5}{2}y=7 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & | & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+\frac{42}{5}=4 \\ y=\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-\frac{22}{5} \\ y=\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{11}{5} \\ y=\frac{14}{5} \end{cases}$$

Exemplul 2. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x-3y+z=3 \\ -x+y+2z=2 \\ 3x+2y-z=1 \end{cases}$**.**

Soluţie.

$$\begin{cases} x-3y+z=3 \\ -x+y+2z=2 \\ 3x+2y-z=1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 3 \\ -1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 3 & 2 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \begin{matrix} L_2+L_1 \\ L_3-3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-3y+z=3 \\ \quad -2y+3z=5 \\ \quad 11y-4z=-8 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 11 & -4 & | & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow L_3+\frac{11}{2}L_2$$

$$\begin{cases} x-3y+z=3 \\ -2y+3z=5 \\ \dfrac{25}{2}z=\dfrac{39}{2} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & \dfrac{25}{2} & | & \dfrac{39}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-3y+\dfrac{39}{25}=3 \\ -2y+3\cdot\dfrac{39}{25}=5 \\ z=\dfrac{39}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{24}{25} \\ y=-\dfrac{4}{25} \\ z=\dfrac{39}{25} \end{cases}.$$

Calculul inversei unei matrice prin metoda transformărilor elementare.

Aplicaţie. Să se determine inversele matricelor

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soluţie. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 5 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - \frac{5}{2}\cdot L_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{13}{2} & | & -\dfrac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{2}{13}\cdot L_2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \dfrac{5}{13} & -\dfrac{2}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 3\cdot L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & -\dfrac{2}{13} & \dfrac{6}{13} \\ 0 & 1 & | & \dfrac{5}{13} & -\dfrac{2}{13} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}\cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\dfrac{1}{13} & \dfrac{3}{13} \\ 0 & 1 & | & \dfrac{5}{13} & -\dfrac{2}{13} \end{pmatrix}$$

Deci $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{13} & \dfrac{3}{13} \\ \dfrac{5}{13} & -\dfrac{2}{13} \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \frac{3}{2}L_1]{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & | & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2}$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{2}{5} \cdot L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & | & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + \frac{7}{5} \cdot L_3}$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{8}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{8}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2} \cdot L_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{8}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Deci $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculul rangului unei matrice prin metoda transformărilor elementare.

Se efectuează transformări elementare asupra matricei până când toate elementele devin nule cu excepţia unor elemente de pe diagonala principală care devin unu. Rangul matricei este numărul elementelor 1 de pe diagonala principală.

Aplicaţie. Determinaţi rangul matricelor

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluţie.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rang A=2.

b) $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - \frac{2}{3}\cdot L_1} \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{3}\cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 4C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rang A=1.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + \frac{5}{3}\cdot L_2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{20}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to \left(-\frac{3}{20}\right)\cdot L_3]{L_2 \to \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 2C_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - \frac{7}{3}C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 3.$$

În practică, pentru rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare, procedăm astfel: se efectuează transformări elementare asupra matricei extinse până când toate elementele de sub diagonala principală devin nule.

Pe parcursul algoritmului pot apărea următoarele situaţii:

- coeficienţii unei ecuaţii devin toţi nuli, iar termenul liber corespunzător este nenul, caz în care sistemul este incompatibil;
- coeficienţii unei ecuaţii sunt toţi nuli şi termenul liber corespunzător este nul, atunci ecuaţia respectivă este consecinţă a celorlalte (deci inutilă).

Metoda transformărilor elementare constă în reducerea sistemului (1.2) la un sistem mai simplu, urmând paşii

Pasul 1. Se schimbă ecuaţiile între ele astfel încât prima necunoscută x_1 are coeficientul nenul în prima ecuaţie, adică $a_{11} \neq 0$.

Pasul 2. Pentru fiecare i>1, se aplică operaţia

$$L_i \to -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i$$

Adică se înlocuieşte ecuaţia *i* cu ecuaţia obţinută din înmulţirea primei ecuaţii cu $-a_{i1}$, înmulţirea celei de a *i* ecuaţii cu a_{11} şi adunarea acestora.

Se obţine asfel o formă echivalentă a sistemului (i.e. are aceeaşi soluţie)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{2j_2}x_{j_2} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a'_{mj_2}x_{j_2} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

x_{j_2} este prima necunoscută cu coeficient nenul dintr-o altă ecuaţie în afară de prima. Se continuă procedeul până când se ajunge la forma echivalentă

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2j_2}x_{j_2} + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{1.3}$$

Am notat coeficienţii cu aceleaşi litere ca în sistemul (1.2), dar în mod evident ei reprezintă alţi scalari.

Aplicaţia 1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$.

Soluţie.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 3 & 6 & | & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece ultima linie este numai cu zerouri, înseamnă că ecuaţia corespunzătoare este inutilă. În acest caz, r=1<2=n, deci sistemul este compatibil nedeterminat cu 2-1=1 necunoscute secundare. Fie aceasta y. Atunci soluţia sistemului are forma

$$\{(3-2y, y), y \in \mathbb{R}\}.$$

Aplicaţia 2. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} -x+2y=4 \\ -3x+6y=9 \end{cases}$.

Soluţie.

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 2 & | & 4 \\ -3 & 6 & | & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2-3L_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & -3 \end{array}\right)$$

Sistemul este incompatibil.

Aplicaţia 3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x+y-2z+3w=1 \\ 3x+2y-z+2w=4 \\ 3x+3y+3z-3w=5 \end{cases}$.

Soluţie.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & | & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & | & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\to-3L_1+2L_3]{L_2\to-3L_1+2L_2} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & | & 5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 & | & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\to-3L_2+L_3} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -8 \end{array}\right).$$ Sistemul este deci incompatibil.

Aplicaţia 4. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 2x+6y+2z=22 \end{cases}$.

Soluţie.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 1 & 3 & 1 & | & 11 \\ 2 & 5 & -4 & | & 13 \\ 2 & 6 & 2 & | & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\to-2L_1+L_4]{\substack{L_2\to-L_1+L_2 \\ L_3\to-2L_1+L_3}} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 2 & 8 & | & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4\to-2L_2+L_4]{L_3\to L_2-L_3} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 4 & | & 7 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right).$$

Deci, sistemul este echivalent cu $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ \quad\quad y+4z=7 \\ \quad\quad\quad 2z=2 \end{cases}$. Din ultima ecuaţie, aflăm z=1. Înlocuind în a doua ecuaţie, se obţine y=3, iar apoi, din prima ecuaţie x=1. Deci, sistemul are soluţie unică, iar soluţia sistemului este $\{(1,3,1)\}$.

Aplicaţia 5. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+2y-2z+3w=2 \\ 2x+4y-3z+4w=5 \\ 5x+10y-8z+11w=12 \end{cases}$.

Soluţie.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to -5L_1+L_3]{L_2 \to -2L_1+L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to -2L_2+L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Deci r=2<4=n. Avem 4-2=2 necunoscute secundare. Sistemul are forma echivalentă

$$\begin{cases} x+2y-2z+3w=2 \\ \quad\quad\quad\quad z-2w=1 \end{cases}.$$

Soluţia sistemului este $\{(4-2y+w, y, 1+2w, w), y, w \in \mathbb{R}\}$.

Interpretare geometrică. Pentru un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

pot apărea trei situaţii

a) Sistemul este incompatibil;
b) Sistemul are soluţie unică;

c) Sistemul este compatibil nedeterminat.

Reprezentarea grafică în plan a unei ecuaţii de forma $ax+by=c$ este o dreaptă. Interpretarea geometrică a situaţiilor de mai sus este

a) Cele două drepte sunt paralele;
b) Cele două drepte se intersectează într-un singur punct;
c) Cele două drepte coincid.

Temă. Să se rezolve sistemele

a) $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y-4z=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+3y-2z=14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-3y+4z-2w=5 \\ \quad 2y+5z+w \quad =2 \\ \quad y-3z \qquad\quad =4 \end{cases}$.

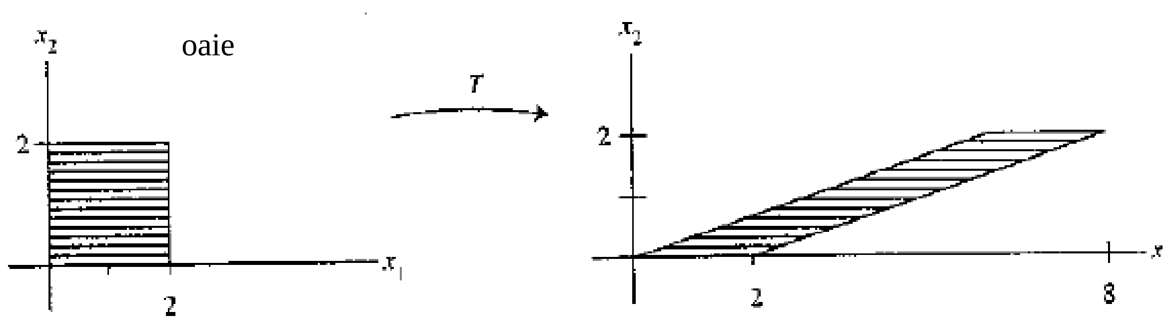
Cursul 5

Aplicaţii liniare

Definiţia1. Fie V/K şi W/K două spaţii vectoriale. O **aplicaţie** (funcţie) sau **transformare** (termenul ingineresc) $T : V \to W$ se numeşte **liniară** dacă:
a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, $\forall x, y \in V$ (**aditivă**);
b) $T(\alpha \cdot x) = \alpha T(x)$, $\forall x \in V$ şi $\forall \alpha \in K$ (**omogenă**).

Aplicaţii (transformări) liniare apar şi în fizică.
Propoziţia 1. $T : V \to W$ este operator liniar dacă şi numai dacă $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\, x, y \in V$, $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.
Demonstraţie. “$\Rightarrow$” $T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.
“$\Leftarrow$” Considerând $\alpha = \beta = 1$ în $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ se obţine proprietatea a) din definiţia funcţiei liniare. Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar şi $\beta = 0$ se obţine b).

Exemplu.



Proprietăţi
1. $T(0_V) = T(0 \cdot x) = 0 \cdot T(x) = 0_W$.
2. $T(-x) = T((-1) \cdot x) = (-1)T(x) = -T(x)$.
3. $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i)$. Se demonstrează prin inducţie matematică.
4. Dacă T este bijecţie, atunci T^{-1} este operator liniar.

Definiţia 2. O aplicaţie liniară $T : V \to V$ se numeşte **endomorfism**.
Notăm cu $L(V, W)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare definite pe V cu valori în W şi cu $L(V)$ mulţimea endomorfismelor pe V.

Definiţia 3. O aplicaţie liniară $T : V \to K$ se mai numeşte **funcţională** liniară.
Observaţie. L(V, W) este spaţiu vectorial în raport cu adunarea funcţiilor şi cu înmulţirea cu numere (scalari).
Exemple. 1. Fie $T : R^2 \to R^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_2, x_1 - x_2)$. Verificaţi dacă T este aplicaţie liniară.
Soluţie. $T(x+y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2), x_2 + y_2, (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) =$
$= (x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2, x_2 + y_2, x_1 - x_2 + y_1 - y_2)$
$T(x) + T(y) = (x_1 + 2x_2, x_2, x_1 - x_2) + (y_1 + 2y_2, y_2, y_1 - y_2) =$
$= (x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2, x_2 + y_2, x_1 - x_2 + y_1 - y_2)$
Rezultă că $T(x+y) = T(x) + T(y)$. (1)
$T(\alpha x) = T(\alpha(x_1, x_2)) = T(\alpha x_1, \alpha x_2) = (\alpha x_1 + 2\alpha x_2, \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_2)$.
$\alpha T(x) = \alpha T(x_1, x_2) = \alpha \cdot (x_1 + 2x_2, x_2, x_1 - x_2) = (\alpha x_1 + 2\alpha x_2, \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_2)$.
Rezultă că $T(\alpha x) = \alpha T(x)$. (2)
Din (1) şi (2) rezultă că T este aplicaţie liniară.
2. Verificaţi dacă $T : R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, -x_2 + x_3)$ este aplicaţie liniară.
3. Fie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proiecţia pe planul (xOy), $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. Verificăm că F este liniară.
Fie $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ şi $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Atunci
$F(v_1 + v_2) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) = (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) =$
$= F(v_1) + F(v_2)$.
Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $v = (x, y, z)$,
$F(\alpha v) = F(\alpha x, \alpha y, \alpha y) = (\alpha x, \alpha y, 0) = \alpha(x, y, 0) = \alpha F(x, y, z)$.

Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare

Definiţia 4. Se numeşte ***nucleul*** aplicaţiei liniare $T : V \to W$, notat ***Ker T***, mulţimea elementelor lui V care prin T trec în $0 \in W$

$$Ker\ T = \{v \in V / T(v) = 0_W\}.$$

Se numeşte ***imaginea*** aplicaţiei liniare $T : V \to W$, notată ***Im T***, mulţimea valorilor din W

$$\mathrm{Im}\, T = \{u \in W / \exists v \in V, T(v) = u\}.$$

Teorema 1. Fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci imaginea lui T este un subspaţiu al lui W, iar nucleul lui T este subspaţiu al lui V.
Aplicaţie. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară definită prin

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z).$$

Găsiţi o bază şi dimensiunea lui
a) Im T;
b) $Ker\ T$.

Soluţie.

a) Imaginea generatorilor lui $\mathbb{R}^3$ generează imaginea lui *T*.

$T(1,0,0)=(1,0,1)$, $T(0,1,0)=(2,1,1)$, $T(0,0,1)=(-1,1,-2)$. Formăm matricea care conţine pe coloane aceşti vectori şi îi detreminăm rangul.

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3-L_1}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\to L_3+L_2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\to C_3+C_1]{C_2\to C_2-2C_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{C_3\to C_3-C_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Deci rangul este 2, adică dim Im *T*=2, iar o bază a lui Im*T* este formată din $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ sau $\{(1,0,1),(2,1,1)\}$.

b) Căutăm (x,y,z) astfel încât $T(x,y,z)=0$, adică

$$T(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)=(0,0,0)\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&1&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\to L_3-L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&1&1&0\\0&-1&-1&0\end{array}\right)$$

$\xrightarrow{L_3\to L_3-L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$. Adică $\begin{cases}x+2y-z=0\\ y+z=0\end{cases}$. Singura variabilă liberă (secundară) este *z*, deci dim *Ker* T=1. O bază se obţine considerând, de exemplu, $z=1$. Atunci $y=-1, x=3$. Deci o bază a lui *Ker* T este $\{(3,-1,1)\}$.

Propoziţia 2. Fie $T:V\to W$ o aplicaţie liniară. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) *T* este injectivă;
2) *Ker T* = $\{0_V\}$;
3) *T* transformă orice mulţime de vectori liniar independenţi într-o mulţime de vectori liniar independenţi.

Propoziţia 3. O aplicaţie liniară $T:V\to W$ este surjectivă dacă transformă orice sistem de generatori ai lui *V* într-un sistem de generatori ai lui *W*.

Definiţia 5. O aplicaţie liniară bijectivă $T:V\to W$ se numeşte ***izomorfism***.
Spaţiile *V* şi *W* se numesc ***izomorfe*** dacă există un izomorfism $T:V\to W$.
Un endomorfism bijectiv $T:V\to V$ se numeşte ***automorfism***.

Teorema 2. Orice *K*-spaţiu vectorial de dimensiune *n* este izomorf cu K^n.

Corolarul 1. Orice două spaţii vectoriale peste corpul *K*, finit-dimensionale, care au aceeaşi dimensiune sunt izomorfe.

Observaţie. a) $V_3\simeq\mathbb{R}^3$;

b) Spaţiul polinoamelor $\mathbb{R}_n[X]\simeq\mathbb{R}^{n+1}$;

c) Spaţiul matricelor $M_{m,n}(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{mn}$.

Definiţia 6. Fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară.

- Se numeşte ***defectul*** lui T dimensiunea nucleului lui T.
- Se numeşte ***rangul*** lui T dimensiunea imaginii lui T.

Teorema 3. (teorema rangului) Fie V şi W spaţii finit dimensionale peste corpul K şi $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci

$$\dim V = defect(T) + rang(T).$$

Matricea asociată unei aplicaţii liniare în raport cu două baze

Definiţie. Fie $T : V \to W$, $T \in L(V, W)$, cu $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază a spaţiului vectorial V, $B' = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset W$ o bază a spaţiului vectorial W. Matricea $A_T = (a_{ij})_{m,n}$ construită astfel încât pe coloane sunt coordonatele vectorilor $T(e_1)$, $T(e_2), \ldots, T(e_n)$ în baza B' se numeşte ***matricea asociată lui T în raport cu bazele B şi B'.***

Exemplu. Fie $T : R^2 \to R^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_2, x_1 - x_2)$. Scrieţi matricea asociată lui T în bazele canonice.

Soluţie.

Baza canonică din R^2 este $B = \{(1,0), (0,1)\}$.

Baza canonică din R^3 este $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

$T(1,0) = (1,0,1) = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$

$T(0,1) = (2,1,-1) = 2 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) - 1 \cdot (0,0,1)$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 4. Fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară cu $\dim V = n$, $\dim W = m$. Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază a spaţiului vectorial V, $B' = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset W$ o bază a spaţiului vectorial W, iar $A_T = (a_{ij})_{m,n}$ matricea asociată lui T în raport cu aceste baze. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt coordonatele unui vector x din V, iar $y_1, \ldots, y_m$ sunt coordonatele vectorului $T(x)$ din W, atunci

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Legătura între operaţiile cu aplicaţii liniare şi matricele asociate.

Fie $T, T_1, T_2 \in L(V, W)$. Atunci

a) $(T_1 + T_2)(x) = (A_{T_1} + A_{T_2})x$; (adunarea aplicaţiilor)

b) $(\alpha T)(x)=(\alpha A_T)x$; (înmulţirea cu scalari)

c) Compunerea aplicaţiilor. Dacă $T_1 \in L(U,V), T_2 \in L(V,W)$, atunci $T_2 \circ T_1 \in L(U,W)$ şi $A_{T_2 \circ T_1} = A_{T_2} \cdot A_{T_1}$.

d) Inversarea aplicaţiilor. Dacă $T \in L(V,W)$ este bijectivă, atunci $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$.

Modificarea matricei unei aplicaţii la schimbarea bazei.

Teorema 5. Fie *V* şi *W* două spaţii vectoriale finit dimensionale peste corpul *K*. Fie *E* şi *G* două baze în *V* şi *F* şi *H* două baze în *W*. Fie *C* matricea de trecere de la baza *E* la baza *G*, iar *D* matricea de trecere de la baza *F* la baza *H*. Dacă $T \in L(V,W)$, notăm cu A_T matricea asociată lui *T* în raport cu bazele *E* şi *F* şi cu B_T matricea asociată lui *T* în raport cu bazele *G* şi *H*. Atunci $B_T = D^{-1}A_T C$.

Aplicaţii. 1. Fie $T: R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (3x_1+2x_2+x_3, 2x_1-x_2+x_3, x_1-x_2+2x_3)$. Scrieţi matricea asociată lui T în bazele canonice.

2. Fie $T: R^3 \to R^3$, $T(x_1,x_2,x_3) = (5x_1+2x_2+x_3, 2x_1-x_2+2x_3, x_1-x_2+x_3)$. Scrieţi matricea asociată lui T în bazele canonice.

3. Fie $T: R^2 \to R^2$, $T(x_1,x_2) = (2x_1-3x_2, 2x_1-x_2)$. Scrieţi matricea asociată lui T în bazele $B=\{(1,2),(0,1)\}$ şi $B'=\{(2,3),(-1,2)\}$.

4. Fie $T: R^3 \to R^2$, $T(x_1,x_2,x_3) = (-2x_1+2x_2+x_3, x_1-x_2+2x_3)$. Scrieţi matricea asociată lui T în bazele $B=\{(1,0,2),(-1,4,0),(0,1,0)\}$ şi $B'=\{(1,1),(2,1)\}$.

Cursul 6

Valori şi vectori proprii pentru endomorfisme

Polinoame de matrice şi de endomorfisme

Considerăm un polinom $f(t)$ peste un corp *K*, $f(t)=a_n t^n+\ldots+a_1 t+a_0$. Dacă *A* este o matrice pătratică peste corpul *K*, definim

$$f(A)=a_n A^n+\ldots+a_1 A+a_0 I_n,$$

unde I_n este matricea unitate. Spunem că A este ***rădăcină*** a polinomului $f(t)$ dacă $f(A)=0_n$.

Exemplul 1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ şi fie $f(t)=2t^2-3t+7$ şi $g(t)=t^2-5t-2$. Atunci $f(A)=2A^2-3A+7I_2=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 14\\ 21 & 39\end{pmatrix}$ şi

$g(A)=A^2-5A-2I_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Deci A este rădăcină a lui $g(t)$.

Să considerăm $T:V\to V$ o aplicaţie liniară pe spaţiul vectorial V peste *K*. Dacă $f(t)=a_n t^n+\ldots+a_1 t+a_0$, atunci definim $f(T)=a_n T^n+\ldots+a_1 T+a_0 I$, unde I este aplicaţia identitate. Spunem că *T* este ***rădăcină*** a polinomului $f(T)$ dacă $f(T)=0$.

Dacă A este reprezentarea matriceală a lui T, atunci $f(A)$ este reprezentarea matriceală a lui $f(T)$. În particular, $f(T)=0$ dacă şi numai dacă $f(A)=0$.

Definiţii. Proprietăţi

Definiţia 1.

- Fie $T: V\to V$, T endomorfism (transformare liniară).

Un scalar $\lambda\in K$, se numeşte ***valoare proprie*** pentru T dacă există $v\in V$, $v\neq 0_V$, astfel încât

$$T(v)=\lambda \cdot v.$$

- Vectorul v se numeşte ***vector propriu*** al endomorfismului T.
- Mulţimea tuturor vectorilor proprii este un subspaţiu al lui V, numit ***subspaţiu propriu asociat valorii proprii*** λ,

$$V_\lambda = \{ v \in V \,/\, T(v) = \lambda v \}.$$

Definiţia 2. Fie *V/K* spaţiu vectorial, $S \subseteq V$ un subspaţiu vectorial şi $T : V \to V$ un endomorfism. Subspaţiul *S* se numeşte ***subspaţiu invariant în raport cu T*** dacă $T(S) \subseteq S$, unde $T(S) = \{ T(x) \mid x \in S \}$.

Observaţie. Dacă λ este valoare proprie a endomorfismului *T*, atunci mulţimea tuturor vectorilor proprii corespunzători lui λ la care adăugăm şi vectorul nul, notată cu V_λ este un subspaţiu vectorial invariant în raport cu *T*.

Dimensiunea acestui subspaţiu vectorial se numeşte ***multiplicitatea geometrică*** a valorii proprii λ şi o vom nota r_λ.

Aplicaţia 1. Găsiţi valorile şi vectorii proprii ai matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Căutăm un scalar λ şi un vector nenul $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ astfel încât $Av = \lambda v$. Adică $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ecuaţia matriceală este echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 3x + 2y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 0 \\ -3x + (\lambda - 2)y = 0 \end{cases}. \qquad (1.1)$$

Sistemul omogen are soluţii nenule dacă şi numai dacă determinantul matricei coeficienţilor este 0.

$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Astfel, valorile proprii sunt $\lambda_1 = 4$ şi $\lambda_2 = -1$.

Înlocuind pe $\lambda_1 = 4$ în (1.1), obţinem $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 0$ $\Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}y$. Putem alege $y = 3$. Astfel, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ este un vector propriu nenul pentru valoarea proprie $\lambda_1 = 4$.

Înlocuind pe $\lambda_2 = -1$ în (1.1), obţinem $\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$. Putem alege $y = -1$. Astfel, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ este un vector propriu nenul pentru valoarea proprie $\lambda_2 = -1$.

Teorema 1. Fie $T : V \to V$ o aplicaţie liniară definită pe spaţiul vectorial V peste corpul K. Atunci $\lambda \in K$ este o valoare proprie a lui T dacă şi numai dacă aplicaţia $\lambda I - T$ este singulară. Spaţiul vectorilor proprii pentru λ este nucleul lui $\lambda I - T$.

Teorema 2. Vectorii proprii corepunzători valorilor proprii distincte sunt liniar independenţi.

Diagonalizare şi vectori proprii

Fie $T : V \to V$ o aplicaţie liniară pe un spaţiu vectorial V cu dimensiune finită n. T poate fi reprezentată printr-o matrice diagonală $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ dacă şi numai dacă există baza $\{v_1, \dots, v_n\}$ din V pentru care

$$\begin{array}{lcllll} T(v_1) & = & \lambda_1 v_1 & & & \\ T(v_2) & = & & \lambda_2 v_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T(v_n) & = & & & & \lambda_n v_n \end{array}$$

astfel încât vectorii $\{v_1, \dots, v_n\}$ sunt vectorii proprii ai lui T corespunzători valorilor proprii $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Teorema 3. Un endomorfism $T : V \to V$ poate fi reprezentat printr-o matrice diagonală B dacă şi numai dacă V are o bază constând în vectori proprii ai lui T. În acest caz elementele diagonale ale lui B sunt valorile proprii corespunzătoare.

În teorema anterioară, dacă considerăm P matricea ale cărei coloane sunt cei n vectori proprii liniar independenţi ai lui A, atunci $B = P^{-1}AP$.

Aplicaţia 2. Să considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. În Aplicaţia 1 am văzut că doi vectori proprii liniar independenţi sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Atunci $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, iar

$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$. Atunci A este similară cu matricea diagonală

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elementele de pe diagonala principală a matricei B, 4 şi -1 sunt valorile proprii.

Polinomul caracteristic

Să considerăm o matrice pătratică $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Matricea $A - \lambda I_n$, unde I_n este matricea unitate de ordinul n se numeşte matricea caracteristică a lui A şi are forma

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Determinantul ei,

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

este un polinom în λ, care se numeşte polinomul caracteristic al lui A.

$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$ se numeşte ecuaţia caracteristică a lui A.

Exemplul 4. Polinomul caracteristic pentru matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$ este

$$\Delta_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & 0\\ -2 & 2-\lambda & -1\\ 4 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-28.$$

Teorema 4 (Cayley – Hamilton). Orice matrice este o rădăcină a polinomului său caracteristic.

Exemplul 5. Polinomul caracteristic al matricei $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ este

$$\Delta_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4.$$

Aşa cum era de aşteptat conform teoremei Cayley-Hamilton, *A* este rădăcină a acestui polinom.

$$\Delta(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Teorema următoare indică un procedeu efectiv de determinare a valorilor şi vectorilor proprii.

Teorema 5. Fie *A* o matrice pătratică de dimensiune *n* peste corpul *K*. Un scalar $\lambda\in K$ este valoare proprie a lui *A* dacă şi numai dacă λ este rădăcină a polinomului caracteristic al lui *A*.

Teorema 6. Fie *V/K* spaţiu vectorial, $T: V\to V$, *T* endomorfism, $\dim V = n$. Atunci *T* are cel puţin o valoare proprie şi vector propriu.

Aplicaţia 3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

a) Găsiţi valorile şi vectorii proprii corespunzători.
b) Găsiţi o matrice inversabilă P astfel încât $P^{-1}AP$ sa aibă forma diagonală.

Soluţie. a) $A-\lambda I_2=\begin{pmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $\lambda^2-4\lambda-5$, care are rădăcinile 5 şi -1. Acestea sunt valorile proprii ale lui *A*. Calculăm acum vectorii proprii.

I. Pentru $\lambda_1 = 5$, matricea $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Vectorii proprii îi determinăm rezolvând sistemul $(A - \lambda I_2)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, i.e. $\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow V_{\lambda=5} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Un vector propriu corespunzător lui $\lambda_1 = 5$ este $(1,1)$.

II. Pentru $\lambda_2 = -1$, matricea $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Vectorii proprii îi determinăm rezolvând sistemul $(A - \lambda I_2)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, i.e. $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow V_{\lambda=-1} = \{(-2y, y), y \in \mathbb{R}\}$. Un vector propriu corespunzător lui $\lambda_2 = -1$ este, de exemplu $(2,-1)$.

b) Fie P matricea ale cărei coloane sunt date de vectorii proprii $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Atunci

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teorema 7. Criteriul general de diagonalizare. Un endomorfism este diagonalizabil dacă şi numai dacă

- *T* are *n* vectori proprii liniar independenţi;
- Polinomul caracteristic are toate rădăcinile în *K*, iar multiplicitatea geometrică a fiecărei valori proprii este egală cu multiplicitatea sa algebrică.

Aplicaţia 4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Găsiţi valorile şi vectorii proprii corespunzători.
b) Poate fi matricea A diagonalizată? De ce?

Soluţie. a) Polinomul caracteristic este $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^2(\lambda-4)$, care are rădăcinile -2 şi 4. Deci valorile proprii sunt -2 şi 4. Multiplicitatea algebrică a lui -2 este 2, iar multiplicitatea algebrică a lui 4 este 1.

I. Găsim acum o bază a subspaţiului propriu al lui -2.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3y+3z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ 6x-6y+6z=0 \end{cases} \Rightarrow x-y+z=0$$

$$\Rightarrow x = y-z \Rightarrow V_{-2} = \{(y-z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Multiplicitatea geometrică a lui $\lambda_1 = -2$ este 2 şi este egală cu multiplicitatea algebrică. O bază a acestui spaţiu este

$$\{(1,1,0),(1,0,-1)\}.$$

II. Găsim acum o bază a subspaţiului propriu al valorii proprii $\lambda_2 = 4$.

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x-3y+3z=0 \\ 3x-9y+3z=0 \\ 6x-6y \qquad =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ \quad 2y-z=0 \end{cases}.$$

Sistemul are doar o variabilă secundară $\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow V_4 = \{(y, y, 2y), y \in \mathbb{R}\}$.

Multiplicitatea geometrică a lui $\lambda_2 = 4$ este 1 şi este egală cu multiplicitatea algebrică. O bază a acestui spaţiu este

$$\{(1,1,2)\}.$$

b) Pentru fiecare din valorile proprii, multiplicitatea algebrică este egală cu cea geometrică, deci matricea este diagonalizabilă, iar $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Atunci $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Aplicaţia 5. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{pmatrix}$.

a) Găsiţi valorile şi vectorii proprii corespunzători matricei *A*.
b) A este diagonalizabilă? De ce?

Soluţie. Polinomul caracteristic este $\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -7 & 5-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)^2(\lambda-4)$, care are rădăcinile -2 şi 4. Deci valorile proprii sunt -2 şi 4. Multiplicitatea algebrică a lui -2 este 2, iar multiplicitatea algebrică a lui 4 este 1.

I. Găsim acum o bază a subspaţiului propriu al lui -2.

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -7 & 7 & -1\\ -6 & 6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x+y-z=0\\ -7x+7y-z=0\\ -6x+6y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y-z=0\\ -x+y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=x\\ z=0\end{cases}\Rightarrow V_{-2}=\{(x,x,0),x\in\mathbb{R}\}.$$

Multiplicitatea geometrică a lui $\lambda_1=-2$ este 1 şi nu este egală cu multiplicitatea algebrică. O bază a acestui spaţiu este

$$\{(1,1,0)\}.$$

II. Găsim acum o bază a subspaţiului propriu al valorii proprii $\lambda_2=4$.

$$\begin{pmatrix}-7 & 1 & -1\\ -7 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-7x+y-z=0\\ -7x+y-z=0\\ -6x+6y-6z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-7x+y-z=0\\ x=0\end{cases}.$$

Sistemul are doar o variabilă secundară $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases} \Rightarrow V_4 = \{(0, y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

Multiplicitatea geometrică a lui $\lambda_2 = 4$ este 1 şi este egală cu multiplicitatea algebrică. O bază a acestui spaţiu este

$$\{(0,1,1)\}.$$

b) Pentru prima valoare proprie, multiplicitatea algebrică nu este egală cu cea geometrică, deci matricea nu este diagonalizabilă.

Aplicaţia 6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Găsiţi valorile şi vectorii proprii corespunzători matricei *A*.
b) A este diagonalizabilă? De ce?
c) Să se calculeze A^{2009}.

Indicaţie. Valorile proprii $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Vectorii proprii (1,1,1), (1,0,3), (0,1,3)

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1} AP, B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}, A^n = PB^nP^{-1}.$$

Temă

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   c) Găsiţi valorile şi vectorii proprii corespunzători.
   d) *A* este diagonalizabilă?
2. Găsiţi valorile şi vectorii proprii ai endomorfismului $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$.
3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Găsiţi valorile şi vectorii proprii corespunzători matricei *A*.
b) A este diagonalizabilă? De ce?

c) Să se calculeze A^{2009}.

Recapitulare

Rezolvarea ecuaţiei de gradul I

$$ax+b=0,\ a\neq 0$$

Soluţie. $ax=-b \Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$.

Exemplul 1. $3x+2=0 \Rightarrow 3x=-2 \ \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.

Exemplul 2. $5(x+1)=2(x-2) \Rightarrow 5x+5=2x-4 \ \Rightarrow 5x-2x=-4-5. \Rightarrow 3x=-9$
$\Rightarrow x=-\dfrac{9}{3}=-3$.

Rezolvarea ecuatiei de gradul al II-lea $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

Soluţie. Se calculează $\Delta=b^2-4ac$

I. Dacă $\Delta\geq 0$, ecuaţia are rădăcini reale, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

II. Dacă $\Delta<0$, ecuaţia are rădăcini complexe nereale, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple. Rezolvaţi ecuaţiile

a) $x^2-3x+2=0$; b) $x^2-5x+6=0$; c) $x^2-4x+4=0$.

Rezolvarea ecuatiei de gradul al III-lea $ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0$**.**

Schema lui Horner. Se caută rădăcini printre divizorii termenului liber *d*.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $x^3-3x^2+x+1=0$.

Soluţie. $D_1=\{\pm 1\}$

	x^3	x^2	x	x^0
	1	-3	1	1
1	1	-2	-1	0

$x_1=1$

$$x^2-2x-1=0$$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)=8$$

$$x_{2,3}=\frac{-(-2)\pm2\sqrt{2}}{2\cdot1}=1\pm\sqrt{2}$$

$$S=\left\{1,1\pm\sqrt{2}\right\}$$

Cursul 7

Spaţii euclidiene.

Produs scalar. Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt. Baze ortonormate

Produs scalar. Spaţii euclidiene. Definiţii. Exemple.

Definiţia1. Fie E un spaţiu vectorial real. Se numeşte ***produs scalar*** pe E o aplicaţie $(x, y) \to \langle x, y\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ dacă:

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\forall\, x, y \in E$.
2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\forall\, x, y, z \in E$.
3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, $\forall\, x,y \in E$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.
4) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall\, x \in E$ şi $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

Definiţia 2. Se numeşte ***spaţiu euclidian*** orice spaţiu vectorial real înzestrat cu un produs scalar.

<u>Proprietăţi</u>: În orice spaţiu euclidian (E,<,>), au loc următoarele proprietăţi:

1) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, $\forall x,y,z \in E$.
2) $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, $\forall x,y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3) $\langle x, 0_E\rangle = 0$, $\forall x \in E$.

Demonstraţie.

1. $< x, y+z > \overset{(1)}{=} < y+z, x > \overset{(2)}{=} < y, x > + < z, x > \overset{(1)}{=} < x, y > + < x, z >$.

2. $< x, \lambda y > \overset{(1)}{=} < \lambda y, x > \overset{(3)}{=} \lambda < y, x > \overset{(1)}{=} \lambda < x, y >$.

3. $< x, O_E > \overset{(1)}{=} < O_E, x > = < O \cdot x, x > \overset{(3)}{=} 0 < x, x > = 0.$

Exemplul 1. Spaţiul vectorilor liberi V_3 înzestrat cu produsul scalar obişnuit $< \vec{x}, \vec{y} > = \vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}\right)$ este spaţiu euclidian.

Exemplul 2. Spaţiul $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu următorul produsul scalar formează spaţiu euclidian

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n .$$

Exemplul 3. Spaţiul $C([a,b])$ al funcţiilor reale continue pe intervalul $[a,b]$ înzestrat cu următorul produs scalar formează spaţiu euclidian

$$< f,g >= \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx, \quad \forall f,g \in C([a,b]). \tag{1.1}$$

Teorema 1. (Cauchy-Buniakovski-Schwartz) Dacă $(E,<,>)$ este un spaţiu euclidian, atunci

$$< x,y >^2 \leq < x,x > \cdot < y,y >, \quad \forall x,y \in E. \tag{1.2}$$

Aplicaţia 1. Fie $V = \mathbb{R}^2$ spaţiu vectorial real, iar $x = (x_1, x_2)$ şi $y = (y_1, y_2)$ doi vectori din acest spaţiu. Să se arate ca aplicaţia $<\cdot,\cdot>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $< x,y >= x_1 y_1 + x_2 y_2$ este produs scalar.

Soluţie. Verificăm axiomele produsului scalar

1) $< x,y >= x_1 y_1 + x_2 y_2$, $< y,x >= y_1 x_1 + y_2 x_2$. Deci $<x, y> = <y, x>$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^2$.
2) $< x+y,z >=< (x_1+y_1, x_2+y_2),(z_1,z_2) >= (x_1+y_1)\cdot z_1 + (x_2+y_2)\cdot z_2 =$
$= x_1 z_1 + y_1 z_1 + x_2 z_2 + y_2 z_2 = (x_1 z_1 + x_2 z_2) + (y_1 z_1 + y_2 z_2) = < x,z > + < y,z >, \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^2$.
3) $< \lambda x, y > = < \lambda(x_1,x_2),(y_1,y_2) >=< (\lambda x_1, \lambda x_2),(y_1,y_2) >=$
$\lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 = \lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2) = \lambda < x,y >, \forall\ x \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4) $< x,x >= x_1^2 + x_2^2 \geq 0, \forall\ x \in \mathbb{R}^2$ şi
$< x,x > = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Norma. Spaţii normate. Definiţii. Exemple.

Definiţia 3. Se numeşte ***norma*** unui vector oarecare din spaţiul vectorial real V aplicaţia $\|\bullet\|: V \to \mathbb{R}$, care îndeplineşte următoarele proprietăţi

1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$ şi $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$;
2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$;
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x,y \in V$ (inegalitatea triunghiului).

Spaţiul V pe care s-a definit o normă se numeşte ***spaţiu vectorial normat***.
Propoziţia 1. Fie E spaţiu euclidian real. Atunci

$$\|x\| = \sqrt{< x,x >} \tag{1.3}$$

este o normă şi se numeşte *norma euclidiană*.

Demonstraţie. Verificăm că $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$ verifică axiomele normei.

1) $\|x\| = \sqrt{< x,x >} \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{< x,x >} = 0 \Leftrightarrow < x,x >= 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;

2) $\|\lambda \cdot x\| = \sqrt{<\lambda x, \lambda x>} = \sqrt{\lambda^2 <x, x>} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{<x, x>} = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E;$

3) $\|x+y\|^2 = <x+y, x+y> = <x, x> + 2<x, y> + <y, y> \leq$

$$\underset{\substack{Cauchy- \\ Buniakovski- \\ Schwartz}}{\leq} \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E.$$

Exemplul 4. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu produsul scalar

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall x = \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n, \forall y = \left(y_1, \ldots, y_n\right) \in \mathbb{R}^n,$$

norma revine la

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1.4}$$

Definiţia 4. Fie E un spaţiu euclidian. Atunci $d\left(x, y\right) = \|x - y\|$ este o **distanţă** (sau metrică).

Definiţia 5. Fie E un spaţiu euclidian, iar $x, y \in E$ doi vectori nenuli. Definim unghiul dintre cei doi vectori:

$$\cos\left(\widehat{x, y}\right) = \frac{<x, y>}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{1.5}$$

Aplicaţia 2. Găsiţi norma vectorului $v = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$ în raport cu produsul scalar uzual (norma euclidiană).

Soluţie. $\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

Aplicaţia 3. Fie V spaţiul vectorial al polinoamelor cu produsul scalar $<f, g> = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$.

Fie $f(t) = t + 2$ şi $g(t) = t^2 - 2t - 3$. Găsiţi

i) $<f, g>$;

ii) $\|f\|$.

Soluţie.

i) $< f, g >= \int_0^1 f(t)\cdot g(t)dt = \int_0^1 (t+2)\cdot(t^2-2t-3)dt = \int_0^1 (t^3-7t-6)dt = \left(\frac{t^4}{4} - 7\frac{t^2}{2} - 6t\right)\Big|_0^1$

$= -\frac{37}{4}$.

ii) $\|f\|^2 =< f, f >= \int_0^1 f(t)\cdot f(t)dt = \int_0^1 (t+2)\cdot(t+2)dt = \frac{19}{3} \Rightarrow \|f\| = \sqrt{\frac{19}{3}}$.

Ortogonalitate. Baze ortogonale.

Definiţia 6. Într-un spaţiu euclidian *E*, doi vectori oarecare $x, y \in E$ se numesc ***ortogonali*** dacă $<x,y>=0$. Pentru ortogonalitate folosim notaţia $x \perp y$.

Teorema 2. Orice sistem finit de vectori nenuli $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dintr-un spaţiu euclidian *E*, ortogonali doi câte doi, este liniar independent.

Definiţia 7. O bază $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a unui spaţiu euclidian *E* se numeşte ***ortogonală*** dacă $e_i \perp e_j$ pentru orice $i \neq j$. Dacă în plus $\|e_i\| = 1, \forall i = \overline{1,n}$, baza se numeşte ***ortonormată***.

În concluzie, o bază este ortonormată dacă şi numai dacă

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & pentru\ i \neq j \\ 1 & pentru\ i = j \end{cases}.$$

Aplicaţia 4. Normalizaţi vectorul $u = (2,1,-1)$ din $\mathbb{R}^3$.

Soluţie. $\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$. Vectorul normalizat este $\frac{1}{\|u\|}\cdot u = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

Teorema 3. În orice spaţiu euclidian *E* finit dimensional există o bază ortonormată.

Demonstraţie. Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui *E*.

I. Se construieşte baza $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ortogonală.

$f_1 = e_1$

$f_2 = e_2 + \alpha_{21} f_1$. Se alege α_{21} astfel încât $< f_1, f_2 >= 0$.

$$< f_1, f_2 >= 0 \Rightarrow < f_1, e_2 > + \alpha_{21} < f_1, f_1 >= 0 \Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{< f_1, e_2 >}{< f_1, f_1 >}.$$

$f_3 = e_3 + \alpha_{31} f_1 + \alpha_{32} f_2$. Se aleg α_{31} şi α_{32} astfel încât $< f_1, f_3 >= 0$ şi $< f_2, f_3 >= 0$.

$< f_1, f_3 >= 0 \Rightarrow < f_1, e_3 > + \alpha_{31} < f_1, f_1 > + \alpha_{32} < f_1, f_2 >= 0$. Dar $< f_1, f_2 >= 0$

$$\Rightarrow \alpha_{31} = -\frac{< f_1, e_3 >}{< f_1, f_1 >}$$

$< f_2, f_3 >= 0 \Rightarrow < f_2, e_3 > + \alpha_{31} < f_2, f_1 > + \alpha_{32} < f_2, f_2 >= 0$. Dar $< f_2, f_1 >= 0$

$$\Rightarrow \alpha_{32} = -\frac{< f_2, e_3 >}{< f_2, f_2 >}.$$

Pentru un element oarecare f_i avem $f_i = e_i + \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \ldots + \alpha_{ik} f_k + \ldots \alpha_{i,i-1} f_{i-1}$ şi impunem condiţiile $< f_i, f_k >= 0 \ \forall\, k = \overline{1, i-1}$, iar de aici rezultă $\Rightarrow \alpha_{ik} = -\dfrac{< f_k, e_i >}{< f_k, f_k >}$.

II. Se normează baza *F* şi se obţine baza ortonormată $B' = \{e'_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

$$e'_1 = \frac{1}{\|f_1\|} \cdot f_1$$

$$e'_2 = \frac{1}{\|f_2\|} \cdot f_2$$

$$\vdots$$

$$e'_i = \frac{1}{\|f_i\|} \cdot f_i$$

$$\vdots$$

$$e'_n = \frac{1}{\|f_n\|} \cdot f_n$$

Demonstrăm acum că aceşti vectori au norma 1. $\|e'_i\| = \left\| \dfrac{1}{\|f_i\|} \cdot f_i \right\| = \dfrac{1}{\|f_i\|} \cdot \|f_i\| = 1, \forall i = \overline{1, n}.$

Aplicaţia 5. Folosind procedeul Gram-Schmidt să se ortonormeze baza B a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^3$

$$B=\{e_1=(1,1,1),e_2=(0,1,1),e_3=(0,0,1)\}.$$

Soluţie.

I. Se construieşte baza $F=\{f_1,f_2,f_3\}$ ortogonală.

$$f_1=e_1=(1,1,1)$$

$$f_2=e_2-\frac{<f_1,e_2>}{<f_1,f_1>}f_1=(0,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(1,1,1)=(0,1,1)-\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

$$f_3=e_3-\frac{<f_1,e_3>}{<f_1,f_1>}f_1-\frac{<f_2,e_3>}{<f_2,f_2>}f_2=(0,0,1)-\frac{1}{3}\cdot(1,1,1)-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\cdot\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=$$

$$(0,0,1)-\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

II. Se normează baza *F* şi se obţine baza ortonormată $B'=\{e'_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

$$e'_1=\frac{1}{\|f_1\|}\cdot f_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$e'_2=\frac{1}{\|f_2\|}\cdot f_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

$$e'_3=\frac{1}{\|f_i\|}\cdot f_i=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Baza ortonormată este $B'=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

Definiţia 8. Fie v şi w doi vectori nenuli. Se numeşte ***proiecţia lui v pe w*** $pr_w v=\frac{<v,w>}{\|w\|^2}\cdot w$.

Aplicaţia 6. Găsiţi proiecţia lui v pe w dacă $v=(1,-1,2)$ şi $w=(0,1,1)$ din $\mathbb{R}^3$.

Soluţie. $pr_w v = \frac{<v,w>}{\|w\|^2} \cdot w = \frac{1}{2} \cdot (0,1,1) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Aplicaţii.

1. Găsiţi cosinusul unghiului dintre vectorii $u=(1,-3,2)$ şi $v=(2,1,5)$ din $\mathbb{R}^3$.
2. Să se ortogonalizeze baza $B=\{e_1=(1,0,2), e_2=(2,1,1), e_3=(0,1,1)\}$.
3. Folosind procedeul Gram-Schmidt să se ortonormeze baza
   a) $B=\{e_1=(1,1,1), e_2=(1,1,-1), e_3=(1,-1,-1)\}$.
   b) $B=\{e_1=(-1,0,2), e_2=(1,-1,-1), e_3=(2,1,0)\}$.
4. Să se verifice dacă $S=\{u_1=(1,1,1), u_2=(1,1,-3), u_3=(5,-4,-1)\}$ este bază ortogonală. Să se determine coordonatele lui $x=(3,4,-2)$ în această bază.
5. Să se calculeze distanţa şi unghiul dintre vectorii $u=(1,2,-3,0), v=(2,4,-3,1)$.

Temă

1. Să se calculeze produsul scalar şi normele vectorilor
   a) $x=(2,1), y=(-6,7)$.
   b) $x=(1,2,1), y=(3,-6,2)$.
   c) $x=(-3,1,2,5), y=(3,0,7,1)$.
2. Folosind procedeul Gram-Schmidt să se ortonormeze baza
   a) $B=\{e_1=(1,-2,2), e_2=(-1,0,-1), e_3=(5,-3,-7)\}$.
   b) $B=\{e_1=(1,0,1), e_2=(0,1,-1), e_3=(1,1,1)\}$.

Diagonalizarea unei matrice

Definiţia 1. Spunem că matricea $A \in M_n(K)$ are ***forma diagonală*** dacă *A* este de forma

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$

unde $d_1, d_2, \dots, d_n \in K$ şi se notează $A = diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Definiţia 2. Două matrice $A, B \in M_n(K)$ se numesc ***asemenea*** dacă există o matrice $C \in M_n(K)$ inversabilă astfel încât $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$.

Definiţia 3. Spunem că $A \in M_n(K)$ este ***diagonalizabilă*** dacă există o matrice diagonală *D* asemenea cu *A*.

Teorema 1. Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenti.

Definiţia 4. Spunem că aplicaţia liniară $T \in L(V)$ este ***diagonalizabilă*** dacă în *V* există o bază relativ la care matricea lui T este o matrice diagonală.

Observaţie. Dacă aplicaţia liniară *T* are *n* valori proprii distincte, atunci există o bază în care matricea sa are o formă diagonală şi pe diagonala principală se găsesc valorile proprii.

Teorema 2. Dacă aplicaţia liniară *T* are şi vectori proprii liniar independenţi, atunci există o bază în care matricea asociată lui *T* are forma diagonală.

Cazul particular al matricelor simetrice

Definiţia 5. O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numeşte ***simetrică*** dacă $A = A^T$.

Teorema 3. 1) Orice matrice reală şi simetrică are toate valorile proprii reale.

2) Vectorii proprii ai unei matrice reale şi simetrice care corespund la valori proprii distincte sunt ortogonali între ei.

Teorema 4. Orice matrice pătratică reală şi simetrică este diagonalizabilă.

Exemplu. Să se diagonalizeze matricea $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Cursul 8

Forme biliniare şi forme pătratice

Forme biliniare

Definiţia 1. Fie $V/\mathbb{R}$ un spaţiu vectorial de dimensiune finită *n*. O ***formă biliniară*** pe *V* este o aplicaţie $F: V \times V \to \mathbb{R}$ care satisface proprietăţile

i. $F(ax+by,z) = aF(x,z) + bF(y,z)$;
ii. $F(x,ay+bz) = aF(x,y) + bF(x,z)$;

pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $x,y,z \in V$.

Condiţia (i) se numeşte liniaritatea în prima variabilă, iar condiţia (ii) se numeşte liniaritatea în cea de-a doua variabilă.

Definiţia 2. F se numeşte ***simetrică*** dacă $F(x,y) = F(y,x), \quad \forall x,y \in V$.

Definiţia 3. a) F este ***pozitiv definită*** dacă

i. $F(x,x) \geq 0 \; \forall x \in V$;
ii. $F(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$.

b) F este ***negativ definită*** dacă

i. $F(x,x) \leq 0 \; \forall x \in V$;
ii. $F(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$.

Aplicaţia 1. Fie $V = \mathbb{R}^2$ şi $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ şi $z = (z_1, z_2)$. Să se arate că funcţia $F(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ este aplicaţie biliniară.

Soluţie. Trebuie să demonstrăm proprietăţile

i. $F(ax+by,z) = aF(x,z) + bF(y,z)$;
ii. $F(x,ay+bz) = aF(x,y) + bF(x,z)$;

i. $F(ax+by,z) = F\left(a(x_1,x_2) + b(y_1,y_2),(z_1,z_2)\right) =$

$F\left((ax_1,ax_2) + (by_1,by_2),(z_1,z_2)\right) = F\left((ax_1+by_1, ax_2+by_2),(z_1,z_2)\right) =$

$$(ax_1+by_1)z_1 + (ax_2+by_2)z_2 = ax_1z_1 + by_1z_1 + ax_2z_2 + by_2z_2. \tag{1.1}$$

$$aF(x,z)+bF(y,z)=a\left(x_1z_1+x_2z_2\right)+b\left(y_1z_1+y_2z_2\right)$$

$$=ax_1z_1+by_1z_1+ax_2z_2+by_2z_2\,. \tag{1.2}$$

Din (1.1) şi (1.2) rezultă că (i) este îndeplinită.

ii. $$F(x,ay+bz)=F\left(\left(x_1,x_2\right),a\left(y_1,y_2\right)+b\left(z_1,z_2\right)\right)=F\left(\left(x_1,x_2\right),\left(ay_1+bz_1,ay_2+bz_2\right)\right)=$$

$$x_1\left(ay_1+bz_1\right)+x_2\left(ay_2+bz_2\right)=ax_1y_1+bx_1z_1+ax_2y_2+bx_2z_2\,. \tag{1.3}$$

$$aF(x,y)+bF(x,z)=a\left(x_1y_1+x_2y_2\right)+b\left(x_1z_1+x_2z_2\right)$$

$$=ax_1y_1+bx_1z_1+ax_2y_2+bx_2z_2\,. \tag{1.4}$$

Din (1.3) şi (1.4) rezultă că (ii) este îndeplinită.

Definiţia 4. Fie $F:V\times V\to\mathbb{R}$ o formă biliniară, $\dim V=n$, $B=\{e_1,\dots e_n\}$ o bază. Matricea $A=\left(a_{ij}\right), a_{ij}=F\left(e_i,e_j\right), \forall i,j=\overline{1,n}$ se numeşte ***matricea asociată lui F în baza B***.

Aplicaţia 2. Fie $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=x_1y_1+x_2y_2$. Să se determine matricea lui F în baza canonică din $\mathbb{R}^2$.

Soluţie. Baza canonică $B=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$

$a_{11}=F\left(e_1,e_1\right)=1$ $\qquad$ $a_{12}=F\left(e_1,e_2\right)=0$

$a_{21}=F\left(e_2,e_1\right)=0$ $\qquad$ $a_{22}=F\left(e_2,e_2\right)=1$

Deci $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Teorema 1. Fie $F:V\times V\to\mathbb{R}$ o formă biliniară, $A=\left(a_{ij}\right), a_{ij}=F\left(e_i,e_j\right), \forall i,j=\overline{1,n}$ matricea asociată lui F în baza $B=\{e_1,\dots e_n\}$. Dacă $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, $y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j$, atunci

$$F\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j \text{ sau } F\left(x,y\right)=X^tAY=\left(x_1 \quad \dots \quad x_n\right)\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

Teorema 2. Forma biliniară $F: V \times V \to \mathbb{R}$ este simetrică dacă şi numai dacă matricea asociată este simetrică ($A = A^t$).

Forme pătratice

Definiţia 5. Fie $F: V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică, unde V un spaţiu vectorial real. Funcţia $Q: V \to \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x, x)$ se numeşte ***formă pătratică*** pe *V* asociată lui *F*.

Teorema 3. Dacă $Q: V \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică asociată formei biliniare simetrice *F*, atunci

$$F(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right],$$

iar $F(x, y)$ se numeşte ***polara formei pătratice Q.***

Demonstraţie. $Q(x+y) = F(x+y, x+y) = F(x, x) + F(x, y) + F(y, x) + F(y, y) =$

$Q(x) + 2F(x, y) + Q(y) \Rightarrow F(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right].$

Definiţia 6. Forma pătratică Q se numeşte ***pozitiv definită*** dacă $Q(x) > 0, \forall x \neq 0_V$ şi se numeşte ***negativ definită*** dacă $Q(x) < 0, \forall x \neq 0_V$. Forma pătratică este ***cu semn nedefinit*** dacă există *x*,*y* astfel ca $Q(x) > 0$ şi $Q(y) < 0$.

Teorema 4. Dacă $Q: V \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică, iar $B = \{e_1, \ldots e_n\}$ este o bază a lui V şi A este matricea lui Q în raport cu baza B (adică $a_{ij} = F(e_i, e_j) = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$), iar $x \in V, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, atunci

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \,. \qquad (1.5)$$

Definiţia 7. O formă pătratică pe $\mathbb{R}^n$ este o funcţie *Q* definită pe $\mathbb{R}^n$ ale cărei valori într-un vector x din $\mathbb{R}^n$ sunt calculate printr-o expresie de forma $Q(x) = x^t A x$, unde A este o matrice simetrică $n \times n$. Matricea A se numeşte ***matricea formei pătratice Q.***

Aplicaţia 3. Fie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Calculaţi $Q(x) = x^t A x$ pentru următoarele matrice

a) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Soluţie. a) $Q(x)=x^t Ax=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}=4x_1^2+3x_2^2$.

b) $Q(x)=x^t Ax=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x_1-2x_2 \\ -2x_1+7x_2 \end{pmatrix}=3x_1^2-4x_1x_2+7x_2^2$.

Aplicaţia 4. Pentru $x\in\mathbb{R}^3$, scrieţi forma pătratică $Q(x)=5x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-x_1x_2+8x_2x_3$ sub forma $x^t Ax$.

Soluţie. Pentru a scrie matricea *A*, coeficienţii lui x_1^2, x_2^2, x_3^2 se trec pe diagonala principală. Pentru ca matricea *A* să fie simetrică, coeficientul lui $x_i x_j, i\neq j$ trebuie împărţit în mod egal între poziţia (i,j) şi poziţia (j,i), deci va fi împărţit la 2. Coeficientul lui x_1x_3 este 0. În consecinţă,

$$Q(x)=x^t Ax=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Aplicaţia 5. Fie forma pătratică $Q(x)=x_1^2-8x_1x_2-5x_2^2$. Calculaţi $Q(x)$ pentru

a) $x=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $x=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

c) $x=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$;

Soluţie.

a) $Q(-3,1)=(-3)^2-8(-3)\cdot 1-5\cdot 1^2=28$;

b) $Q(2,-2)=(2)^2-8(2)\cdot(-2)-5\cdot(-2)^2=16$;

c) $Q(1,-3)=1^2-8\cdot 1\cdot(-3)-5\cdot(-3)^2=-20$.

În anumite cazuri, formele pătratice sunt mai uşor de utilizat dacă nu au termeni de forma $x_i x_j, i \neq j$, adică matricea este diagonală. Aceşti termeni pot fi eliminaţi făcând o schimbare de variabilă.

Definiţia 8. O formă pătratică se numeşte ***redusă la forma canonică*** dacă există o bază în care matricea asociată are forma diagonală (adică $Q(x)$ este o sumă de pătrate).

Definiţia 9. O formă pătratică se numeşte ***redusă la forma canonică*** dacă există o bază $B = \{ f_1, \ldots, f_n \}$ astfel ca dacă $x = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'} f_i$, are loc

$$Q(x^{'}) = \lambda_1 x_1^{'2} + \lambda_2 x_2^{'2} + \ldots + \lambda_n x_n^{'2}, \tag{1.6}$$

unde $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ se numesc coeficienţii formei pătratice.

Reducerea la forma canonică

I. **Metoda lui Gauss**

Metoda lui Gauss constă în gruparea convenabilă a termenilor formei pătratice în scopul formării de pătrate.

Fie forma pătratică $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ unde $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1,n}$.

I. Dacă $a_{11} \neq 0$, atunci grupul termenilor care conţin variabila x_1 se poate scrie astfel

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2a_{1n} x_1 x_n = a_{11} \left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}} x_1 x_2 + \ldots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}} x_1 x_n \right) =$$

$$= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 - \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1i} a_{1j}}{a_{11}} x_i x_j .$$

Notând $y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$ şi $y_k = x_k, k = \overline{2,n}$, se obţine $Q(y) = a_{11} y_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{'} y_i y_j$,

unde $a_{ij}^{'} = a_{ij} - \frac{a_{1i} a_{1j}}{a_{11}}, i, j = \overline{2,n}$.

Considerăm $Q_1(y)=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}a_{ij}^{'}y_iy_j$, care este o formă pătratică în *n-1* variabile şi dacă $a_{22}^{'}\neq 0$ se repetă procedeul şi se obţine $Q_1(y)=a_{22}^{'}z_2^2+Q_2(z)$, unde $Q_2(z)$ este o formă pătratică în *n-2* variabile.

În final, $Q(x)$ se scrie ca o sumă de pătrate

$$Q(\xi)=\alpha_1\xi_1^2+\ldots+\alpha_n\xi_n^2 .$$

II. Dacă $a_{11}=0$, dar există un coeficient $a_{ii}\neq 0$, $i=\overline{2,n}$ atunci se începe prin a grupa termenii ce conţin variabila x_i.

III. Dacă $a_{ii}=0$ pentru orice $i=\overline{1,n}$, atunci se face o schimbare de variabilă

$$x_1=y_1+y_2, x_2=y_1-y_2, x_k=y_k, k=\overline{3,n} .$$

Astfel, forma pătratică în $y_1, y_2, \ldots y_n$ conţine un termen de forma $b_{11}y_1^2$ şi se aplică procedeul descris mai sus.

Aplicaţia 6. Să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice folosind metoda lui Gauss

a) $Q(x)=4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$;

b) $Q(x)=x_1^2+4x_1x_3-6x_2x_3+3x_2^2-2x_3^2$.

Soluţie. a) $Q(x)=4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2=4\left(x_1^2-\frac{1}{2}x_1x_2\right)+4x_2^2+x_3^2=$

$$=4\left(x_1^2-2\cdot x_1\cdot\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{16}x_2^2\right)-\frac{1}{4}x_2^2+4x_2^2+x_3^2=4\left(x_1-\frac{1}{4}x_2\right)^2+\frac{15}{4}x_2^2+x_3^2 .$$

Notând $y_1=x_1-\frac{1}{4}x_2$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$, rezultă forma canonică

$$Q(y)=4y_1^2+\frac{15}{4}y_2^2+y_3^2 \text{ (pozitiv definită).}$$

Exprimând variabilele x_1, x_2, x_3 în funcţie de y_1, y_2, y_3 se obţine

$$x_1=y_1+\frac{1}{4}y_2, x_2=y_2, x_3=y_3 .$$

Forma pătratică are forma canonică în baza formată de vectorii

$$e_1 = \left(1, -\frac{1}{4}, 0\right),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1).$$

Matricea de trecere de la baza canonică la această bază este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În această bază, matricea formei pătratice are forma diagonală.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = C \cdot A \cdot C^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2 = \left(x_1^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2\right) - 4x_3^2 - 6x_2x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2 =$
$\left(x_1 + 2x_3\right)^2 + 3\left(x_2^2 - 2x_2x_3\right) - 6x_3^2 = \left(x_1 + 2x_3\right)^2 + 3\left(x_2 - x_3\right)^2 - 9x_3^2$.
Notând $y_1 = x_1 + 2x_3,\ y_2 = x_2 - x_3,\ y_3 = x_3$, se obţine forma canonică
$Q(y) = y_1^2 + 3y_2^2 - 9y_3^2$ (nedefinită).

Exprimând variabilele x_1, x_2, x_3 în funcţie de y_1, y_2, y_3 se obţine

$x_1 = y_1 - 2y_3,\ x_2 = y_2 + y_3,\ x_3 = y_3$.

Forma pătratică are forma canonică în baza formată de vectorii

$$e_1 = (1,0,-2),\ e_2 = (0,1,1),\ e_3 = (0,0,1).$$

Matricea de trecere de la baza canonică la această bază este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

În această bază, matricea formei pătratice are forma diagonală.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = C \cdot A \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

II. Metoda lui Jacobi

Dacă pentru orice $i = \overline{1,n}$, determinanţii

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

sunt nenuli, atunci există o bază $B = \{ f_1, \dots, f_n \}$ astfel ca dacă $x = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'} f_i$, în care Q are forma canonică

$$Q(x^{'}) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^{'2} + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^{'2} + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^{'2}. \tag{1.8}$$

Baza B se determină astfel

$$f_i = c_{1i} e_1 + \dots + c_{ii} e_i ,\ i = \overline{1,n}, \tag{1.9}$$

iar c_{ji}, $j = \overline{1,i}$ satisfac sistemele de ecuaţii

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observaţie. $c_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, $i = \overline{1,n}$, $\Delta_0 = 1$.

Criteriul lui Sylvester. Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune n, iar Q o formă pătratică cu matricea A. Atunci

i. Q este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_i > 0, i = \overline{1,n}$;

ii. Q este negativ definită $\Leftrightarrow (-1)^i \Delta_i > 0, i = \overline{1,n}$;

unde Δ_i sunt daţi de (1.7).

Aplicaţia 7. Să se reducă la forma canonică următoarea formă pătratică folosind metoda lui Jacobi

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2 .$$

Soluţie.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -27 < 0$$

Forma pătratică este nedefinită, iar forma canonică este

$$Q(x') = x_1'^2 + \frac{1}{3}x_2'^2 - \frac{1}{9}x_3'^2 .$$

Să găsim acum baza $B = \{ f_1, f_2, f_3 \}$ în care forma pătratică are forma canonică.

$$c_{11} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = 1 \Rightarrow f_1 = c_{11}e_1 = e_1 = (1,0,0).$$

$$\begin{cases} 1 \cdot c_{12} + 0 \cdot c_{22} = 0 \\ 0 \cdot c_{12} + 3 \cdot c_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{12} = 0 \\ c_{22} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 = \frac{1}{3}e_2 = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right).$$

$$\begin{cases} 1\cdot c_{13}+0\cdot c_{23}+2\cdot c_{33}=0 \\ 0\cdot c_{13}+3\cdot c_{23}-3\cdot c_{33}=0 \\ 2\cdot c_{13}-3\cdot c_{23}-2\cdot c_{33}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{33}=\dfrac{\Delta_2}{\Delta_3}=-\dfrac{1}{9} \\ c_{13}=-2c_{33}=\dfrac{2}{9} \\ c_{23}=c_{33}=-\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_3=c_{13}e_1+c_{23}e_2+c_{33}e_3=\frac{2}{9}e_1-\frac{1}{9}e_2-\frac{1}{9}e_3=\left(\frac{2}{9},-\frac{1}{9},-\frac{1}{9}\right).$$

Temă. Să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice

1) $5x_1^2-2x_2^2-5x_3^2-4x_2x_3$;
2) $x_1^2+8x_1x_2+x_2^2+3x_3^2$;
3) $5x_1^2+6x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$;
4) $3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;
5) $5x_1^2+6x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$.

Matrice ortogonale

Transformări liniare ortogonale

Definiţia 1. Fie E un spaţiu euclidian, $T : E \to E$ transformare liniară. $T^* : E \to E$ se numeşte ***adjunctul*** lui T dacă $< T(x), y > = < x, T^*(y) >, \forall x, y \in E$.

Definiţia 2. Fie E un spaţiu euclidian, $T : E \to E$ liniar. Transformarea T se numeşte ***autoadjunctă*** (**operator autoadjunct**) dacă $T = T^*$, adică
$< T(x), y > = < x, T^*(y) > = < x, T(y) >, \forall x, y \in E$.

Teorema 1. Transformarea $T : E \to E$ este autoadjunctă, dacă şi numai dacă matricea lui T în raport cu orice bază ortonormată este simetrică.

Definiţia 3. Fie E un spaţiu euclidian, $T : E \to E$ un operator liniar. T se numeşte ***transformare ortogonală*** (**operator ortogonal**) dacă transformă orice bază ortonormată într-o bază ortonormată a lui E.

Observaţie. Dacă $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată în E, atunci $\{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\}$ este bază ortonormată a lui E, adică

$$< e_i, e_j > = \delta_{ij}, i, j = \overline{1,n} \Rightarrow < T(e_i), T(e_j) > = \delta_{ij}, i, j = \overline{1,n} \ .$$

Teorema 2. Dacă E este un spaţiu euclidian de dimensiune n şi $T : E \to E$ un operator liniar, atunci următoarele afimaţii sunt echivalente:

a) T este transformare ortogonală;
b) T păstrează produsul scalar, adică

$$< T(x), T(y) > = < x, y >, \forall x, y \in E; \tag{1.10}$$

c) Dacă A este matricea asociată lui T într-o bază ortonormată, atunci există A^{-1} şi $A^{-1} = A^t$.

Demonstraţie. Demonstrăm că $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$.

"$a \Rightarrow b$". Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată în E. Atunci $\{T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)\}$ este bază ortonormată a lui E, adică $< e_i, e_j > = \delta_{ij} = < T(e_i), T(e_j) >, \ i, j = \overline{1,n}$.

Fie $x, y \in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $y = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Atunci $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Dar $< T(x), T(y) >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < T(e_i), T(e_j) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i =< x, y >$

$\Rightarrow < T(x), T(y) >=< x, y > \forall x, y \in E$.

"$b \Rightarrow c$". Trebuie să demonstrăm că $< T(x), T(y) >=< x, y > \forall x, y \in E \Rightarrow A^{-1} = A^t$.

Demonstrăm mai întâi că T este injectivă, adică $KerT = \{O_E\}$.

$x \in KerT \Rightarrow T(x) = 0_E \Rightarrow < x, x > \overset{ip}{=} < T(x), T(x) > \overset{x \in KerT}{=} 0 \overset{def\ prod\ scalar}{\Rightarrow} x = 0_E \Rightarrow KerT = \{0_E\} \Rightarrow T$ injectiv. Cum T este şi surjectiv, rezultă că este bijectiv, deci există $T^{-1} : E \to E$. Din ipoteză ştim că $< T(x), T(y) >=< x, y >, \forall x, y \in E$. Alegem în această relaţie $y = T^{-1}(x) \Rightarrow T(y) = x \Rightarrow < T(x), x >=< x, T^{-1}(x) >$.

Dar $< T(x), x >=< x, T^*(x) > \Rightarrow < x, T^{-1}(x) >=< x, T^*(x) > \Rightarrow T^* = T^{-1}$.

Se demonstrează că matricea lui T^* este A^t, iar matricea lui T^{-1} este A^{-1}, deci $A^t = A^{-1}$.

"$c \Rightarrow a$". Din ipoteză $A^t = A^{-1} \Rightarrow T^* = T^{-1}$. Trebuie să arătăm că T este transformare ortogonală.

Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază ortonormată în E şi A matricea lui T în această bază. $< T(e_i), T(e_j) >=< e_i, T^*(T(e_j)) >=< e_i, T^{-1}(T(e_j)) =< e_i, e_j >= \delta_{ij},\ i, j = \overline{1, n}$.

Deci $\{T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)\}$ este bază ortonormată a lui E, adică T este ortogonal.

Corolarul 1. Un operator ortogonal păstrează distanţele şi unghiurile.

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că $d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ şi $\cos\left(\widehat{T(x), T(y)}\right) = \cos\left(\widehat{x, y}\right)$.

Alegând $y = x$ în (1.10), rezultă $< x, x >=< T(x), T(x) > \Rightarrow \|x\| = \|T(x)\|, \forall x \in E$.

Atunci $d(T(x), T(y)) = \|T(x) - T(y)\| \overset{T\ liniar}{=} \|T(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$, deci T păstrează distanţele.

$\cos\left(\widehat{T(x), T(y)}\right) = \dfrac{< T(x), T(y) >}{\|T(x)\| \cdot \|T(y)\|} = \dfrac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos\left(\widehat{x, y}\right)$, deci T conservă unghiurile.

Matrice ortogonale

Definiţia 4. O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numeşte ***matrice ortogonală*** dacă este inversabilă şi $A^{-1} = A^t$.

Exemple. Matricele $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sunt ortogonale. Acest lucru se verifică prin calcul direct.

Propoziţia 1. Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este matrice ortogonală, atunci $\det A = \pm 1$.

Demonstraţie. A ortogonală $\Rightarrow A^t \cdot A = A \cdot A^t = I_n \Rightarrow \det A \cdot \det A^t = \det I_n$.

Dar $\det A = \det A^t$, rezultă că $(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Definiţia 5. Matricea A ortogonală pentru care $\det A = 1$ se numeşte ***matrice de rotaţie***.

Cursul 9

Metoda transformărilor ortogonale pentru reducerea formelor pătratice la forma canonică.

Rotaţii şi simetrii

Metoda transformărilor ortogonale pentru reducerea formelor pătratice la forma canonică

Dacă V este un spaţiu euclidian, forma pătratică Q are forma canonică $Q(x^{'}) = \lambda_1 x_1^{'2} + \lambda_2 x_2^{'2} + \ldots + \lambda_n x_n^{'2}$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii, baza formei canonice fiind baza ortonormată formată din vectorii corespunzători.

Teorema 1. Fie E un spaţiu euclidian real de dimensiune n şi $F: E \times E \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Atunci există o unică transformare liniară autoadjunctă $T: E \to E$ astfel ca $F(x, y) = < T(x), y >, \forall x, y \in E$.

Teorema 2. Fie E un spaţiu euclidian real de dimensiune n şi $Q: E \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe E. Atunci există o bază ortogonală B astfel încât matricea lui Q în baza B să fie diagonală (adică în această bază Q este redusă la forma canonică).

Teorema 3. (teorema de inerţie) Fie V un spaţiu vectorial real şi $Q: V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci numărul termenilor pozitivi şi al celor negativi din forma canonică a lui Q nu depinde de alegerea bazei formei canonice. (nu depinde de metoda prin care a fost redusă la forma canonică).

Aplicaţia 1. Să se reducă la forma canonică următoarea formă pătratică folosind metoda transformărilor ortogonale

$$Q(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 .$$

Soluţie. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$A-\lambda I_3=\begin{pmatrix} 4\text{-}\lambda & \text{-}1 & 0 \\ \text{-}1 & 4\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1\text{-}\lambda \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $-\lambda^3+9\lambda^2-23\lambda+15$, iar ecuaţia caracteristică $-\lambda^3+9\lambda^2-23\lambda+15=0$.

Valorile proprii sunt $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$ şi $\lambda_3=5 \Rightarrow$ forma canonică $Q(x')=x_1'^2+3x_2'^2+5x_3'^2$.

Determinăm vectorii proprii

I. Pentru $\lambda_1=1$, avem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2\to 3L_2+L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Deci $y=0, x=0, z\in\mathbb{R}$. Deci, pentru $z=1$, obţinem un vector normat,

$$v_1=(0,0,1).$$

II. Pentru $\lambda_2=3$, avem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2\to L_2+L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$. Deci $z=0, x=y\in\mathbb{R}$. Deci, pentru $x=1$, obţinem vectorul $(1,1,0)$, care normat dă

$$v_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right).$$

III. Pentru $\lambda_3=5$, avem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

. Deci $z=0, x=-y\in\mathbb{R}$. Deci, pentru $y=1$, obţinem vectorul $(-1,1,0)$, care normat dă

$$v_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right).$$

Forma pătratică are forma canonică în baza ortonormată $B=\{v_1,v_2,v_3\}$.

Rotaţii şi simetrii

În continuare vom determina forma matricelor ortogonale de ordinul 2 şi vom prezenta aplicaţii ale acestora în domeniul transformărilor geometrice.

Considerăm $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a,b,c,d\in\mathbb{R}$ o matrice ortogonală. Din relaţia $A\cdot A^t=I_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \Rightarrow a,b,c,d\in[-1,1]. \\ ab+cd=0 \end{cases}$$

$ab=-cd \ \ /:bd \Rightarrow \frac{a}{d}=-\frac{c}{b}$. Notăm $-\frac{a}{d}=\frac{c}{b}=\alpha \Rightarrow a=-d\alpha, c=b\alpha$.

Din $a^2+c^2=1$, rezultă $(-d\alpha)^2+(b\alpha)^2=1 \Rightarrow \alpha^2\left(b^2+d^2\right)=1 \overset{b^2+d^2=1}{\Rightarrow} \alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\pm1$.

I. $\alpha=1$

Cum $a\in[-1,1]$, rezultă că există $\theta\in[-\pi,\pi]$ astfel încât $a=\cos\theta$, deci $\theta=\arccos a$.

$c^2=1-a^2=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta \Rightarrow c=\pm\sin\theta$. Vom considera în continuare $c=\sin\theta$, deoarece schimbând θ în $-\theta$, se rezolvă analog şi cazul $c=-\sin\theta$.

Atunci avem $a=\cos\theta,\ b=c=\sin\theta,\ d=-\cos\theta$, deci matricea ortogonală va avea forma $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

II. $\alpha = -1$

Avem $a = \cos\theta$, $b = -\sin\theta$ $c = \sin\theta$, $d = \cos\theta \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, matrice care are determinantul 1, deci este matrice de rotaţie (determină rotaţia de unghi θ în plan) .

Cazuri particulare

Dacă $\theta = 0$, rezultă $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ care reprezintă simetria faţă de axa *Ox*.

$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ care determină operatorul identitate.

Dacă $\theta = \pi$, rezultă $A_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ care reprezintă simetria faţă de axa *Oy*.

$B_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ care reprezintă simetria faţă de origine.

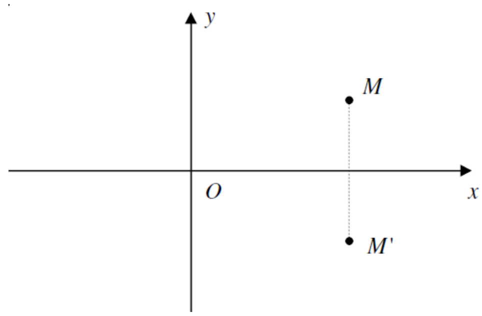
Transformările ortogonale în plan sunt fie rotaţii, simetrii sau compuneri de rotaţii cu simetrii.

Vom nota cu E_2 planul *xOy* conceput ca o mulţime de puncte.

Fie $T : E_2 \to E_2$ operatorul căruia i se asociază matricele A_0, B_0, A_π, B_π în raport cu baza $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Notăm $\begin{cases} \vec{i}\,' = T(\vec{i}) \\ \vec{j}\,' = T(\vec{j}) \end{cases}$.

Cazul I. Pentru matricea A_0, avem $\begin{pmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i}\,' = \vec{i} \\ \vec{j}\,' = -\vec{j} \end{cases}$, ceea ce reprezintă simetria faţă de axa *Ox*.



Pentru un punct de coordonate (x, y), avem $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Reamintim formulele pentru schimbarea coordonatelor la schimbarea bazei $X = CX'$, $X' = C^{-1}X$, unde C este matricea de trecere, în cazul nostru $C = A_0$.

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. În concluzie, dacă $M(x, y) \Rightarrow M'(x, -y)$.

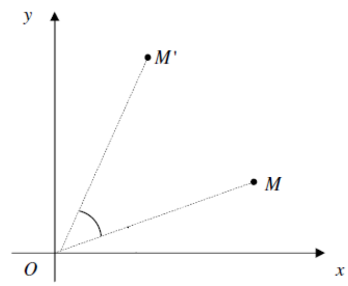
Cazul II. Pentru matricea B_0, avem $\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i}' = \vec{i} \\ \vec{j}' = \vec{j} \end{cases}$, se obţine operatorul identitate.

Cazul III. Pentru matricea A_π, avem $\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i}' = -\vec{i} \\ \vec{j}' = \vec{j} \end{cases}$, reprezintă simetria faţă de *Oy*.

Cazul IV. Pentru matricea B_π, avem $\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i}' = -\vec{i} \\ \vec{j}' = -\vec{j} \end{cases}$, reprezintă simetria faţă de *O*.

Definiţia 1. Aplicaţia $T_\theta : E_2 \to E_2, T_\theta(M) = M'$ se numeşte ***rotaţie de unghi*** θ dacă

1. $d(O, M) = d(O, M')$;
2. $m(\sphericalangle MOM') = \theta$.



Observaţie. Când unghiul θ este pozitiv, rotaţia se efectuează în sens trigonometric, iar dacă este negativ, rotaţia se efectuează în sensul acelor de ceasornic.

Teorema 1. O transformare $T_\theta : E_2 \to E_2$ este rotaţie de unghi θ dacă şi numai dacă $T_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$.

Teorema 2. Compunerea a două rotaţii este tot o rotaţie. Dacă $T_\theta, T_\varphi : E_2 \to E_2$ sunt rotaţii de unghi θ, respectiv φ, atunci $T_\theta \circ T_\varphi$ este rotaţie de unghi $\varphi + \theta$.

Să considerăm *d* o dreaptă din E_2, iar *M'* simetricul punctului *M* faţă de dreapta *d*.

Definiţia 2. Aplicaţia $S_d : E_2 \to E_2$, $S_d(M) = M'$ se numeşte ***simetrie de axă d***.

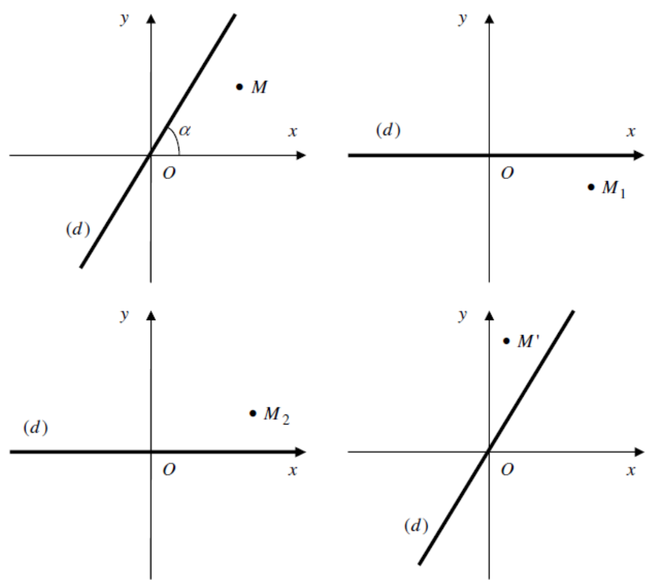
Am studiat anterior cazurile particulare ale simetriilor faţă de axele de coordonate. În cazul general, când dreapta *d* nu este nici una din axele de coordonate, se poate alege sistemul de axe astfel încât *d* să treacă prin origine şi pentru a determina relaţiile de transformare a coordonatelor simetricului faţă de dreapta *d*, parcurgem următorii paşi:

- Se efectuează rotaţia de unghi $-\alpha$, pentru a duce dreapta *d* peste axa *Ox*. Dacă notăm cu $M_1(x_1, y_1)$ imaginea lui $M(x,y)$ prin această rotaţie, avem relaţiile
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- Se face simetria faţă de axa *Ox*. Notăm cu $M_2(x_2, y_2)$ imaginea lui $M_1(x_1, y_1)$ în urma acestei simetrii. Atunci
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
- Se face o nouă rotaţie de unghi α, care duce dreapta *d* în poziţia iniţială. Notăm cu $M'(x', y')$ imaginea lui $M_2(x_2, y_2)$ în urma acestei rotaţii. Avem
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, relaţiile între coordonatele lui $M(x,y)$ şi ale simetricului său $M'(x',y')$ faţă de dreapta *d* sunt date de

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Cursul 10

Metoda rotaţiilor a lui Jacobi pentru determinarea numerică a valorilor proprii

Metoda Jacobi este o metodă convenabilă pentru a găsi toate valorile proprii si vectorii proprii ai unei matrici reale si simetrice, de ordin moderat.

Reamintim că valorile proprii ale unei matrice simetrice A sunt reale şi se află rezolvând ecuaţia caracteristică $\det\left(A-\lambda I_n\right)=0$. Rezolvarea exactă a acestei ecuaţii nu este întotdeauna posibilă. Nu se recomandă determinarea valorilor proprii ale unei matrice rezolvând numeric ecuaţia caracteristică, deoarece modificări mici ale coeficienţilor pot produce modificări mari ale rădăcinilor ecuaţiei.

Scopul este să micşorăm, eventual până la dispariţie elementele nediagonale ale matricei astfel încât în final să obţinem o matrice diagonală, iar valorile proprii vor fi elementele de pe diagonala principală.

Metoda Iacobi constă în efectuarea unei suite de transformări de similitudine ale matricei A utilizând matrice ortogonale de forma:

$$U=\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 &&&&&&&&& \\
&1&&&&&&&& \\
&&\ddots&&&&&&& \\
&&&\cos\varphi & \ldots & \ldots & \ldots & \sin\varphi && \\
&&&\vdots & 1 &&& \vdots && \\
&&&\vdots && \ddots && \vdots && \\
&&&\vdots &&& 1 & \vdots && \\
&&&-\sin\varphi & \ldots&\ldots&\ldots&\cos\varphi && \\
&&&&&&&&\ddots& \\
&&&&&&&&&1
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{cccccccccc} &&&\uparrow&&&&\uparrow&& \\ &&&p&&&&q&& \end{array} &
\end{array} \qquad (1)$$

Aşadar, elementele matricei U sunt

$$\begin{cases} u_{ii}=1 \text{ dacă } i\neq p \text{ şi } i\neq q \\ u_{pp}=\cos\varphi, u_{pq}=\sin\varphi, u_{qp}=-\sin\varphi, u_{qq}=\cos\varphi \\ u_{ij}=0 \text{ în rest.} \end{cases} \qquad (2)$$

O asemenea matrice este ortogonală: $U^T U = I_n, U^{-1} = U^T$ şi reprezintă din punct de vedere geometric o rotaţie în planul determinat de vectorii e_p şi e_q.

Dacă notăm cu $A' = U^T A$ şi cu $A'' = A'U$, atunci:

$$\begin{cases} a_{ij}^{'} = a_{ij} \text{ dacă } i \neq p \text{ şi } i \neq q \\ a_{pj}^{'} = a_{pj} \cos\varphi - a_{qj} \sin\varphi \\ a_{qj}^{'} = a_{pj} \sin\varphi + a_{qj} \cos\varphi, \text{ j}=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{"} = a_{ij}^{'} \text{ dacă j} \neq p \text{ şi j} \neq q \\ a_{ip}^{"} = a_{ip}^{'} \cos\varphi - a_{iq}^{'} \sin\varphi \\ a_{iq}^{"} = a_{ip}^{'} \sin\varphi + a_{iq}^{'} \cos\varphi, \text{ i}=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{4}$$

Din (3) şi (4) deducem:

$$\begin{cases} a_{pp}^{"} = a_{pp}\cos^2\varphi\text{-}2a_{pq}\cos\varphi\sin\varphi\text{+}a_{qq}\sin^2\varphi \\ a_{qq}^{"} = a_{pp}\sin^2\varphi + 2a_{pq}\cos\varphi\sin\varphi\text{+}a_{qq}\cos^2\varphi \\ a_{pq}^{"} = a_{qp}^{"} = \left(a_{pp} - a_{qq}\right)\sin\varphi\cos\varphi + a_{pq}\cos 2\varphi. \end{cases} \tag{5}$$

Linia *p* şi coloana *q* se aleg astfel încât elementul nediagonal a_{pq} să fie cel mai mare în valoare absolută. Cum intenţia noastră este, ca în urma transformărilor de similitudine, elementele nediagonale să se anuleze, punem condiţia ca $a_{pq}^{"} = 0$ sau

$$\frac{1}{2}\left(a_{pp} - a_{qq}\right)\sin 2\varphi + a_{pq}\cos 2\varphi = 0 \text{, deci}$$

$$ctg 2\varphi = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}. \tag{6}$$

Dacă notăm cu $\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ şi cu $t = tg\varphi$, atunci din (6) rezultă

$$t^2 + 2\theta t - 1 = 0. \tag{7}$$

Rezolvând această ecuaţie obţinem:

$$t_{1,2} = -\theta \pm \sqrt{\theta^2+1} = \frac{1}{\theta \pm \sqrt{\theta^2+1}}.$$

Pentru a evita ca numărătorul să fie mic alegem

$$t = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta + \operatorname{sgn}(\theta)\sqrt{\theta^2+1}} \text{ dacă } \theta \neq 0 \\ 1 \text{ dacă } \theta = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Ţinând seama de formulele cunoscute de trigonometrie deducem că:

$$\begin{cases} c = \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ s = \sin\varphi = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}. \tag{9}$$

Din (8) şi (9) rezultă că $|t| \leq 1, |c| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $|s| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, deci unghiul de rotaţie $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Aşadar, algoritmul de alegere a matricei *U* este următorul:

1) Se alege cel mai mare (în valoare absolută) element nediagonal al matricei *A*, situat deasupra diagonalei principale. Fie acesta a_{pq}.
2) Se calculează $\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ şi apoi se determină *t* din formula (8). În sfârşit din (9) se determină $c = \cos\varphi$ şi $s = \sin\varphi$ şi se introduc în (1).
   În urma acestei alegeri a matricei U, matricea $A_1 = A'' = U^T AU$ are proprietatea că elementul

$$a''_{pq} = 0. \tag{10}$$

Dacă notăm cu $S(B)$ suma pătratelor elementelor nediagonale ale matricei *B*, atunci un calcul direct ne dă:

$$S(A'') = \left(S(A) - 2a_{pq}^2\right) + 2a''^2_{pq}.$$

Ţinând seama de (10) deducem că

$$S(A'') = S(A) - 2a_{pq}^2 < S(A). \tag{11}$$

Cum $a_{ij}^2 \le a_{pq}^2$ pentru orice $i \ne j$, rezultă că

$$S(A) \le n(n-1)a_{pq}^2 \quad \text{sau} \quad -2a_{pq}^2 \le -\frac{2S(A)}{n(n-1)}. \tag{12}$$

Din (11) şi (12) obţinem:

$$S\left(A^{"}\right) \le S(A)\left(1-\frac{1}{n(n-1)}\right) < S(A), n \ge 2. \tag{13}$$

Să considerăm acum un şir de rotaţii în urma cărora se obţin matricile:

$$A_1 = A^{"}, A_2 = A_1^{"}, A_3 = A_2^{"} \text{ etc.}$$

Din (13) rezultă că

$$S(A_k) \le \left(1-\frac{2}{n(n-1)}\right)^k S(A). \tag{14}$$

Cum $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1-\frac{2}{n(n-1)}\right)^k = 0$, deducem că $\lim\limits_{k\to\infty} S(A_k) = 0$.

Aşadar, şirul de matrice $\{A_k\}$ tinde la o matrice diagonală ale cărei elemente diagonale sunt chiar valorile proprii ale matricei *A*.

Se poate arăta că

$$\left|a_{ii}^{(k)} - \lambda_i\right| \le \sqrt{S(A_k)}.$$

Cum $S(A_k) \le n^2 \cdot \left(a_{pq}^{(k)}\right)^2$ rezultă că

$$\left|a_{ii}^{(k)} - \lambda_i\right| \le n\left|a_{pq}^{(k)}\right|. \tag{15}$$

Inegalitatea (15) se poate lua drept criteriu de oprire, în sensul că punând condiţia ca $n\left|a_{pq}^{(k)}\right| < \varepsilon$, va rezulta numărul *k* de rotaţii necesare pentru a aproxima valorile proprii λ_i ale matricei *A*, cu elementele diagonale $a_{ii}^{(k)}$ ale matricei A_k cu o aproximaţie mai mică ca ε.

Exemplul 1. Folosind metoda rotațiilor a lui Iacobi să se determine valorile proprii ale matricei

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Cel mai mare element nediagonal este 1. Aşadar alegem $a_{12}=1, p=1, q=2$.

$$\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=0; t=1; c=s=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$U_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad A_1=U_1^T A U_1=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 4\end{pmatrix}.$$

Cel mai mare element nediagonal este $a_{23}=\sqrt{2}$, deci $p=2; q=3$. În continuare avem:

$$\theta=\frac{4-5}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}};\quad 1+\theta^2=\frac{9}{8};\quad t=\frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{9}{8}}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\quad s=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$U_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix};\quad A_2=U_2^T A_1 U_2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Valorile proprii căutate sunt

$$\lambda_1=3; \lambda_2=6; \lambda_3=3.$$

Conice

Definiţia 1. Se numeşte ***conică*** o mulţime de puncte C din plan, de forma

$$C=\{M(x,y)\mid f(x,y)=0\}, \tag{1.16}$$

unde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}, \tag{1.17}$$

$a_{ij}\in\mathbb{R}, i, j=\overline{1,3}, a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2>0.$ Ecuaţia

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1.18}$$

se numeşte *ecuaţia conicei C*.

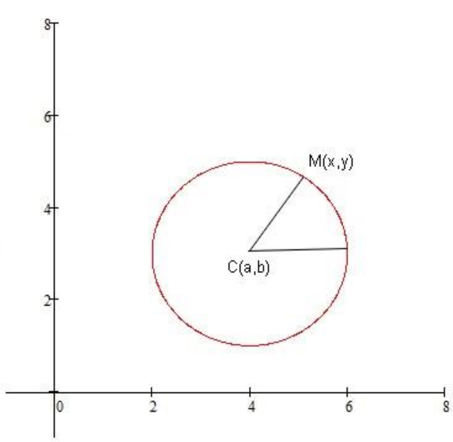
Prezentăm acum conicele uzuale şi ecuaţiile lor.

Cercul.

Definiţia 2. ***Cercul*** este mulţimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit *centru*, distanţa de la centru la punctele cercului numindu-se *rază*.

Propoziţia 1. Ecuaţia carteziană implicită a cercului de centru (a,b) şi de rază r este

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1.19}$$



Demonstraţie.

Din Definiţia 1 rezultă că distanţa dintre C şi M este constantă şi egală cu raza r a cercului

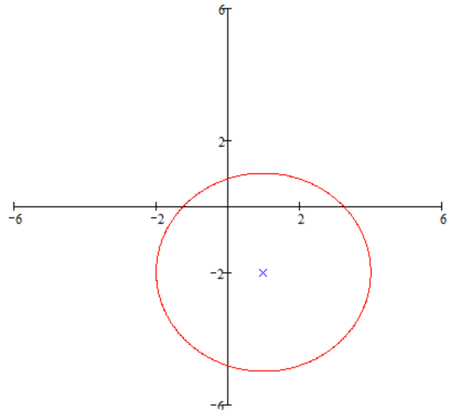
$\left\|\overrightarrow{CM}\right\|=r$, deci $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$.

Prin ridicare la pătrat se obţine ecuaţia carteziană implicită a cercului.

Exemple.

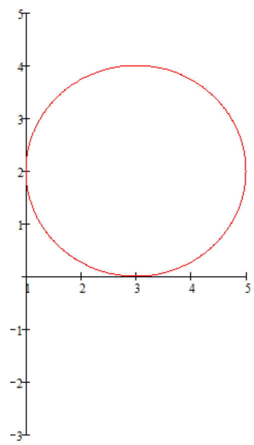
1. Cercul $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ are centrul $(1,-2)$ şi raza 3.

Reprezentarea grafică a acestui cerc este



2. Cercul $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ are centrul $(3,2)$ şi raza 2.

Reprezentarea grafică este



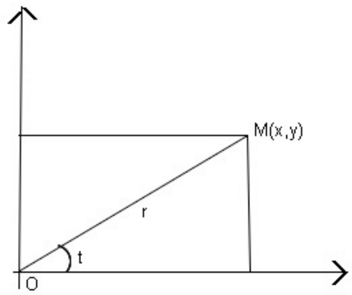
Dacă desfacem parantezele în (1.19) şi notând $m=-a, n=-b, p=a^2+b^2-r^2$, ecuaţia devine

$$x^2+y^2+2mx+2ny+p=0. \tag{1.20}$$

Ecuaţia (1.20) se numeşte *ecuaţia carteziană generală* a cercului. Dacă $m^2+n^2-p>0$, atunci centrul cercului are coordonatele $(-m,-n)$ şi raza este $\sqrt{m^2+n^2-p}$.

Ecuaţiile parametrice ale cercului în $\mathbb{R}^2$ sunt

$$\begin{cases} x=a+r\cos t, \\ y=b+r\sin t, \end{cases} t\in[0,2\pi). \tag{1.21}$$



Demonstraţie.

Fiecărui punct $M(x,y)$ îi punem în corespondenţă o pereche (r,t) de numere reale $r \in (0,\infty), t \in [0,2\pi)$ determinată prin

$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi

$\begin{cases} \cos t = \dfrac{x}{r}, \\ \sin t = \dfrac{y}{r}, \end{cases}$ de unde se obţine $\begin{cases} x = a + r\cos t, \\ y = b + r\sin t, \end{cases} t \in [0,2\pi).$

Numerele *r* şi *t* se numesc *coordonatele polare* ale punctului *M*.

Tangenta la cercul (1.19) în punctul $M_0(x_0, y_0)$ are ecuaţia

$$(x_0 - a)(x-a) + (y_0 - b)(y-b) = r^2. \tag{1.22}$$

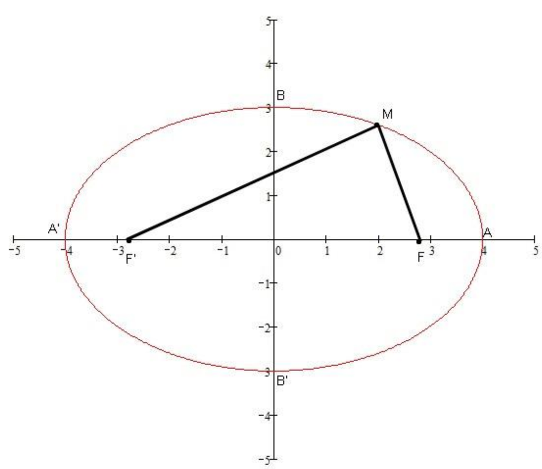
Elipsa.

Fie c un număr real pozitiv şi *F* şi *F'* două puncte fixate din plan astfel încât $FF' = 2c$.

Definiţia 3. Elipsa este mulţimea punctelor *M* din plan care au suma distanţelor la două puncte fixe constantă, i.e.

$$MF + MF' = 2a, \tag{1.23}$$

unde $a > c$.



Punctele $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$ se numesc *focarele* elipsei iar distanţa $FF' = 2c$ constituie distanţa focală a elipsei, iar segmentele MF şi MF' se numesc *razele focale* ale punctului *M*.

Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază *a*.

Teorema 1. Punctul $M(x, y)$ aparţine elipsei dacă şi numai dacă

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, b^2=a^2-c^2. \tag{1.24}$$

Ecuaţia (1.24) se numeşte *ecuaţia carteziană implicită* a elipsei.

Punctele $A'(-a,0), A(a,0), B'(0,-b), B(0,b)$ se numesc *vârfurile elipsei.* Segmentele $[A'A]$ şi $[B'B]$ se numesc *axa mare*, respectiv *axa mică* a elipsei.

Ecuaţiile parametrice ale elipsei în $\mathbb{R}^2$ sunt

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi). \tag{1.25}$$

Tangenta la elipsa (1.24) în punctul $M_0(x_0, y_0)$ are ecuaţia

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{1.26}$$

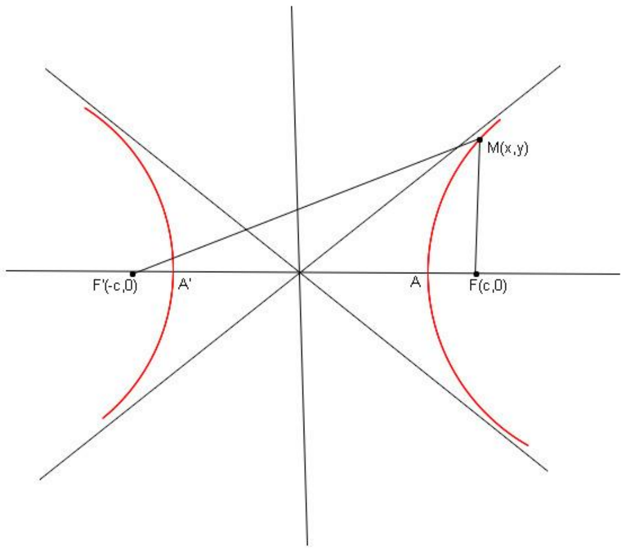
Hiperbola.

Fie c un număr real pozitiv şi *F* şi *F'* două puncte fixate din plan astfel încât $FF'=2c$.

Definiţia 4. Hiperbola este mulţimea punctelor *M* din plan care au diferenţa distanţelor la două puncte fixe constantă, i.e.

$$|MF - MF'| = 2a. \tag{1.27}$$

Punctele $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$ se numesc *focarele* hiperbolei iar distanţa FF' constituie distanţa focală a hiperbolei.



Teorema 2. Punctul $M(x, y)$ aparţine hiperbolei dacă şi numai dacă

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, b^2 = c^2 - a^2. \tag{1.28}$$

Ecuaţia (1.28) se numeşte *ecuaţia carteziană implicită* a hiperbolei.

Punctele $A'(-a, 0), A(a, 0)$ se numesc *vârfurile hiperbolei.* Axa *Ox* se numesc *axa transversă a hiperbolei*. Asimptotele hiperbolei sunt dreptele de ecuaţie $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Ecuaţiile parametrice ale hiperbolei în $\mathbb{R}^2$ sunt

$$\begin{cases} x = acht, \\ y = bsht, \end{cases} t \in \mathbb{R}. \tag{1.29}$$

Tangenta la hiperbola (1.28) în punctul $M_0(x_0, y_0)$ are ecuaţia

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{1.30}$$

Parabola.

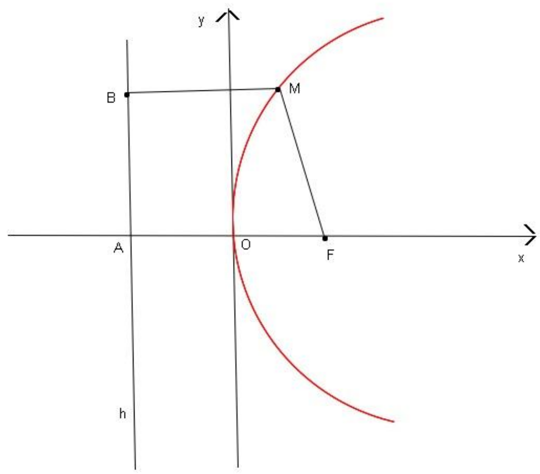
Fie h o dreaptă din plan şi *F* un punct care nu aparţine lui *h*.

Definiţia 5. Parabola este mulţimea punctelor *M* din plan egal depărtate de o dreaptă şi un punct fix,

$$d(M,h)=MF. \quad (1.31)$$

Punctul F se numeşte *focarul* parabolei, iar dreapta h se numeşte directoarea parabolei.

Dreapta AF este axă de simetrie pentru parabola P. Numărul $p=AF$ se numeşte *parametrul parabolei*.



$F\left(\frac{p}{2},0\right),\ h: x=-\frac{p}{2},\ A\left(-\frac{p}{2},0\right).$

Teorema 3. Punctul $M(x,y)$ aparţine parabolei dacă şi numai dacă

$$y^2=2px. \quad (1.32)$$

Ecuaţia (1.32) se numeşte *ecuaţia carteziană implicită* a parabolei.

Ecuaţiile parametrice ale parabolei în $\mathbb{R}^2$ sunt

$$\begin{cases} x=\frac{t^2}{2p}, \\ y=t, \end{cases} t\in\mathbb{R}. \quad (1.33)$$