ALGEBRĂ LINIARĂ
şi
GEOMETRIE ANALITICĂ
culegere de probleme

PAVEL MATEI

Cuprins

PREFAŢĂ

Prezenta culegere de probleme se adresează studenţilor din universităţile tehnice, economice, militare etc. Ea are la bază îndelungata experienţă pedagogică a autorului în cadrul Catedrei de Matematică şi Informatică din Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti şi respectă programa analitică în vigoare (post Bologna).

Obiectivul lucrării îl constituie fixarea cunoştinţelor teoretice şi aprofundarea acestora prin probleme care nuanţează rezultatele teoretice şi pun în evidenţă importanţa lor. La redactare am avut în vedere îmbinarea rigorii matematice cu claritatea şi accesibilitatea prezentării. Intenţia mea a fost ca materialul de faţă să scoată în evidenţă legăturile algebrei liniare cu geometria analitică, cu alte ramuri ale matematicii: analiza matematică, analiza numerică, ecuaţii diferenţiale, serii Fourier, precum şi cu mecanica, teoria elasticităţii etc.

Cartea furnizează celor interesaţi un material de studiu din domeniul algebrei liniare şi al geometriei analitice. Sunt tratate următoarele capitole: complemente de calcul matriceal, vectori liberi, spaţii vectoriale, aplicaţii liniare şi matrice, vectori şi valori proprii, spaţii euclidiene, forme pătratice, elemente de calcul tensorial, planul şi dreapta în spaţiu, conice şi cuadrice.

Fiecare capitol este structurat astfel: un breviar teoretic cu definiţiile noţiunilor folosite, teoremele şi formulele de bază necesare rezolvării problemelor, probleme reprezentative rezolvate în detaliu, probleme propuse, indicaţii şi răspunsuri la problemele propuse.

Pentru cei interesaţi de împrospătarea cunoştinţelor teoretice, recomand cartea "Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială", vol. I ([**8**]*), apărut în anul 2002 la editura AGIR.*

Autorul mulţumeşte călduros referenţilor ştiinţifici-prof. univ. dr. Gavriil Păltineanu şi prof. univ. dr. Sever Angel Popescu-pentru amabilitatea, răbdarea şi efortul depus în parcurgerea materialului. Sugestiile şi observaţiile făcute se regăsesc în forma finală a lucrării. Mulţumiri anticipate tuturor celor care vor face observaţii pe marginea lucrării de faţă.

Bucureşti, iulie 2007

Autorul
email: pavel.matei@gmail.com

CAPITOLUL 1

Complemente de calcul matriceal

1. Preliminarii

Matrice triunghiulare. Fie L o matrice inferior triunghiulară şi U o matrice superior triunghiulară:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & ... & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & ... & l_{nn} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & ... & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & ... & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & ... & u_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantul unei matrice triunghiulare este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală. În consecinţă, o matrice triunghiulară este nesingulară (adică are determinant nenul) dacă şi numai dacă toate elementele de pe diagonala principală sunt nenule. Produsul a două matrice inferior (superior) triunghiulare este o matrice inferior (superior) triunghiulară Inversa unei matrice inferior (superior) triunghiulară nesingulară este o matrice inferior (superior) triunghiulară Dacă $l_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, matricea inferior triunghiulară L este inversabilă, inversa sa $B = (b_{ij})$ fiind dată de formulele

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{l_{ii}}, \text{ dacă } i = j \\ -\dfrac{1}{l_{ii}}\left(\displaystyle\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik}b_{kj}\right), \text{ dacă } i > j \\ 0, \text{ dacă } i < j \end{cases}. \tag{1.1}$$

De asemenea, dacă $u_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, matricea superior triunghiulară U este inversabilă, inversa sa $C = (c_{ij})$ fiind dată de formulele

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{u_{ii}}, \text{ dacă } i = j \\ -\dfrac{1}{u_{ii}}\left(\displaystyle\sum_{k=i+1}^{j} u_{ik}c_{kj}\right), \text{ dacă } i < j \\ 0, \text{ dacă } i > j \end{cases}. \tag{1.2}$$

Factorizarea LU. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică de ordinul n. Dacă minorii principali

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ii} \end{vmatrix}, \; i = \overline{1, n-1}, \tag{1.3}$$

sunt nenuli, atunci există o matrice inferior triunghiulară L cu 1 pe diagonala principală şi o matrice superior triunghiulară U astfel încât $A = LU$, descompunerea fiind unică.

Prezentăm algoritmul de descompunere, conform [**9**]. Fie $A^{(0)} = A$, deci dacă $A^{(0)} = \left(a_{ij}^{(0)}\right)$, atunci $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{i, n}$. Pentru fiecare $r = \overline{1, n-1}$, fixat, se calculează matricea $A^{(r)} = \left(a_{ij}^{(r)}\right)$, ale cărei elemente sunt date de formulele

$$a_{ij}^{(r)} = \begin{cases} a_{ij}^{(r-1)}, \text{ dacă } i = \overline{1, r}, \; j = \overline{1, n} \\ 0, \text{ dacă } i = \overline{k+1, n}, \; j = \overline{1, r} \\ a_{ij}^{(r-1)} - \dfrac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}} \; a_{rj}^{(r-1)}, \text{ dacă } i, j = \overline{r+1, n} \end{cases}.$$

De fapt, $A^{(r)} = L_r \cdot A^{(r-1)}$, $r = \overline{1, n-1}$, unde L_r este matricea care diferă de matricea unitate numai prin coloana r, ale cărei elemente sunt

$$l_{ir} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } i = \overline{1, r} \\ 1, \text{ dacă } i = r \\ -\dfrac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}, \text{ dacă } i = \overline{r+1, n} \end{cases}.$$

O astfel de matrice se numeşte *matrice Frobenius*. Inversa matricei L_r este o matrice de acelaşi tip. Mai precis, dacă $L_r^{-1} = \left(l'_{ij}\right)$, atunci L_r^{-1} diferă de matricea unitate numai prin coloana r, ale cărei elemente sunt

$$l'_{ir} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } i = \overline{1, r} \\ 1, \text{ dacă } i = r \\ \dfrac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}, \text{ dacă } i = \overline{r+1, n} \end{cases}.$$

În final, $L = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot ... \cdot L_{n-1}^{-1}$, iar $U = A^{(n-1)}$.

Metoda eliminării a lui Gauss. Fie sistemul de ecuaţii algebrice liniare:

$$\begin{cases} a_{11} \; x_1 + a_{12} \; x_2 + ... + a_{1n} \; x_n = b_1 \\ a_{21} \; x_1 + a_{22} \; x_2 + ... + a_{2n} \; x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1} \; x_1 + a_{n2} \; x_2 + ... + a_{nn} \; x_n = b_n \end{cases}, \tag{1.4}$$

care se mai scrie matriceal sub forma

$$Ax = b,$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Folosim notaţiile de mai sus. Presupunem că $\Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$. Atunci $a_{rr}^{(r)} \neq 0$, $r = \overline{1,n-1}$, $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$. Metoda constă în eliminarea succesivă a necunoscutelor. Astfel, pentru fiecare r fixat, se elimină necunoscuta x_r din ecuaţiile $r+1$, ..., n, ceea ce este echivalent cu operaţia de înmulţire la stânga a matricei $A^{(r-1)}$ cu matricea Frobenius L_r. Este clar că, la eliminarea unei necunoscute, se modifică şi termenii liberi corespunzători ecuaţiilor din care se elimină necunoscuta. Dacă $b_i^{(0)} = b_i$, $i = \overline{1,n}$, atunci

$$b_i^{(r)} = \begin{cases} b_i^{(r-1)}, \text{ dacă } i \leq r \\ b_i^{(r-1)} - \dfrac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}\, b_r^{(r)}, \text{ dacă } i = \overline{r+1,n} \end{cases}.$$

De aceea, vom lucra cu matricea extinsă a sistemului

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Vom calcula succesiv $\widetilde{A}^{(r)} = L_r \cdot \widetilde{A}^{(r-1)}$, $r = \overline{1,n-1}$, $\widetilde{A}^{(0)} = \widetilde{A}$. În final, se ajunge la sistemul superior triunghiular $Ux = b^{(n-1)}$, unde $U = A^{(n-1)}$. Acest sistem se rezolvă regresiv:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(n-1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j}{a_{ii}^{(n-1)}}, \ i = n-1, ..., 1.$$

Elementele $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(2)}$, ..., $a_{nn}^{(n-1)}$, se numesc *elemente pivot*. În cazul general, se poate întâmpla ca unii pivoţi să se anuleze. Dacă $a_{kk}^{(k)} = 0$ şi cel puţin unul din elementele de pe coloana k şi de pe liniile $k+1$, $k+2$, ..., m este nenul, fie acesta $a_{rk}^{(k)}$, atunci permutăm liniile k şi r între ele şi continuăm eliminarea. Din motive de stabilitate numerică, trebuie să efectuăm permutări de linii nu numai când un element pivot este egal cu zero ci şi când el este foarte mic (în valoare absolută). Pentru a avea erori de rotunjire cât mai mici, se alege elementul pivot, la efectuarea pasului k, astfel: fie r cel mai mic număr întreg pentru care $\left|a_{rk}^{(k)}\right| = \max\limits_{k \leq i \leq m} \left|a_{ik}^{(k)}\right|$. Se permută liniile k şi r astfel încât $a_{rk}^{(k)}$ devine pivot.

Algoritmul lui Gauss se poate aplica şi pentru rezolvarea sistemelor de m ecuaţii cu n necunoscute. Pe parcursul algoritmului pot apare următoarele situaţii:

-coeficienţii unei ecuaţii devin toţi nuli, iar termenul liber corespunzător este nenul, caz în care sistemul este incompatibil;

-coeficienţii unei ecuaţii sunt toţi nuli şi termenul liber corespunzător este nul, atunci ecuaţia respectivă este consecinţă a celorlaltor.

Algoritmul lui Gauss ne permite să rezolvăm simultan p sisteme de ecuaţii cu aceeaşi matrice A, dar cu termeni liberi diferiţi. În acest caz, la fiecare pas operaţiile aplicate asupra matricei sistemului se aplică tuturor celor p vectori coloană termeni liberi. După eliminare vom obţine p sisteme triunghiulare. Un caz particular al acestui procedeu este inversarea unei matrice. Într-adevăr, dacă în relaţia $AA^{-1} =$

I_n, notăm $A^{-1} = X$, atunci $AX = I_n$ sau $Ax_j = e_j$ unde x_j şi e_j sunt coloanele j din X respectiv I_n. Astfel, coloanele matricei A^{-1} sunt soluţiile sistemelor liniare cu termenii liberi respectiv egali cu coloanele matricii unitate.

Metoda lui Cholesky. Reamintim că matricea $A = (a_{ij})$ se numeşte *simetrică* dacă $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$. Matricea simetrică A se numeşte *pozitiv definită* dacă $x^t Ax > 0$, $\forall x \neq 0$ dat de (1.5). Se poate arăta că matricea simetrică $A = (a_{ij})$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, unde Δ_i sunt daţi de (1.3). Metoda lui Cholesky constă în descompunerea unei matrice simetrice şi pozitiv definite A, sub forma $A = R^t R$, unde R este matricea superior triunghiulară

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1,n-1} & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & ... & r_{2,n-1} & r_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pentru început, punem $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{i, n}$. Elementele matricei R se calculează succesiv, linie cu linie, folosind următorul algoritm. Calculul liniei $i \in \overline{1, n}$ se face cu formulele $r_{ii} = \sqrt{a_{ii}^{(i-1)}}$, $r_{ij} = \dfrac{a_{ij}^{(i-1)}}{r_{ii}}$, dacă $j = \overline{i+1, n}$, urmat (dacă $i < n$) de calculele $a_{kj}^{(i)} = a_{kj}^{(i-1)} - r_{ik} r_{ij}$, $k = \overline{i+1, n}$, $j = \overline{k, n}$.

Determinarea rangului unei matrice prin metoda transformări elementare. Prin *transformare elementară* a unei matrice se înţelege una din următoarele operaţii:

- schimbarea a două linii (coloane) între ele;
- înmulţirea tuturor elementelor unei linii (coloane) cu acelaşi factor nenul;
- adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor corespunzătoare ale altei linii (coloane).

Ţinând seama că transformările elementare nu afectează proprietatea unui determinant de a fi nul sau nenul, rezultă că rangul unei matrice nu se modifică dacă asupra matricei se efectuează transformări elementare. În practică, pentru determinarea rangului unei matrice, procedăm astfel: se efectuează transformări elementare asupra matricei până când toate elementele devin nule cu excepţia unor elemente de pe diagonala principală care devin 1. Rangul unei matrice este numărul elementelor 1 de pe diagonala principală.

2. Probleme rezolvate

1. Să se calculeze inversele următoarelor matrice triunghiulare:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluţie. a) Folosind formulele (1.2), se obţine: $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = 1$, $c_{12} = -1$, $c_{23} = -1$, $c_{34} = -1$, $c_{13} = 0$, $c_{24} = 0$, $c_{14} = 0$.

Aşadar $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Un calcul similar conduce la $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Să se rezolve următoarele sisteme prin metoda eliminării a lui Gauss. În fiecare caz să se găsească descompunerea LU a matricei sistemului.

a) $\begin{cases} 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 = 3 \\ 3\,x_1 + x_2 - 5\,x_3 = 0 \\ 4\,x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 = 11 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 = 12 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 13 \\ 4\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 = 14 \end{cases}$.

Soluţie. a) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, iar coloana termen liber este $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Fie $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ matricea extinsă a sistemului. Deoarece

$$\Delta_1 = 2 \neq 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

matricea A se poate scrie sub forma $A = LU$.

Vom aplica metoda eliminării a lui Gauss. Se obţine succesiv

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}^{(1)} = L_1\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{19}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right),$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}^{(2)} = L_2\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{19}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}\right),$$

$$A^{(1)} = L_1 A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{19}{2} \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix},\ A^{(2)} = L_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Trebuie rezolvat sistemul superior triunghiular

$$\begin{cases} 2\,x_1 - \phantom{\frac{5}{2}}x_2 + \phantom{\frac{19}{2}}3\,x_3 = 3 \\ \ \frac{5}{2}\,x_2 - \frac{19}{2}\,x_3 = -\frac{9}{2} \\ \phantom{2\,x_1 - \frac{5}{2}\,x_2} -\frac{6}{5}\,x_3 = -\frac{6}{5} \end{cases},$$

care se rezolvă regresiv. În consecinţă, soluţia sistemului va fi $x_3 = 1$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$.

De asemenea $U = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$ şi

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) În acest caz matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, coloana termen liber b şi matricea extinsă a sistemului $\widetilde{A}$, fiind date de

$$b = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}, \ \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right).$$

Matricea A se poate scrie sub forma $A = LU$, deoarece $\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 160 \neq 0.$

Vom aplica metoda eliminării a lui Gauss. Se obţine succesiv

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{A}^{(1)} = L_1 A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{array}\right),$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{A}^{(2)} = L_2 \widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{array}\right),$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{A}^{(3)} = L_3 \widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{array}\right),$$

$$A^{(1)} = L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix}, \ A^{(2)} = L_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = L_3 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

Rezolvând sistemul superior triunghiular

$$\begin{cases} x_1 + & 2\,x_2 + & 3\,x_3 + & 4\,x_4 = & 11 \\ & -x_2 - & 2\,x_3 - & 7\,x_4 = & -10 \\ & & -4\,x_3 + & 4\,x_4 = & 0 \\ & & & 40\,x_4 = & 40 \end{cases},$$

se obţine $x_4 = 1$, $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$. De asemenea,

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

şi $L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Folosind metoda eliminării a lui Gauss, să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 2\,x_1 + 5\,x_2 - 8\,x_3 = 8 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 - 9\,x_3 = 9 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 - 5\,x_3 = 7 \\ x_1 + 8\,x_2 - 7\,x_3 = 12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 - & 2\,x_2 + & & x_4 = & -3 \\ 3\,x_1 - & x_2 - & 2\,x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 + & x_2 - & 2\,x_3 - & x_4 = & 4 \\ x_1 + & 3\,x_2 - & 2\,x_3 - & 2\,x_4 = & 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3\,x_1 - 5\,x_2 + 2\,x_3 + 4\,x_4 = 2 \\ 7\,x_1 - 4\,x_2 + x_3 + 3\,x_4 = 5 \\ 5\,x_1 + 7\,x_2 - 4\,x_3 - 6\,x_4 = 3 \end{cases}$.

Soluţie. a) Sistemul are 4 ecuaţii şi 3 necunoscute. Deoarece $a_{11} = 2 \neq 0$, putem considera matricea Frobenius $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci $\widetilde{A}^{(1)} = L_1 \widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{11}{2} & -3 & 8 \end{array}\right)$. Procedeul continuă.

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{11}{14} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}^{(2)} = L_2 \widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right),$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}^{(3)} = L_3\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -8 & & 8 \\ 0 & -7 & 7 & & -7 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right).$$

Deci ultima ecuaţie este consecinţă a celorlalte. Sistemul este compatibil determinat. Sistemul dat este echivalent cu sistemul superior triunghiular

$$\begin{cases} 2\,x_1 & +5\,x_2 & -8\,x_3 = & 8 \\ & -7\,x_2 & +7\,x_3 = & -7 \\ & & x_3 = & 1 \end{cases}.$$

Rezolvând găsim $x_3 = 1$, $x_2 = 2$, $x_1 = 3$.

b) Procedând ca mai sus, obţinem succesiv

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}^{(1)} = L_1\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right),$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}^{(2)} = L_2\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ultimele două ecuaţii sunt consecinţă a primelor două. Sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Sistemul

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + & & x_4 = -3 \\ \quad 5\,x_2 - & 2\,x_3 - & 3\,x_4 = 10 \end{cases}$$

este echivalent cu sistemul iniţial şi are o infinitate de soluţii: $x_1 = 1 + \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}b$, $x_2 = 2 + \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b$, $x_3 = a$, $x_4 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Obţinem succesiv:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}^{(1)} = L_1\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{23}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{46}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{38}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right),$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A}^{(2)} = L_2\widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{23}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Sistemul este incompatibil.

4. Folosind metoda eliminării a lui Gauss, să se calculeze inversele matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluţie. a) Problema se reduce la rezolvarea simultană a două sisteme de ecuaţii cu aceeaşi matrice, coloanele termeni liber ale celor două sisteme fiind coloanele matricei unitate I_2. Notăm $\overline{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & -7 & 1 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Pentru a folosi metoda eliminării, fie $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$. Atunci

$$\overline{A}^{(1)} = L_1\overline{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & -7 & 1 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 8 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{111}{8} & \frac{9}{8} & 1 \end{array}\right).$$

Efectuăm, în această ordine următoarele transformări elementare: înmulţim linia 2 cu $-\frac{8}{111}$, apoi înmulţim linia 2 cu 7 şi o adunăm la linia 1. Se obţine matricea

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & \frac{48}{111} & -\frac{56}{111} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{111} & -\frac{8}{111} \end{array}\right),$$

de unde prin împărţirea liniei 1 cu 8, rezultă matricea

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{6}{111} & -\frac{7}{111} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{111} & -\frac{8}{111} \end{array}\right).$$

În acest moment, în stânga barei este matricea unitate I_2, iar în dreapta barei se află A^{-1}, deci $A^{-1} = \frac{1}{111}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$.

b) Procedăm ca mai sus. În acest caz, trebuie rezolvate simultan trei sisteme de ecuaţii cu aceeaşi matrice, coloanele termen liber fiind coloanele matricei unitate I_3. Organizăm calculele astfel:

$$\overline{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \overline{A}^{(1)} = L_1\overline{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \overline{A}^{(2)} = L_2\overline{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Matricea celor trei sisteme a devenit superior triunghiulară. Pentru rezolvarea celor trei sisteme, vom căuta ca prin transformări elementare asupra liniilor să obţinem în stânga, matricea unitate. Facem, în ordine, următoarele transformări elementare asupra matricei $\overline{A}^{(2)}$: $-L_3 \to L_3$, $L_2 - L_3 \to L_1$, $L_1 - L_3 \to L_1$. Se obţine matricea

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

deci $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Să se determine matricea superior triunghiulară R, astfel încât să avem $A = R^t R$, unde $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Să se rezolve apoi sistemul $Ax = b$, unde $b = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Folosim metoda Cholesky. Obţinem succesiv $r_{11} = \sqrt{6}$, $r_{12} = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $r_{13} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $a_{22}^{(1)} = \dfrac{13}{3}$, $a_{23}^{(1)} = \dfrac{2}{3}$, $a_{33}^{(1)} = \dfrac{19}{3}$, $r_{22} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$, $r_{23} = \dfrac{2}{3}$, $a_{33}^{(2)} = \dfrac{40}{13}$, $r_{33} = \dfrac{9}{\sqrt{13}}$, deci $R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{39}} \\ 0 & 0 & \dfrac{9}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$. Sistemul inferior triunghiular $R^t y = b$ are soluţia $y = \begin{pmatrix} \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{11}{\sqrt{39}} \\ \dfrac{9}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$. Sistemul superior triunghiular $Rx = y$ are soluţia $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$.

6. Folosind metoda transformărilor elementare, să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Soluţie. Se obţine succesiv (la fiecare pas, transformările elementare efectuate se găsesc în dreapta matricei. Notaţia $L_1 \to L_1 + L_4$ înseamnă linia 1 se înlocuieşte cu suma liniilor 1 şi 4 etc.)):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 + L_4 \\ L_2 \to L_2 + L_4 \\ L_3 \to L_3 + 3L_4 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4 \to L_4 + L_1 \\ \\ \to \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ 0 & 14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 \to C_2 - 9C_1 \\ C_3 \to C_3 - 5C_1 \\ C_4 \to C_4 - 13C_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ 0 & 14 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \to L_2/7 \\ L_3 \to L_3 - 16L_2 \\ L_4 \to L_4 - 14L_2 \\ \to \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 29/7 & 29/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \to C_3 - 3/7C_2 \\ C_4 \to C_4 - 10/7C_2 \\ \to \end{matrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 29/7 & 29/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_3 \to 7/29 L_3 \\ L_4 \to L_4 - L_3 \\ \to \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{array}{c} C_4 \to C_4 - C_3 \\ \to \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci $rang A = 3$.

3. Probleme propuse

1. Folosind metoda eliminării a lui Gauss, să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 5 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 1 \\ 2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 = 11 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 - 2\,x_3 + 3\,x_4 = -4 \\ x_2 - 3\,x_3 + 4\,x_4 = -5 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 - 5\,x_4 = 12 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 - 5\,x_3 = 5 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2\,x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 + 7\,x_4 = 1 \\ 4\,x_1 - 6\,x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 = 2 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 - 11\,x_3 - 15\,x_4 = 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 - 3\,x_4 = 2 \\ 5\,x_1 + x_2 - x_3 + 2\,x_4 = -1 \\ 2\,x_1 - x_2 + x_3 - 3\,x_4 = 4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3\,x_3 = -1 \\ 2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 = 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 = 0 \\ 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 = 0 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \\ x_1 + 17\,x_2 + 4\,x_3 = 0 \end{cases}$.

2. Folosind metoda eliminării a lui Gauss, să se calculeze inversele următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

3. Folosind metoda lui Cholesky, să se rezolve următoarele sisteme, precizându-se, în fiecare caz, descompunerea R^tR a matricei A a sistemului respectiv.

a) $\begin{cases} 5\,x_1 - 2\,x_2 - 2\,x_3 = 2 \\ -2\,x_1 + 6\,x_2 = 14 \\ -2\,x_1 + 4\,x_3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 = 3 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 = 1 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2\,x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = \ \ 2 \\ \ \ x_1 + 2\,x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = \ \ 1 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + 2\,x_3 + \ \ x_4 = -2 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + 2\,x_4 = -1 \end{cases}$.

4. Folosind metoda transformărilor elementare, să se găsească rangul matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. a) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. c) $x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}a - \dfrac{1}{16}b$, $x_2 = a$, $x_3 = -\dfrac{11}{8}b$, $x_4 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. d) Sistemul este incompatibil. e) Sistemul este incompatibil. f) $x_1 = 11t$, $x_2 = t$, $x_3 = -7t$, $t \in \mathbb{R}$. **2.** a) $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & 1 & -10 \\ 6 & -2 & -4 \\ -5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; c) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **3.** a) $R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{65}} \\ 0 & 0 & \dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.; b) $R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \dfrac{2}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. ; c) $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1$. **4.** a) 3. b) 2.

CAPITOLUL 2

Vectori liberi

1. Preliminarii

Fie $\mathcal{S}$ spaţiul geometriei elementare. O pereche ordonată $(A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ se numeşte *vector legat* (sau *segment orientat*) cu *originea* în A şi *extremitatea* în B şi se notează $\overrightarrow{AB}$. Dacă $A \neq B$, dreapta determinată de punctele A şi B se numeşte *dreapta suport* a vectorului $\overrightarrow{AB}$. Vectorul legat $\overrightarrow{AA}$ se numeşte *vector legat nul,* dreapta sa suport fiind nedeterminată. Se numeşte *lungimea* (*norma* sau *modulul*) unui vector legat $\overrightarrow{AB}$, distanţa dintre punctele A şi B (relativ la o unitate de măsură fixată) şi se notează $\|\overrightarrow{AB}\|$. Evident, lungimea vectorului legat nul este egală cu zero. Doi vectori legaţi nenuli $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au *aceeaşi direcţie* dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid. Un vector legat nenul $\overrightarrow{AB}$ determină unic dreapta AB şi un sens de parcurs pe această dreaptă: sensul de la A la B. Doi vectorii legaţi nenuli care au aceeaşi direcţie, au *aceeaşi orientare (acelaşi sens)* dacă extremităţile lor se află în acelaşi semiplan determinat de dreapta care uneşte originile lor, în cazul în care dreptele suport sunt paralele, dar nu coincid; în cazul în care dreptele lor suport coincid, atunci cei doi vectori au aceeaşi orientare dacă sensurile determinate pe dreapta suport comună coincid Doi vectori legaţi care au aceeaşi direcţie, dar nu au aceeaşi orientare, se spune că au *orientări opuse* (*sensuri opuse*). Vectorii legaţi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt *egali* dacă şi numai dacă $A \equiv C$ şi $B \equiv D$.

Se numeşte *vector liber* mulţimea tuturor vectorilor legaţi care au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime. Vom nota vectorii liberi cu litere mici: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$,.... Dacă $\overrightarrow{a}$ este vector liber, un vector legat $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a}$ se numeşte *reprezentant* al vectorului liber $\overrightarrow{a}$.

Adunarea vectorilor se face cu regula triunghiului sau regula paralelogramului. Dacă $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{b}$, atunci $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ este vectorul liber de reprezentant $\overrightarrow{AC}$. Definiţia este corectă (nu depinde de alegerea reprezentanţilor). Pentru orice trei puncte A, B, $C \in \mathcal{S}$, are loc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (*relaţia lui Chasles*). Dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\ \overrightarrow{u}$ este vectorul de lungime $|\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|$, având acelaşi sens cu $\overrightarrow{u}$ dacă $\lambda > 0$ şi sens contrar lui $\overrightarrow{u}$ dacă $\lambda < 0$.

Fie A, $B \in \mathcal{S}$, $A \neq B$. Punctul $M \in AB$ *împarte segmentul* $[AB]$ *în raportul* $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ dacă $\overrightarrow{MA} = \lambda\ \overrightarrow{MB}$. În acest caz are loc

$$\overrightarrow{r}_M = \frac{1}{1-\lambda}\,(\overrightarrow{r}_A - \lambda\ \overrightarrow{r}_B). \tag{1.1}$$

Dacă $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, iar $M(x, y, z)$ împarte segmentul $[AB]$ în raportul λ, atunci

$$x = \frac{1}{1-\lambda}\,(x_A - \lambda\ x_B)\,,\ y = \frac{1}{1-\lambda}(y_A - \lambda\ y_B),\ z = \frac{1}{1-\lambda}\,(z_A - \lambda\ z_B)\,.$$

În particular, dacă $M(x,y,z)$ este mijlocul lui $[AB]$, se obţine

$$x=\frac{1}{2}\left(x_A+x_B\right),\; y=\frac{1}{2}(y_A+y_B),\; z=\frac{1}{2}\left(z_A+z_B\right).$$

Vectorii liberi care au aceeaşi direcţie se numesc *coliniari*. Dacă vectorii nenuli $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt coliniari, atunci există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{u}=\lambda\,\overrightarrow{v}$. Dacă $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt necoliniari, atunci $\alpha\,\overrightarrow{u}+\beta\,\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\alpha=\beta=0$. Vectorii liberi se numesc *coplanari* dacă reprezentanţii lor sunt paraleli cu un plan. Pentru orice vector $\overrightarrow{u}$ coplanar cu vectorii necoliniari $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ unic determinaţi astfel încât $\overrightarrow{u}=\alpha\,\overrightarrow{a}+\beta\,\overrightarrow{b}$ (*descompunerea unui vector după două direcţii date*). Dacă $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ sunt necoplanari, atunci $\alpha\,\overrightarrow{a}+\beta\,\overrightarrow{b}+\gamma\,\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$. În acest caz, pentru orice vector $\overrightarrow{u}\in\mathcal{V}_3$ există α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$ unic determinaţi astfel încât $\overrightarrow{u}=\alpha\,\overrightarrow{a}+\beta\,\overrightarrow{b}+\gamma\,\overrightarrow{c}$. (*descompunerea unui vector după trei direcţii necoplanare*).

Fie $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}\in\mathcal{V}_3\backslash\{\overrightarrow{0}\}$. Numărul real $\varphi\in[0,\pi]$, care reprezintă unghiul dintre dreptele suport a doi reprezentanţi ai vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$, având origine comună, se numeşte *unghiul* dintre vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

Produse cu vectori

Fie $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}\in\mathcal{V}_3\backslash\{\overrightarrow{0}\}$ şi $\varphi\in[0,\pi]$ unghiul dintre $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

1. Produsul scalar a doi vectori liberi. Se numeşte *produs scalar* al vectorilor $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}\in\mathcal{V}_3$ numărul real notal $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$, definit prin:

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\begin{cases}\|\overrightarrow{a}\|\cdot\|\overrightarrow{b}\|\cos\varphi & \text{, dacă } \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\in\mathcal{V}_3\backslash\{\overrightarrow{0}\}\\ 0 & \text{, dacă } \overrightarrow{a}=\overrightarrow{0} \text{ sau } \overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}\end{cases}.$$

Proprietăţi ale produsului scalar a doi vectori liberi

1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a},\forall\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\in\mathcal{V}_3$;

2) $\lambda(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})=(\lambda\overrightarrow{a})\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}\cdot(\lambda\overrightarrow{b}),\ \forall\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\in\mathcal{V}_3,\ \lambda\in\mathbb{R}$;

3) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c},\forall\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\in\mathcal{V}_3$;

4) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}>0,\ \forall\overrightarrow{a}\in\mathcal{V}_3\backslash\{\overrightarrow{0}\}$; $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=0\Longleftrightarrow\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$;

5) $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt ortogonali $\Longleftrightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$;

6) dacă $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b}=b_1\overrightarrow{i}+b_2\overrightarrow{j}+b_3\overrightarrow{k}$, atunci:

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\|\overrightarrow{a}\|^2;$$

7) dacă $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}\in\mathcal{V}_3\backslash\{\overrightarrow{0}\}$, atunci

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\cdot\|\overrightarrow{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}};$$

8) dacă A, $B\in\mathcal{S}$ şi $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, atunci distanţa dintre punctele A şi B, notată $d\,(A,B)$ este dată de

$$d\,(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}.$$

2. Produsul vectorial a doi vectori liberi. Se numeşte *produs vectorial* al vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ şi se notează $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$, vectorul:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{cases} \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \sin\varphi \cdot \overrightarrow{e} & \text{, dacă } \overrightarrow{a} \text{ şi } \overrightarrow{b} \text{ sunt necoliniari} \\ \overrightarrow{0} & \text{, dacă } \overrightarrow{a} \text{ şi } \overrightarrow{b} \text{ sunt coliniari} \end{cases},$$

unde $\overrightarrow{e}$ este un versor perpendicular pe planul determinat de reprezentanţii lui $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ având aceeaşi origine şi orientat după *"regula burghiului"* şi anume în sensul de înaintare a unui burghiu când $\overrightarrow{a}$ se roteşte către $\overrightarrow{b}$ printr-un unghi minim.

Proprietăţi ale produsului vectorial a doi vectori liberi

1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}), \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$;

2) $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \lambda\overrightarrow{b}, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$;

3) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$;

4) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}, \forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$;

5) $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{b}\|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$; *(identitatea lui Lagrange)*

6) Dacă $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$, atunci

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\overrightarrow{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\overrightarrow{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

7) $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|$ este *aria paralelogramului* construit pe suporturile reprezentanţilor lui $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ având aceeaşi origine. *Aria unui triunghi ABC* este dată de

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

3. Produsul mixt a trei vectori liberi. Se numeşte *produs mixt* al vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$, numărul real, notat $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, care este egal cu produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}).$$

Proprietăţi ale produsului mixt a trei vectori liberi

1) Dacă $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k}$, atunci

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

2) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$;

3) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, Fie$\overrightarrow{c}$ sunt coplanari;

4) $\left|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\right|$ este *volumul paralelipipedului oblic* construit pe suporturile reprezentanţilor vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ consideraţi cu origine comună;

5) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

2. Probleme rezolvate

1. Fie vectorii necoliniari $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$. Să se determine α, astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ să fie coliniari.

Soluţie. Din $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b}$, rezultă $(\alpha - \lambda)\overrightarrow{u} + (3 - \lambda)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ fiind necoliniari, rezultă că $\alpha - \lambda = 0$, $3 - \lambda = 0$, deci $\lambda = 3$ şi $\alpha = 3$.

2. Fie O un punct fixat. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă există α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, nenule simultan, astfel ca

$$\alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \text{ şi } \alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{2.1}$$

Soluţie. Dacă A, B, C sunt coliniare, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$. Atunci are loc (2.1) cu $\alpha = \lambda - 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = 1$. Reciproc, dacă, de exemplu, $\alpha \neq 0$, atunci $\beta + \gamma \neq 0$ şi $\overrightarrow{OA} = \dfrac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{OB} + \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$. Dar $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$. Înlocuind, obţinem $\overrightarrow{BA} = \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$, deci punctele A, B, C sunt coliniare.

3. Fie O un punct fixat şi A, B, C trei puncte necoliniare. Pentru orice punct M din planul ABC există α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC} \text{ şi } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Afirmaţia reciprocă este adevărată?

Soluţie. Vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ fiind coplanari, există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mu\,(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$. În consecinţă $\overrightarrow{OM} = (-\lambda - \mu + 1)\,\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB} + \mu\,\overrightarrow{OC}$. Luăm $\alpha = -\lambda - \mu + 1$, $\beta = \lambda$, $\gamma = \mu$. Reciproc, dacă $\alpha = 1 - \beta - \gamma$, introducând în relaţia dată, rezultă $\overrightarrow{AM} = \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC}$ adică punctele M, A, B, C sunt coplanare.

4. Fie G centrul de greutate al unui triunghi ABC şi O un punct oarecare din spaţiu. Să se arate că $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Soluţie. Dacă AD este mediană, $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC}$, deci $\overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. De asemenea din $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GD}$ obţinem $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(OA + 2OD)$, de unde rezultă afirmaţia.

5. Fie n puncte materiale M_1, M_2, ..., M_n, de mase m_1, m_2, ..., m_n, respectiv. Să se arate că există un punct G unic determinat astfel încât

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + ... + m_n\overrightarrow{GM_n} = \overrightarrow{0}. \tag{2.2}$$

Dacă M este un punct oarecare, atunci

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + ... + m_n\overrightarrow{GM_n} = (m_1 + m_2 + ... + m_n)\,\overrightarrow{MG}. \tag{2.3}$$

Soluţie. Punctul G, dacă există, este unic. Într-adevăr, dacă G_1 ar fi un alt punct ce satisface

$$m_1\overrightarrow{G_1M_1} + m_2\overrightarrow{G_1M_2} + ... + m_n\overrightarrow{G_1M_n} = \overrightarrow{0},$$

atunci, scazând din (2.2) şi ţinând seama că $\overrightarrow{G_1M_i} - \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{G_1G}$, $1 \leq i \leq n$, rezultă că $(m_1 + m_2 + ... + m_n)\overrightarrow{G_1G} = \overrightarrow{0}$. Cum $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0$, obţinem că $G_1 = G$.

În ceea ce priveşte existenţa punctului G, fie O un punct fixat. Cum $\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}$, $1 \leq i \leq n$, rezultă că

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_1 + m_2 + ... + m_n}(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + ... + m_n\overrightarrow{OM_n}).$$

Punctul O fiind fix, iar punctele M_i şi numerele reale m_i, $1 \leq i \leq n$, fiind date, rezultă că punctul G este bine determinat prin relaţia de mai sus. Relaţia (2.3) se obţine folosind faptul că $\overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_i}$, $1 \leq i \leq n$, şi (2.2).

Punctul G dat de (2.2) se numeşte *baricentrul (centrul de greutate al) sistemului de puncte* $(M_1, M_2, ..., M_n)$ *relativ la sistemul de ponderi* $(m_1, m_2, ..., m_n)$.

6. Fie $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$, $\|\overrightarrow{u}\| = 3$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2}$, $\mu(\theta) = \dfrac{\pi}{4}$, θ fiind unghiul dintre $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$. Să se calculeze:

a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$;

b) lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ şi unghiul dintre ele.

Soluţie. a) Cum $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3$, rezultă că $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -6$. b) Diagonalele paralelogramului sunt $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, deci $\overrightarrow{d_1} = -\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{d_2} = 2\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v}$. Atunci $\|\overrightarrow{d_1}\| = \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{d_2}\|^2 = (2\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v}) \cdot (2\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v}) = 26$. În consecinţă, $\|\overrightarrow{d_2}\| = \sqrt{26}$ şi $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}}{\|\overrightarrow{d_1}\| \ \|\overrightarrow{d_2}\|} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

7. Fie A, B, C, D patru puncte în spaţiu. Să se demonstreze *egalitatea lui Euler*:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

Soluţie. Dacă O este un punct din spaţiu, egalitatea rezultă folosind $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ etc. Din această egalitate obţinem:

a) În triunghiul ABC, fie H punctul de intersecţie a două înalţimi, fie ele AH şi BH. Aplicând egalitatea lui Euler punctelor A, B, C, H, rezultă că şi CH este înălţime. Astfel se demonstrează vectorial concurenţa înălţimilor într-un triunghi.

b) Dacă într-un tetraedru există două perechi de muchii opuse perpendiculare, atunci şi cea de a treia pereche de muchii opuse este formată din muchii perpendiculare.

8. Se dau punctele $A(2, -1, 3)$, $B(3, 3, 1)$, $C(4, 2, 2)$. Să se calculeze perimetrul, aria triunghiului ABC precum şi lungimea înălţimii din B.

Soluţie. Cum $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{21}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{14}$, perimetrul este $\sqrt{21} + \sqrt{3} + \sqrt{14}$. Dar $4S^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 \ \|\overrightarrow{AC}\|^2 \sin^2 A = \|\overrightarrow{AB}\|^2 \ \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 \ \|\overrightarrow{AC}\|^2 \cos^2 A$, deci $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 \ \|\overrightarrow{AC}\|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$. Cum $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, obţinem că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$. Atunci $S = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$, iar $h_B = \dfrac{2S}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{\sqrt{38}}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}}$.

9. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, ştiind că $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{b}\| = 4$ şi $\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Soluţie. $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\, \|\overrightarrow{b}\| \sin\dfrac{\pi}{3} = 6$, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = 7\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$. Aria paralelogramului este$\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\| = \|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\| = 42$.

10. Să se calculeze aria triunghiului ABC, unde $A\,(-1,1,0)$, $B\,(2,-1,3)$, $C\,(4,2,2)$.

Soluţie. Deoarece $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, atunci $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -7\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 13\overrightarrow{k}$, deci $S = \dfrac{1}{2}\cdot \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{299}$.

11. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$, ştiind că $\|\overrightarrow{u}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{w}\| = 2$, $\sphericalangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \dfrac{\pi}{3}$, iar unghiul dintre vectorul $\overrightarrow{u}$ şi planul determinat de vectorii $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{w}$ este $\dfrac{\pi}{4}$.

Soluţie. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 17(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \|\overrightarrow{u}\|\, \|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| \cos\dfrac{\pi}{4} = 6$, deoarece $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \sin\dfrac{\pi}{3} = 3$. Atunci volumul este $V = 17 \cdot 3 = 51$.

12. Să se determine volumul V şi înălţimea h din D ale tetraedrului $ABCD$, dacă $A\,(1,-5,4)$, $B\,(0,-3,1)$, $C\,(2,4,3)$, $D\,(1,0,1)$.

Soluţie. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 13$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 25\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 11\overrightarrow{k}$. $V = \dfrac{|\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\,|}{6} = \dfrac{13}{6}$. Aria $\triangle ABC$ este $\dfrac{\sqrt{762}}{2}$, deci $h = \dfrac{13}{\sqrt{762}}$.

3. Probleme propuse

1. Fie ABC un triunghi şi M un punct variabil în spaţiu. Să se arate că vectorul $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ nu depinde de punctul M.

2. Dacă O este punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului $ABCD$, iar M un punct oarecare, atunci $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

3. Fie AB şi CD două coarde perpendiculare în cercul de centru O şi I punctul lor de intersecţie. Să se arate că $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IO}$.

4. Să se arate că G este centrul de greutate al unui triunghi ABC dacă şi numai dacă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. În plus, dacă AM, BN, CP sunt medianele triunghiului ABC, atunci triunghiurile MNP şi ABC au acelaşi centru de greutate.

5. Fie A_i, $1 \le i \le 6$ mijloacele laturilor hexagonului convex $ABCDEF$. Să se arate că:

a) se poate construi un triunghi cu segmentele $[A_1A_2]$, $[A_3A_4]$, $[A_5A_6]$;
b) triunghiurile $A_1A_3A_5$ şi $A_2A_4A_6$ au acelaşi centru de greutate.

6. Punctul C se află pe segmentul $[AB]$ la $\dfrac{3}{5}$ de B. Dacă M este un punct oarecare, să se exprime $\overrightarrow{MC}$ în funcţie de $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{MB}$.

7. Dacă punctele A_1, B_1, C_1 împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectiv în acelaşi raport λ, să se arate că segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ pot fi laturile unui triunghi.

8. Dacă AD este bisectoarea unghiului A a triunghiului ABC, $D \in (BC)$, iar b şi c sunt lungimile laturilor $[AC]$ şi respectiv $[AB]$, atunci

$$\overrightarrow{r_D} = \frac{b \cdot \overrightarrow{r_B} + c \cdot \overrightarrow{r_C}}{b+c}.$$

9. În trapezul isoscel $ABCD$ se cunosc baza mare $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, una din laturile neparalele $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$, iar măsura unghiului A este $\dfrac{\pi}{3}$. Să se descompună după $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ vectorii care dau celelalte laturi şi diagonalele trapezului.

10. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ ale unui triunghi ABC, iar I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci are loc

$$a \cdot \overrightarrow{r_A} + b \cdot \overrightarrow{r_B} + c \cdot \overrightarrow{r_C} = (a+b+c) \cdot \overrightarrow{r_I}.$$

11. Fie A şi B două puncte distincte. Determinaţi mulţimea punctelor M pentru care există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{r_M} = (1-t) \cdot \overrightarrow{r_A} + t \cdot \overrightarrow{r_B}$. Caz particular $t \in [0,1]$.

12. Se dau punctele $A\,(2,-3,4)$, $B\,(3,2,-1)$, $C\,(0,1,-2)$. Să se determine un punct D astfel încât $ABCD$ să fie paralelogram.

13. a) Să se arate că punctele $A\,(1,5,-2)$, $B\,(9,-1,22)$, $C\,(-3,8,-14)$ sunt coliniare;

b) Pentru ce valoare a lui λ punctele A, B şi $D\,(-7,11,-2+12\lambda)$ sunt coliniare?

c) Punctele A, B şi $E\,(-7,5-2\lambda,-2+12\lambda)$ pot fi coliniare?

14. Să se determine λ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + (\lambda-1)\,\overrightarrow{j} + (6-\lambda)\,\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 2\,\overrightarrow{i} - \lambda\overrightarrow{j} + (\lambda+4)\,\overrightarrow{k}$ să fie coplanari. Pentru $\lambda = \dfrac{20}{9}$ să se descompună vectorul $\overrightarrow{a}$ după direcţiile lui $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$.

15. Fie $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{p}$ trei vectori necoplanari.

a) Sunt coplanari vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n} - 3\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{m} + 4\overrightarrow{n} + 9\overrightarrow{p}$?

b) Să se descompună vectorul $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{m} + 7\overrightarrow{n} + 21\overrightarrow{p}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.

16. Fie $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vectori nenuli. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\|$.

17. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{a}$ sunt ortogonali.

18. Dacă $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt doi versori ortogonali, atunci vectorii $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ sunt ortogonali.

19. Să se interpreteze geometric egalităţile $\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2+\|\overrightarrow{b}\|^2$.

20. Să se arate că $\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|^2+\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{a}\|^2+\|\overrightarrow{b}\|^2)$. Interpretare geometrică.

21. Dacă G este baricentrul sistemului de puncte materiale $(M_1, M_2, ..., M_n)$ relativ la sistemul de ponderi $(m_1, m_2, ..., m_n)$, iar M un punct arbitrar, să se arate că $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\|\overrightarrow{MM_i}\|^2 = \|\overrightarrow{MG}\|^2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\|\overrightarrow{GM_i}\|^2$ (*Stewart*).

22. Să se calculeze rezultanta forţelor $\overrightarrow{F_1} = 2\overrightarrow{m}+3\overrightarrow{n}+\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{m}-3\overrightarrow{n}$, dacă $\|\overrightarrow{m}\| = 1$, $\|\overrightarrow{p}\| = 2$, $\measuredangle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{p}) = \dfrac{\pi}{3}$.

23. Dacă $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{c}\| = 1$ şi $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, să se calculeze $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$.

24. Fie vectorii $\overrightarrow{m}$ şi $\overrightarrow{n}$, unde $\|\overrightarrow{m}\| = 2$, $\|\overrightarrow{n}\| = \sqrt{2}$, $\measuredangle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \dfrac{\pi}{4}$. Să se determine λ astfel ca vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{m}-3\overrightarrow{n}$ şi $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}$ să fie ortogonali.

25. Să se calculeze unghiul dintre medianele duse din vârfurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic isoscel.

26. Pentru ce valoare a lui λ, vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+(\lambda-1)\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$ sunt ortogonali?

27. Fie vectorii $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$, unde $\|\overrightarrow{a}\| = 3$, $\|\overrightarrow{b}\| = 4$, iar $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt ortogonali. Să se calculeze lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ şi unghiul dintre ele.

28. Se dau punctele $A\,(1,-1,1)$, $B\,(2,-1,-1)$, $C\,(0,2,4)$. Să se calculeze perimetrul şi unghiurile triunghiului ABC.

29. Se dau punctele $A\,(12,-4,3)$, $B\,(3,12,-4)$, $C\,(2,3,-4)$. Să se arate că:
a) triunghiul AOB este isoscel;
b) triunghiul AOC este dreptunghic;
c) să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

30. Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC, ştiind că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$.

31. Să se determine un vector de normă 26 situat în planul xOy, care să fie perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{a} = 12\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}-7\overrightarrow{k}$.

32. Se consideră vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}-7\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$. Să se calculeze unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$, precum şi $pr_{\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}\overrightarrow{b}$.

33. Să se determine un versor al bisectoarei unghiului C al triunghiului ABC, unde $A\,(0,1,1)$, $B\,(-1,1,2)$, $C\,(1,2,3)$.

34. Să se arate că punctele $A\,(-4,0,1)$, $B\,(0,1,1)$, $C\,(4,4,0)$, $D\,(4,6,-1)$ sunt coplanare. Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

35. Să se calculeze $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})$. Interpretare geometrică.

36. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}$.

37. Să se calculeze aria şi lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$, ştiind că $\|\overrightarrow{a}\| = 4$, $\|\overrightarrow{b}\| = 5$, $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

38. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Să se determine un versor perpendicular pe cei doi vectori.

39. Fie vectorii necoliniari $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$. Pentru ce valoare a lui α vectorii $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sunt coliniari?

40. Se dau punctele $A(-1, 2, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(2, 3, 4)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC şi lungimea înălţimii din C pe AB.

41. Fie vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Să se determine un vector $\overrightarrow{v}$ astfel încât $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.

42. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$, ştiind că $\|\overrightarrow{u}\| = 4$, $\|\overrightarrow{v}\| = 5$, iar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 10$.

43. Fie triunghiul ABC, cu $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{p} - 4\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{p} + 5\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{p}$ şi $\overrightarrow{q}$ fiind doi versori perpendiculari. Să se calculeze lungimea înălţimii din C.

44. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, unde $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n} + 3\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{m} + 7\overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, unde $\|\overrightarrow{m}\| = 1$, $\|\overrightarrow{n}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{p}\| = 2\sqrt{3}$, $\measuredangle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}) = \dfrac{\pi}{3}$, iar unghiul dintre vectorul $\overrightarrow{m}$ şi planul determinat de vectorii $\overrightarrow{n}$ şi $\overrightarrow{p}$ are măsura $\dfrac{\pi}{4}$.

45. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$ sunt coplanari.

46. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ nu sunt coplanari. Să se descompună vectorul $\overrightarrow{v} = 6\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 14\overrightarrow{k}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

47. Să se determine λ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \lambda\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = (\lambda - 1)\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ să fie coplanari. Pentru $\lambda = 2$ să se descompună vectorul $\overrightarrow{a}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$.

48. Se dau vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Se cere:

a) volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$;

b) lungimea înălţimii paralelipipedului pe baza determinată de $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

49. Să se determine λ astfel încât volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ să fie 10.

50. Se dau punctele $A(3, 1, 4)$, $B(5, 2, 1)$, $C(1, 1, -6)$, $D(1, 2, 3)$. Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$ şi lungimea înălţimii tetraedrului dusă din B pe planul ACD.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. De exemplu, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$, deci $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 3\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)$ $+\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$. **2.** Se adună relaţiile $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DO}$ şi se ţine seama că $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{0}$. **3.** Fie E şi F mijloacele coardelor $[AB]$ respectiv $[CD]$. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}$, deci $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Dar $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OE}$, deci $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IO} + 2\overrightarrow{OE}$. Similar $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IO} + 2\overrightarrow{OF}$. Dar $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OI}$. În consecinţă, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IO}$. **4.** Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, fie D mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GD}$, deci $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Reciproc, din $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, obţinem $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$. Cum $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GD}$, rezultă $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GD}$, deci punctele G, C, D sunt coliniare, adică G se află pe mediana GD. Similar se arată că G se află pe celelalte două mediane, deci G este centrul de greutate al triunghiului ABC. În plus, $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{GB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. În mod asemănător se arată că $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, deci $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0}$, adică G este centrul de greutate al triunghiului MNP. **5.** a) $\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A_3A_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{A_5A_6} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, deci $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_5A_6} = \overrightarrow{0}$. b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului $A_1A_3A_5$, atunci $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_5} = \overrightarrow{0}$. Dar $\overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{GA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{GA_4} = \overrightarrow{GA_3} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{GA_6} = \overrightarrow{GA_5} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$. În consecinţă $\overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_4} + \overrightarrow{GA_6} = \overrightarrow{0}$, deci G este centrul de greutate al triunghiului $A_2A_4A_6$. **6.** $\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$. Din (1.1) se obţine $\overrightarrow{MC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{b}$. **7.** Din (1.1), avem: $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{1-\lambda}(\overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{1-\lambda}(\overrightarrow{BC} - \lambda\overrightarrow{BA})$, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{1-\lambda}(\overrightarrow{CA} - \lambda\overrightarrow{CB})$. Adunând cele trei relaţii şi ţinând seama că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$, rezultă că $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$. **8.** Din teorema bisectoarei, rezultă că $\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\,\overrightarrow{DC}$. Relaţia dorită se obţine din formula (2.2), cu $\lambda = -\frac{c}{b}$. **9.** Fie AD bisectoarea unghiului A. Din teorema bisectoarei avem $\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} = \frac{a}{b+c}$, deci $BD = \frac{ac}{b+c}$. Cum BI este bisectoarea unghiului B, aplicând din nou teorema bisectoarei, găsim $\overrightarrow{IA} = -\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$. Folosind (1.1) şi $\overrightarrow{r}_D = \frac{1}{b+c}(b \cdot r_B + c \cdot r_C)$, se obţine relaţia din enunţ. **10.** Relaţia din enunţ se mai scrie sub forma $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, deci M se află pe dreapta AB şi reciproc. Dacă $t = 0$, atunci $M \equiv A$, iar dacă $t = 1$, atunci $M \equiv B$. Din relaţia de mai sus, dacă $t \in (0, 1)$, rezultă că $M \in (AB)$. **11.** $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$. $D(-1, -4, 3)$. **12.** a) $\overrightarrow{AB} = 8\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 24\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{BC} = -12\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - 36\overrightarrow{k}$, deci $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. b) $\overrightarrow{AD} = -8\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 12\lambda\overrightarrow{k}$. Din $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AD}$ se obţine $\alpha = -1$, $\lambda = -2$. c) $\overrightarrow{AE} = -8\overrightarrow{i} - 2\lambda\overrightarrow{j} + 12\lambda\overrightarrow{k}$. Condiţia $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AE}$ conduce la relaţiile: $8 = -8\alpha$, $-6 = -2\lambda\alpha$, $24 = 12\lambda\alpha$. Din primele două relaţii se obţine $\alpha = -1$, $\lambda = -3$, care nu o verifică pe a treia, deci punctele nu pot fi coliniare. **13.** *Metoda I.* Din $\overrightarrow{a} = \alpha \overrightarrow{b} + \beta \overrightarrow{b}$ se obţin relaţiile $\alpha + 2\beta = 1$, $\alpha(\lambda - 1) - \beta\lambda = 2$, $\alpha(6 - \lambda) + \beta(\lambda + 4) = 4$, de unde rezultă $\lambda = \frac{20}{9}$. *Metoda II.* Se pune condiţia $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = 0$. $\overrightarrow{a} = \frac{4}{3}\overrightarrow{b} - \frac{1}{6}\overrightarrow{c}$. **14.** *Metoda I.* Dacă vectorii ar fi coplanari, atunci ar exista $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w}$, ceea ce conduce la sistemul de ecuaţii: $\alpha + \beta = 1$, $2\alpha + 4\beta = 1$, $-3\alpha + 9\beta = 1$, care nu are soluţii. *Metoda II.* Calculăm produsul mixt. $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{n} + 12\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{p} + 30\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{p}$, deci $(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 30\,(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{p})$, $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 12\,(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{p})$, $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 2\,(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{m}, \overrightarrow{n})$. Atunci $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 20\,(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}) \neq 0$. $\overrightarrow{a} = \frac{9}{10}\overrightarrow{u} - \frac{17}{20}\overrightarrow{v} + \frac{39}{20}\overrightarrow{w}$. **15.** Se ţine seama că $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \|\overrightarrow{a}\|^2 - \|\overrightarrow{b}\|^2$. **16.** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a} = 0$. **17.** Din $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$ şi $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, rezultă că $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. **18.** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. **19.** $\overrightarrow{DC} = \frac{\|\overrightarrow{a}\| - \left\|\overrightarrow{b}\right\|}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b} - \frac{\left\|\overrightarrow{b}\right\|}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b} + \frac{\|\overrightarrow{a}\| - \left\|\overrightarrow{b}\right\|}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$. **20.** Se adună relaţiile $\|\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 \pm 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \|\overrightarrow{b}\|^2$. **21.** Se ţine seama că $\overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_i}$, $1 \leq i \leq n$, $\left\|\overrightarrow{MM_i}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2 + 2\overrightarrow{GM_i} \cdot \overrightarrow{MG} + \left\|\overrightarrow{GM_i}\right\|^2$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{0}$. **22.** $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 3\overrightarrow{m} + \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{p} = 1$, $\|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\|^2 = 9\|\overrightarrow{m}\|^2 + 6\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{p} + \|\overrightarrow{p}\|^2$, deci $\|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\| = \sqrt{19}$. **23.** Din $0 = \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2 + \|\overrightarrow{c}\|^2 + 2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})$, rezultă $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = -\frac{3}{2}$. **24.** $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} = 2$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2\lambda - 2$, deci $\lambda = 1$. **25.** Dacă măsura unghiului ABC este $\frac{\pi}{2}$, atunci medianele BD şi CE sunt date de $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Dacă $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = x$, atunci $\left\|\overrightarrow{BD}\right\| = \left\|\overrightarrow{CE}\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CE} = x^2$. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. **26.** $\lambda = 1$. **27.** $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$. Cum $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, avem $\|\overrightarrow{d_1}\| = 5$, $\|\overrightarrow{d_2}\| = 3\sqrt{41}$, $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = -93$, deci $\cos\theta = -\frac{31}{5\sqrt{41}}$. **28.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$, $P = \sqrt{5} + \sqrt{19} + \sqrt{38}$, $\cos A = -\frac{7}{\sqrt{95}}$, $\cos B = \frac{12}{\sqrt{190}}$, $\cos C = \frac{26}{19\sqrt{2}}$. **29.** a) $OA = OB = 13$. b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, c) $P = \sqrt{386} + \sqrt{198} + \sqrt{82}$. **30.** $\cos A = \frac{11}{3\sqrt{19}}$, $\cos B = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{57}}$, $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. **31.** Dacă $\overrightarrow{v} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j}$, atunci $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 26$ şi $12\alpha + 5\beta = 0$. Se obţine $\overrightarrow{v} = \pm(10\overrightarrow{i} + 24\overrightarrow{j})$. **32.** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, deci unghiul căutat este $\frac{\pi}{2}$. $pr_{\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}}\overrightarrow{b} = \frac{(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|} = -\frac{1}{3}$. **33.** Fie CD, $D \in (AB)$, bisectoarea unghiului C. $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{6}$, deci D este mijlocul segmentului $[AB]$. Atunci $D\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \frac{3}{2}\overrightarrow{k}$, $\|\overrightarrow{CD}\| = \frac{\sqrt{22}}{2}$. Un versor al bisectoarei este $\overrightarrow{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{22}}(3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k})$. **34.** $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$,

$\overrightarrow{AC} = 8\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$, deci $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, adică punctele sunt coplanare.O altă cale: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0$. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$, $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = 9$, deci $S_{\triangle ABC} = \dfrac{9}{2}$. Similar $S_{\triangle ACD} = 9$, deci $S_{ABCD} = \dfrac{27}{2}$. **35.** $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$, deci, dacă S este aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, iar d_1, d_2 sunt diagonalele acestui paralelogram şi φ unghiul diagonalelor, atunci $S = \dfrac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$. **36.** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}$ etc. **37.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 10\sqrt{3}$, $\vec{u} \times \vec{v} = 7\vec{a} \times \vec{b}$, $S = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 70\sqrt{3}$, $d_1 = \|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{229}$, $d_2 = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{669}$. **38.** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $S = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{35}$. $\vec{v} = \dfrac{\pm 1}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dfrac{1}{\sqrt{35}}(\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k})$. **39.** $\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha + 2)(\vec{u} \times \vec{v})$, $\alpha = -2$. **40.** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 5(-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, $h_C = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **41.** Dacă $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{v} \times \vec{a} = (y + z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} - (x + y)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Obţinem $x = t - 2$, $y = 1 - t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. **42.** Se poate aplica identitatea lui Lagrange. $10\sqrt{3}$. **43.** $\dfrac{19}{5}$. **44.** $\vec{b} \times \vec{c} = 5\vec{m} \times \vec{n} + 7\vec{p} \times \vec{m} + 18\vec{p} \times \vec{n}$, deci $(\vec{m}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{m}, \vec{p}, \vec{n})$, $(\vec{n}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{n}, \vec{p}, \vec{m})$, $(\vec{p}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{p}, \vec{m}, \vec{n})$. Atunci $V = |(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p})| = \|\vec{m}\| \, \|\vec{n} \times \vec{p}\| \cos\dfrac{\pi}{4} = 6$. **45.** $\vec{n} \times \vec{p} = 2\vec{a} \times \vec{b} + 6\vec{b} \times \vec{c} + 4\vec{a} \times \vec{c}$, deci $(\vec{m}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{m}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{m}, \vec{a}, \vec{c}) = 2(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$. Atunci $(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}) = 0$, deci vectorii sunt coplanari. **46.** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -1$, deci vectorii nu sunt coplanari. $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$. **47.** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 3\lambda - 6 = 0$, deci $\lambda = 2$. $\vec{a} = -2\vec{b} + \vec{c}$. **48.** $V = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right| = 1$. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, deci $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{3}$. $h = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **49.** $V = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right| = |5\lambda + 10|$. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$. **50.** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 44$, deci $V = \dfrac{22}{3}$. $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = 10\vec{i} + 18\vec{j} - 2\vec{k}$. $S_{\triangle ACD} = \sqrt{107}$, $h = \dfrac{22}{\sqrt{107}}$.

CAPITOLUL 3

Spaţii vectoriale

1. Preliminarii

Fie $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$. O mulţime nevidă V se numeşte *spaţiu vectorial* (sau *liniar*) *peste corpul* K dacă este înzestrată cu două legi de compoziţie: una internă, notată aditiv, $(x, y) \to x + y$ şi una externă, notată multiplicativ $(\alpha, x) \to \alpha x$, cu următoarele proprietăţi:

1) $x + y = y + x$, $\forall x,\, y \in V$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x,\, y,\, z \in V$;
3) există un element 0_V astfel încât $x + 0_V = x$, $\forall x \in V$;
4) pentru orice $x \in V$ există un element $x' \in V$ astfel încât $x + x' = 0_V$;
5) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$;
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall \alpha,\, \beta \in K$, $\forall x \in V$;
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha,\, \beta \in K$, $\forall x \in V$;
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x,\, y \in V$.

Elementele lui V se numesc *vectori*, iar elementele lui K se numesc *scalari*. Când $K = \mathbb{R}$, V se mai numeşte *spaţiu vectorial real*, iar $K = \mathbb{C}$, V se mai numeşte *spaţiu vectorial complex*.

Fie V un K-spaţiu vectorial. O submulţime nevidă $S \subset V$ se numeşte *subspaţiu vectorial* dacă:

1) $x,\, y \in S \Rightarrow x + y \in S$;
2) $x \in S$, $\alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in S$,

sau, echivalent,

$$\alpha x + \beta y \in S,\ \forall x, y \in S,\ \forall \alpha, \beta \in K.$$

Aşadar, submulţimea S însăşi este spaţiu vectorial peste corpul K.

Fie $A \subset V$. Vectorul $x \in V$ este *combinaţie liniară de vectori* din A, dacă există v_1,..., $v_n \in A$ şi α_1, ..., $\alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. În acest caz, scalarii α_1, ..., α_n se numesc *coeficienţii combinaţiei liniare*. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare (finite) de vectori din A este subspaţiu vectorial al lui V, numit *subspaţiu vectorial generat de mulţimea* A sau *acoperire liniară* a lui A şi se notează $Sp(A)$. Spunem că submulţimea A a lui V este *sistem de generatori* pentru V sau că A *generează* V, dacă orice $x \in V$ este combinaţie liniară de vectori din A. Dacă A este finită, atunci V se numeşte *finit generat*. Mulţimea $\{x_1, ..., x_n\} \subset V$ se numeşte *liniar independentă (*sau *liberă)* dacă din $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V$ rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Aceeaşi mulţime se numeşte *liniar dependentă (*sau *legată)* dacă există scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V$. În acest caz, se mai spune că vectorii $x_1, ..., x_n$ sunt *liniar independenţi* respectiv *liniar dependenţi*. O mulţime infinită de vectori din V se numeşte *liniar independentă (*sau *liberă)* dacă orice submulţime finită a sa este liniar independentă. O submulţime de vectori din V se numeşte *bază*, dacă este liniar independentă şi generează V.

Spaţiul vectorial V este de *dimensiune finită* (sau *finit dimensional*) dacă este finit generat. Orice două baze într-un spaţiu de dimensiune finită au acelaşi număr de elemente. Se numeşte *dimensiune* a unui spaţiu vectorial finit dimensional V şi se notează $\dim V$, numărul de vectori dintr-o bază oarecare a sa. Un spaţiu vectorial se numeşte *infinit dimensional* când conţine o mulţime infinită liberă.

Dacă dim $V = n$, atunci orice submulţime liberă $S = \{e_1, e_2, ..., e_k\} \subset V$, cu $k \leq n$, poate fi completată până la o bază $\{e_1, e_2, ...e_k, e_{k+1}, ...e_n\}$ a lui V. Şi anume, dacă $V_k = Sp\{e_1, e_2, ...e_k\} = V$, nu avem ce să completăm. Dacă $V_k \neq V$, luăm $e_{k+1} \in V \diagdown V_k$ şi construim $V_{k+1} = Sp\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}\}$. Continuăm apoi raţionamentul cu V_{k+1} in locul lui V_k. Deoarece $\dim V = n$, putem face acest lucru până la $V_{n=k+(n-k)}$, deci procedeul se termină după $n - k$ paşi.

Dacă $B \subset V$ este un sistem finit de vectori, se numeşte *rangul* sistemului B, numărul maxim de vectori liniar independenţi din B. Este clar că $rangB = \dim Sp(B)$. Fie E o bază în V. Matricea M, ale cărei coloane conţin coodonatele (unic determinate) ale fiecărui vector din B în raport cu baza E, se numeşte *matricea sistemului* B în raport cu baza E. Are loc $rangB = rangM$. (*teorema rangului*).

Teorema lui Grassmann. Dacă şi sunt subspaţii finit dimensionale ale unui spaţiu vectorial, atunci

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Dacă $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi $B' = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ sunt două baze în spaţiul vectorial V, atunci matricea pătrată, unic determinată $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, care satisface relaţiile $f_j = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$, $1 \leq j \leq n$, se numeşte *matricea de trecere* de la baza B la baza B'. În plus, dacă $x \in V$ se scrie $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i f_i$, atunci $(x_1, x_2, ..., x_n)^t = C\,(x'_1, x'_2, ..., x'_n)^t$.

2. Probleme rezolvate

1. a) Să se arate că în $\mathbb{R}^3$, vectorii $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ formează un sistem de generatori şi sunt liniar independenţi. Să se calculeze coordonatele vectorului $x = (1, 2, 3)$ în raport cu baza $\{v_1, v_2, v_3\}$;

b) Aceeaşi problemă în $\mathbb{R}^4$, pentru vectorii $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1, -1)$, $v_3 = (1, -1, 1, -1)$, $v_4 = (1, -1, -1, 1)$ şi $x = (1, 2, 1, 1)$;

c) Aceeaşi problemă în $\mathbb{R}^2$, pentru vectorii $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (3, -5)$, şi $x = (1, -3)$.

Soluţie. a) Fie $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Vom arăta că putem determina α_1, α_2, α_3 astfel încât $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Această relaţie se mai scrie $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, de unde $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_3$. Rezultă $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_2 = x_2 - x_1$, $\alpha_3 = x_3 - x_2$, deci v_1, v_2, v_3 formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$. În plus, vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi. Întradevăr, dacă pentru α_1, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ are loc relaţia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0)$, atunci $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, de unde $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. În consecinţă, $\{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3$. Ţinând seama de prima parte, dacă

$x = (1, 2, 3) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, obţinem coordonatele lui x în raport cu această bază: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, deci $(1, 2, 3) = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$.

b) Din $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$ obţinem $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = x_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = x_2$, $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = x_3$, $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = x_4$, deci $\alpha_1 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, $\alpha_3 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$, $\alpha_4 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$. Prin urmare, v_1, v_2, v_3, v_4 formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$. În plus, vectorii v_1, v_2, v_3, v_4 sunt liniar independenţi. Într-adevăr, dacă $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0, 0, 0, 0)$, din relaţiile anterioare găsim $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Aşadar, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este o bază în $\mathbb{R}^4$. Totodată, dacă $x = (1, 2, 1, 1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$, obţinem coordonatele lui x în raport cu această bază: $\alpha_1 = \frac{5}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{4}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{4}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{4}$.

c) Similar, din $x = (x_1, x_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ rezultă $\alpha_1 + 3\alpha_2 = x_1$, $2\alpha_1 - 5\alpha_2 = x_2$, deci $\alpha_1 = \frac{1}{11}(5x_1 + 3x_2)$, $\alpha_2 = \frac{1}{11}(2x_1 - x_2)$, iar din $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (0, 0)$, găsim $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. În consecinţă, $\{v_1, v_2\}$ este o bază în $\mathbb{R}^2$. Folosind relaţiile anterioare, se obţin coordonatele lui x în această bază: $\alpha_1 = -\frac{4}{11}$, $\alpha_2 = \frac{5}{11}$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că funcţiile $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_i(x) = (x - a)^i$, $0 \le i \le n$, formează o bază în spaţiul funcţiilor polinomiale de grad cel mult n pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Dacă $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (x - a)^k = 0$, atunci, derivând de n ori relaţia, obţinem $\lambda_n \cdot n! = 0$, deci $\lambda_n = 0$. Derivând acum, de $n - 1$ ori relaţia $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x - a)^k = 0$, obţinem $\lambda_{n-1} \cdot (n - 1)! = 0$, deci $\lambda_{n-1} = 0$. Procedeul continuă. În final, rezultă $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, deci polinoamele p_0, p_1, ...,p_n sunt liniar independente. Să arătăm că aceste polinoame formează un sistem de generatori. Într-adevăr, dacă $f(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot (x - a) + ... + \alpha_n (x - a)^n$, atunci $\alpha_0 = f(a)$. Derivând, obţinem $\alpha_1 = \frac{f'(a)}{1!}$. Derivând din nou, găsim $\alpha_2 = \frac{f''(a)}{2!}$. Continuând procedeul, rezultă că $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $0 \le k \le n$. În consecinţă, funcţiile polinomiale p_k, $0 \le k \le n$, formează un sistem de generatori, deci o bază în spaţiul funcţiilor polinomiale de grad cel mult n pe $\mathbb{R}$.

3. În spaţiul vectorial real al funcţiilor continue pe $\mathbb{R}$, cu valori reale, să se arate că funcţiile 1, $\cos t$, $\cos^2 t$, $\cos^3 t$ sunt liniar independente. Aceeaşi problemă pentru funcţiile 1, $\cos t$, $\cos 2t$, $\cos 3t$

Soluţie. Fie α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$ astfel ca $\alpha \cdot 1 + \beta \cos t + \gamma \cos^2 t + \delta \cos^3 t = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Dând succesiv lui t valorile 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π, se obţin relaţiile $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, $\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma + \frac{\sqrt{2}}{4}\delta = 0$, $\alpha = 0$, $\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0$. Determinantul sistemului omogen astfel obţinut este nenul, deci admite numai soluţia banală $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Prin urmare, funcţiile 1, $\cos t$, $\cos^2 t$, $\cos^3 t$ sunt liniar independente. Similar, dacă $\alpha \cdot 1 + \beta \cos t + \gamma \cos 2t + \delta \cos 3t = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ţinând seama că $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$, rezultă că $\alpha - \gamma + (\beta - 3\delta)\cos t + 2\gamma \cos^2 t + 4\delta \cos^3 t = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Deoarece funcţiile 1, $\cos t$, $\cos^2 t$, $\cos^3 t$ sunt liniar independente, obţinem

$\alpha-\gamma=0$, $\beta-3\delta=0$, $2\gamma=0$, $4\delta=0$, deci $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, adică funcţiile 1, $\cos t$, $\cos 2t$, $\cos 3t$ sunt liniar independente.

4. Fie $x=(1,2,3)\in\mathbb{R}^3$. Să se determine coordonatele vectorului x în baza $B'=\{e_1',e_2',e_3'\}$, unde $e_1'=(1,0,1)$, $e_2'=(1,-1,0)$, $e_3'=(2,0,1)$.

Soluţie. Fie $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Deoarece $e_1'=e_1+e_3$, $e_2'=e_1-e_2$, $e_3'=2e_1+e_3$, rezultă că matricea de trecere de la baza B la baza B' este $C=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Totodată $e_1=-e_1'+e_3'$, $e_2=-e_1'-e_2'+e_3'$, $e_3=2e_1'-e_3'$, deci matricea de trecere de la baza B' la baza B este $C^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

Dacă $x=x_1'e_1'+x_2'e_2'+x_3'e_3'$, atunci se obţine $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$.
Aşadar $x=3e_1'-2e_2'$.

5. Fie S_1, S_2 două subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^4$, generate de vectorii $f_1=(1,1,0,0)$, $f_2=(0,1,1,0)$, $f_3=(0,0,1,1)$ respectiv $g_1=(1,0,1,0)$, $g_2=(0,2,1,1)$, $g_3=(1,2,1,2)$. Să se afle dimensiunile şi câte o bază în S_1, S_2, S_1+S_2 şi $S_1\cap S_2$.

Soluţie. Deoarece $rang\{f_1,f_2,f_3\}=3$, $rang\{g_1,g_2,g_3\}=3$, rezultă că $\dim S_1=\dim S_2=3$, iar $\{f_1,f_2,f_3\}$ şi $\{g_1,g_2,g_3\}$ sunt baze în S_1 respectiv S_2. Pe de altă parte, în mod evident, $\{f_1,f_2,f_3,g_1,g_2,g_3\}$ generează $S_1+S_2\subseteq\mathbb{R}^4$. Deoarece $rang\{f_1,f_2,f_3,g_1\}=4$, atunci $\dim(S_1+S_2)=4$, adică $S_1+S_2=\mathbb{R}^4$. Putem lua ca bază în S_1+S_2 vectorii f_1,f_2,f_3,g_1, de exmplu. Din teorema lui Grassmann, $\dim(S_1\cap S_2)=2$. Vom determina o bază în $S_1\cap S_2$. Dacă $u\in S_1\cap S_2$, atunci $u=\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3=\alpha' g_1+\beta' g_2+\gamma' g_3$. Se obţine sistemul liniar

$$\begin{cases}\alpha=\alpha'+\gamma'\\ \alpha+\beta=2\beta'+2\gamma'\\ \beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'\\ \gamma=\beta'+2\gamma'\end{cases}.$$

Din ecuaţiile 1, 2, 4, rezultă $\alpha=\alpha'+\gamma'$, $\beta=-\alpha'+2\beta'+\gamma'$, $\gamma=\beta'+2\gamma'$. Introducând în ecuaţia 3, găsim $\alpha'=\beta'+\gamma'$. Atunci $u=\beta'(1,2,2,1)+\gamma'(2,2,2,2)$. Vectorii $(1,2,2,1)$ şi $(2,2,2,2)$ fiind liniar independenţi, rezultă că formează o bază în $S_1\cap S_2$.

3. Probleme propuse

1. Fie $V=(0,\infty)$. Să se arate că în raport cu operaţiile $x\oplus y=xy$, $x,y\in V$ şi $\alpha\otimes x=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in V$, V devine spaţiu vectorial real. Să se arate că vectorii $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ sunt liniar dependenţi.

2. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $v\in V$, $v\neq 0_V$. Definim

$$x\oplus y=x+y-v,\ x,y\in V,$$
$$\alpha\otimes x=\alpha x+f(\alpha)v,\ \alpha\in K,\ x\in V,$$

unde $f:K\to K$. Să se determine $f(\alpha)$ astfel încât V înzestrat cu cele două operaţii să fie spaţiu vectorial.

3. Să se precizeze care din următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$.

a) $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$;
b) $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$;
c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$;
d) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2 = 0\}$;
e) $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 2x_2\}$.

4. În $M_n(\mathbb{R})$, fie $S_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$, $S_2 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$. Să se arate că S_1 şi S_2 sunt subspaţii vectoriale ale lui $M_n(\mathbb{R})$ şi $M_n(\mathbb{R}) = S_1 \oplus S_2$. Să se găsească dimensiunile acestor subspaţii.

5. Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ şi $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, ..., x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ 1 \leq i \leq m\}$. Să se arate că S este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

6. Fie V un spaţiu vectorial. Să se arate că dacă $v_1,\ v_2,\ v_3 \in V$ sunt liniar independenţi atunci şi vectorii $w_1 = v_1+v_2+v_3$, $w_2 = v_1+v_2-v_3$, $w_3 = v_1-v_2+v_3$ sunt liniar independenţi.

7. Să se arate că vectorii $v_1 = (1, 2, 2, 1)$, $v_2 = (5, 6, 6, 5)$, $v_3 = (-1, -3, 4, 0)$, $v_4 = (0, 4, -3, -1)$ sunt liniar dependenţi. Să se scrie v_4 ca o combinaţie liniară de $v_1,\ v_2,\ v_3$.

8. Să se arate că vectorii $v_1 = (2, 1, -3)$, $v_2 = (3, 2, -5)$, $v_3 = (1, -1, 1)$ formează o bază a lui $\mathbb{R}^3$. Să se determine coordonatele vectorilor $x = (4, 4, -9)$ şi $y = (6, 2, -7)$ în această bază.

Aceeaşi problemă pentru vectorii $v_1' = (1, 2, 1)$, $v_2' = (1, 1, 1)$, $v_3' = (1, 3, 2)$, $x' = (2, 1, 1)$, $y' = (1, 1, 0)$.

9. Să se arate că vectorii $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ formează o bază a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine coordonatele vectorului x în raport cu această bază:

a) $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 2, 1)$, $v_4 = (1, 3, 2, 3)$;
$x = (1, -4, -2, -5)$;
b) $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, -1, 1)$;
$x = (0, 0, 0, 1)$.

10. Sunt liniar independente matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$? Dar funcţiile $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = e^{2x}$?

11. Să se determine dimensiunea subspaţiului generat şi o bază a subspaţiului generat de vectorii:

a) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1)$, $v_4 = (0, 0, 0)$;
b) $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (2, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 2, 3, 4)$,
$v_5 = (0, 1, 2, 3)$.

12. Să se determine dimensiunile sumei şi intersecţiei subspaţiilor generate:

a) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (3, 4, -2)$, $u_3 = (2, 2, -1)$, respectiv $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$;

b) $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$, $u_3 = (1,3,1,3)$, respectiv $v_1 = (1,2,0,2)$, $v_2 = (1,2,1,2)$, $v_3 = (3,1,3,1)$.

13. Să se completeze sistemul format din vectorii $v_1 = (2,-1,3)$, $v_2 = (4,1,1)$ la o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

14. Să se arate că funcţiile $f_1 = t$, $f_2 = t^2+1$, $f_3 = t^2+t$ formează o bază în spaţiul funcţiilor polinomiale de grad cel mult 2. Să se determine coordonatele funcţiilor t^2+2t+4 respectiv t^2+3 în raport cu această bază.

15. Să se găsească o bază în spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului $x_1+x_2-x_3=0$, $x_1-x_2+x_4=0$, $x_2+x_4=0$.

16. În spaţiul vectorial al funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ să se arate că funcţiile $f_1(t)=\sin t$, $f_2(t)=\cos t$, $f_3(t)=t$ sunt liniar independente.

17. Să se găsească rangul matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

17. Fie S_1 şi S_2 subspaţiile vectoriale ale lui $\mathbb{R}^4$ date de: $S_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_2+x_3+x_4=0\}$, $S_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1+x_2=0,\ x_3=2x_4\}$. Să se găsească dimensiunile şi baze ale acestor subspaţii, precum şi ale subspaţiilor $S_1\cap S_2$, S_1+S_2.

18. În $\mathbb{R}^2$ fie $x = 2f_1+f_2$, unde $f_1=(-1,1)$, $f_2=(2,3)$. Să se determine coordonatele lui x în baza $\{g_1,g_2\}$, unde $g_1=(1,3)$, $g_2=(3,8)$.

19. Să se determine matricea de trecere de la baza $B=\{f_1,f_2,f_3\}$ la baza $C=\{g_1,g_2,g_3\}$, dacă $f_1=(1,0,0)$, $f_2=(1,1,0)$, $f_3=(1,1,1)$, $g_1=(3,0,2)$, $g_2=(-1,1,4)$, $g_3=(3,5,2)$. Cum se schimbă coordonatele unui vector când se trece de la baza B' la baza B?

20. Fie a_1, a_2, ..., a_n numere reale distincte. Se consideră funcţiile polinomiale $L_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $1\le i\le n$,

$$L_i(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})...(x-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)...(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})...(a_i-a_n)}.$$

Să se arate că:

a) Să se calculeze $L_i(a_j)$, $1\le i,j\le n$;

b) Să se arate că funcţiile L_i, $1\le i\le n$, sunt liniar independente;

c) Să se arate că funcţiile L_i, $1\le i\le n$, formează o bază în spaţiul vectorial real al funcţiilor polinomiale de grad cel mult $n-1$.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. $(V,\oplus)$ coincide cu grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive, deci au loc proprietăţile 1)-4). Elementul neutru este 1, simetricul unui $x\in V$ este $\frac{1}{x}$. 5) $1\otimes x = x^1 = x$, $\forall x\in V$. 6) $\alpha\otimes(\beta\otimes x) = \alpha\otimes(x^\beta) = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)\otimes x$, $\forall\alpha$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\forall x\in V$. 7) $(\alpha+\beta)\otimes x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha\cdot x^\beta = x^\alpha\oplus x^\beta = (\alpha\otimes x)\oplus(\beta\otimes x)$, $\forall\alpha$, $\beta\in\mathbb{R}$, $x\in V$. 8) $\alpha\otimes(x\oplus y) = (xy)^\alpha = x^\alpha\cdot y^\alpha = x^\alpha\oplus y^\alpha = (\alpha\otimes x)\oplus(\alpha\otimes y)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall x$, $y\in V$. $\sqrt{2} = \alpha\otimes\sqrt{3}$, unde $\alpha = \log_3 2$. **2.** Proprietăţile 1)-4) sunt satisfăcute, elementul neutru fiind v, iar simetricul unui $x\in V$ este $x' = -x+2v$.

5)$\Rightarrow f(1)=0$. 6)$\Rightarrow \alpha f(\beta)+f(\alpha)=f(\alpha\beta)$. 7)$\Rightarrow f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)-1$. 8)$\Rightarrow f(\alpha)=1-\alpha$. **3.** S_1 şi S_5 sunt subspaţii vectoriale. S_2 şi S_3 nu sunt subspaţii vectoriale deoarece nu conţin $(0,0,0)$. S_4 nu este subspaţiu vectorial deoarece $(\alpha+\beta)^2 \neq \alpha^2+\beta^2$. **4.** Deoarece $(A+B)^t = A^t+B^t$ si $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, rezultă imediat că S_1 şi S_2 sunt subspaţii vectoriale ale lui $M_n(\mathbb{R})$. Pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, putem scrie $A = B+C$, unde $B = \frac{1}{2}(A+A^t)$ şi $C = \frac{1}{2}(A-A^t)$. Cum $(A^t)^t = A$, rezultă că $B^t = B$, $C^t = -C$, deci $B \in S_1$ şi $C \in S_2$. Prin urmare, $M_n(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$. Dacă $A \in S_1 \cap S_2$, atunci $A = A^t$ şi $A = -A^t$, deci A este matricea nulă. În consecinţă, $M_n(\mathbb{R}) = S_1 \oplus S_2$. Matricele E_i, $i=\overline{1,n}$, ale căror elemente sunt $e_{jk}=1$, dacă $j=k=i$ şi $e_{jk}=0$ în rest, precum şi matricele F_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, $i<j$, ale căror elemente sunt $f_{ij}=f_{ji}=1$ şi $f_{lk}=0$ în rest, formează o bază în S_1, deci $\dim S_1 = n+(n-1)+(n-2)+...+1 = \frac{n^2+n}{2}$. Matricele G_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, $i<j$, ale căror elemente sunt $g_{ij}=-g_{ji}=1$ şi $g_{lk}=0$ în rest, formează o bază în S_2, deci $\dim S_2 = (n-1)+(n-2)+...+1 = \frac{n^2-n}{2}$. **5.** Dacă $x=(x_1,...,x_n)\in S$, $y=(y_1,...,y_n)\in S$ şi $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha x_j+\beta y_j) = \alpha\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \beta\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0$. **6.** $\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2+\lambda_3 w_3 = 0_V \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)v_1+(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)v_2+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)v_3 = 0_V$. Cum v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi, rezultă $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, $\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0$, $\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0$, deci $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. **7.** $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3+\lambda_4v_4=(0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1+5\lambda_2-\lambda_3=0$, $2\lambda_1+6\lambda_2-3\lambda_3+4\lambda_4=0$, $2\lambda_1+6\lambda_2+4\lambda_3-3\lambda_4=0$, $\lambda_1+5\lambda_2-\lambda_4=0$. Determinantul sistemului fiind nul, are soluţii nenule. $v_4 = \frac{11}{4}v_1 - \frac{3}{4}v_2 - v_3$. **8.** Relaţia $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=(0,0,0)$ conduce la sistemul omogen $2\alpha+3\beta+\gamma=0$, $\alpha+2\beta-\gamma=0$, $-3\alpha-5\beta+\gamma=0$, al cărui determinant este nenul. Atunci $\alpha=\beta=\gamma=0$, deci vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi. Cum $\dim\mathbb{R}^3=3$, rezultă că vectorii v_1, v_2, v_3 formează o bază în $\mathbb{R}^3$. $x=v_1+v_2-v_3$, $y=v_1+v_2+v_3$. De asemenea, $x'=v_1'+2v_2'-v_3'$, $y'=2v_1'-v_3'$. **9.** Determinantul de ordinul 4, ale cărui coloane conţin componentele vectorilor v_1, v_2, v_3, v_4, este nenul, deci vectorii sunt liniar independenţi. Cum $\dim\mathbb{R}^4=4$, rezultă că vectorii v_1, v_2, v_3, v_4 formează o bază în $\mathbb{R}^4$. a) $x=3v_1+v_2-3v_4$. b) $x=\frac{1}{3}v_1+\frac{1}{6}v_2-\frac{2}{3}v_3+\frac{1}{2}v_4$. **10.** Condiţia $\alpha A+\beta B+\gamma C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ conduce la sistemul omogen $2\alpha+5\beta+\gamma=0$, $\alpha-3\beta-\gamma=0$, $5\alpha+2\beta+2\gamma=0$, $3\alpha+\beta-3\gamma=0$, a cărui matrice are rangul 3. În consecinţă, $\alpha=\beta=\gamma=0$, deci matricele sunt liniar independente. Derivând de două ori relaţia $\alpha e^x+\beta e^{-x}+\gamma e^{2x}=0$, obţinem $\alpha e^x-\beta e^{-x}+2\gamma e^{2x}=0$, $\alpha e^x+\beta e^{-x}+4\gamma e^{2x}=0$. Determinantul sistemului omogen cu necunoscutele α, β, γ, este nenul, deci $\alpha=\beta=\gamma=0$, adică funcţiile sunt liniar independente. **11.** a) Cum $v_4=(0,0,0)$ şi v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi, rezultă că $\dim Sp(\{v_1,v_2,v_3,v_4\})=3$. b) Rangul matricei sistemului de vectori este 3, deci $\dim Sp(\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\})=3$. $v_3=v_2-v_1$. Putem alege ca bază $\{v_1,v_2,v_4\}$. **12.** a) Fie $S_1=Sp(\{u_1,u_2,u_3\})$, $S_2=Sp(\{v_1,v_2\})$, $\dim S_1=2$, $\dim S_2=2$, S_1+S_2 este generat de u_1, u_2, u_3, v_1, v_2. Cum u_1, u_2, v_1 sunt liniar independenţi, rezultă că $\dim(S_1+S_2)=3$, deci $\dim(S_1\cap S_2)=1$ (teorema lui Grassmann). b) Fie $S_1=Sp(\{u_1,u_2,u_3\})$, $S_2=Sp(\{v_1,v_2,v_3\})$, $\dim S_1=2$, $\dim S_2=3$, S_1+S_2 este generat de u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3. Cum u_1, v_1, v_2, v_3 sunt

liniar independenţi, rezultă că $\dim(S_1+S_2)=4$, deci $\dim(S_1\cap S_2)=1$. **13.** v_1 şi v_2 sunt liniar independenţi. Putem alege $v_3=(1,0,0)\notin Sp(\{v_1,v_2\})$. **14.** Relaţia $\alpha t+\beta(t^2+1)+\gamma(t^2+t)=0$ conduce la sistemul $\beta+\gamma=0$, $\alpha+\gamma=0$, $\beta=0$. Atunci $\alpha=\beta=\gamma=0$, deci polinoamele t, t^2+1, t^2+t sunt liniar independente. Pentru orice polinom de gradul 2 avem $at^2+bt+c=(b-a+c)t+c(t^2+1)+(a-c)(t^2+t)$, deci cele trei polinoame formează un sistem de generatori, adică o bază. $t^2+2t+4=5t+4(t^2+1)-3(t^2+t)$, $t^2+3=2t+3(t^2+1)-2(t^2+t)$. **15.** $S=\{(2t,t,3t,-t)\mid t\in\mathbb{R}\}$, $\dim S=1$, $v=(2,1,3,-1)$. **16.** Derivând de două ori relaţia $\alpha\sin t+\beta\cos t+\gamma=0$, obţinem $\alpha\cos t-\beta\sin t=0$, $-\alpha\sin t-\beta\cos t=0$. Determinantul sistemului omogen cu necunoscutele α, β, γ, este nenul, deci $\alpha=\beta=\gamma=0$, adică funcţiile sunt liniar independente. **17.** $S_1=\{(a,b,c,-b-c)\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$, $\dim S_1=3$, bază: $u_1=(1,0,0,0)$, $u_2=(0,1,0,-1)$, $u_3=(0,0,1,-1)$, $S_2=\{(a,-a,2b,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$, $\dim S_1=2$, bază: $v_1=(1,-1,0,0)$, $v_2=(0,0,2,1)$. $\dim(S_1+S_2)=4$, se poate lua ca bază $\{u_1,u_2,u_3,v_1\}$. Atunci $\dim(S_1\cap S_2)=1$, $S_1\cap S_2=\{(3t,-3t,2t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$. Vectorul $v=(3,-3,2,1)$ este bază în $S_1\cap S_2$. **18.** $x=(0,5)=\alpha g_1+\beta g_2=(\alpha+3\beta,3\alpha+8\beta)$, deci $\alpha+3\beta=0$, $3\alpha+8\beta=5$, adică $x=15g_1-5g_2$. **19.** $g_1=3f_1-2f_2+2f_3$, $g_2=-2f_1-3f_2+4f_3$, $g_3=-2f_1+3f_2+2f_3$, deci $C=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&-3&3\\2&4&2\end{pmatrix}$. Dacă $x=x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3=x'_1g_1+x'_2g_2+x'_3g_3$, atunci $x_1=3x'_1-2x'_2-2x'_3$, $x_2=-2x'_1-3x'_2+3x'_3$, $x_3=2x'_1+4x'_2+2x'_3$. **20.** a) $L_i(a_j)=\begin{cases}0, \text{ dacă } j\neq i\\ 1, \text{ dacă } j=i\end{cases}$. b) Dacă $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, sunt astfel ca $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iL_i(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$, atunci dând succesiv lui x valorile a_1, a_2, ..., a_n, obţinem $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$. c) Dacă p este un polinom de grad cel mult $n-1$, atunci din $p(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_iL_i(x)$, rezultă $\alpha_i=p(a_i)$, $i=\overline{1,n}$. Prin urmare, mulţimea funcţiilor L_i, $1\le i\le n$, este sistem de generatori, deci bază.

CAPITOLUL 4

Aplicaţii liniare şi matrice

1. Preliminarii

Fie V şi W două $K-$spaţii vectoriale. Funcţia $T : V \to W$ se numeşte *aplicaţie liniară* (*morfism* de spaţii vectoriale) dacă:

a) $T(x+y) = Tx + Ty$, $\forall x, y \in V$;

b) $T(\alpha x) = \alpha Tx$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x \in V$.

În fapt, T este aplicaţie liniară dacă şi numai dacă $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$, $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall x, y \in V$.

Dacă aplicaţia liniară $T : V \to W$ este bijectivă, atunci T se numeşte *izomorfism* de spaţii vectoriale şi se notează $V \simeq W$. Aplicaţia liniară $T : V \to V$ se mai numeşte *endomorfism* al lui V, iar un izomorfism $T : V \to V$ se numeşte *automorfism* al lui V. Orice spaţiu vectorial de dimensiune n este izomorf cu K^n.

Mulţimea $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \textit{ liniară}\}$ este un $K-$spaţiu vectorial.

Fie $T : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci $T(0_V) = 0_W$. Mulţimea $\ker T = \{x \in V \mid Tx = 0_V\}$ este subspaţiu vectorial al lui V şi se numeşte *nucleul* lui T. De asemenea, $\operatorname{Im} T = \{y \in W \mid \exists x \in V, y = Tx\}$ este subspaţiu vectorial al lui W şi se numeşte *imaginea* lui T. Dimensiunea nucleului lui T se numeşte *defectul* lui T şi se notează $defT$, iar dimensiunea imaginii lui T se numeşte *rangul* lui T şi se notează $rangT$. Dacă V este un spaţiu finit dimensional peste corpul K, iar $T : V \to W$ este o aplicaţie liniară, atunci $\dim V = defT + rangT$ (*teorema rang-defect*).

Dacă $T \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $\dim_K(V) = n$, $\dim_K(W) = m$, iar $E = \{e_1, ..., e_n\}$, $F = \{f_1, ..., f_m\}$ sunt baze fixate în V respectiv W atunci, pentru orice j, $1 \le j \le n$, există scalarii $a_{ij} \in K$, $1 \le i \le m$, unic determinaţi, astfel ca:

$$Te_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \quad j = \overline{1, n}$$

Matricea $A = A_T^{E,F} = (a_{ij})$ de tip (m, n) a cărei coloană j este constituită din coordonatele vectorului Te_j în raport cu baza F, se numeşte *matricea lui T în raport cu bazele E şi F*. Dacă $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, $y = Tx = y_1f_1 + ... + y_mf_m$ şi $X = (x_1, ..., x_n)^t$, $Y = (y_1, ..., y_m)^t$, atunci $Y = AX$.

Dacă matricea lui $S \in \mathcal{L}(V, W)$ în raport cu bazele E şi F este B, atunci matricea lui $T + S$ în raport cu cele două baze este $A + B$. De asemenea, dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci matricea lui λT în raport cu bazele E şi F este λA.

Fie U, V, W trei K-spaţii vectoriale B_1, B_2, B_3 baze ale lui U, V, W respectiv. Fie $S \in \mathcal{L}(U, V)$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, A şi B matricele lui S şi T în raport cu bazele date. Atunci, matricea lui $T \circ S$ în raport cu bazele B_1 şi B_3 este $C = B \cdot A$.

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită, C o bază în V şi T un endomorfism al lui V. Matricea A a endomorfismului T în raport cu baza C este inversabilă, dacă şi numai dacă T este un automorfism al lui V. În acest caz, matricea lui T^{-1} în raport cu baza C este A^{-1}.

Fie V, W sunt două K-spaţii vectoriale de dimensiune finită şi $T \in L(V, W)$. Dacă A este matricea aplicaţiei liniare T în raport cu două baze fixate în V respectiv W, atunci $rangT = rangA$.

Fie V, W două K-spaţii vectoriale de dimensiune finită, E şi F două baze fixate în V respectiv W, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ şi A matricea lui T în cele două baze. Dacă E' şi F' sunt alte baze în V respectiv W, iar B este matricea lui T în noua pereche de baze, atunci $B = D^{-1}AC$, unde C este matricea de trecere de la baza E la baza E', iar D este matricea de trecere de la baza F la baza F'.

În particular, dacă T este un endomorfism al lui V, E şi E' sunt două baze în V, iar A şi B este sunt matricele lui T în bazele E respectiv E', atunci $B = C^{-1}AC$. În acest caz, matricele A şi B se numesc *similare* sau *asemenea*.

2. Probleme rezolvate

1. Fie $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$Tx = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + x_3).$$

Să se arate că T este liniară şi să se determine câte o bază în subspaţiile $\ker T$ şi $\operatorname{Im} T$.

Soluţie. Dacă $y \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, atunci $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, deci $T(x + y) = ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), 5(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)) = Tx + Ty$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. De asemenea, $T(\alpha x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3, \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3, 5\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3) = \alpha Tx$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Aşadar, T este aplicaţie liniară. Pe de altă parte $x \in \ker T$ dacă şi numai dacă, coordonatele sale verifică sistemul liniar omogen $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. Soluţia generală a acestui sistem fiind $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, rezultă că $\ker T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = t(0, 1, 1), t \in \mathbb{R}\} = Sp(\{u\})$, unde $u = (0, 1, 1)$. Atunci $defT = 1$, o bază în $\ker T$ fiind formată din vectorul u. Conform teoremei rang-defect, rezultă că $rangT = 2$. Dar $Te_1 = (1, 1, 5)$, $Te_2 == (1, -1, -1)$, $Te_3 = (-1, 1, 1)(\{e_1, e_2, e_3\}$ fiind baza canonică în $\mathbb{R}^3$) formează un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} T$. Deci doar doi sunt liniar independenţi, de exemplu Te_1 şi Te_2, aceştia constituind o bază în $\operatorname{Im} T$.

2. a) Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-x, -y)$ (simetria în raport cu originea). Să se determine matricea endomorfismului T în baza canonică $\{e_1, e_2\}$ din $\mathbb{R}^2$.

b) În $\mathbb{R}^3$ considerăm baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$, iar în $\mathbb{R}_1[X]$ baza $\{f_1, f_2\}$, $f_1 = 1$, $f_2 = X$. Dacă $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, definim $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[X]$, $Tx = \alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)X$. Să se determine matricea lui T în cele două baze.

Soluţie. a) Cum $Te_1 = -e_1$, $Te_2 = -e_2$, rezultă că matricea lui T în baza $\{e_1, e_2\}$ este $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. b) Deoarece $Te_1 = f_1 + f_2$, $Te_2 = f_1 + 2f_2$, $Te_3 = -f_2$, rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Fie $\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ un vector liber dat şi $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$, $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{v}$.

a) Să se arate că T este liniară;
b) Să se determine $\ker T$ şi $\operatorname{Im} T$ şi să se arate că $\mathcal{V}_3 = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$;
c) Să se determine matricea lui T în baza canonică $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ a lui $\mathcal{V}_3$.

Soluţie. a) Fie $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}_3$ şi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Atunci $T(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{a} \times (\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{u}) + \mu(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{v}) = \lambda T\overrightarrow{u} + \mu T\overrightarrow{v}$, deci T este liniară. b) Fie $\overrightarrow{v} \in \ker T$. Atunci $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, deci $\overrightarrow{v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{a}$. În consecinţă, $\ker T = \{\alpha\overrightarrow{a} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Fie, acum, $\overrightarrow{w} \in \operatorname{Im} T$. Atunci $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{v}$. Prin urmare, $\operatorname{Im} T = \{\overrightarrow{w} \in \mathcal{V}_3 \mid \overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{a}\}$. Pe de altă parte, orice vector nenul $\overrightarrow{v}$ din $\mathcal{V}_3$ se poate descompune ca suma a doi vectori, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2$, cu $\overrightarrow{v}_1$ coliniar cu $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{v}_2 \perp \overrightarrow{a}$, deci $\mathcal{V}_3 = \ker T + \operatorname{Im} T$. Dacă $\overrightarrow{v} \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$, atunci $\overrightarrow{v} \in \ker T$, deci $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Cum $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im} T$, rezultă că $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{a}$, deci $(\alpha\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{a} = 0$. Aşadar $\alpha = 0$, adică $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Prin urmare, $\mathcal{V}_3 = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$. c) $T\overrightarrow{i} = a_3\overrightarrow{j} - a_2\overrightarrow{k}$, $T\overrightarrow{j} = -a_3\overrightarrow{i} + a_1\overrightarrow{k}$, $T\overrightarrow{k} = a_2\overrightarrow{i} - a_1\overrightarrow{j}$, deci matricea lui T în baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are în baza canonică $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ a lui $\mathbb{R}^3$, matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea lui T în baza $E' = \{e_1', e_2', e_3'\}$, $e_1' = (2, 1, -3)$, $e_2' = (3, 2, -5)$, $e_3' = (1, -1, 1)$.

Soluţie. Matricea de trecere de la baza E la baza E' este:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar } C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci, dacă A' este matricea lui T în baza E', rezultă

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 12 & 19 & -10 \\ -7 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Probleme propuse

1. Să se precizeze care din următoarele aplicaţii sunt liniare:
a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_3, 2x_1 - 3x_2 + 5x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;
b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_3, x_1 + 1, x_2 - 1)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $Tx = (x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;
d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1, x_2 - x_1, 2x_1 + 3x_2)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = \left(x_1^2, x_1 + x_2, x_3^2 + 1\right)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;
f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = \left(x_1^2, x_1 + x_2, x_3^2\right)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.
După caz, dacă aplicaţiile sunt liniare, să se determine $\ker T$ şi $\operatorname{Im} T$.

2. Să se găsească aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care duce vectorii $u_1 = (2, 0, 3)$, $u_2 = (4, 1, 5)$, $u_3 = (3, 1, 2)$ în vectorii $v_1 = (4, 5, -2)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 2, -1)$ respectiv .

3. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine $rangT$, $defT$ şi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{Im} T$.

4. Fie $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ o aplicaţie liniară, a cărei matrice în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^3$ respectiv $\mathbb{R}^4$ este $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&2&3\\1&-1&-3\end{pmatrix}$. Să se găsească $rangT$, $defT$ şi câte o bază în $\ker T$ şi $\operatorname{Im} T$.

5. Fie $\overrightarrow{a}\in\mathcal{V}_3$ şi $T:\mathcal{V}_3\to\mathcal{V}_3$, $T\overrightarrow{x}=(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{a})\,\overrightarrow{a}$. Să se arate că T este liniară. Dacă $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$ să se găsească matricele lui T în bazele $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right\}$ şi $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}$, $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.

6. Fie $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$Tx=(x_1-2x_2+x_3,2x_1+x_2-x_3,x_2-3x_3)\,,\;x=(x_1,x_2,x_3).$$

Să se determine matricea lui T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, precum şi $T\circ T$. Să se arate că T este automorfism, să se determine T^{-1} şi matricea acestuia în baza canonică.

7. Fie $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$, $S\,(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,2x_1-x_2+x_3)$, $T\,(y_1,y_2)=(y_1,y_1+y_2,y_2,y_1-y_2)$. Să se găsească matricele asociate lui S, T şi $T\circ S$ în bazele canonice ale spaţiilor respective şi să se determine $T\circ S$.

8. Fie $S,T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Matricea lui S în baza $f_1=(-3,7)$, $f_2=(1,-2)$ este $A=\begin{pmatrix}2&-1\\5&-3\end{pmatrix}$, iar matricea lui T în baza $g_1=(6,-7)$, $g_2=(-5,6)$ este $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}$. Să se determine S, T, $S+T$, $S\circ T$, S^{-1}.

9. Matricea unui endomorfism al lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu baza canonică este $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$. Care este matricea endomorfismului în baza $f_1=(1,2,3)$, $f_2=(3,1,2)$, $f_3=(2,3,1)$?

10. Matricea unui endomorfism al lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu baza $g_1=(1,0,0)$, $g_2=(1,1,0)$, $g_3=(1,1,1)$ este $\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}$. Care este matricea acestui endomorfism în baza f_1, f_2, f_3 de la problema anterioară?

11. Fie V este un spaţiu vectorial peste corpul K. Să se arate că orice aplicaţie liniară nenulă $T:V\to K$ este surjectivă.

12. Fie V este un $K-$spaţiu vectorial şi T un endomorfism al lui V care satisface $T\circ T=T$. Să se arate că $V=\ker T\oplus\operatorname{Im}T$.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. a) T este liniară. $\ker T=\{(0,0,0)\}$. $\operatorname{Im}T=\mathbb{R}^3$. b) T nu este liniară, deoarece $T\,((0,0,0))=(0,1,-1)$. c) T este liniară. $\ker T=\{t(1,5,-2)\mid t\in\mathbb{R}\}$, $defT=1$, $\{(1,5,-2)\}$ este bază în $\ker T$. $rangT=2$, o bază în $\operatorname{Im}T$ fiind, de exemplu, $\{T(e_1),T(e_2)\}$, adică $\{(1,2),(1,0)\}$. $\operatorname{Im}T=\{(\alpha+\beta,2\alpha)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$. d) T este liniară. $\ker T=\{t(0,0,1)\mid t\in\mathbb{R}\}$, $defT=1$, $\{(0,0,1)\}$ este bază în $\ker T$. $rangT=2$, o bază în $\operatorname{Im}T$ fiind $\{T(e_1),T(e_2)\}$, adică $\{(1,-1,2),(0,1,3)\}$. $\operatorname{Im}T=$

$\{(\alpha, -\alpha+\beta, 2\alpha+3\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. e) T nu este liniară, deoarece $T((0,0,0)) = (0,0,1)$. f) T nu este liniară, deoarece $T(\alpha x) \neq \alpha Tx$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \neq (0,0,0)$. **2.** Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Atunci $u_1 = 2e_1 + 3e_3$, $v_1 = 4e_1 + 5e_2 - 2e_3$. T fiind liniară, din $T(u_1) = v_1$ se obţine $2T(e_1) + 3T(e_3) = 4e_1 + 5e_2 - 2e_3$. Similar, din celelalte două condiţii, obţinem $4T(e_1) + T(e_2) + 5T(e_3) = e_1 - e_2 + e_3$, $3T(e_1) + T(e_2) + 2T(e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3$. Din ultimele 3 relaţii găsim $T(e_1) = 4e_1 + 8e_2 - 4e_3$, $T(e_2) = -\frac{25}{3}e_1 - \frac{44}{3}e_2 + 7e_3$, $T(e_3) = -\frac{4}{3}e_1 - \frac{11}{3}e_2 + 2e_3$, deci matricea lui T în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ este $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{25}{3} & -\frac{4}{3} \\ 8 & -\frac{44}{3} & -\frac{11}{3} \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. În consecinţă, $Tx = 4x_1 - \frac{25}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3, 8x_1 - \frac{44}{3}x_2 - \frac{11}{3}x_3, -4x_1 + 7x_2 + 2x_3)$. **3.** $\ker T = \{t(1,0,-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $defT = 1$, $\{(1,0,-1)\}$ este bază în $\ker T$. $rangT = 2$, o bază în $\operatorname{Im} T$ fiind $\{T(e_1), T(e_2)\}$, adică $\{(1,1,3), (1,-1,-1)\}$. $\operatorname{Im} T = \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 3\alpha-\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$. **4.** $rangT = rangA = 2$, $\ker T = \{t(1,-2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $defT = 1$, $\{(1,-2,1)\}$ este bază în $\ker T$. Ca baze în $\operatorname{Im} T$ putem alege: $\{T(e_1), T(e_2)\}$, adică $\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1)\}$ sau $\{T(e_2), T(e_3)\}$, adică $\{(1,1,3,-3), (1,0,2,-1)\}$ şi nu numai. **5.** $T(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = ((\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{a} = T\overrightarrow{x} + T\overrightarrow{y}$. $T(\lambda\overrightarrow{x}) = (\lambda\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{a} = \lambda T\overrightarrow{x}$, deci T este liniară. Pentru $\overrightarrow{a}$ dat matricea lui T în baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Matricea de trecere de la baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ la baza $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Matricea lui T în baza $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ va fi $C^{-1}AC = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 20 & -5 & 15 \\ -16 & 4 & -12 \\ 24 & -6 & 18 \end{pmatrix}$. **6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Deoarece $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, $(T \circ T)(x) = (-3x_1 - 3x_2, 4x_1 - 4x_2 + 4x_3, 2x_1 - 2x_2 + 8x_3)$. $\det(A) = -12 \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă$\Rightarrow T$ automorfism. Cum $A^{-1} =$
$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, vom avea $T^{-1}(x) = \frac{1}{12}(2x_1 + 5x_2 - x_3, -6x_1 + 3x_2 - 3x_3, -2x_1 + x_2 - 5x_3)$. **7.** $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{T\circ S} = A_T \cdot A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, deci $(T \circ S)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 3x_1 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3)$. **8.** Determinăm matricele lui S şi T în baza canonică din $\mathbb{R}^2$, A_S, A_T. Matricele de trecere de la baza canonică la bazele $\{f_1, f_2\}$ respectiv $\{g_1, g_2\}$ sunt

$C_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$. Atunci $A_S = C_1 A C_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_T = C_2 A C_2^{-1} = \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}$, $A_{S+T} = A_S + A_T = \begin{pmatrix} -145 & -123 \\ 178 & 152 \end{pmatrix}$, $A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T = \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$, $A_{S^{-1}} = A_S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dacă $x = (x_1, x_2)$, atunci $Sx = (-2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$, $Tx = (-143x_1 - 122x_2, 177x_1 + 151x_2)$, $(S+T)x = (-145x_1 - 123x_2, 178x_1 + 152x_2)$, $(S \circ T)x = (109x_1 + 93x_2, 34x_1 + 29x_2)$, $S^{-1}(x) = (-x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$. **9.** Matricea de trecere de la baza canonică la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \dfrac{1}{18} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Matricea în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ va fi $B = C^{-1} A C = \dfrac{1}{18} \begin{pmatrix} -35 & -18 & 5 \\ 20 & 18 & -7 \\ 43 & 36 & 17 \end{pmatrix}$. **10.** Matricea de trecere de la baza $\{g_1, g_2, g_3\}$ la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ este $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \dfrac{1}{18} \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. Matricea în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ va fi $B = C^{-1} A C = \dfrac{1}{18} \begin{pmatrix} -13 & 23 & -10 \\ 47 & 11 & 50 \\ 53 & 17 & 38 \end{pmatrix}$. **11.** Fie $\alpha \in K$. Cum T este nenulă, există $x_0 \in V$ astfel ca $T(x_0) \neq 0_K$. Este clar că $x = \dfrac{\alpha}{T(x_0)} x_0 \in V$ şi $Tx = \alpha$. **12.** Dacă $x \in V$, atunci $y = x - Tx \in \ker T$, deci $x = y + Tx$. Prin urmare, $V = \ker T + \operatorname{Im} T$. Fie acum $y \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$. Atunci $Ty = 0_V$ şi $y = Tx$, $x \in V$, deci $y = (T \circ T)(x) = Ty = 0_V$.

CAPITOLUL 5

Valori şi vectori proprii

1. Preliminarii

Fie V un K-spaţiu vectorial ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $T : V \to V$ un endomorfism.

Un vector $x \in V$, $x \neq 0_V$, se numeşte *vector propriu* pentru endomorfismul T, dacă există un scalar $\lambda \in K$ astfel încât $Tx = \lambda x$. Scalarul λ se numeşte *valoare proprie* a endomorfismului T, corespunzătoare vectorului propriu x. Dacă λ este valoare proprie, subspaţiul vectorial $V_\lambda = \{x \in V \mid Tx = \lambda x\}$ se numeşte *subspaţiu propriu* corespunzător lui λ, dimensiunea acestui subspaţiu, $r_\lambda = \dim V_\lambda$, numindu-se *multiplicitate geometrică* a valorii proprii λ.

Dacă A este matrice pătrată de ordin n, atunci polinomul

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

se numeşte *polinom caracteristic* al matricei A, iar ecuaţia $p_A(\lambda) = 0$ se numeşte *ecuaţie caracteristică* a matricei A. Rădăcinile $\lambda \in K$ ale ecuaţiei caracteristice se numesc *valori proprii* ale matricei A. Dacă λ este valoare proprie a lui A, atunci soluţiile nenule ale sistemului $Ax = \lambda x$, unde x este vector coloană din K^n, se numesc *vectori proprii* corespunzători lui λ. Matricele asemenea au acelaşi polinom caracteristic, deci au aceleaşi valori proprii.

Dacă $\dim_K V = n$, iar T este un endomorfism al lui V, a cărui matrice, într-o bază $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a lui V, este A, atunci $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ se numeşte *polinom caracteristic* al endomorfismului T, iar ecuaţia $p(\lambda) = 0$ se numeşte *ecuaţie caracteristică* a lui T, rădăcinile $\lambda \in K$ ale ecuaţiei caracteristice fiind valorile proprii ale lui T. Dacă $x = (x_1, ..., x_n)^t$ este soluţie nenulă a sistemului $Ax = \lambda x$, atunci $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ este vector propriu al lui T.

Teorema Gerschgorin. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$, $r_i = \sum\limits_{j=1;\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i,\ i = \overline{1,n}\}$. Dacă λ este o valoare proprie a matricei A, atunci $\lambda \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$. În particular, când $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, rezultă că

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} [a_{ii} - r_i,\ a_{ii} + r_i] \subset \mathbb{R}.$$

Teorema Hamilton-Cayley. Dacă $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ este polinomul caracteristic al matricei A, atunci $p_A(A) = 0$.

Dacă $\dim_K V = n$, un endomorfism T al lui V are cel mult n valori proprii distincte. Dacă T are exact n valori proprii distincte, atunci vectorii proprii corespunzători formează o bază în V, matricea lui T în raport cu această bază fiind o matrice diagonală, elementele de pe diagonală fiind chiar valorile proprii ale lui T.

Endomorfismul T se numeşte *diagonalizabil* dacă există o bază în V astfel ca matricea lui T în această bază să fie diagonală. Matricea A se numeşte *diagonalizabilă* dacă este asemenea cu o matrice diagonală.

Un endomorfism T este diagonalizabil dacă şi numai dacă:

-T are n vectori proprii liniar independenţi;

-polinomul caracteristic are toate rădăcinile în K, iar multiplicitatea geometrică a fiecărei valori proprii este egală cu multiplicitatea sa algebrică.

2. Probleme rezolvate

1. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul dat de

$$Tx = (7x_1 - 12x_2 + 6x_3, 10x_1 - 19x_2 + 10x_3, 12x_1 - 24x_2 + 13x_3),$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$. Să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii ai lui T.

Soluţie. Matricea asociată lui T în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

Ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$ se scrie sub forma $-(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) = 0$. Se obţin valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Pentru $\lambda_1 = 1$, rezolvând sistemul $\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$, obţinem $x = (2\alpha - \beta, \alpha, \beta)$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, subspaţiul propriu asociat lui λ_1 fiind $V_1 = \{(2\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Similar pentru $\lambda_3 = -1$, obţinem $V_{-1} = \{(3t, 5t, 6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Aşadar dacă α, β nu sunt simultan nuli, orice vector propriu corespunzător lui $\lambda_1 = 1$ este de forma $\alpha\,(2, 1, 0) + \beta\,(-1, 0, 1)$, iar dacă $t \neq 0$, $t\,(3, 5, 6)$ este un vector propriu corespunzător lui $\lambda_3 = -1$.

2. Matricea unui endomorfism definit pe un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial într-o bază dată este

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii ale endomorfismului.

Soluţie. Procedând ca mai sus, se ajunge la ecuaţia caracteristică $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = 0$, care are rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3\mathrm{i}$, $\lambda_3 = 2 - 3\mathrm{i}$. Vectorii proprii corespunzători vor fi $v_1 = t\,(1, 2, 1)$, $v_2 = s\,(3 - 3\mathrm{i}, 5 - 3\mathrm{i}, 4)$ respectiv $v_3 = r\,(3 + 3\mathrm{i}, 5 + 3\mathrm{i}, 4)$, cu $rst \neq 0$, $r, s, t \in \mathbb{R}$.

3. Folosind teorema lui Gerschgorin, să se localizeze valorile proprii ale matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 + 2\mathrm{i} \\ 2 - 2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Soluţie. a) Deoarece $r_1 = 2\sqrt{2} = r_2$, rezultă că $D_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| \leq 2\sqrt{2}\right\}$, $D_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 2\sqrt{2}\right\}$. În consecinţă, dacă λ este valoare proprie, atunci

$\lambda \in D_1 \cup D_2$ (fig. 1).

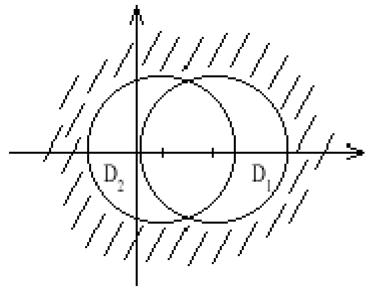

Fig. 1

Un calcul direct arată că $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, deci $\lambda_{1,2} \in \left[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}\right] \cup \left[1-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}\right] = \left[1-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}\right]$.

b) Avem $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $D_1 = D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 1\}$, $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| \leq 0\} = \{4\}$. Orice valoare proprie se află în $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$.

4. Folosind teorema Hamilton-Cayley, să se afle inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

şi să se calculeze A^5.

Soluţie. Deoarece $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$ şi $p_A(0) = -1 \neq 0$, matricea A este inversabilă. Conform teoremei Hamilton-Cayley $-A^3 - 3A^2 - 3A - I_3 = O_3$. Înmulţind cu A^{-1} obţinem $A^2 + 3A + 3I_3 + A^{-1} = O_3$, deci $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3$. Calculând rezultă $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pe de altă parte, înmulţind relaţia $A^3 = -3A^2 - 3A - I_3$ cu A, obţinem $A^4 = -3A^3 - 3A^2 - A$. Înlocuind A^3, rezultă $A^4 = 6A^2 + 6A + 3I_3$ ş.a.m.d.

5. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfism care, în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că T este diagonalizabil.

Soluţie. Polinomul caracteristic este $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Să determinăm vectorii proprii. Coordonatele vectorului propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$, satisfac sistemul

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Notând $x_3 = t$, rezultă $x_1 = 2t$, $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Deci: $V_1 = \{(t, 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Un vector propriu este, de exemplu, $v_1 = (1, 2, 1)$. Similar $V_2 = \{(t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$V_3 = \{(t/2, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Putem lua $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 2, 2)$. Deoarece $dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_i} = 1$, $i = 1, 2, 3$, rezultă că T este diagonalizabil. În baza $\{v_1, v_2, v_3\}$, matricea lui T este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Fie acum $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfism care, în baza canonică din $\mathbb{R}^4$, are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că T este diagonalizabil.

Soluţie. Polinomul caracteristic este $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 6)(\lambda - 1)^2$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Procedând ca la exemplul anterior găsim: $V_0 = \{(t, 0, -2t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $V_6 = \{(t, 0, -2t, 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $V_3 = \{(2\alpha, \beta, \alpha, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Deoarece $\dim_{\mathbb{R}}(V_{\lambda_3}) = 2$, T este diagonalizabil. În baza $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $v_1 = (1, 0, -2, -1)$, $v_2 = (1, 0, -2, 5)$, $v_3 = (2, 0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 1, 0, 0)$, matricea lui T este $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci T este diagonalizabil.

7. Să se cerceteze posibilitatea diagonalizării matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soluţie. În acest caz, $p_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Atunci $V_{-1} = \{(s, 2s, s)^t \mid s \in \mathbb{R}\}$. Cum $\dim_{\mathbb{R}}(V_{-1}) = 1 < 2$, matricea A nu este diagonalizabilă.

3. Probleme propuse

1. Să se găsească valorile şi vectorii proprii ai endomorfismelor:
a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$Tx = (-x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta, -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta), \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Tx = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2)$;
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Tx = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_3);$$

d) $\mathcal{P} : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$, $\mathcal{P}\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\forall \overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \in \mathcal{V}_3$;
e) $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $Dp = a + 2bX$, $\forall p = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

2. Folosind teorema lui Gerschgorin, să se determine domeniul plan în care se află valorile proprii ale următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 1+\mathrm{i} & 3 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.

3. Folosind teorema Hamilton-Cayley, să se determine inversele următoarelor matrice:
a) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Să se găsească valorile şi vectorii proprii ai următoarelor matrice. Sunt diagonalizabile?
a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
e) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Să se arate că următoarele matrice sunt diagonalizabile, să se găsească forma diagonală şi baza formei diagonale. Folosind forma diagonală, să se calculeze apoi A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;
d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Să se arate că dacă λ este valoare proprie a matricei A, atunci λ^n este valoare proprie a matricei A^n. Dacă A este o matrice inversabilă, atunci λ^{-1} este valoare proprie a matricei A^{-1}.

7. Să se arate că dacă x este vector propriu al matricei A, iar P este o matrice inversabilă, atunci Px este vector propriu al matricei PAP^{-1}.

8. Fie V spaţiul vectorial real al funcţiilor $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathcal{C}^\infty$, ce satisfac $y(0) = y(1) = 0$. Să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $T : V \to V$, $T(y) = -y''$.

9. Fie $T : \mathcal{C}([0,2\pi]) \to \mathcal{C}([0,2\pi])$, $T(f) = g$, $g(x) = \int\limits_0^{2\pi} [1 + \sin(x-t)]\, f(t)\, \mathrm{d}t$, $x \in [0,2\pi]$.

a) Dacă $f(x) = a + b\sin x + c\cos x$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, să se calculeze $T(f)$;
b) Să se determine $\ker T$, $\operatorname{Im} T$, $rangT$;
c) Să se determine valorile şi vectorii proprii ale endomorfismului T.

10. Fie S spaţiul vectorial al matricelor pătrate $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de forma $X = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi T endomorfismul lui S, dat de $T(X) = \begin{pmatrix} a & -a \\ b+c & b+c \end{pmatrix}$, dacă $X = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix}$. Să se găsească valorile şi vectorii proprii ale endomorfismlui T. Este T diagonalizabil?

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. a) $p(\lambda) = \lambda^2 - \cos 2\theta$, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\cos 2\theta}$, $v_1 = t(1, ctg\theta + \sqrt{ctg^2\theta - 1})$, $v_2 = t(1, ctg\theta - \sqrt{ctg^2\theta - 1})$. b) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = t(2, -1)$, $\lambda_2 = 5$, $v_2 = t(1, 2)$. c) Matricea asociată lui T în raport cu baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $p_A(\lambda) = -(\lambda+1)^3$. Ecuaţia caracteristică are rădăcina triplă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii corespunzători valorii proprii -1, satisfac sistemul $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$. Notând $x_1 = t$, rezultă $x_2 = t$, $x_3 = -t$, $t \in \mathbb{R}$. Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii -1 este $V_{-1} = \{t(1, 1, -1);$ $t \in \mathbb{R}\}$. Un vector propriu este, de exemplu, $v_1 = (1, 1, -1)$. Cum dimensiunea acestui subspaţiu este 1, rezultă că dimensiunea geometrică a valorii proprii $\lambda = -1$ este 1. d) Matricea asociată lui $\mathcal{P}$ în raport cu baza canonică $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $p_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2$. Ecuaţia caracteristică are rădăcinile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Să determinăm vectorii proprii. Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 0$, satisfac sistemul $x = 0$, $y = 0$, deci $V_0 = \{t\overrightarrow{k},\ t \in \mathbb{R}\}$. Similar, vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$, satisfac sistemul $-z = 0$, deci $V_1 = \{a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j},\ a, b \in \mathbb{R}\}$. O bază în V_0 este $\{\overrightarrow{k}\}$, iar o bază în V_1 este $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$. e) Matricea asociată lui D în raport cu baza canonică $\{1, X, X^2\}$ este $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $p_A(\lambda) = -\lambda^3$.

Ecuaţia caracteristică are rădăcina triplă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Vectorii proprii corespunzători valorii proprii 0, satisfac sistemul $y = 0$, $2z = 0$, deci sunt de forma $p = a + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2$, $a \neq 0$. Subspaţiul propriu V_0 este format din polinoamele de grad 0. **2.** a) $r_1 = \sqrt{2}$, $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le \sqrt{2}\}$, $r_2 = \sqrt{2}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \le \sqrt{2}\}$, $\lambda \in D_1 \cup D_2$. b) $r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$, $r_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$, $\lambda \in D_1 \cup D_2$. c) $r_1 = 3$, $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 3\}$, $r_2 = 2$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 2\}$, $r_3 = 1$, $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \le 1\}$, $\lambda \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$. d) $r_1 = 3$, $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 3\}$, $r_2 = 4$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+3| \le 4\}$, $r_3 = 3$, $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le 3\}$, $\lambda \in D_1 \cup D_2 \cup D_3$. e) $r_1 = \sqrt{2}$,

$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq \sqrt{2}\}$, $r_2 = 1+\sqrt{2}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 1+\sqrt{2}\}$, $r_3 = 1$, $D_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1\}$, $\lambda \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1 \cup D_2$. **3.** a) $p(\lambda) = \lambda^2+\lambda-1$, deci $A^2+A-I_2 = O_2$. Atunci $A^{-1} = A+I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. b) $p(\lambda) = -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1$, deci $A^{-1} = A^2-3A+3I_3$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -21 \\ 3 & 11 & -19 \\ 2 & 7 & -12 \end{pmatrix}$. c) $p(\lambda) = -\lambda^3+9\lambda^2-27\lambda+27$, deci $A^{-1} = \frac{1}{27}\left(A^2 - 9A + 27I_3\right)$. $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -6 & 15 \\ -1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. d) $p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$, deci $A^{-1} = \frac{1}{8}\left(A^2 - 6A + 12I_3\right)$. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. e) $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$, deci $A^{-1} = -A^3 + 4A^2 - 6A + 4I_4$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 & -21 \\ 3 & 11 & 0 & -19 \\ 3 & 12 & 1 & -21 \\ 2 & 7 & 0 & -12 \end{pmatrix}$. **4.** a) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = s(1,-1)^t$, $s \neq 0$, $\lambda_2 = 3$, $v_2 = s(2,1)^t$, $s \neq 0$. Matricea este diagonalizabilă. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $v_1 = s(1,1,0)^t$, $s \neq 0$, $\lambda_3 = 2$, $v_2 = s(2,1,1)^t$, $s \neq 0$. Matricea nu se poate diagonaliza. c) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1+\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1-\sqrt{3}$, $v_1 = s(1,2,2)^t$, $v_2 = s(30+\sqrt{3}, 45+13\sqrt{3}, 69)^t$, $v_3 = s(30-\sqrt{3}, 45-13\sqrt{3}, 69)^t$, $t \neq 0$. Matricea se poate diagonaliza. d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $v = a(1,2,0)^t + b(0,0,1)^t$, $a^2+b^2 > 0$. Matricea nu se poate diagonaliza. e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $v_1 = s(1,2,3)^t$, $s \neq 0$, $\lambda_3 = 1$, $v_2 = s(1,1,1)^t$, $s \neq 0$. Matricea nu se poate diagonaliza. f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $v = s(3,1,1)^t$, $s \neq 0$. Matricea nu se poate diagonaliza. g) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $v_1 = a(0,1,0,0)^t + b(0,0,1,0)^t$, $a^2+b^2 > 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $v_2 = s(0,0,0,1)^t$, $s \neq 0$. Matricea nu se poate diagonaliza. **5.** a) $\lambda_1 = 4$, $v_1 = s(2,3)^t$, $s \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $v_2 = s(1,-1)^t$, $s \neq 0$. $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2^{2n+1} + 3(-1)^n & 2^{2n+1} + 2(-1)^{n+1} \\ 3 \cdot 2^{2n} + 3(-1)^{n+1} & 3 \cdot 2^{2n} + 2(-1)^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$, $v_1 = s(0,1,0)^t$, $v_2 = s(1,0,-1)^t$, $v_3 = s(3,4,3)^t$, $s \neq 0$. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. $A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n[2^n + (-1)^n] & 0 & 3 \cdot 2^n[2^n + (-1)^{n+1}] \\ 2^{2n+2} - 4 & 6 & 2^{2n+2} - 4 \\ 3 \cdot 2^n[2^n + (-1)^{n+1}] & 0 & 3 \cdot 2^n[2^n + (-1)^n] \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $v_1 = s(1,1,1)^t$, $s \neq 0$, $v_2 = a(1,0,3)^t + b(0,1,3)^t$, $a^2+b^2 > 0$. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 3(2^n - 1) & 1 - 2^n \\ 3(1 - 2^n) & 2^{n+2} - 3 & 1 - 2^n \\ 3(1 - 2^n) & 3(2^n - 1) & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $v = a(1,1,0,0)^t + b(1,0,1,0)^t + c(1,0,0,1)^t$, $a^2+b^2+c^2 > 0$, $\lambda_4 = -2$, $v_2 = s(1,-1,-1,-1)^t$, $s \neq 0$. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. $A^{2k} = 2^{2k}I_4$,

$k \in \mathbb{N}^*$,.$A^{2k+1} = 2^{2k}A$, $k \in \mathbb{N}$. e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $v_1 = a(0,1,0,0)^t + b(0,0,1,0)^t$, $a^2 + b^2 > 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $v_2 = a(1,0,1,0)^t + b(0,0,0,1)^t$, $a^2 + b^2 > 0$. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A^n = A$, $n \in \mathbb{N}^*$. **6.** $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$ etc. Înmulţind egalitatea $Ax = \lambda x$ cu A^{-1} şi împărţind cu λ, se obţine $A^{-1}x = \lambda x$. **7.** $Ax = \lambda x \Rightarrow PAx = \lambda Px$ sau $\left(PAP^{-1}\right)Px = \lambda Px$. **8.** Se caută $y \neq 0$ şi λ astfel încât $Ty = \lambda y$ sau $y'' + \lambda y = 0$. Dacă $\lambda < 0$, atunci $y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Condiţiile în 0 şi 1, conduc la $C_1 = C_2 = 0$, ceea ce nu convine. Similar, dacă $\lambda = 0$, atunci $y(x) = C_1 x + C_2$. Din nou se obţine $C_1 = C_2 = 0$. ceea ce nu convine. Dacă $\lambda > 0$, atunci $y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Condiţia $y(0) = 0$ implică $C_1 = 0$. Pentru ca $y \neq 0$, este necesar ca $C_2 \neq 0$. Condiţia $y(1) = 0$ implică $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, deci $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. În consecinţă, valorile proprii sunt $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, iar vectorii proprii corespunzători sunt funcţiile $y_n = \sin n\pi x$, $n \in \mathbb{N}^*$. **9.** a) În general, $Tf(x) = \int_0^{2\pi} f(t)dt + \left(\int_0^{2\pi} f(t)\cos tdt\right)\sin x - \left(\int_0^{2\pi} f(t)\sin tdt\right)\cos x$. Pentru f dat, $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 2\pi a$, $\int_0^{2\pi} f(t)\cos tdt = \pi c$, $\int_0^{2\pi} f(t)\sin tdt = \pi b$, deci $Tf(x) = 2\pi a + \pi c\sin x - \pi b\cos x$. b) Funcţiile 1, $\sin x$, $\cos x$, fiind liniar independente pe $[0, 2\pi]$, din $Tf = 0$ rezultă $\ker T = \{f \in \mathcal{C}([0,2\pi]) \mid \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0,\ \int_0^{2\pi} f(t)\cos tdt = 0,\ \int_0^{2\pi} f(t)\sin tdt = 0\}$. $\operatorname{Im} T = Sp(\{1, \sin x, \cos x\})$, $rangT = 3$. c) Evident, orice $f \in \ker T$, $f \neq 0$, este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 0$. Vom determina vectorii proprii care nu sunt în $\ker T$. Integrând de la 0 la 2π în egalitatea $Tf = \lambda f$, se obţine $2\pi \int_0^{2\pi} f(t)dt = \lambda \int_0^{2\pi} f(t)dt$, deci $\lambda = 2\pi$. Vectorul propriu corespunzător f, satisface $f = \frac{1}{2\pi}Tf \in \operatorname{Im} T$, deci $f(x) = a + b\sin x + c\cos x$ cu a, b, c nenule simultan. Egalitatea $Tf = 2\pi f \Rightarrow b = c = 0$. În concluzie, $f(x) = 1$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = 2\pi$. **10.** Matricele $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formează o bază în S. Matricea lui T în această bază este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, subspaţiile proprii corespunzătoare fiind $V_0 = \{s(B_2 - B_3) \mid s \in \mathbb{R}^*\}$, $V_1 = \{sB_1 \mid s \in \mathbb{R}^*\}$, $V_2 = \{s(B_2 + B_3) \mid s \in \mathbb{R}^*\}$. În baza $\{X_1, X_2, X_3\}$, unde $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, matricea A are forma diagonală $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = C^{-1}AC$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Endomorfismul este, deci, diagonalizabil.

CAPITOLUL 6

Spaţii euclidiene

1. Preliminarii

Fie E un $\mathbb{R}-$spaţiu vectorial. Se numeşte *produs scalar* pe E, o aplicaţie $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$, cu proprietăţile:

1) $< x, y >=< y, x >, \quad \forall x, y \in E$;
2) $< x+y, z >=< x, z > + < y, z >, \quad \forall x, y, z \in E$;
3) $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in E$;
4) $< x, x >\geq 0, \quad \forall x \in E$ şi $< x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$.

Spaţiul vectorial E înzestrat cu un produs scalar se numeşte *spaţiu euclidian.* Orice spaţiu euclidian E este *spaţiu normat*, norma unui element $x \in E$ fiind dată de relaţia $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Aplicaţia $x \to \|x\| : E \to \mathbb{R}$ are următoarele proprietăţi:

1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$;
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Într-un spaţiu euclidian E are loc *inegalitatea lui Cauchy-Schwarz-Buniakowski*:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}, \ \forall x, y \in E.$$

Prin definiţie, *unghiul* φ dintre doi vectori nenuli x şi y dintr-un spaţiu euclidian E este unghiul $\varphi \in [0, \pi]$, pentru care $\cos\varphi = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}$. *Distanţa* dintre doi vectori x şi y din E este $d(x, y) = \|x - y\|$. Vectorii x şi y din E se numesc *ortogonali* şi se notează $x \perp y$, dacă $\langle x, y\rangle = 0$. Sistemul de vectori $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ se numeşte *sistem ortogonal* de vectori dacă $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, dacă $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$. Dacă, în plus, $\|e_i\| = 1$, $\forall i = \overline{1, n}$, sistemul de vectori se numeşte *sistem ortonormat* de vectori. Orice sistem ortogonal de vectori nenuli este liniar independent. În consecinţă, dacă $\dim E = n$, orice sistem ortogonal format din n vectori nenuli din E este o *bază ortogonală* a lui E, iar orice sistem ortonormat de vectori din E este o *bază ortonormată* a lui E. Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază ortogonală a lui E şi $x \in E$, atunci

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \text{ unde } c_i = \frac{\langle x, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}, \ i = \overline{1, n}.$$

Dacă, în plus, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază ortonormată a lui E, atunci $c_i = \langle x, e_i\rangle$, $i = \overline{1, n}$. Coeficienţii c_i, $i = \overline{1, n}$, se numesc *coeficienţii Fourier* ai vectorului x în raport cu sistemul ortogonal (ortonormat, după caz) $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt a unui sistem de vectori liniar independenţi $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ constă în construirea, pornind de la acest sistem de vectori, a unui nou sistem ortogonal de vectori $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$, în modul următor: $f_1 = e_1$, $f_k = e_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} f_i$, $k = \overline{2, n}$, unde $\lambda_{ki} = \dfrac{\langle e_k, f_i\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle}$, $i = \overline{1, k-1}$. Atunci, sistemul de vectori $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, unde $g_i = \dfrac{f_i}{\|f_i\|}$, $i = \overline{1,n}$, este un sistem ortonormat de vectori.

Fie, acum, E un spaţiu euclidian şi S un subspaţiu vectorial său. Un vector $x \in E$ se numeşte *ortogonal* pe S şi se notează $x \perp S$ dacă $\langle x, y\rangle = 0$, pentru orice $y \in S$. Mulţimea $S^{\perp} = \{x \in E \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in S\}$ este un subspaţiu vectorial al lui E, numit *complementul ortogonal* al lui S. Dacă S este finit dimensional, atunci $x \perp S$ dacă şi numai dacă x este ortogonal pe fiecare din vectorii dintr-o bază a lui S.

Presupunem că E este de dimensiune finită. Atunci $E = S \oplus S^{\perp}$. Prin urmare, orice vector $x \in E$ se scrie în mod unic sub forma $x = y + z$, $y \in S$, $z \in S^{\top}$. Elementul y din această descompunere, se numeşte *proiecţia* lui x pe subspaţiul S şi se notează $pr_S x$. Acest element are proprietatea

$$\|x - y\| = \inf_{u \in S} \|x - u\|.$$

Prin definiţie, *distanţa* de la elementul $x \in E$ la subspaţiul S este $dist(x, S) = \inf\limits_{u \in S} \|x - u\|$. În consecinţă, $dist(x, S) = \|x - pr_S x\|$.

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică şi fie $a_1, a_2, ..., a_n$ vectorii săi coloană transpuşi, deci $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni})$, $i = \overline{1,n}$. Matricea A se numeşte *ortogonală* dacă sistemul de vectori $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ este ortonormat, adică $\langle a_i, a_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall i, j = \overline{1,n}$. Matricea A este ortogonală dacă şi numai dacă $A^{-1} = A^t$. Dacă A este ortogonală, atunci $\det A = \pm 1$. O matrice ortogonală A cu $\det A = 1$, se numeşte *matrice de rotaţie* în $\mathbb{R}^n$.

Fie E un spaţiu euclidian. Endomorfismul T al lui E se numeşte *transformare ortogonală* (*operator ortogonal*) dacă matricea lui T într-o bază ortonormată a lui E este o matrice ortogonală. Un endomorfism al lui E este operator ortogonal dacă şi numai dacă duce o bază ortonormată a lui E într-o bază ortonormată sau, echivalent, dacă şi numai dacă "păstrează" produsul scalar, adică $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in E$. Un operator ortogonal păstrează unghiurile şi distanţele.

Matricea pătratică $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *simetrică* dacă $A^t = A$. Valorile proprii ale unei matrice simetrice sunt reale, la valori proprii distincte corespunzând vectori proprii ortogonali. Pentru orice matrice simetrică A există o matrice ortogonală C astfel încât $D = C^t AC$ să fie o matrice diagonală. Mai precis,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde λ_1, λ_2,...,λ_n, sunt valorile proprii ale matricei A, coloanele matricei C conţinând vectori din sistemul ortonormat de vectori proprii corespunzători acestor valori proprii. Un endomorfism T al unui spaţiu euclidian E se numeşte *transformare autoadjunctă* dacă $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, $\forall x, y \in E$. Un endomorfism T este autoadjunct dacă şi numai dacă matricea lui T într-o bază ortonormată a lui E este o matrice simetrică.

Metoda rotaţiilor a lui Jacobi pentru determinarea numerică a valorilor proprii. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică simetrică. Prin *transformare de similitudine* asupra matricei A, se înţelege orice transformare de tipul $C^t AC$, unde C este o matrice ortogonală.

Metoda rotaţiilor constă în efectuarea unei suite de transformări de similitudine asupra matricei A, transformări care nu modifică valorile proprii ale acesteia. Scopul acestor transformări este micşorarea, eventual anularea, elementelor nediagonale ale matricei, astfel încât să se obţină practic o matrice diagonală. Valorile proprii vor fi elementele de pe diagonala principală. Algoritmul este următorul. La fiecare pas, se determină cel mai mare (în valoare absolută) element de deasupra diagonalei principale. Fie acesta a_{pq}. Se calculează matricea $A' = U^t AU$, unde U este o matrice ortogonală ($U^{-1} = U^t$), de rotaţie, construită astfel încât elementul situat pe linia p şi coloana q al matricei A' să se anuleze. Matricea $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este dată de

$$\begin{cases} u_{ii} = 1, \text{ dacă } i \neq p \text{ şi } j \neq q \\ u_{pp} = u_{qq} = \cos\varphi,\ u_{pq} = \sin\varphi = -u_{qp} \\ u_{ij} = 0, \text{ în rest} \end{cases}.$$

Numerele $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$, se determină cu formulele

$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ s = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases},$$

unde

$$t = tg\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta + sgn(\theta)\sqrt{\theta^2+1}}, & \text{dacă } \theta \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } \theta = 0 \end{cases},$$

iar θ este dat de $\theta = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$. Procedeul continuă cu matricea A'. Dacă $\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ sunt elementele matricei A' după k paşi, atunci

$$\left|a_{ii}^{(k)} - \lambda_i\right| \leq n\left|a_{pq}^{(k)}\right|,$$

această inegalitate putând fi luată drept criteriu de oprire, în sensul că algoritmul se termină când $n\left|a_{pq}^{(k)}\right| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fiind un număr suficient de mic dat.

2. Probleme rezolvate

1. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, înzestrat cu produsul scalar canonic, se consideră baza $f_1 = (1,-2,2)$, $f_2 = (-1,0,-1)$, $f_3 = (5,-3,-7)$. Folosind procedeul Gram-Schmidt, să se construiască o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

Soluţie. Aşadar $f_1 = (1,-2,2)$, iar $f_2 = (-1,0,-1) - \lambda_{21}\ (1,-2,2)$, unde $\lambda_{21} = \dfrac{< e_2, f_1 >}{< f_1, f_1 >}$. Dar $< e_2, f_1 >= -3$, $< f_1, f_1 >= 9$. În consecinţă, $f_2 = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Fie acum $f_3 = (5,-3,-7) - \lambda_{31}(1,-2,2) - \lambda_{32}(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, unde $\lambda_{31} = \dfrac{< e_3, f_1 >}{< f_1, f_1 >}$, $\lambda_{32} = \dfrac{< e_3, f_2 >}{< f_2, f_2 >}$. Cum $< e_3, f_1 >= -3$, $< e_3, f_2 >= 1$, $< f_2, f_2 >= 1$, rezultă $f_3 = (6,-3,-6)$. Atunci baza ortonormată este:

$$g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),\ g_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}),$$

$$g_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}).$$

2. Fie $S = \{(a, -a, b, c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Să se arate că S este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^4$ şi să se determine o bază ortonormată a lui S. Să se completeze această bază la o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine $S^\perp$. Dacă $x = (2, 3, 4, 5)$, să se determine $pr_S x$, $pr_{S^\perp} x$ şi $dist(x, S)$.

Soluţie. Fie $x, y \in S$, deci $x = (a, -a, b, c)$, $y = (d, -d, e, f)$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Atunci $x + y = (a + d, -(a + d), b + e, c + f)$, cu $a + d$, $b + e$, $c + f \in \mathbb{R}$, deci $x + y \in S$. De asemenea, dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci $\lambda x = (\lambda a, -(\lambda a), \lambda b, \lambda c)$, cu λa, λb, $\lambda c \in \mathbb{R}$, adică $\lambda x \in S$. Aşadar S este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^4$. Dacă $x = (a, -a, b, c) \in S$, atunci $x = a(1, -1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) + c(0, 0, 0, 1)$. Notăm $f_1 = (1, -1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 0, 1)$. Prin calcul direct se constată că $\langle f_1, f_2\rangle = 0$, $\langle f_1, f_3\rangle = 0$, $\langle f_2, f_3\rangle = 0$, deci $\{f_1, f_2, f_3\}$ este bază ortogonală în S. Cum $\|f_1\| = \sqrt{2}$, $\|f_2\| = 1$, $\|f_3\| = 1$, rezultă că $\{g_1, g_2, g_3\}$, unde $g_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, $g_2 = (0, 0, 1, 0)$, $g_3 = (0, 0, 0, 1)$, este bază ortonormată în S. Dacă $x = (a, b, c, d) \perp S$, atunci din $x \perp f_1$ se obţine $a - b = 0$, iar din $x \perp f_2$, $x \perp f_3$ se obţine $c = 0$, $d = 0$. Prin urmare, $S^\perp = \{a(1, 1, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Dacă punem $g_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, atunci $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{R}^4$. În cazul concret $x = (2, 3, 4, 5)$, coeficienţii Fourier ai lui x în raport cu baza ortonormată $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ sunt $c_1 = \langle x, g_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \langle x, g_2\rangle = 4$, $c_3 = \langle x, g_3\rangle = 5$, $c_4 = \langle x, g_4\rangle = \frac{5}{\sqrt{2}}$, deci $z = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$, iar $y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4, 5\right)$. Deci, $pr_S x = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4, 5\right)$, iar $dist(x, S) = \|x - y\| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

3. Fie $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ spaţiul euclidian tridimensional al funcţiilor polinomiale cu coeficienţi reali, de grad cel mult 2, cu produsul scalar dat de:

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Să se ortonormeze baza $\{1, t, t^2\}$.

Soluţie. Folosim procedeul Gram-Schmidt. Fie, deci, $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$. Atunci $f_1 = 1$, $f_2 = t - \lambda_{21} \cdot 1$. Cum $< e_2, f_1 >= \int_{-1}^{1} t \cdot 1 dt = 0$, rezultă $\lambda_{21} = 0$, deci $f_2 = t$. Fie acum $f_3 = t^2 - \lambda_{31} \cdot 1 - \lambda_{32} \cdot t$. Calculând, obţinem: $< e_3, f_1 >= \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\, dt = \frac{2}{3}$, $< e_3, f_2 >= \int_{-1}^{1} t^2 \cdot t\, dt = 0$, $< f_1, f_1 >= 2$. Aşadar $\lambda_{31} = \frac{1}{3}$, $\lambda_{32} = 0$, deci $f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. Am obţinut baza ortogonală $f_1 = 1$, $f_2 = t$, $f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. Cum $\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1\rangle} = \sqrt{2}$, $\|f_2\| = \sqrt{\langle f_2, f_2\rangle} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\|f_3\| = \sqrt{\langle f_3, f_3\rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$, rezultă că

$\{g_1, g_2, g_3\}$, unde $g_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $g_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}t$, $g_3 = \dfrac{f_3}{\|f_3\|} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2-1)$, este o bază ortonormată a lui $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Mai general, dacă $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ este spaţiul euclidian al funcţiilor polinomiale cu coeficienţi reali, de grad cel mult n, cu produsul scalar definit ca mai sus, atunci pornind de la baza $\{1, t, ..., t^n\}$, construim prin procedeul de ortogonalizare o nouă bază $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t, ...\}$.

Polinoamele din baza ortogonală astfel construită coincid, abstracţie făcând de un factor multiplicativ, cu polinoamele

$$\frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k[\left(t^2-1\right)^k]}{dt^k},\ k = \overline{0,n},$$

numite *polinoame Legendre*. Polinoamele Legendre formează deci o bază ortogonală în acest spaţiu euclidian. Prin normarea vectorilor acestor baze, obţinem o bază ortonormată $\{g_k\}_{k=\overline{0,n}}$. Dacă q este un polinom arbitrar de grad cel mult n, coordonatele c_0, c_1, ..., $c_n \in \mathbb{R}$ ale lui q în baza $\{g_k\}_{k=\overline{0,n}}$, vor fi determinate prin relaţiile

$$c_k =< q, g_k >= \int_{-1}^{1} q(t) g_k(t) dt,\ k = \overline{0,n}.$$

4. Se consideră sistemul de funcţii f_0, f_1, ..., $f_{2n+1} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, unde $f_0 = 1$, $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, ..., $f_{2n}(t) = \cos nt$, $f_{2n+1}(t) = \sin nt$. Combinaţia lor liniară cu coeficienţii a_0, a_1, ..., a_n, b_1, ..., $b_n \in \mathbb{R}$,

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + ... + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

se numeşte *polinom trigonometric* de grad n. Să se construiască o bază ortonormată în spaţiul vectorial $\mathcal{T}$ al polinoamelor trigonometrice de grad n, înzestrat cu produsul scalar

$$< p, q >= \int_0^{2\pi} p(t) q(t) dt,\ \forall p, q \in \mathcal{T}.$$

Soluţie. Vom arăta că sistemul de polinoame $\{f_0, f_1, ..., f_{2n+1}\}$ este o bază ortogonală în V. Ţinând seama de formulele trigonometrice de transformare a produselor în sume, se verifică uşor că, dacă $l \neq m$, atunci

$$\int_0^{2\pi} \cos lt \cos mt dt = 0,\ \int_0^{2\pi} \sin lt \cos mt dt = 0,\ \int_0^{2\pi} \sin lt \sin mt dt = 0.$$

De asemenea, $\int_0^{2\pi} \sin kt dt = \int_0^{2\pi} \cos kt = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, deci $\langle f_i, f_j \rangle = 0$, dacă $i \neq j$. Prin urmare, sistemul de funcţii $\{f_0, f_1, ..., f_{2n+1}\}$ este o bază ortogonală în V. Pe de altă parte, deoarece $\int_0^{2\pi} \sin^2 kt dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 kt = \pi$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$, rezultă că funcţiile

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t,\ ...,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt,$$

formează o bază ortonormată în acest spaţiu.

Observaţie importantă. Spaţiul vectorial al polinoamelor trigonometrice împreună cu baza ortonormată construită mai sus joacă un rol important în teoria seriilor Fourier.

5. Să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ este ortogonală.

Soluţie. Fie $a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
$a_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Atunci $\|a_1\| = \|a_2\| = \|a_3\| = 1$, $\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, a_3\rangle = \langle a_2, a_3\rangle = 0$, deci A este o matrice ortogonală.

6. Să se afle valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi să se găsească o matrice ortogonală C astfel încât matricea $D = C^t AC$ să fie diagonală.

Soluţie. Ecuaţia caracteristică a matricei A este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

sau $(2-\lambda)^3(-2-\lambda) = 0$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$, iar

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 2$, se obţin rezolvând sistemul nedeterminat $\alpha - \beta - \gamma - \delta = 0$, deci subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 2$, este $V_2 = \{(a+b+c, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Pentru $a = 1$, $b = c = 0$, se obţine vectorul propriu $u_1 = (1, 1, 0, 0)$. Alegem acum un vector propriu $u = (a+b+c, a, b, c) \in V_2$, ortogonal pe u_1. Rezultă $2a + b + c = 0$, deci orice vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 2$ şi ortogonal pe u_1, este de forma $(-a, a, b, -2a-b)$. Pentru $a = -1$, $b = 0$, se obţine vectorul propriu $u_2 = (1, -1, 0, 2)$. În final, alegem un vector propriu $u = (-a, a, b, -2a-b)$, ortogonal pe u_2 (datorită formei sale el este ortogonal şi pe u_1). Rezultă $3a + b = 0$, deci orice vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 2$ şi ortogonal pe u_1 şi u_2, este de forma $(-a, a, -3a, a)$. Pentru $a = -1$, se obţine vectorul propriu $u_3 = (1, -1, 3, -1)$. Prin urmare, $\{u_1, u_2, u_3\}$ este o bază ortogonală în V_2. Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_4 = -2$, se determină rezolvând sistemul nedeterminat

$$\begin{cases} 3\alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ \alpha+3\beta-\gamma-\delta=0 \\ \alpha-\beta+3\gamma-\delta=0 \\ \alpha-\beta-\gamma+3\delta=0 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul, rezultă că subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_4=-2$, este $V_{-2}=\{t(-1,1,1,1)\mid t\in\mathbb{R}\}$. Putem alege $u_4=(-1,1,1,1)$. Fie acum $v_1=\frac{1}{\|u_1\|}u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$, $v_2=\frac{1}{\|u_2\|}u_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},0,\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $v_3=\frac{1}{\|u_3\|}u_3=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{3}{2\sqrt{3}},-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $v_4=\frac{1}{\|u_4\|}u_4=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Sistemul de vectori $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^4$, formată din vectori proprii ai matricei A. Matricea de trecere de la baza canonică din $\mathbb{R}^4$ la baza $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ este matricea ortogonală $C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Se verifică uşor că $C^tAC=\begin{pmatrix} 2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$.

7. Folosind metoda rotaţiilor a lui Jacobi, să se afle valorile proprii ale matricei

$$A=\begin{pmatrix} 0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Soluţie. Cel mai mare element nediagonal este 1. Alegem, $a_{12}=1$, deci $p=1$, $q=2$. Atunci $\theta=\frac{a_{22}-a_{11}}{2a_{12}}=0$, $t=1$, $c=s=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A'=U^tAU=\begin{pmatrix} -1&0&0\\0&1&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$. Continuăm procedeul cu matricea A'. Cel mai mare element nediagonal este $a'_{23}=\sqrt{2}$. Prin urmare, $p=2$, $q=3$, $\theta=\frac{a'_{33}-a'_{22}}{2a'_{23}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $1+\theta^2=\frac{9}{8}$, $t=\frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{2\sqrt{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $s=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. În consecinţă, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $A'' = U^t A' U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Aşadar, valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

3. Probleme propuse

1. Folosind produsele scalare canonice din spaţiile euclidiene corespunzătoare să se calculeze produsele scalare şi normele vectorilor:
a) $x = (2, 3)$, $y = (-6, 4)$;
b) $x = (1, 1, 0)$, $y = (1, -1, 2)$;
c) $x = (1, -1, 2, 3)$, $y = (1, 0, 2, -4)$.

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ şi $< x, y >= x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$. Să se arate că $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$. Dacă $x = (1, -1, 0)$, $y = (-1, 1 - 2)$ să se calculeze $< x, y >$ şi normele acestor vectori date de produsul scalar de mai sus. Precizaţi dacă $< x, y >= 3x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$ (justificare).

3. Fie E un spaţiu euclidian de dimensiune $n \neq 3$. Să se arate că vectorii u_1, u_2, ..., u_n, de normă 1, care satisfac $||u_i - u_j|| = 1$, $1 \le i < j \le n$, formează o bază a lui E.

Pe spaţiile euclidiene din problemele următoare considerăm produsele scalare canonice.

4. Fie $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, -3)$, $u_3 = (5, -4, -1)$. Să se arate că vectorii formează o bază ortogonală a lui $\mathbb{R}^3$. Să se determine coordonatele vectorului $x = (1, 2, 3)$ în raport cu această bază.

5. Să se calculeze distanţa şi unghiul dintre vectorii:
a) $u = (1, 2, -3, 0)$, $v = (2, 4, -3, 1)$;
b) $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = t^2 + 1$ pe $\mathcal{C}([0, 1])$.

6. Să se ortonormeze sistemele de vectori:
a) $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$;
b) $v_1 = (2, 1, 3, -1)$, $v_2 = (7, 4, 3, -3)$, $v_3 = (5, 7, 7, 8)$, $v_4 = (1, 0, -1, 0)$.

7. Să se găsească o bază ortonormată a subspaţiului vectorial S, generat de vectorii $v_1 = (1, 2, 2, -1)$, $v_2 = (1, 1, -5, 3)$, $v_3 = (3, 2, 8, -7)$. Să se completeze această bază la o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^4$.

8. Să se găsească un vector unitar ortogonal vectorilor $v_1 = (1, 0, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2, 3)$, $v_3 = (0, 1, -2, 1)$.

9. Fie $\mathcal{S}$ subspaţiul vectorial al soluţiilor sistemului omogen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Să se găsească câte o bază ortonormată în $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}^{\perp}$.

10. Fie S subspaţiul vectorial al lui $\mathbb{R}^4$, generat de vectorii $v_1 = (2,1,1,-1)$, $v_2 = (1,1,3,0)$, $v_3 = (1,2,8,1)$. Să se scrie vectorul $x = (5,2,-2,2)$ sub forma $x = y + z$, $y \in S$, $z \in S^{\perp}$.

11. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (11x_1 + 2x_2 - 8x_3, 2x_1 + 2x_2 + 10x_3, -8x_1 + 10x_2 + 5x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Să se găsească o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$ astfel încât matricea lui T în această bază să fie diagonală. Să se precizeze această formă diagonală. Să se determine o matrice ortogonală C astfel încât $A = C^t AC$, A fiind matricea lui T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

12. Problemă similară pentru $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $Tx = (x_1 + x_4, x_2, x_3 - 2x_4, x_1 - 2x_3 + 5x_4)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

13. Problemă similară, ştiind că matricea lui T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

14. Să se arate că $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Tx = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2)$ este o transformare liniară ortogonală.

15. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfism a cărui matrice, în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, este $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Să se arate că T este o transformare ortogonală. Afirmaţia rămâne adevărată dacă A este matricea lui T într-o bază oarecare a lui $\mathbb{R}^3$?

16. Este ortogonală matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$?

17. Să se arate că următoarele matrice sunt ortogonale:

a) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{30}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \dfrac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$.

18. Pe $[-\pi, \pi]$, fie $E = \{\alpha + \beta\cos x + \gamma\sin x \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ spaţiul euclidian al polinoamelor trigonometrice de grad 1, în raport cu produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ f, g \in E.$$

Fie transformarea liniară $T : E \to E$, $T(\alpha + \beta\cos x + \gamma\sin x) = \beta + \gamma + (\alpha + \gamma)\cos x + (\alpha + \beta)\sin x$. Să se determine o bază ortonormată în E astfel încât matricea lui T în această bază să fie diagonală. Precizaţi forma diagonală a matricei lui T în această bază ortonormată.

19. Folosind metoda rotaţiilor a lui Jacobi, să se găsească valorile proprii ale următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. a) $\langle x,y\rangle = 2\cdot(-6)+3\cdot 4 = 0$, $\|x\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$, $\|y\| = \sqrt{(-6)^2+4^2} = 2\sqrt{13}$. b) $\langle x,y\rangle = 0$, $\|x\| = \sqrt{2}$, $\|y\| = \sqrt{6}$. c) $\langle x,y\rangle = -7$, $\|x\| = \sqrt{15}$, $\|y\| = \sqrt{21}$. **2.** Se arată uşor că $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^3$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ şi că $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^3$. Pe de altă parte, pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$ are loc $\langle x,x\rangle = x_1^2+6x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3 = (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2-x_3)^2+4x_2^2+x_3^2 \geq 0$, iar din $\langle x,x\rangle = 0$ se obţine $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, adică $x = (0,0,0)$. Deci $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este un produs scalar. În cazul concret, $\langle x,y\rangle = -7$, $\|x\| = \sqrt{5}$, $\|y\| = \sqrt{21}$. În al doilea caz, $\langle x,x\rangle = 3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$. Dacă $x = (1,0,0)$, atunci $\langle x,x\rangle = 0$, deci $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nu este un produs scalar. **3.** Din $1 = \|u_i - u_j\|^2 = \|u_i\|^2 - 2\langle u_i,u_j\rangle + \|u_j\|^2$, rezultă că $\langle u_i,u_j\rangle = -\dfrac{1}{2}$, $\forall i \neq j$. Este suficient să arătăm că vectorii u_1, u_2, ..., u_n, sunt liniar independenţi. Înmulţind scalar succesiv relaţia $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+...+\alpha_nu_n = 0_E$ cu u_1, u_2, ..., u_n, se ajunge la sistemul omogen: $\alpha_1 - \dfrac{1}{2}\alpha_2 - ... - \dfrac{1}{2}\alpha_n = 0$, $-\dfrac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2-\dfrac{1}{2}\alpha_3-...-\dfrac{1}{2}\alpha_n = 0$, ..., $-\dfrac{1}{2}\alpha_1-\dfrac{1}{2}\alpha_2-...-\dfrac{1}{2}\alpha_{n-1}+\alpha_n = 0$, al cărui determinant este nenul, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. **4.** $\langle u_1,u_2\rangle = \langle u_1,u_3\rangle = \langle u_2,u_3\rangle = 0$, deci $\{u_1,u_2,u_3\}$ este o bază ortogonală a lui $\mathbb{R}^3$. Dacă $x = \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3$, atunci $\alpha_1 = \dfrac{\langle x,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} = 2$, $\alpha_2 = \dfrac{\langle x,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle} = -\dfrac{2}{7}$, $\alpha_3 = \dfrac{\langle x,u_3\rangle}{\langle u_3,u_3\rangle} = -\dfrac{1}{7}$. **5.** a) $d(u,v) = \sqrt{6}$, $\cos\alpha = \dfrac{19}{2\sqrt{105}}$. b) $d(f,g) = \frac{4}{3}$, $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{5}}{12\sqrt{7}}$. **6.** a) $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$, $f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$. b) $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{15}}(2,1,3,-1)$, $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{23}}(3,2,-3,-1)$, $f_3 = \dfrac{1}{\sqrt{127}}(1,5,1,10)$, $f_4 = \dfrac{1}{\sqrt{44799}}(125,-157,-6,67)$. **7.** Folosind procedeul Gram-Schmidt, obţinem baza ortogonală în S, $\{f_1,f_2,f_3\}$, $f_1 = (1,2,2,-1)$, $f_2 = (2,3,-3,2)$, $f_3 = (2,-1,-1,-2)$. Atunci $\{g_1,g_2,g_3\}$, unde $g_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,-1)$, $g_2 = \dfrac{1}{\sqrt{26}}(2,3,-3,2)$, $g_3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,-2)$, este o bază ortonormată în S. Dacă $x = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\perp S$, atunci $\alpha+2\beta+2\gamma-\delta = 0$, $2\alpha+3\beta-3\gamma+2\delta = 0$, $2\alpha-\beta-\gamma-2\delta = 0$. Rezultă $\alpha = \dfrac{3}{2}\gamma$, $\beta = -\gamma$, $\delta = \dfrac{3}{2}\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Putem alege $x = (3,-2,2,3)$. Baza ortonormată $\{g_1,g_2,g_3\}$ a lui S se poate completa cu $g_4 = \dfrac{1}{\sqrt{26}}(3,-2,2,3)$, obţinându-se o bază ortonormată în $\mathbb{R}^4$. **8.** Fie $x = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ vectorul căutat. Din $\langle x,v_1\rangle = \langle x,v_2\rangle = \langle x,v_3\rangle = 0$, se obţine sistemul $\alpha+2\gamma+\delta = 0$, $2\alpha+\beta+2\gamma+3\delta = 0$, $\beta-2\gamma+\delta = 0$, ale cărui soluţii sunt $\alpha = -2a-b$, $\beta = 2a-b$, $\gamma = a$, $\delta = b$, $a,b \in \mathbb{R}$. De exemplu, vectorul $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,-1)$ satisface condiţiile din problemă. **9.** $\mathcal{S} = \{(-2a,a+b,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Pentru $a = 1$ şi $b = 0$, găsim vectorul propriu $u_1 = (-2,1,1,0)$. Un vector propriu oarecare

din $\mathcal{S}$ este ortogonal pe u_1 dacă $b = -6a$. Luând $a = -1$ şi $b = 6$, găsim vectorul propriu $u_2 = (2, 5, -1, 6) \in \mathcal{S}$ şi ortogonal pe u_1. Deci putem alege în $\mathcal{S}$ baza ortonormată $\{v_1, v_2\}$, unde $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1, 0)$, $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{66}}(2, 5, -1, 6)$. Determinăm acum $\mathcal{S}^\perp$. Fie $x = (a, b, c, d) \in \mathcal{S}^\perp$. Atunci $-2a + b + c = 0$, $2a + 5b - c + 6d = 0$. $\mathcal{S}^\perp = \{(a, b, 2a-b, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Procedând ca mai sus găsim $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2, 0)$, $v_4 = \dfrac{1}{\sqrt{55}}(2, 5, -1, -5)$. **10.** $\dim S = 2$, o bază în S fiind, de exemplu, $\{v_1, v_2\}$. Prin ortogonalizare, se obţine baza ortogonală a lui S, $f_1 = (2, 1, 1, -1)$, $f_2 = (-5, 1, 15, 6)$. $y = \alpha f_1 + \beta f_2$, $\alpha = \dfrac{\langle x, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} = \dfrac{8}{7}$, $\beta = \dfrac{\langle x, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} = \dfrac{-1}{7}$. Se obţine $y = (3, 1, -1, -2)$, $z = (2, 1, -1, 4)$. **11.** Matricea lui T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$, este $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 18$. Subspaţiile proprii corespunzătoare sunt $V_{\lambda_1} = \{t(2, 2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_2} = \{t(1, -2, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_3} = \{t(-2, 1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$, deci putem alege baza ortonormată $v_1 = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $v_2 = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $v_3 = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. Forma diagonală a matricei A este $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$. $C = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$. **12.** Matricea lui T în baza canonică din $\mathbb{R}^4$, este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Subspaţiile proprii corespunzătoare sunt $V_{\lambda_1} = \{t(1, 0, -2, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_2} = \{t(1, 0, -2, 5) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_3} = \{a(0, 1, 0, 0) + b(2, 0, 1, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, deci putem alege baza ortonormată $v_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0, \dfrac{-2}{\sqrt{6}}, \dfrac{-1}{\sqrt{6}}\right)$, $v_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{30}}, 0, \dfrac{-2}{\sqrt{30}}, \dfrac{5}{\sqrt{30}}\right)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$. Forma diagonală a matricei A este $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{30}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & -\dfrac{2}{\sqrt{30}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{5}{\sqrt{30}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
13. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 27$. Subspaţiile proprii corespunzătoare sunt $V_{\lambda_1} = \{(a, b, -2a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_3} = \{t(2, -2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Determinăm o bază ortonormată în V_{λ_1}. Pentru $a = 1$ şi $b = 0$, găsim vectorul

propriu $u_1 = (1, 0, -2)$. Un vector propriu oarecare din V_{λ_1} este ortogonal pe u_1 dacă $5a - 4b = 0$. Luând $a = 4$ şi $b = 5$, găsim vectorul propriu $u_2 = (4, 5, 2) \in V_{\lambda_1}$ şi ortogonal pe u_1. Deci putem alege baza ortonormată $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$, $v_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Forma diagonală a matricei A este $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$. $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. **14.** Matricea lui T în baza canonică (bază ortonormată) a lui $\mathbb{R}^2$ este $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ şi este o matrice ortogonală. **15.** Coloanele matricei A transpuse formează un sistem ortonormat de vectori din $\mathbb{R}^3$. Nu. **16.** $\det A \neq \pm 1$, deci A nu este ortogonală. **17.** Se arată că vectorii care coincid cu coloanele transpuse ale matricei, formează un sistem ortonormat de vectori. **18.** Matricea lui T în baza $B = \{1, \cos x, \sin x\}$ este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Subspaţiile proprii corespunzătoare sunt $V_{-1} = \{a + b\cos x - (a+b)\sin x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{t(1 + \cos x + \sin x) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Determinăm o bază ortonormată în V_{λ_1}. Pentru $a = 1$ şi $b = 0$, găsim vectorul propriu $f_1(x) = 1 - \sin x$. Un vector propriu oarecare din V_{λ_1} este ortogonal pe f_1 dacă $\int\limits_{-\pi}^{\pi} [a + b\cos x - (a+b)\sin x]\,(1 - \sin x)\mathrm{d}x = 0$. Calculând obţinem $2a\pi + (a+b)\pi = 0$. Luând $a = 1$ şi $b = -3$, găsim vectorul propriu $f_2(x) = 1 - 3\cos x + 2\sin x \in V_{-1}$ şi ortogonal pe f_1. O bază în V_2 este funcţia $f_3(x) = 1 + \cos x + \sin x$. Dar $\|f_1\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 - \sin x)^2\mathrm{d}x = 3\pi$,.$\|f_2\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 - 3\cos x + 2\sin x)^2\mathrm{d}x = 15\pi$, $\|f_3\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos x + \sin x)^2\mathrm{d}x = 4\pi$. Deci putem alege baza ortonormată $g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}(1 - \sin x)$, $g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{15\pi}}(1 - 3\cos x + 2\sin x)$, $g_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(1 + \cos x + \sin x)$. Forma diagonală a matricei A este $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **19.** a) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$. b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$. c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -2$.

CAPITOLUL 7

Forme pătratice

1. Preliminarii

Fie V un spaţiu vectorial real. Funcţia $F : V \times V \to \mathbb{R}$ liniară în ambele argumente se numeşte *formă biliniară* pe V. Forma biliniară F se numeşte *simetrică* dacă $F(x, y) = F(y, x)$, $\forall x, y \in V$. Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază în V. Matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $a_{ij} = F(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, se numeşte *matricea ataşată formei biliniare* F în baza B. O formă biliniară este complet determinată de matricea sa. Mai precis, dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, atunci

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{1.1}$$

Forma biliniară F este simetrică dacă şi numai dacă matricea A este simetrică. Dacă $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ este o altă bază în V şi $A' = \left(a'_{ij}\right)$, $a'_{ij} = F(e'_i, e'_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, este matricea lui F în baza B', atunci $A' = C^t A C$, unde C este matricea de trecere de la baza B la baza B'. Se numeşte *rang* al formei biliniare F, rangul matricei ataşate lui F într-o bază a lui V. Forma biliniară F se numeşte *degenerată* dacă $rang F < n$ şi *nedegenerată* dacă $rang F = n$.

Fie, acum, F o formă biliniară simetrică pe V. Funcţia $Q : V \to \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x, x)$, se numeşte *formă pătratică* pe V, asociată lui F. Dacă este cunoscută forma pătratică Q, forma biliniară F care o defineşte, se determină cu formula $F(x, y) = \dfrac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)]$ şi se numeşte *polara* formei pătratice Q. Forma pătratică Q se numeşte *pozitiv definită* dacă $Q(x) > 0$, $\forall x \neq 0_V$ şi se numeşte *negativ definită* dacă $Q(x) < 0$, $\forall x \neq 0_V$. Forma pătratică este *cu semn nedefinit* dacă există x, y astfel ca $Q(x) > 0$ şi $Q(y) < 0$. Dacă $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este bază în V şi $a_{ij} = F(e_i, e_j) = a_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$, din (1.1) se obţine

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{1.2}$$

O matrice simetrică se numeşte *matrice pozitiv definită* dacă forma pătratică asociată este pozitiv definită. Matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ se numeşte *tare diagonal dominantă* dacă pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, are loc

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Dacă matricea simetrică $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este pozitiv definită, atunci $a_{ii} > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$. Dacă matricea simetrică $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este tare diagonal dominantă şi $a_{ii} > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, atunci este pozitiv definită.

Se spune că forma pătratică Q este *redusă la forma canonică* dacă se determină o bază $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ în V astfel încât pentru orice $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i f_i \in V$ are loc

$$Q(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + ... + \lambda_n x_n'^2, \tag{1.3}$$

unde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, se numesc *coeficienţii* formei pătratice.

Prezentăm acum metode pentru reducerea la forma canonică a unei forme pătratice. Fie, deci, Q o formă pătratică ce are în baza $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ expresia (1.2).

Metoda lui Gauss. Constă în scrierea formei pătratice ca sumă de pătrate de forme liniare (având coeficienţi reali). Dacă $a_{ii} \neq 0$, grupăm toţi termenii care conţin x_i şi formăm un pătrat perfect. Vom avea

$$Q(x) = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii}x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j)^2 + Q_1(\underline{x}),$$

unde $\underline{x} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Dacă $a_{ii} = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, atunci există $i \neq j$, astfel ca $a_{ij} \neq 0$. Cu schimbarea de variabile $x_k = y_k$, $k = \overline{1,n}$, $k \neq i$, $k \neq j$, $x_i = y_i + y_j$, $x_j = y_i - y_j$, obţinem $a_{ij}x_ix_j = a_{ij}(y_i^2 - y_j^2)$, deci, în noile variabile, Q va conţine un termen pătratic. Prin urmare, se poate aplica tehnica de mai sus. Continuăm procedeul cu forma pătratică Q_1 care conţine $n-1$ variabile. Din aproape în aproape, după un număr finit de paşi, forma pătratică Q se scrie ca sumă de pătrate de forme liniare.

Metoda lui Jacobi. Dacă pentru orice $i = \overline{1,n}$, determinanţii

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2i} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1i} & a_{2i} & ... & a_{ii} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

sunt nenuli, atunci există o bază $B = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ astfel ca dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i f_i$,

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2'^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n'^2. \tag{1.5}$$

Baza B se determină astfel:

$$f_i = c_{1i}e_1 + ... + c_{ii}e_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{1.6}$$

iar c_{ji}, $j = \overline{1,i}$, satisfac sistemele de ecuaţii

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2i} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1,i-1} & a_{2,i-1} & ... & a_{i-1,i} \\ a_{1i} & a_{2i} & ... & a_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ ... \\ c_{i-1,i} \\ c_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Metoda transformărilor ortogonale (a valorilor proprii). Dacă V este spaţiu euclidian, forma pătratică Q, dată de (1.2), are forma canonică (1.3), unde λ_1, λ_2,...,λ_n, sunt valorile proprii ale matricei A, baza formei canonice fiind baza ortonormată formată din vectorii proprii corespunzători.

Criteriul lui Sylvester. Forma pătratică Q, dată de (1.2), este pozitiv (negativ) definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$ ($(-1)^i\Delta_i > 0$), $i = \overline{1,n}$, unde Δ_i sunt daţi de (1.4).

Reducerea simultană la forma canonică a două forme pătratice. Fie $\Psi, Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ două forme pătratice date de $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Notăm cu $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Dacă Q este pozitiv definită, atunci polara sa F defineşte pe $\mathbb{R}^n$ produsul scalar $\langle x, y\rangle_F = F(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. În acest caz, există o bază ortonormată în raport cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot\rangle_F$, $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ astfel încât să avem

$$\begin{array}{c} Q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + ... + x_n'^2 \\ \Psi(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + ... + \lambda_n x_n'^2 \end{array},$$

unde $x = x_1'f_1 + x_2'f_2 + ...x_n'f_n$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt soluţii ale ecuaţiei $\det(A-\lambda B) = 0$ şi $(A - \lambda B)f_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

2. Probleme rezolvate

1. Să se arate că $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 5x_3y_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, este o formă biliniară simetrică. Care este matricea lui F în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$, unde $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (2, 1, 0)$, $f_3 = (-3, 2, 1)$? Dar în baza $\{g_1, g_2, g_3\}$, unde $g_1 = (0, 3, 1)$, $g_2 = (6, -1, -1)$, $g_3 = (-4, 1, 1)$? Care este rangul lui F? Ce legătură există între cele două matrice? Este pozitiv definită forma biliniară?

Soluţie. Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$. Atunci $F(x+y, z) = (x_1+y_1)z_1 + (x_1+y_1)z_2 + (x_2+y_2)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2 + 2(x_2+y_2)z_3 + 2(x_3+y_3)z_2 + 5(x_3+y_3)z_3 = F(x, z) + F(y, z)$ şi $F(x, y+z) = x_1(y_1+z_1) + x_1(y_2+z_2) + x_2(y_1+z_1) + 2x_2(y_2+z_2) + 2x_2(y_3+z_3) + 2x_3(y_2+z_2) + 5x_3(y_3+z_3) = F(x, y) + F(x, z)$. De asemenea, dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $F(\alpha x, y) = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_1)y_2 + (\alpha x_2)y_1 + 2(\alpha x_2)y_2 + 2(\alpha x_2)y_3 + 2(\alpha x_3)y_2 + 5(\alpha x_3)y_3 = \alpha F(x, y)$ şi $F(x, \alpha y) = x_1(\alpha y_1) + x_1(\alpha y_2) + x_2(\alpha y_1) + 2x_2(\alpha y_2) + 2x_2(\alpha y_3) + 2x_3(\alpha y_2) + 5x_3(\alpha y_3) = \alpha F(x, y)$, deci F este o formă biliniară. Deoarece $F(y, x) = y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2 + 2y_2x_3 + 2y_3x_2 + 5y_3x_3 = F(x, y)$, rezultă că forma biliniară este simetrică. Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui F în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$. Cum $a_{ij} = F(f_i, f_j)$, se obţine $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Similar, dacă $B = (b_{ij})$ este matricea lui F în baza $\{g_1, g_2, g_3\}$, atunci $B = \begin{pmatrix} 35 & -1 & 7 \\ -1 & 35 & -25 \\ 7 & -25 & 19 \end{pmatrix}$. Deoarece $g_1 = f_1 + f_2 + f_3$, $g_2 = f_1 + f_2 - f_3$, $g_3 = f_1 - f_2 + f_3$, matricea de trecere de la baza$\{f_1, f_2, f_3\}$ la baza $\{g_1, g_2, g_3\}$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Legătura dintre cele două matrice este $B = C^tAC$. Totodată $\det A = 1$, deci $rang A = 3$. În consecinţă, rangul formei biliniare este 3. Dar $F(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 = (x_1+x_2)^2 + (x_2+2x_3)^2 + x_3^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ şi din $F(x, x) = 0$ rezultă $x = (0, 0, 0)$, deci forma biliniară F este pozitiv definită.

2. Fie $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma pătratică, având în baza canonică $\{e_1, e_2\}$ a lui $\mathbb{R}^2$, expresia $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2$, $x = (x_1, x_2)$. Să se reducă la forma canonică folosind metoda lui Gauss, precizându-se baza formei canonice. Este pozitiv definită forma pătratică?

Soluţie. Grupăm termenii care conţin x_1 şi căutăm să formăm un pătrat perfect. Avem $Q(x) = (x_1^2 - 2x_1x_2) + 4x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$. Notând $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_2$, obţinem forma canonică $Q(x) = y_1^2 + 3y_2^2$, $x = y_1f_1 + y_2f_2$, unde $\{f_1, f_2\}$ este baza formei canonice. Pentru a găsi această bază, determinăm matricea C, de trecere de la baza canonică la baza $\{f_1, f_2\}$. În acest scop, vom exprima coordonatele iniţiale x_1 şi x_2 în funcţie de coordonatele noi y_1 şi y_2. Deoarece $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_2$, rezultă că $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (1, 1)$. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ este matricea lui Q în baza canonică, matricea în baza $\{f_1, f_2\}$ va fi $D = C^tAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Din forma canonică, este clar că Q este pozitiv definită.

3. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică, având în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ a lui $\mathbb{R}^3$, expresia $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Să se reducă la forma canonică folosind metoda lui Gauss, precizându-se baza formei canonice. Este pozitiv definită forma pătratică? Aceeaşi problemă pentru forma pătratică $Q_1(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Soluţie. Grupăm termenii care conţin x_1 şi căutăm să formăm un pătrat perfect. Avem $Q(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 2x_2x_3 = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$, unde $y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3$, $y_2 = \dfrac{1}{2}(x_2 + x_3)$, $y_3 = \dfrac{1}{2}(x_2 - x_3)$. Aşadar $Q(x) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2$, $x = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3$, unde $\{f_1, f_2, f_3\}$ este baza formei canonice. Pentru a determina această bază, exprimăm coordonatele iniţiale x_1, x_2 şi x_3 în funcţie de coordonatele noi y_1, y_2 şi y_3, ceea ce ne va permite să găsim matricea de schimbare a bazei. Deoarece $x_1 = y_1 - 3y_2 + y_3$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = y_2 - y_3$, rezultă că $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, deci $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (-3, 1, 1)$, $f_3 = (1, 1, -1)$. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ este matricea lui Q în baza canonică, matricea în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ va fi $D = C^tAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Deoarece $Q(f_1) = 1 > 0$, $Q(f_2) = -2 < 0$, forma pătratică nu este nici pozitiv, nici negativ definită, este cu semn nedefinit. Pentru cealaltă formă pătratică, procedând ca mai sus, se obţine $Q_1(x) = \dfrac{1}{2}(2x_1 + 2x_2 - 2x_3)^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$. Grupăm acum termenii care conţin x_2 şi formăm un pătrat perfect. Avem $Q_1(x) = \dfrac{1}{2}(2x_1 + 2x_2 - 2x_3)^2 + \dfrac{1}{3}(3x_2 - 2x_3)^2 + \dfrac{5}{3}x_3^2$. Aşadar $Q_1(x) = \dfrac{1}{2}y_1^2 + \dfrac{1}{3}y_2^2 + \dfrac{5}{3}y_3^2$, unde $y_1 = 2x_1 + 2x_2 - 2x_3$, $y_2 = 3x_2 - 2x_3$, $y_3 = x_3$. De asemenea, $f_1 = (\dfrac{1}{2}, 0, 0)$, $f_2 = (-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0)$, $f_3 = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 1)$. Evident, Q_1 este pozitiv definită.

4. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică, care în baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ a lui $\mathbb{R}^3$ are expresia $Q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Să se reducă la forma canonică folosind metoda lui Jacobi şi metoda transformărilor ortogonale.

Soluţie. Metoda Jacobi. Matricea formei pătratice este $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ şi are minorii principali: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 10.$

Putem pune deja în evidenţă forma canonică a lui Q, folosind (1.5):

$$Q(x) = \frac{1}{2}x_1'^2 + \frac{1}{3}x_2'^2 + \frac{3}{5}x_3'^2.$$

Să determinăm acum baza formei canonice. Conform (1.6), $f_1 = c_{11}e_1$, unde $c_{11} = \frac{1}{2}$, deci $f_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$. Dar $f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2$, unde c_{12} şi c_{22} satisfac sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2c_{12} + 2c_{22} = 0 \\ 2c_{12} + 5c_{22} = 1 \end{cases}$. Cum $c_{22} = \frac{1}{3}$, rezultă $c_{12} = -\frac{1}{3}$, deci $f_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. În sfârşit, $f_3 = c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3$, unde c_{13}, c_{23}, c_{33} sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii: $\begin{cases} 2c_{13} + 2c_{23} - 2c_{33} = 0 \\ 2c_{13} + 5c_{23} - 4c_{33} = 0 \\ -2c_{13} - 4c_{23} + 5c_{33} = 1 \end{cases}$. Obţinem $c_{13} = \frac{1}{5}$, $c_{23} = \frac{2}{5}$, $c_{33} = \frac{3}{5}$. Aşadar $f_3 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Metoda transformărilor ortogonale. Valorile proprii ale matricei asociate formei pătratice în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$. Subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 este $V_{\lambda_1} = \{(-2a + 2b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Determinăm o bază ortonormată în V_{λ_1}. Evident $\dim V_{\lambda_1} = 2$. Pentru $a = 1$ şi $b = 0$, obţinem vectorul propriu $u_1 = (-2, 1, 0)$. Condiţia ca un element oarecare din V_{λ_1} să fie ortogonal pe u_1 este $5a - 4b = 0$. Alegând, de exemplu, $a = 4$, $b = 5$, găsim $u_2 = (2, 4, 5)$. Fiind ortogonali cei doi vectori sunt liniar independenţi. Normându-i, obţinem vectorii proprii $v_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $v_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$, care formează o bază ortonormată în V_{λ_1}. Pentru $\lambda_3 = 10$, găsim $v_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$. În baza $\{v_1, v_2, v_3\}$, Q are forma diagonală $Q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + 10x_3'^2$, unde $x = x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3$.

5. Să se reducă simultan la forma canonică formele pătratice $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$, $\Psi(x) = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$. Să se găsească baza formelor canonice.

Soluţie. Matricele asociate formelor pătratice Ψ şi Q sunt $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & -28 & 16 \\ 7 & 16 & 14 \end{pmatrix}$ respectiv $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Folosind metoda lui Jacobi rezultă uşor că Q este pozitiv definită. Prin calcul rezultă că $\det(A - \lambda B) = -4(\lambda - 9)^2(\lambda + 9)$. În concluzie, formele canonice sunt: $\Psi(x) = 9x_1'^2 + 9x_2'^2 - 9x_3'^2$, $Q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$. Considerăm produsul scalar definit de polara formei pătratice Q: $\langle x, y\rangle_F = F(x, y) = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Pentru $\lambda = 9$, mulţimea soluţiilor sistemului $(A - \lambda B)x^t = 0$ este $S = \{(8a - b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Este clar că $\dim S = 2$. Determinăm în S o bază ortonormată $\{f_1, f_2\}$, în raport cu produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$. Pentru $a = 1$, $b = 0$, obţinem $x = (8, 1, 0)$. Cum $\|x\| = \sqrt{Q(x)} = 2\sqrt{17}$, alegem $f_1 = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{2\sqrt{17}}, 0)$. Pentru construcţia lui f_2, vom căuta $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\langle x, y\rangle_F = F(x, y) = 0$, $y = (8a - b, a, b)$, ceea ce se întâmplă dacă $17a - 2b = 0$. Pentru $a = 2$, $b = 17$, avem $y = (-18, 2, 17)$, $\|y\| = \sqrt{Q(y)} = \sqrt{306}$. Putem lua $f_2 = (\frac{-18}{\sqrt{306}}, \frac{2}{\sqrt{306}}, \frac{17}{\sqrt{306}})$. Procedând analog, pentru $\lambda = -9$ găsim $x = (0, -2t, t)$, deci $f_3 = (0, \frac{-2}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$.

3. Probleme propuse

1. Să se arate că $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = 2x_1y_1 - 5x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$ este o formă biliniară. Care este matricea lui F în baza $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$? Este simetrică forma biliniară?

2. Pe $\mathbb{R}^2$, fie forma biliniară $F(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$. Găsiţi matricele asociate lui F în bazele $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 0)$, respectiv $g_1 = (1, 2)$, $g_2 = (-1, 1)$. Ce relaţie este între cele două matrice?

3. Fie $F : \mathcal{C}([0, 1]) \times \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbb{R}$, $F(f, g) = \int_0^1 \int_0^1 f(t)\, g(s)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s$.

a) Să se arate că F este o formă biliniară simetrică;

b) Să se determine matricele lui F în bazele $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$ respectiv $f_1 = 1$, $f_2 = t - 1$, $f_3 = (t - 1)^2$. Ce legătură este între cele două matrice?

4. Fie $V = \{u \in \mathcal{C}^2((0, 1)) \cap \mathcal{C}([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$ şi $F : v \times V \to \mathbb{R}$,
$$F(u, v) = -\int_0^1 u''(x)v(x)dx.$$

a) Să se arate că F este o formă biliniară simetrică pe V;

b) Să se arate că funcţiile f_1, f_2, $f_3 \in V$, $f_1(t) = t - t^2$, $f_2(t) = t^2 - t^3$, $f_3(t) = t^3 - t^4$, sunt liniar independente;

c) Se consideră restricţia lui F la subspaţiul generat de funcţiile f_1, f_2, f_3. Să se determine matricea acestei restricţii în raport cu baza $\{f_1, f_2, f_3\}$.

5. Care este polara formei pătratice $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 3x_2x_3$?

6. Fie V un spaţiu vectorial real şi $F : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică şi pozitiv definită. Să se arate că $(F(x, y))^2 \le F(x, x) \cdot F(y, y)$.

7. Să se reducă la forma canonică, folosind metoda lui Gauss, următoarele forme pătratice. Să se specifice baza formei canonice. Care din aceste forme pătratice este pozitiv definită?

a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;

b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$;

c) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
d) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
e) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=4x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-3x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
f) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=2x_1^2+18x_2^2+8x_3^2-12x_1x_2+8x_1x_3-27x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
g) $Q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$;
h) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=8x_1x_2+6x_2^2+x_3^2$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;.

8. Să se reducă la forma canonică, folosind metoda lui Jacobi, următoarele forme pătratice. Să se specifice baza formei canonice. Care din aceste forme pătratice este pozitiv definită?
a) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
b) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
c) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
d) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
e) $Q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2+4x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3-2x_3x_4$, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$;
f) $Q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $Q(x)=3x_1^2+2x_2^2-x_3^2-2x_4^2+2x_1x_2-4x_2x_3+2x_2x_4$, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

9. Pentru ce valori ale lui λ, următoarele forme pătratice sunt pozitiv definite?
a) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=5x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
b) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
c) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$.

10. Folosind metoda transformărilor ortogonale să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice. Să se găsească baza formei canonice.
a) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
b) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
c) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
d) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=4x_1x_2-x_3^2$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
e) $Q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $Q(x)=2x_1x_2+2x_3x_4$, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$;
f) $Q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+5x_4^2+2x_1x_4-4x_3x_4$, $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

11. Să se reducă simultan la forma canonică următoarele perechi de forme pătratice, precizându-se baza formelor canonice.
a) $Q,\Psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2+4x_2^2-2x_1x_2$, $\Psi(x)=-4x_1x_2$, $x=(x_1,x_2)$;
b) $Q,\Psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$, $\Psi(x)=x_1^2+6x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$;
c) $Q,\Psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $Q(x)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3$, $\Psi(x)=-10x_1^2+2x_2^2-15x_3^2+2x_1x_2+12x_1x_3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$.

12. Sunt pozitiv definite matricele?

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 8 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Să se precizeze natura, ca formă pătratică, a diferenţialei a doua, pentru următoarele funcţii în punctele indicate.

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$, $O(0,0)$, $A(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2},\sqrt{2})$;

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$, $O(0,0)$, $A(1,1)$;

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=-2x^2-5y^2+2xy+6x+6y$, $A(x,y)$;

d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$, $M(x,y,z)$.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. Se verifică uşor că F este liniară în ambele argumente. $F(f_1,f_1)=2$, $F(f_1,f_2)=-3$, $F(f_1,f_3)=-3$, $F(f_2,f_1)=4$, $F(f_2,f_2)=-4$, $F(f_2,f_3)=-7$, $F(f_3,f_1)=4$, $F(f_3,f_2)=0$, $F(f_3,f_3)=-4$, deci matricea lui F în baza dată este $A=\begin{pmatrix}2&-3&-3\\4&-4&-7\\4&0&-4\end{pmatrix}$ şi nu este simetrică. Prin urmare, forma biliniară F nu este simetrică. **2.** Fie A şi B matricele asociate lui F în bazele $\{f_1,f_2\}$ respectiv $\{g_1,g_2\}$. Procedând ca mai sus, obţinem $A=\begin{pmatrix}4&3\\5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-3\\-9&0\end{pmatrix}$. Matricea de trecere de la baza $\{f_1,f_2\}$ la baza $\{g_1,g_2\}$ este $C=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-2\end{pmatrix}$. Are loc $B=C^tAC$. **3.** a) Biliniaritatea şi simetria rezultă din proprietăţile integralei. b) $a_{11}=F(e_1,e_1)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \mathrm{d}t\ \mathrm{d}s=1$, $a_{12}=F(e_1,e_2)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 s\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s=\frac{1}{2}$, $a_{22}=F(e_2,e_2)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 ts\mathrm{d}t\ \mathrm{d}s=\frac{1}{4}$ etc. Obţinem $A=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac13\\\frac12&\frac14&\frac16\\\frac13&\frac16&\frac19\end{pmatrix}$. Similar $B=\begin{pmatrix}1&-\frac12&\frac13\\-\frac12&\frac14&-\frac16\\\frac13&-\frac16&\frac19\end{pmatrix}$ este matricea formei biliniare în baza $\{f_1,f_2,f_3\}$. Se constată uşor că $B=C^tAC$, unde $C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ este matricea de trecere de la baza $\{e_1,e_2,e_3\}$ la baza $\{f_1,f_2,f_3\}$. **4.** $F(u,v)=\int\limits_0^1 u'(x)v'(x)dx$. $\begin{pmatrix}\frac13&\frac16&\frac1{10}\\\frac16&\frac2{15}&\frac1{10}\\\frac1{10}&\frac1{10}&\frac3{35}\end{pmatrix}$. **5.** $F(x,y)=\frac{1}{2}\left[Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right]=x_1y_1-x_2y_2+\frac12x_1y_2+\frac12x_2y_1+\frac32x_2y_3+\frac32x_3y_2$. **6.** Dacă $y=0_V$, atunci inegalitatea devine egalitate. Presupunem $y \neq 0_V$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, are loc: $0 \leq F(x+ty, x+ty) = t^2F(y,y) + 2tF(x,y) + F(x,x)$, deci $\Delta = 4\left((F(x,y)^2 - F(x,x)F(y,y)\right) \leq 0$. **7.** a) $Q(x) = \frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + \frac{5}{26}\left(\frac{26}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3\right)^2 + \frac{40}{13}x_3^2$. $f_1 = (\frac{1}{5}, 0, 0)$, $f_2 = (\frac{1}{13}, \frac{5}{26}, 0)$, $f_3 = (\frac{6}{13}, \frac{2}{13}, 1)$. Q este pozitiv definită. b) $Q(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}(3x_2 + x_3)^2 + \frac{7}{3}x_3^2$. $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, $f_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$. Q nu este pozitiv definită. c) $Q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2$. $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (1,1,0)$, $f_3 = (-3,-2,1)$. Q nu este pozitiv definită. d) $Q(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + \frac{1}{4}(4x_2 + 2x_3)^2 - 9x_3^2$. $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$, $f_3 = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$. Q nu este pozitiv definită. e) $Q(x) = \frac{1}{4}(4x_1 + 2x_2 - 2x_3)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2$. $f_1 = (\frac{1}{4}, 0, 0)$, $f_2 = (0,1,1)$, $f_3 = (-1,1,-1)$. Q nu este pozitiv definită. f) $Q(x) = \frac{1}{2}(2x_1 - 6x_2 + 4x_3)^2 - 3\left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2$. $f_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, $f_2 = (1,1,1)$, $f_3 = (5,1,-1)$. g) $Q(x) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)^2 - \frac{1}{2}(2x_2 + 3x_2 + x_4)^2 + \frac{1}{2}(x_3 + x_4)^2$. $f_1 = (1,0,0,0)$, $f_2 = (-1, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $f_3 = (1, -\frac{3}{2}, 1, 0)$, $f_4 = (-1,1,-1,1)$. Q nu este pozitiv definită. **8.** a) $Q(x) = \frac{1}{5}x_1'^2 + \frac{5}{26}x_2'^2 + \frac{13}{40}x_3'^2$. $f_1 = (\frac{1}{5}, 0, 0)$, $f_2 = (\frac{1}{13}, \frac{5}{26}, 0)$, $f_3 = (\frac{3}{20}, \frac{1}{20}, \frac{13}{40})$. b) $Q(x) = x_1'^2 - \frac{1}{3}x_2'^2 - \frac{3}{8}x_3'^2$. $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$, $f_3 = (\frac{5}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$. c) $Q(x) = \frac{1}{3}x_1'^2 - \frac{3}{10}x_2'^2 + \frac{40}{53}x_3'^2$. $f_1 = (\frac{1}{3}, 0, 0)$, $f_2 = (\frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, 0)$, $f_3 = (\frac{16}{53}, \frac{6}{53}, \frac{40}{53})$. d) $Q(x) = x_1'^2 - \frac{1}{3}x_2'^2 + \frac{3}{7}x_3'^2$. $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$, $f_3 = (-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{3}{7})$. e) $Q(x) = x_1'^2 + \frac{1}{3}x_2'^2 + \frac{3}{17}x_3'^2 - \frac{17}{3}x_4'^2$. $f_1 = (1,0,0,0)$, $f_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$, $f_3 = (-\frac{1}{17}, -\frac{1}{17}, \frac{3}{17}, 0)$, $f_4 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, -\frac{17}{3})$. f) $Q(x) = \frac{1}{3}x_1'^2 + \frac{3}{5}x_2'^2 - \frac{5}{17}x_3'^2 - \frac{17}{37}x_4'^2$. $f_1 = (\frac{1}{3}, 0, 0, 0)$, $f_2 = (-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0)$, $f_3 = (\frac{2}{17}, -\frac{6}{17}, -\frac{5}{17}, 0)$, $f_4 = (-\frac{1}{37}, \frac{3}{37}, -\frac{6}{37}, -\frac{17}{37})$. **9.** a) $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = \lambda - 2$. Conform criteriului lui Sylvester, Q este pozitiv definită $\Leftrightarrow \lambda > 2$. b) $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2 - \lambda^2$, $\Delta_3 = 5 - 3\lambda^2$. $\Delta_2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\Delta_3 > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. În consecinţă, Q este pozitiv definită $\Leftrightarrow \lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. c) $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4 - \lambda^2$, $\Delta_3 = -\lambda^2 + 6\lambda - 16$. Deoarece $\Delta_3 < 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, rezultă că nu există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca Q să fie pozitiv definită. **10.** a) $Q(x) = 2x_1'^2 + 5x_2'^2 + 8x_3'^2$. $f_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $f_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $f_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. b) $Q(x) = x_1'^2 - 2x_2'^2 + 4x_3'^2$. $f_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $f_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $f_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. c) $Q(x) = 2x_1'^2 + \frac{1}{2}x_2'^2 + \frac{1}{2}x_3'^2$. $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $f_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. d) $Q(x) = -x_1'^2 + 2x_2'^2 - 2x_3'^2$. $f_1 = (0,0,1)$, $f_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $f_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. e) $Q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$. $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, $f_2 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $f_4 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. f) $Q(x) = x_2'^2 + x_3'^2 + 6x_4'^2$. $f_1 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $f_2 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, $f_3 = (0,1,0,0)$, $f_4 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$. **11.** a) $Q(x) = y_1^2 + y_2^2$, $\Psi(x) = \frac{2}{3}y_1^2 - 2y_2^2$. $f_1 = (\frac{2}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}})$, $f_2 = (1, \frac{1}{2})$. b) $Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $\Psi(x) = y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{9}{2}y_3^2$. $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_3 = (\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. c) $Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $\Psi(x) = \frac{1}{2}y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{27}{4}y_3^2$. $f_1 = (0, \frac{1}{2}, 0)$, $f_2 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $f_3 = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{2\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})$. **12.** a) Da, matricea este tare diagonal dominantă. b) Nu, deoarece $a_{33} = 0$. c) Da, deoarece $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, $\Delta_3 > 0$. d) Nu, deoarece $\Delta_2 = 0$. e) Da, deoarece $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 = 5$. **13.** a) $d^2f(x,y) = (12x^2 - 4)dx^2 + 8dxdy + (12y^2 - 4)dy^2$. $d^2f(0,0) = -4(dx - dy)^2$, deci $d^2f(0,0)$ este degenerată, negativ semidefinită. $d^2f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 20dx^2 + 8dxdy + 20dy^2$ este pozitiv definită. b) $d^2f(x,y) = 6xdx^2 - 6dxdy + 6ydy^2$. $d^2f(0,0) = -6dxdy = \frac{3}{2}(dx - dy)^2 - \frac{3}{2}(dx + dy)^2$, deci $d^2f(0,0)$ este cu semn nedefinit. $d^2f(1,1) = 6dx^2 - 6dxdy + 6dy^2$ este pozitiv definită. c) $d^2f(x,y) = -4dx^2 + 4dxdy - 10dy^2$ este negativ definită. d) $d^2f(x,y,z) = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 - 2dxdy$ este pozitiv definită.

CAPITOLUL 8

Elemente de calcul tensorial

1. Preliminarii

Noţiunea de tensor îşi are originea în mecanică şi se leagă de numele lui W. Voigt (1850-1919). Prima mărime tensorială a fost definită de complexul ce caracterizează starea de tensiune într-un mediu elastic (de aici şi denumirea de "tensor"). O contribuţie deosebită la dezvoltarea calculului tensorial au avut G. Ricci şi T. Levi-Civita care au dat prima expunere sistematică a acestei teorii.

În acest capitol vom folosi *convenţia de sumare a lui Einstein*: dacă într-o expresie, un indice apare de două ori, odată ca indice superior şi odată ca indice inferior, atunci se sumează după acest indice, dacă nu se face vreo menţiune specială. Semnul "$\sum$" nu se mai scrie. Indicele de sumare poate fi notat cu orice literă şi se numeşte *indice mut*. Spre exemplu, sumele $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y^i$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i b^j c^i_{jk}$ vor fi scrise astfel: $x_i y^i$, $a_i b^j c^i_{jk}$.

Fie $V_1, ..., V_n, W$ spaţii vectoriale peste acelaşi corp K. Aplicaţia $F : V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \to W$ se numeşte *multiliniară (n-liniară)* dacă pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, avem:

$$F(x_1, ..., x_{i-1}, \alpha x'_i + \beta x''_i, x_{i+1}, ..., x_n) = \alpha F(x_1, ..., x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, ..., x_n)+$$
$$+\beta F(x_1, ..., x_{i-1}, x''_i, x_{i+1}, ..., x_n),\ \forall \alpha, \beta \in K,\ x'_i, x''_i \in V_i,\ x_k \in V_k,\ k \neq i.$$

Fie V un spaţiu vectorial peste K. Mulţimea aplicaţiilor liniare $f : V \to K$ este un K-spaţiu vectorial numit *dualul* lui V şi se notează cu V^*. Aşadar $V^* = \mathcal{L}(V, K)$.

Dacă $p, q \in \mathbb{N}$, se numeşte *tensor de p ori covariant şi q ori contravariant* orice formă multiliniară $t : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p\ ori} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{q\ ori} \to K$. Se spune că t este *tensor de tip (p,q)*, p numindu-se *ordinul de covarianţă*, iar q *ordinul de contravarianţă*. Numărul $p+q$ se numeşte *rangul* sau *valenţa* tensorului. Vom nota cu $T^q_p(V)$ mulţimea tuturor tensorilor de p ori covarianţi şi q ori contravarianţi pe spaţiul vectorial V.

Presupunem că $\dim_K V = n$. Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V. Pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, există o formă liniară unică $f^i : V \to K$ astfel ca

$$f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}. \tag{1.1}$$

Sistemul de forme liniare $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ este o bază în V^*, numită *baza duală* bazei B. Fie $t \in T^q_p(V)$, iar $x_1, ..., x_p \in V$, $h^1, ..., h^q \in V^*$. Atunci

$$x_i = \xi^{j_i}_i\ e_{j_i},\ i = \overline{1,p}, \quad h^l = a^l_{k_l}\ f^{k_l},\ l = \overline{1,q}.$$

Din liniaritatea lui t în fiecare argument, se obţine:

$$t(x_1,...,x_p,h^1,...,h^q)=\xi_1^{j_1}...\xi_p^{j_p}\ \alpha_{k_1}^1...\alpha_{k_q}^q\ t(e_{j_1},...,e_{j_p},f^{k_1},...,f^{k_q}). \tag{1.2}$$

În această relaţie apar n^{p+q} scalari, pe care-i vom nota

$$\begin{array}{c}\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}=t(e_{j_1},...,e_{j_p},f^{k_1},...,f^{k_q}),\\ j_i=\overline{1,n},\ \forall i=\overline{1,p},\ k_l=\overline{1,n},\ \forall l=\overline{1,q}\end{array} \tag{1.3}$$

şi se numesc *coeficienţii tensorului* t sau *componentele tensorului* t în baza B fixată în V. Atunci (1.2) se scrie:

$$t(x_1,...,x_p,h^1,...,h^q)=\xi_1^{j_1}...\xi_p^{j_p}\ \alpha_{k_1}^1...\alpha_{k_q}^q\ \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} \tag{1.4}$$

Prin urmare, fiecărui tensor $t\in T_p^q(V)$ i se poate asocia, fixând o bază în V, un sistem de n^{p+q} scalari unic determinaţi prin (1.3). Reciproc, se poate demonstra că, dat fiind un sistem de n^{p+q} scalari

$$(\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}),\ j_i=\overline{1,n},\ \forall i=\overline{1,p},\ k_l=\overline{1,n},\ \forall l=\overline{1,q},$$

există un unic tensor $t\in T_p^q(V)$ astfel ca

$$t(e_{j_1},...,e_{j_p},f^{k_1},...,f^{k_q})=\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q},$$

pentru orice $j_1,...,j_p$, $k_1,...,k_q$ luând independent valori de la 1 la n. Aşadar, $T_p^q(V)\simeq K^{n^{p+q}}$, deci $\dim T_p^q(V)=n^{p+q}$.

Considerăm acum $B'=\{e_1',...,e_n'\}$ o altă bază în V şi $B'^*=\left\{f'^1,...,f'^n\right\}$ baza sa duală în V^*. Dacă $C=\left(c_i^k\right)_{i,k=\overline{1,n}}$ este matricea de trecere de la baza B la baza B', atunci

$$e_i'=c_i^k e_k,\ i=\overline{1,n} \tag{1.5}$$

(indicele superior k se referă la linie, iar cel inferior i la coloană) şi

$$f'^i=d_k^i f^k,\ i=\overline{1,n}, \tag{1.6}$$

unde, dacă $D=\left(d_k^i\right)_{k,i=\overline{1,n}}$, matricea de trecere de la baza B^* la baza B'^* este $D^t=\left(C^{-1}\right)^t$. Dacă

$$\begin{array}{c}\tau'^{\,l_1,...,l_q}_{\,i_1,...,i_p}=t(e_{i_1}',...,e_{i_p}',f'^{\,l_1},...,f'^{\,l_q}),\\ i_j=\overline{1,n},\ \forall j=\overline{1,p},\ l_k=\overline{1,n},\ \forall k=\overline{1,q}\end{array}$$

sunt componentele tensorului t în baza B' a lui V, atunci relaţia de transformare a componentelor este

$$\begin{array}{c}\tau'^{\,l_1,...,l_q}_{\,i_1,...,i_p}=c_{i_1}^{j_1}...c_{i_p}^{j_p}\ d_{k_1}^{l_1}...d_{k_q}^{l_q}\ \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}\\ i_j=\overline{1,n},\ \forall j=\overline{1,p},\ l_k=\overline{1,n},\ \forall k=\overline{1,q}\end{array}. \tag{1.7}$$

Relaţia (1.7) este folosită adesea pentru a introduce noţiunea de tensor, într-un mod pe care îl vom preciza în continuare. Deşi, de fapt, acest mod este un criteriu, este frecvent utilizat în cărţile de tehnică.

Dacă V este un spaţiu vectorial n-dimensional, spunem că am dat un *tensor de p ori covariant şi q ori contravariant pe V* dacă am asociat fiecărei baze $B=\{e_1,...,e_n\}$ a spaţiului V un sistem de n^{p+q} scalari:

$$(\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}),\ j_i=\overline{1,n},\ \forall i=\overline{1,p},\ k_l=\overline{1,n},\ \forall l=\overline{1,q}, \tag{1.8}$$

care la schimbarea bazei în V se transformă după legea (1.7). Scalarii (1.8) se numesc *coeficienţii tensorului* de tip (p,q) considerat în baza B.

Această definiţie este echivalentă cu definiţia unui tensor, deoarece, conform celor de mai sus, rezultă că, daţi fiind coeficienţii (1.8) există un unic tensor $t \in T_p^q(V)$ care are aceşti coeficienţi în baza fixată B din V.

Operaţii cu tensori

Fie V un K-spaţiu vectorial n-dimensional, $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi $B^* = \{f^1, ..., f^n\}$ duala sa.

Adunarea tensorilor. Fie $p, q \in \mathbb{N}$ şi $t, u \in T_p^q(V)$. *Suma* $t + u$ este un tensor de acelaşi tip dat de

$$(t+u)(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) = t(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) + u(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q),$$

pentru orice $x_1, ..., x_p \in V$ şi $h^1, ..., h^q \in V^*$.

În ceea ce priveşte coeficienţii tensorului sumă, se verifică uşor că dacă

$$\begin{aligned}\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} &= t(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}),\\ \sigma_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} &= u(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}),\\ \rho_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} &= (t+u)(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}),\end{aligned}$$

atunci

$$\rho_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} = \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} + \sigma_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q},$$

unde $j_i = \overline{1,n}$, $\forall i = \overline{1,p}$, $k_l = \overline{1,n}$, $\forall l = \overline{1,q}$.

Produsul unui tensor $t \in T_p^q(V)$ *cu un scalar* $\alpha \in K$ este un tensor de acelaşi tip dat de

$$(\alpha t)(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) = \alpha t(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q),$$

unde $x_1, ..., x_p \in V$ şi $h^1, ..., h^q \in V^*$.

De asemenea, dacă:

$$\begin{aligned}\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} &= t(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}),\\ \sigma_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} &= (\alpha t)(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}),\end{aligned}$$

atunci

$$\sigma_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} = \alpha \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q},$$

unde $j_i = \overline{1,n}$, $\forall i = \overline{1,p}$, $k_l = \overline{1,n}$, $\forall l = \overline{1,q}$.

Produsul tensorial a doi tensori. Fie $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ şi $t \in T_p^q(V)$, $u \in T_r^s(V)$. Atunci aplicaţia:

$$t \otimes u : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p+r \ ori} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{q+s \ ori} \to K,$$

definită prin:

$$\begin{aligned}&(t \otimes u)(x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_{p+r}, h^1, ..., h^q, h^{q+1}, ..., h^{q+s}) =\\ &= t(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) \cdot u(x_{p+1}, ..., x_{p+r}, h^{q+1}, ..., h^{q+s}),\end{aligned}$$

pentru orice $x_i \in V_i$, $i = \overline{1, p+r}$, $h^j \in V^*$, $j = \overline{1, q+s}$, este un tensor de ordin $(p+r, q+s)$ numit *produsul tensorial* al celor doi tensori.

Dacă

$$\begin{aligned} \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} &= t(e_{j_1},...,e_{j_p},f^{k_1},...,f^{k_q}), \\ \sigma_{i_1,...,i_r}^{l_1,...,l_s} &= u(e_{i_1},...,e_{i_r},f^{l_1},...,f^{l_s}), \\ \rho_{j_1,...,j_p,i_1,...,i_r}^{k_1,...,k_q,l_1,...,l_s} &= (t\otimes u)\,(e_{j_1},...,e_{j_p},e_{i_1},...,e_{i_r}f^{k_1},...,f^{k_q},f^{l_1},...,f^{l_s}) \end{aligned},$$

atunci:

$$\rho_{j_1,...,j_p,i_1,...,i_r}^{k_1,...,k_q,l_1,...,l_s} = \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}\cdot\sigma_{i_1,...,i_r}^{l_1,...,ls},$$

unde $j_i = \overline{1,n}$, $\forall i = \overline{1,p}$, $k_l = \overline{1,n}$, $\forall l = \overline{1,q}$, $i_j = \overline{1,n}$, $\forall j = \overline{1,r}$, $l_k = \overline{1,n}$, $\forall k = \overline{1,s}$.

Contracţia unui tensor. Fie $t\in T_p^q\,(V)$ cu $p,q>1$. Fixăm un indice i, $i=\overline{1,p}$ de covarianţă şi un indice l, $l=\overline{1,q}$ de contravarianţă. Contracţia tensorului t după indicele de ordin i de covarianţă şi indicele de ordin l de contravarianţă este un tensor notat $(t)_i^l\in T_{p-1}^{q-1}\,(V)$, definit astfel

$$\begin{aligned} &(t)_i^l\,(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_p,h^1,...,h^{l-1},h^{l+1},...,h^q) = \\ &= t(x_1,...,x_{i-1},e_s,x_{i+1},...,x_p,h^1,...,h^{l-1},f^s,h^{l+1},...,h^q), \end{aligned}$$

cu

$$x_j\in V,\ j=\overline{1,p},\ j\neq i,\ h^k\in V^*,\ k=\overline{1,q},\ k\neq l.$$

(în această relaţie $s=\overline{1,n}$ este indice de sumare). Coeficienţii tensorului $(t)_i^l$ vor fi

$$\sigma_{j_1,...,j_{i-1},j_{i+1},...,j_p}^{k_1,...,k_{l-1},k_{l+1},...,k_q} = \tau_{j_1,...,j_{i-1},s,j_{i+1},...,j_p}^{k_1,...,k_{l-1},s,k_{l+1},...,k_q},$$

unde $j_r=\overline{1,n}$, $\forall r=\overline{1,p}$, $r\neq i$, $k_m=\overline{1,n}$, $\forall m=\overline{1,q}$, $m\neq l$.

Observaţie importantă. Datorită aplicaţiilor din mecanică, din teoria elasticităţii, în cazul tensorilor definiţi pe spaţii euclidiene, se folosesc numai baze ortonormate şi transformări ortogonale ale acestor baze. Prin urmare matricea de trecere, C, va fi considerată matrice ortogonală.

2. Probleme rezolvate

1. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi f o formă liniară pe V. Ce fel de tensor este f? Cum se schimbă coordonatele sale la schimbarea bazei? În cazul particular $V=\mathbb{R}^3$, se consideră baza canonică $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ şi forma liniară $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f\,(x)=x^1+2x^2+3x^3$, $x=x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3$. Să se determine coordonatele lui f în raport cu baza B, precum şi coordonatele lui f în raport cu baza $B'=\{e_1',e_2',e_3'\}$, unde $e_1'=e_1+e_2-e_3$, $e_2'=-e_1+e_2+e_3$, $e_3'=e_1-e_2+e_3$. În fiecare caz, să se precizeze bazele duale bazelor B respectiv B'.

Soluţie. Deoarece $f:V\to K$ este o formă liniară, rezultă că este un tensor de tipul $(1,0)$, deci un tensor covariant. Fie $E=\{e_1,e_2,..,e_n\}$ o bază în V. Coordonatele acestui tensor sunt $\alpha_i=f(e_i)$, $1\le i\le n$. Dacă $E'=\{e_1',e_2',..,e_n'\}$ este o altă bază în V, coordonatele lui f în această bază sunt $\alpha_j'=f(e_j')$, $1\le j\le n$. Folosind (1.5), se obţine

$$\alpha_j' = f(c_j^k e_k) = c_j^k f(e_k) = c_j^k\alpha_k,\ 1\le j\le n. \tag{2.1}$$

În cazul particular considerat, coordonatele lui f, în raport cu baza canonică, sunt $\alpha_1=f\,(e_1)=1$, $\alpha_2=f\,(e_2)=2$, $\alpha_3=f\,(e_3)=3$. Dacă C este matricea de trecere de la baza B la baza B', atunci

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Conform (2.1), coordonatele formei liniare f în noua bază vor fi

$$\begin{array}{c} \alpha_1' = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2' = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 \\ \alpha_3' = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \end{array}.$$

Folosind (1.1), baza duală bazei canonice va fi $B^* = \left\{f^1, f^2, f^3\right\}$, unde $f^1(x) = x^1$, $f^2(x) = x^2$, $f^3(x) = x^3$. De asemenea, din (1.6), duala bazei B' este legată de B^* prin relaţiile

$$f'^1 = \frac{1}{2}f^1 + \frac{1}{2}f^2,\ f'^2 = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f^3,\ f'^3 = \frac{1}{2}f^1 + \frac{1}{2}f^3,$$

deci $f'^1(x) = \dfrac{1}{2}x^1 + \dfrac{1}{2}x^2$, $f'^2(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3$, $f'^3(x) = \dfrac{1}{2}x^1 + \dfrac{1}{2}x^3$.

2. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $t : V \times V^* \to K$ o formă biliniară. Ce fel de tensor este t? Ce dimensiune are spaţiul vectorial al tensorilor de acest tip? Cum se schimbă coordonatele unui astfel de tensor la schimbarea bazei?

Soluţie. Formele biliniare $t : V \times V^* \to K$ sunt tensori o data covarianţi şi o dată contravarianţi. Dacă $\dim_K V = n$, spaţiul vectorial al acestor tensori, $T_1^1(V)$ are dimensiunea n^2. Fie $B = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ o bază în V. Coordonatele acestui tensor, în raport cu baza B, sunt $\tau_i^j = t\left(e_i, f^j\right)$, $1 \leq i, j \leq n$, unde $B^* = \left\{f^1, f^2, .., f^n\right\}$ este baza duală bazei B. Dacă $B' = \{e_1', e_2', .., e_n'\}$ este o altă bază în V, coordonatele lui f în această bază $\tau_k'^l = t\left(e_k', f'^l\right)$, $1 \leq k, l \leq n$. Folosind (1.5) şi (1.6) , se obţine

$$\tau_k'^l = t\left(c_k^j e_j, d_i^l f^i\right) = c_k^j d_i^l t(e_j, f^i) = c_k^j d_i^l \tau_j^i,\ 1 \leq k, l \leq n,$$

adică egalităţile (1.7) particularizate la acest caz.

3. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $t \in T_1^1(V)$, $u \in T_2^1(V)$. Să se determine coeficienţii tensorilor $(t)_1^1$ şi $(u)_2^1$.

Soluţie. Fie $B = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ o bază în V şi $B^* = \left\{f^1, f^2, .., f^n\right\}$ baza sa duală în V^*. Coeficienţii celor doi tensori sunt $\tau_i^j = t(e_i, f^j)$, $i, j = \overline{1, n}$, respectiv $\sigma_{ij}^k = u(e_i, e_j, f^k)$, $i, j, k = \overline{1, n}$. Efectuând o contracţie a tensorului t după cei doi indici, se obţine un tensor de tip $(0, 0)$ deci un scalar, numit *urma* tensorului t, dat de

$$Tr\ t = \tau_s^s = \tau_1^1 + ... + \tau_n^n.$$

Coeficienţii tensorului $(u)_2^1 \in T_1^0(V)$ sunt

$$\sigma_i = \tau_{is}^s = \tau_{i1}^1 + \tau_{i2}^2 + ... + \tau_{in}^n,\ i = \overline{1, n}.$$

4. Să se arate că simbolul lui Kronecker, $\left(\delta_i^j\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, dat de

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases},$$

este un tensor de tipul $(1,1)$.

Soluţie. Fie $t : V \times V^* \to K$, tensorul de tip $(1,1)$ definit prin $t\,(x, f) == f\,(x)$, $\forall x \in V$, $f \in V^*$. Considerăm în baza $B = \{e_1, ..., e_n\}$ şi $B^* == \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ duala sa. Coeficienţii tensorului t în baza B sunt:

$$t\left(e_i, f^j\right) = f^j\,(e_i) = \delta_i^j,\ \forall i, j = \overline{1,n}.$$

Dacă $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ este o altă bază în V, iar $B'^* = \{f'^{\,1}, ..., f'^{\,n}\}$ duala sa în V^*, atunci coeficienţii lui t în noua bază sunt $t(e'_k, f'^{\,l}) = \delta_k^l$, $\forall k, l = \overline{1,n}$. Aşadar coeficienţii acestui tensor sunt independenţi de baza considerată. Acest tensor mai putea fi prezentat ca fiind sistemul de n^2 scalari, $\{\delta_i^j\}_{i,j=\overline{1,n}}$, care la schimbarea bazei spaţiului V se transformă după legea

$$\delta'^{\,j}_{i} = c_i^k d_l^j \delta_k^l,\ i, j = \overline{1,n}.$$

Dar cum $c_i^k d_l^j \delta_k^l = c_i^k d_k^j = \delta_i^j$, $\forall i, j = \overline{1,n}$ $(D = C^{-1})$, rezultă

$$\delta'^{\,j}_{i} = \delta_i^j,\ \forall i, j = \overline{1,n}.$$

5. Fie $t \in T_2^2\,(V)$ şi $t' = (t)_2^1$, tensorul obţinut prin contracţia după al doilea indice de covarianţă şi primul indice de contravarianţă.Să se stabilească relaţiile de transformare a coordonatelor tensorului $(t)_2^1$ la schimbarea bazei.

Soluţie. Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ două baze în V, iar $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ şi $B'^* = \{f'^{\,1}, ..., f'^{\,n}\}$ bazele duale corespunzătoare în V^*. Se consideră

$$\tau_{jk}^{rs} = t(e_j, e_k, f^r, f^s),\ j, k, r, s = \overline{1,n},$$

respectiv

$$\tau'^{\,\alpha\,\beta}_{i\,l} = t(e'_i, e'_l, f'^{\,\alpha}, f'^{\,\beta}),\ i, j, \alpha, \beta = \overline{1,n},$$

coeficienţii lui t în cele două baze fixate.

De asemenea, fie $\sigma_r^j = t'\left(e_r, f^j\right)$, $r, j = \overline{1,n}$ şi $\sigma'^{\,p}_{i} = t'(e'_i, f'^{\,p})$, $i, p = \overline{1,n}$, coeficienţii tensorului contractat. Atunci:

$$\begin{array}{l} \sigma'^{\,p}_{i} = t(e'_i, e'_l, f'^{\,l}, f'^{\,p}) = \tau'^{\,lp}_{il} = c_i^j c_l^k d_s^l d_r^p \tau_{jk}^{sr} = c_i^j \delta_s^k d_r^p \tau_{jk}^{sr} = \\ = c_i^j d_r^p \tau_{jk}^{sr} = c_i^j d_r^p t(e_j, e_k, f^k, f^r) = c_i^j d_r^p t'(e_j, f^r) = c_i^j d_r^p \sigma_j^r \end{array},$$

ceea ce reprezintă exact legea de transformare a unui tensor o dată covariant şi o dată contravariant la schimbarea bazei.

6. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n. Dacă T este un endomorfism al lui V, se consideră tensorul $t : V \times V^* \to K$, $t\,(x, f) = f\,(Tx)$, $\forall x \in V$, $f \in V^*$. Să se precizeze tipul acestui tensor. Să se determine componentele tensorului dat în baza $B = \{e_1, ..., e_n\}$ şi să se stabilească formulele de transformare a acestor componente la schimbarea bazei.

Soluţie. Conform definiţiei, tensorul dat este un tensor o dată covariant şi o dată contravariant (deci, de tipul $(1,1)$). Fie $A = (a_j^k)$ matricea lui T în baza B, deci

$$Te_j = a_j^k e_k,\ j = \overline{1,n},$$

deci

$$\tau_j^i = t(e_j, f^i) = f^i(Te_j) = a_j^k f^i(e_k) = a_j^k \delta_k^i = a_j^i,\ i, j = \overline{1, n}.$$

Prin urmare, componentele tensorului dat coincid cu elementele matricei endomorfismului T în baza B. Fie acum $A' = (a_l'^r)$ matricea lui T în baza B'. Formulele de transformare ale componentelor tensorului sunt

$$a_l'^r = \tau_l'^r = f'^r(Te_l') = d_k^r f^k(T(c_l^s e_s) = d_k^r c_l^s a_s^p f^k(e_p) = d_k^r c_l^s a_s^p \delta_p^k,$$

deci

$$a_l'^r = d_k^r c_l^s a_s^k,$$

adică tocmai formulele de modificare a matricei unui endomorfism la schimbarea bazei.

În acest mod, orice endomorfism poate fi privit ca un tensor o dată covariant şi o dată contravariant.

7. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $u : D \to \mathbb{R}^3$ o funcţie vectorială de clasă $\mathcal{C}^1$: dacă $x = (x^1, x^2, x^3) \in D \Rightarrow u(x) = (u^1(x), u^2(x), u^3(x))$ (în teoria elasticităţii, u este "vectorul deplasare"). Definim:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right),\ i, j = 1, 2, 3.$$

Să se arate că $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=\overline{1,3}}$ este un tensor simetric covariant de ordinul 2 (numit "tensorul deformaţie").

Soluţie. Considerăm că schimbarea bazei se face prin matricea ortogonală $C = \left(c_j^i\right)_{i,j=\overline{1,3}}$. Dacă x'^1, x'^2, x'^3 sunt noile coordonate ale lui x, iar u'^1, u'^2, u'^3 sunt noile coordonate ale funcţiei f, atunci

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u'^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u'^j}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2} c_i^l c_j^k \left(\frac{\partial u^l}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^l}\right) = c_i^l c_j^k \varepsilon_{lk},\ i, j = 1, 2, 3.$$

Prin urmare, $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=\overline{1,3}}$ se schimbă după o formulă de tipul (1.7), deci $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=\overline{1,3}}$ este un tensor covariant de ordinul 2. Tensorul este, evident, simetric.

3. Probleme propuse

1. În $\mathbb{R}^3$ se consideră baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ şi forma liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^1 - 2x^2 + x^3$, $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$. Să se determine coordonatele vectorului $x = (1, 2, 3)$ în raport cu baza $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$, unde $e_1' = 2e_1$, $e_2' = 2e_2$, $e_3' = 2e_3$. Care sunt coordonatele lui f în raport cu baza duală bazei B? Dar în raport cu baza duală bazei B'?

2. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n. Să se arate că, dacă B este o bază în V, atunci coordonatele unui vector $x \in V$ definesc un vector contravariant, adică un tensor de tipul $(0, 1)$.

3. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $t : V \times V \to K$ o formă biliniară. Ce fel de tensor este t? Ce dimensiune are spaţiul vectorial al tensorilor de acest tip? Cum se schimbă coordonatele unui astfel de tensor la schimbarea bazei?

4. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $t : V^* \times V^* \to K$ o formă biliniară. Ce fel de tensor este t? Ce dimensiune are spaţiul vectorial al tensorilor de acest tip? Cum se schimbă coordonatele unui astfel de tensor la schimbarea bazei?

5. Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bază în V şi a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{R}$. Dacă $x = x^i e_i$, definim $f(x) = a_i x^i$. Să se arate că coeficienţii $a_i a_j$ ai lui f^2 sunt coeficienţii unui tensor de ordinul al doilea.

6. Fie $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ şi $\left(b^{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ componentele unui tensor simetric ($a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = \overline{1,n}$) respectiv antisimetric ($b_{ij} = -b_{ji}$, $i,j = \overline{1,n}$).

a) să se precizeze câte componente nenule distincte pot avea cei doi tensori;

b) să se determine tensorul de componente $a_{ij} b^{ij}$.

7. Fie tensorul de ordinul al treilea de componente $\left(\varepsilon^i_{jk}\right)_{i,j,k=\overline{1,n}}$, unde $\varepsilon^1_{23} = \varepsilon^2_{31} = \varepsilon^3_{12} = 1$, $\varepsilon^1_{32} = \varepsilon^2_{13} = \varepsilon^3_{21} = -1$, $\varepsilon^i_{jk} = 0$, dacă cel puţin doi indici sunt egali. Dacă $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$, $\overrightarrow{a} = a^1 \overrightarrow{i} + a^2 \overrightarrow{j} + a^3 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b^1 \overrightarrow{i} + b^2 \overrightarrow{j} + b^3 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = c^1 \overrightarrow{i} + c^2 \overrightarrow{j} + c^3 \overrightarrow{k}$, să se arate că:

a) vectorul $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ are componentele $d^i = c^i_{jk} a^j b^k$;

b) $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \varepsilon^i_{jk} a^i b^j c^k$.

8. Fie $t \in T^2_3(V)$. Să se stabilească relaţiile de transformare a coordonatelor tensorului $(t)^1_2$ la schimbarea bazei.

9. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Să se arate că $\mathrm{grad} f$ este un vector 1-covariant.

10. În acelaşi cadru de la exerciţiul 7 de la probleme rezolvate, să se arate că formula

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right),\ i,j = 1,2,3,$$

defineşte un tensor antisimetric covariant de ordinul 2 (numit "tensorul de rotaţie infinitezimală" din mecanica mediilor continue).

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. $x = \frac{1}{2}e'_1 + e'_2 + \frac{3}{2}e'_3$. $f = f^1 - 2f^2 + f^3$. $f = 2f'^1 - 4f'^2 + 2f'^3$. **2.** Dacă $x = x^i e_i$, $x = x'^j e'_j$, atunci $x'^j = d^j_k x^k$, $j = \overline{1,n}$. **3.** Tensor dublu covariant, de tipul $(2,0)$. $\dim T^0_2(V) = n^2$. $\tau'_{kl} = t(e'_k, e'_l) = t\left(c^i_k e_i, c^j_l e_j\right) = c^i_k c^j_l t(e_i, e_j) = c^i_k c^j_l \tau_{ij}$, $1 \le k,l \le n$. **4.** Tensor dublu contravariant, de tipul $(0,2)$. $\dim T^2_0(V) = n^2$. $\tau'^{kl} = t\left(f'^k, f'^l\right) = t\left(d^k_i f^i, d^l_j f^j\right) = d^k_i d^l_j t\left(f^i, f^j\right) = d^k_i d^l_j \tau^{ij}$. **5.** $\tau'_{ij} = a'_i a'_j = d'^k_i d'^l_j a_{kl}$, $i,j = \overline{1,n}$. **6.** a) $\frac{n(n+1)}{2}$, $n^2 - n$. b) Se ţine seama că pentru fiecare $i = \overline{1,n}$, $b_{ii} = 0$. 0. **7.** Se ţine seama de expresiile analitice ale produsului vectorial a doi vectori liberi.şi ale produsului mixt a trei vectori liberi. **8.** Se poate folosi exerciţiul rezolvat 5. **9.** Cum $u(x) = u'(x')$, $x = x^i e_i$, $x' = x'^j e'_j$, $x^i = c^i_j x'^j$. Atunci $u'_{,j} = \frac{\partial u'}{\partial x'^j} = u_{,k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = c^k_j u'_{,k}$, $j = \overline{1,n}$. **10.** Vezi exerciţiul rezolvat 7.

CAPITOLUL 9

Planul şi dreapta în spaţiu

1. Preliminarii

Planul

Doi vectori necoliniari $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$, ai căror reprezentanţi au dreptele suport paralele cu un plan $\alpha \subset \mathcal{S}$ se numesc *vectori directori* ai planului α. Un vector nenul $\overrightarrow{n}$ se numeşte *vector normal* la planul α dacă dreapta suport a unui reprezentant al său este perpendiculară pe planul α.

Un vector normal la planul de vectori directori $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$, este $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

Fie $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un reper cartezian în spaţiu.

Ecuaţia planului care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi perpendicular pe o direcţie dată, $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$, este

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1.1}$$

Ecuaţia generală a planului este

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1.2}$$

unde $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ecuaţia planului care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi de vectori directori $\overrightarrow{v_s} = l_s\overrightarrow{i} + m_s\overrightarrow{j} + n_s\overrightarrow{k}$, $s = 1, 2$, este

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.3}$$

În aceste condiţii, *ecuaţiile parametrice* ale planului sunt

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l_1 + \mu l_2 \\ y = y_0 + \lambda m_1 + \mu m_2 \\ z = z_0 + \lambda n_1 + \mu n_2 \end{cases}. \tag{1.4}$$

Ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare $M_s(x_s, y_s, z_s)$, $s = 1, 2, 3$, este

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.5}$$

care este echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.6}$$

Ecuaţia planului prin tăieturi. Un plan care nu trece prin origine şi nu este paralel cu planele de coordonate intersectează axele de coordonate în punctele $M(a,0,0)$, $N(0,b,0)$, $P(0,0,c)$, $abc \neq 0$, numite *tăieturi.* Ecuaţia acestui planul este

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{1.7}$$

Dreapta în spaţiu

Fie d o dreaptă. Vectorul nenul $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$ $(l^2 + m^2 + n^2 > 0)$, având un reprezentant a cărui dreaptă suport este paralelă cu dreapta d, se numeşte *vector director* al dreptei d. Numerele reale l, m, n se numesc *parametri directori* ai dreptei d; versorul $\overrightarrow{e} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$ se numeşte *versor director* al dreptei d. Fie α, β, γ unghiurile făcute de $\overrightarrow{v}$ cu $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ respectiv $\overrightarrow{k}$. Atunci

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

se numesc *cosinusuri directoare* ale dreptei d.

Ecuaţiile dreptei determinate de un punct şi de direcţie dată. Dacă $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$ este un vector director al unei drepte care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, atunci:

-*ecuaţia parametrică vectorială* a dreptei este

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

unde $\overrightarrow{r_0}$ şi $\overrightarrow{r}$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor M_0 respectiv al unui punct arbitrar M al dreptei;

-*ecuaţiile parametrice* ale dreptei sunt

$$x = x_0 + tl,\ y = y_0 + tm,\ z = z_0 + tn,\ t \in \mathbb{R}; \tag{1.9}$$

-*ecuaţiile canonice* ale dreptei sunt

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{1.10}$$

Ecuaţiile canonice ale dreptei determinate de două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$, sunt

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1.11}$$

Ecuaţiile dreptei determinate de două plane sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array} \right., \tag{1.12}$$

unde $rang \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$. Un vector director al acestei drepte este $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$, unde

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\ m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\ n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

Ecuaţia fasciculului de plane determinat de dreapta (1.12) este

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{1.14}$$

unde α, $\beta \in \mathbb{R}$ nu sunt simultan nuli ($\alpha^2 + \beta^2 > 0$). În acest caz, planele care determină dreapta (1.12), se numesc *plane de bază* ale fasciculului.

Unghiul dreptelor de vectori directori $\overrightarrow{v_1} = l_1\overrightarrow{i} + m_1\overrightarrow{j} + n_1\overrightarrow{k}$ respectiv $\overrightarrow{v_2} = l_2\overrightarrow{i} + m_2\overrightarrow{j} + n_2\overrightarrow{k}$ este dat de

$$\cos\theta = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{1.15}$$

Dreptele sunt *perpendiculare* dacă şi numai dacă

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \tag{1.16}$$

şi *paralele* dacă şi numai dacă

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{1.17}$$

Unghiul a două plane de vectori normali $\overrightarrow{n_1} = A_1\overrightarrow{i} + B_1\overrightarrow{j} + C_1\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{n_2} = A_2\overrightarrow{i} + B_2\overrightarrow{j} + C_2\overrightarrow{k}$ este dat de

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{1.18}$$

Planele de ecuaţii $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ respectiv $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ sunt *perpendiculare* dacă şi numai dacă

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{1.19}$$

Cele două plane sunt *paralele* dacă şi numai dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{1.20}$$

Unghiul dintre o dreaptă şi un plan. Unghiul dintre dreapta de vector director $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$ şi planul de vector normal $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ este dat de

$$\sin\theta = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.21}$$

Dreapta este *perpendiculară* pe plan dacă şi numai dacă

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{1.22}$$

Dreapta este *paralelă* cu planul dacă şi numai dacă

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{1.23}$$

Distanţa de la un punct la un plan. Distanţa de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul α de ecuaţie$Ax + By + Cz + D = 0$ este

$$d\left(M_0, \alpha\right) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.24}$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă. Distanţa de la punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la dreapta Δ de ecuaţie$\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ este

$$d\left(M_0, \Delta\right) = \frac{\|\overrightarrow{M_0 M_1} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}, \tag{1.25}$$

unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $\overrightarrow{v} = l\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} + n\overrightarrow{k}$.

Distanţa dintre dreptele Δ_1 şi Δ_2 de vectori directori $\overrightarrow{v_1} = l_1\overrightarrow{i} + m_1\overrightarrow{j} + n_1\overrightarrow{k}$ respectiv $\overrightarrow{v_2} = l_2\overrightarrow{i} + m_2\overrightarrow{j} + n_2\overrightarrow{k}$ este

$$d\left(\Delta_1, \Delta_2\right) = \frac{|(\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}, \tag{1.26}$$

unde $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Delta_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in \Delta_2$.

2. Probleme rezolvate

1. Să se determine un vector normal la un plan, ştiind că:

a) vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ sunt vectori directori ai planului;

b) planul este determinat de punctele $A\,(2, -3, 4)$, $B\,(3, 2, -1)$, $C\,(0, 1, -2)$;

c) planul trece prin punctele $A\,(1, -1, 1)$, $B\,(0, 2, 4)$ şi este paralel cu $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Soluţie. a) Un vector normal la plan este $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -4\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$.

b) Putem alege ca vectori directori vectorii necoliniari $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$. Rezultă că $\overrightarrow{n} = -10\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 14\overrightarrow{k}$ este un vector normal la plan. Cum orice vector nenul coliniar cu $\overrightarrow{n}$ este, de asemenea, un vector normal la plan, rezultă că şi $\overrightarrow{n_1} = 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$ este un vector normal la plan.

c) Vectorii $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt vectori directori ai planului. În consecinţă, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ este vector normal la plan.

2. Să se scrie ecuaţia unui plan, ştiind că:

a) $B\,(1, 0, 1)$ este piciorul perpendicularei coborâte din punctul $A\,(0, -2, 1)$ pe plan;

b) planul trece prin punctele $M\,(3, 1, 0)$, $N\,(0, 7, 2)$, $P\,(4, 1, 5)$.

Soluţie. a) Deoarece $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ este un vector normal la plan, iar planul trece prin punctul B, folosind (1.1), se obţine ecuaţia planului: $x + 2y - 1 = 0$.

b) *Metoda I.* Un vector normal la plan este $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = 30\overrightarrow{i} + 17\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$. Planul trecând prin punctul M, din (1.1) se obţine ecuaţia $30x + 17y - 6z - 107 = 0$.

Metoda II. Vom folosi ecuaţia (1.2). Coordonatele punctelor M, N, P verifică (1.2) dacă $3A + B + D = 0$, $7B + 2C + D = 0$, $4A + B + 5C + D = 0$. Din acest sistem de 3 ecuaţii cu 4 necunoscute, obţinem $A = -\dfrac{30}{107}D$, $B = -\dfrac{17}{107}D$, $C = \dfrac{6}{107}D$. Este clar că $D \neq 0$, altfel ar rezulta $A = B = C = 0$, ceea ce contrazice condiţia

$A^2+B^2+C^2>0$. Atunci, ecuaţia planului este $(-\frac{30}{107}x-\frac{17}{107}y+\frac{6}{107}z+1)D=0$ sau $30x+17y-6z-107=0$.

Metoda III. Se folosesc ecuaţiile (1.5) sau (1.6).

3. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei d de ecuaţii

$$\begin{cases} 3x-y+2z-2=0 \\ 5x+9y-3z-14=0 \end{cases}.$$

Soluţie. Este clar că $rang\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 9 & -3 \end{pmatrix}=2$, deci cele două ecuaţii determină o dreaptă d de vector director $\overrightarrow{v}=-15\overrightarrow{i}+19\overrightarrow{j}+32\overrightarrow{k}$ (conform (1.13)). Putem determina un punct al dreptei d, intersectând-o cu unul din planele de coordonate, de exemplu xOy, a cărui ecuaţie este $z=0$. Ajungem la sistemul $3x-y=2$, $5x+9y=14$, a cărui soluţie este $x_0=1$, $y_0=1$. Dreapta trece deci prin punctul $M_0(1,1,0)$. În consecinţă, ecuaţiile canonice ale dreptei sunt

$$\frac{x-1}{-15}=\frac{y-1}{19}=\frac{z}{32}.$$

4. Să se scrie ecuaţia planelor care trec prin dreapta d de ecuaţii

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$$

şi punctele $A\,(1,-1,2)$, respectiv $B\,(-1,1,-1)$.

Soluţie. Dreapta d se scrie ca intersecţie de plane astfel

$$\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ x-3z+13=0 \end{cases}.$$

Ecuaţia fasciculului de plane este $\alpha(2x+3y-1)+\beta\,(x-3z+13)=0$. Punând condiţia ca un plan din fascicul să treacă prin punctul A rezultă $\alpha=4\beta$, $\beta\neq 0$. Înlocuind în ecuaţia fasciculului rezultă ecuaţia planului care trece prin A: $3x+4y-z+3=0$. De asemenea, un plan din fascicul trece prin B, dacă $\beta=0$, $\alpha\neq 0$ ecuaţia planului căutat este în acest caz $2x+3y-1=0$, deci unul din planele de bază.

5. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin dreapta d de ecuaţii

$$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$$

şi paralel cu dreapta AB, unde $A\,(1,1,1)$, $B\,(2,2,3)$.

Soluţie. Ecuaţia fasciculului de plane care conţine dreapta d este $(\alpha+2\beta)x+(\alpha+\beta)y-(\alpha+\beta)z-\alpha-2\beta=0$, $\alpha^2+\beta^2>0$. Un vector director al dreptei AB este $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$. Planul este paralel cu AB dacă $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{v}$, unde $\overrightarrow{n}=(\alpha+2\beta)\overrightarrow{i}+(\alpha+\beta)\overrightarrow{j}-(\alpha+\beta)\overrightarrow{k}$. Din $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$, rezultă $\beta=0$, deci $\alpha\neq 0$. Planul căutat este $x+y-z-1=0$, deci unul din planele de bază.

6. Să se calculeze:

a) unghiul dreptelor d_1 şi d_2, de ecuaţii

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2} \text{ respectiv } \begin{cases} x-z-1=0 \\ y+2z-3=0 \end{cases};$$

b) unghiul diedru al planelor de ecuaţii $x-y+z=0$ respectiv $3x-y-z+2=0$;

c) unghiul dintre dreapta
$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$$
şi planul de ecuaţie $x-y-z+2=0$.

Soluţie. a) În acest caz $\overrightarrow{v_1}=-2\overrightarrow{i}+9\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$. În cazul dreptei d_2, conform (1.13), $l_2=1$, $m_2=-2$, $n_2=1$, deci $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$. Folosind (1.15), obţinem $\cos\theta=-\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{89}}$, deci $\theta=\pi-\arccos\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{89}}$. b) Deoarece $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n_2}=3\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, conform (1.18), $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$, deci $\theta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$. c) Cum $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, iar $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, ţinând seama de (1.21), rezultă că unghiul dintre dreaptă şi plan este zero. Deci dreapta este paralelă cu planul, dar nu este conţinută în plan deoarece punctul $O\,(0,0,0)$ se află pe dreaptă, dar nu este în plan.

7. Să se calculeze:
a) distanţa de la punctul $M_0\,(-1,2,1)$ la planul de ecuaţie $x+y-2z-1=0$;
b) distanţa de la punctul $M_0\,(2,6,1)$ la dreapta Δ de ecuaţii
$$\begin{cases} 4x+y-6z+5=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}.$$

Soluţie. a) Folosind (1.24), se obţine $d=\frac{|1\cdot(-1)+1\cdot 2+(-2)\cdot 1-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.
b) Conform (1.13), parametrii directori ai dreptei sunt $l=3$, $m=12$, $n=4$, deci $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{i}+12\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$. Alegem un punct pe dreaptă, de exemplu $M_1\,(0,1,1)$. Atunci $\overrightarrow{M_0M_1}\times\overrightarrow{v}=-20\overrightarrow{i}+8\overrightarrow{j}-9\overrightarrow{k}$, $\|\overrightarrow{v}\|=13$, deci $d\,(M_0,\Delta)=\frac{\sqrt{545}}{13}$.

8. Fie dreptele Δ_1 şi Δ_2, de ecuaţii
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \text{ respectiv } \frac{x-2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}.$$
Să se calculeze distanţa dintre cele două drepte şi să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune.

Soluţie. Folosim (1.26) cu $M_1\,(1,-1,0)$, $M_2\,(2,0,-1)$, $\overrightarrow{v_1}=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2}=2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{k}$, $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})=3$, rezultă că $d\,(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, deci dreptele nu sunt concurente. Ecuaţia planului care trece prin Δ_1 şi conţine $\overrightarrow{n}$ este $-6x+5y-3z+11=0$, iar ecuaţia planului care trece prin Δ_2 şi conţine $\overrightarrow{n}$ este $4x-5y+2z-6=0$. Deci ecuaţiile perpendicularei comune sunt:
$$\begin{cases} -6x+5y-3z+11=0 \\ 4x-5y+2z-6=0 \end{cases}.$$

3. Probleme propuse

1. Să se scrie ecuaţia planului care:
a) trece prin punctul $P\,(2,-5,3)$ şi este paralel cu planul $3x-8y+z-5=0$;
b) trece prin punctul $P\,(2,-5,3)$ şi este paralel cu planul xOz;

c) este paralel cu planul $3x - y + z - 6 = 0$ şi trece prin mijlocul segmentului $[MN]$, $M(1, 3, 2)$, $N(1, -5, -4)$;
d) trece prin punctul $P(-1, 2, -0)$ şi este perpendicular pe PQ unde $Q(2, 3, 1)$;
e) trece prin punctele $P(3, 1, 0)$, $Q(4, 1, 5)$, $R(0, 7, 2)$;
f) trece prin axa Oz şi prin punctul $P(-3, 1, -2)$;
g) este paralel cu axa Ox şi trece prin punctele $P(4, 0, -2)$, $Q(5, 1, 7)$;
h) trece prin punctul $P(0, -3, 0)$ şi este perpendicular pe planele $x + 2y + 3z = 0$, $3x - 5y + 4z + 1 = 0$;
i) trece prin punctul $P(-2, 3, 4)$, de vectori directori $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

2. Pentru ce valori ale lui α şi β, punctele $M(1, 3, 0)$, $N(3, -2, 1)$, $P(\alpha, \beta, -3)$, $Q(7, -2, 3)$ sunt coplanare?

3. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin punctele $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 2, 3)$ şi este perpendicular pe planul $x + y - z = 0$.

4. Să se scrie ecuaţiile canonice şi parametrice ale dreptei care
a) trece prin punctul $A(2, 3, -1)$ şi de vector director $\overrightarrow{v} = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$;
b) trece prin punctele $A(1, -1, 1)$ şi $B(0, 2, 4)$;
c) are ecuaţiile

$$\begin{cases} 2x - y + 5z - 21 = 0 \\ x + 3y - z - 7 = 0 \end{cases};$$

d) trece prin punctul $A(2, 1, 1)$ şi este paralelă cu planele $x - y + z + 2 = 0$ şi $x + y + 2z - 1 = 0$.

5. Sunt coliniare punctele $A(5, -4, 6)$, $B(-3, 8, -12)$, $C(1, 2, -3)$? Dar punctele A, C şi $D(0, 3, 5)$?

6. Să se cerceteze poziţia dreptei d faţă de planul α în cazurile:
a) $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$, $\alpha : 3x - 3y + 2z - 5 = 0$;
b) $d : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-7}{-6} = \dfrac{z+2}{3}$, $\alpha : 3x + 5y - 2z - 6 = 0$;
c) $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-2}{5}$, $\alpha : 4x + 3y - z + 3 = 0$.

7. Să se scrie ecuaţiile dreptei de vector director $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ care trece prin mijlocul segmentului $[AB]$, unde A şi B sunt punctele de intersecţie ale planului $2x + y - 3z + 1 = 0$ cu dreptele de ecuaţii

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-1}{2} \text{ respectiv } \frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+4}{-6}.$$

8. Să se scrie ecuaţia planului care:
a) trece prin punctul $A(2, 1, 1)$ şi prin dreapta de ecuaţii

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 8 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases};$$

b) trece prin origine şi prin dreapta de ecuaţii

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{2}.$$

9. Sunt concurente planele ale căror ecuaţii sunt?
a) $x+y+z-6=0$, $2x-y+z-3=0$, $x+2y-z-2=0$;
b) $x+y+2z-4=0$, $x+2y-z-2=0$, $2x-y-z=0$, $x+y+z-3=0$.

10. Să se determine parametrul real λ astfel încât planele $x-y+z=0$, $3x-y-z+2=0$, $4x-y-2z+\lambda=0$, să se intersecteze după o dreaptă. Să se găsească ecuaţiile parametrice ale acestei drepte.

11. Să se arate că dreptele de ecuaţii:

$$d_1:\begin{cases}4x+z-1=0\\ x-2y+3=0\end{cases},\ d_2:\begin{cases}3x+y-z+4=0\\ y+2z-8=0\end{cases},$$

sunt concurente şi să se scrie ecuaţia planului determinat de acestea.

12. Să se găsească simetricul punctului $A(-1,2,0)$ faţă de planul de ecuaţie $x+2y-z+3=0$. Să se calculeze distanţa de la punct la plan.

13. Să se calculeze coordonatele simetricului punctului $A(4,3,10)$ faţă de dreapta de ecuaţii

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

Care este distanţa de la punct la dreaptă?

14. Să se găsească proiecţia ortogonală a punctului $A(3,-1,2)$ pe dreapta de ecuaţii

$$\begin{cases}2x-y+z=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}.$$

15. Să se scrie ecuaţiile perpendicularei coborâte din punctul $A(2,3,1)$ pe dreapta de ecuaţii

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}.$$

16. Să se scrie ecuaţiile dreptei Δ, care se află în planul xOz, trece prin origine şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţii

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}.$$

17. Să se scrie ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei Δ, de ecuaţii

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4},$$

pe planul π, de ecuaţie $x+y+z-3=0$; să se găsească ecuaţiile simetricei dreptei Δ faţă de acest plan.

18. Să se scrie ecuaţia simetricului planului α de ecuaţie $x-3y+z-1=0$ faţă de planul β de ecuaţie $x+2y-2=0$.

19. Se dau planul π, de ecuaţie $x-4y+5z+10=0$, dreapta Δ, de ecuaţii

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1}$$

şi punctul $A(1,2,3)$.
a) Să se scrie ecuaţia planului simetric planului π faţă de punctul A;
b) Să se scrie ecuaţiile simetricei dreptei Δ faţă de punctul A.

20. Să se găsească ecuaţiile simetricei dreptei Δ_1, de ecuaţii
$$\frac{x-2}{7}=\frac{y-3}{-17}=\frac{z-1}{27},$$
faţă de dreapta Δ_2, de ecuaţii
$$\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 3y+z-2=0 \end{cases}.$$

21. Să se scrie ecuaţia unui plan care se află la egală distanţă de planele π_1 şi π_2, de ecuaţii $x+y-2z-1=0$ respectiv $x+y-2z+3=0$.

22. Să se găsească unghiul dreptelor Δ_1 şi Δ_2, de ecuaţii
$$\begin{cases} x-y+z-3=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases} \text{ respectiv } \frac{x-1}{-5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{3}.$$

23. Să se găsească unghiul planelor α_1 şi α_2 când:
a) $\alpha_1 : 2x+y-2=0$, $\alpha_2 : x-z+2=0$;
b) $\alpha_1 : 3x-y+2z+15=0$, $\alpha_2 : 5x+9y-3z-1=0$.

24. Să se determine unghiul dintre dreapta OA, unde $O(0,0,0)$, $A\,(2,1,1)$ şi planul de ecuaţie $x+y-2z+1=0$.

25. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece prin dreapta de ecuaţii
$$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$$
şi care formează un unghi de 45^{o} cu planul de ecuaţie $x-4y-8z+12=0$.

26. a) Să se găsească distanţa de la punctul $A\,(4,3,-2)$ la planul de ecuaţie $3x-y+5z+1=0$.
b) Să se găsească distanţa de la punctul $A\,(-2,3,1)$ la dreapta de ecuaţii
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+2}{4}.$$

27. Să se calculeze înălţimea din A a tetraedrului $ABCD$, dacă $A\,(-7,3,-2)$, $B\,(0,2,1)$, $C\,(4,-1,0)$, $D\,(-1,0,-3)$.

28. Să se găsească distanţa dintre planele π_1 şi π_2, de ecuaţii $11x-2y-10z+15=0$ respectiv $11x-2y-10z-45=0$.

29. Să se găsească distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2, de ecuaţii
$$\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2} \text{ respectiv } \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}.$$

30. Sunt concurente dreptele d_1 şi d_2, de ecuaţii
$$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases} \text{ respectiv } \begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases} ?$$
Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune a celor două drepte.

31. Sunt concurente dreptele d_1şi d_2, de ecuaţii

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \text{ respectiv } d_2:\frac{x+1}{7}=\frac{y-8}{-3}=\frac{z-3}{1}?$$

32. Să se calculeze lungimea perpendicularei comune a dreptelor:

a) $\Delta_1:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$, $\Delta_2:\dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+7}{3}$;

b) $\begin{array}{l}\Delta_1: x=2t-4,\ y=-t+4,\ z=-2t-1,\\ \Delta_2: x=4t-5,\ y=-3t+5,\ z=-5t+5.\end{array}$

33. Să se arate că dreptele de ecuaţii

$$\Delta_1:\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\ x-y-z-22=0\end{cases},\ \Delta_2:\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4},$$

sunt paralele şi să se calculeze distanţa dintre ele.

34. Să se scrie ecuaţiile dreptei care trece prin punctul $A\,(1,1,1)$ şi se sprijină pe dreptele Δ_1 şi Δ_2, de ecuaţii

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1} \text{ respectiv } \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{3}.$$

35. Să se scrie ecuaţiile dreptei care se sprijină pe dreptele de ecuaţii

$$\Delta_1:\begin{cases}x-y-1=0\\ y-z-1=0\end{cases},\ \Delta_2:\begin{cases}2x-y-1=0\\ y+2z-2=0\end{cases},$$

şi este perpendiculară pe planul $x+2y+3z-1=0$.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. a) $3x-8y+z-49=0$. b) $y+5=0$. c) $3x-y+z-3=0$. d) $3x+y+z+1=0$. e) $30x+17y-6z-107=0$. f) $x+3y=0$. g) $9y-z-2=0$. h) $23x+5y-11z+15=0$. i) $10x+y-8z+49=0$. **2.** $\alpha=-5$, $\beta\in\mathbb{R}$. **3.** $x-y=0$. **4.** a) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$; $x=5t+2$, $y=t+3$, $z=2t-1$, $t\in\mathbb{R}$. b) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{3}$; $x=-t+1$, $y=3t-1$, $z=3t+1$, $t\in\mathbb{R}$. c) $\dfrac{x-8}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$; $x=2t+8$, $y=-t$, $z=-t+1$, $t\in\mathbb{R}$. d) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$; $x=3t+2$, $y=t+1$, $z=-2t+1$, $t\in\mathbb{R}$. **5.** A, B, C sunt coliniare, dar A, C, D nu sunt coliniare. **6.** a) $d\parallel\alpha$, $d\cap\alpha=\varnothing$. b) $d\cap\alpha=\{A\}$, $A(1,1,1)$. c) $d\subset\alpha$. **7.** $A(4,0,3)$, $B(6,11,8)$, $y-z=0$, $2x-2y+1=0$. **8.** a) $9x-16y-z-1=0$. b) $5x-3y-7z=0$. **9.** a) Planele sunt concurente în punctul $A(1,2,3)$. b) Planele sunt concurente în punctul $A(1,1,1)$. **10.** $\lambda=3$. $x=t$, $y=2t+1$, $z=t+1$, $t\in\mathbb{R}$. **11.** Dreptele sunt concurente în punctul $A(-\frac{3}{5},\frac{6}{5},\frac{17}{5})$. Ecuaţia planului care trece prin A, de vectori directori $\overrightarrow{v}_1=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-8\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}_2=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, este $3x+2y+z-4=0$. **12.** Proiecţia punctului A pe plan este $P(-2,0,1)$, iar simetricul este $S(-3,-2,2)$. $d=\sqrt{6}$. **13.** Proiecţia punctului A pe dreaptă este $P(3,6,8)$, iar simetricul este $S(2,9,6)$. $d=\sqrt{14}$. **14.** Un vector director al dreptei este $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, $P(-\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{5}{6})$.

15. Proiecţia punctului A pe dreaptă este $P(-1,0,2)$. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$. **16.** $\overrightarrow{v}=l\overrightarrow{i}+m\overrightarrow{j}+n\overrightarrow{k}\perp\overrightarrow{j}\Rightarrow m=0$. $\overrightarrow{v}\perp\Delta\Rightarrow 3l+n=0$, $l\neq 0$. Dreapta Δ are ecuaţiile: $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$. **17.** Ecuaţia planului care trece prin dreapta Δ, perpendicular pe planul π este $x-2y+z=0$, deci ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei Δ pe π sunt: $x-2y+z=0$, $x+y+z-3=0$. $\Delta\cap\pi=\{A\}$, unde $A(\frac{1}{3},1,\frac{5}{3})$. Proiecţia punctului $B(1,2,3)\in\Delta$ pe planul π este $P(0,1,2)$, iar simetricul lui B faţă de plan este $S(-1,0,1)$. Simetrica dreptei Δ faţă de plan este dreapta AS de ecuaţii $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}$. **18.** Punctul $M(0,0,1)\in\alpha$. Proiecţia acestuia pe planul β este $P(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)$, iar simetricul faţă de β este $S(\frac{4}{5},\frac{8}{5},1)$. Planul căutat trece prin S şi prin dreapta $\Delta=\alpha\cap\beta$, deci are ecuaţia $-3x-y-z+5=0$. **19.** a) Planul α căutat este paralel cu planul dat, deci are ecuaţia $x-4y+5z+D=0$. Din $d(A,\pi)=d(A,\alpha)\Rightarrow|8+D|=18$, deci $D=-26$. Ecuaţia planului α este $x-4y+5z-26=0$. b) Dreapta căutata Δ_1 este paralelă cu Δ. Simetricul punctului $B(1,-2,0)\in\Delta$ faţă de A este $S(1,6,6)\in\Delta_1$, deci ecuaţiile dreptei Δ_1 sunt: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z-6}{1}$. **20.** $\Delta_1\cap\Delta_2=\{A\}$, $A(\frac{13}{3},\frac{-8}{3},10)$. Punctul $B(2,3,1)\in\Delta_1$ se proiectează pe Δ_2 în $P(-1,0,2)$, deci simetricul lui B faţă de Δ_2 este $S(-4,-3,3)$. Dreapta căutată AS are ecuaţiile $\frac{x+4}{25}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{21}$. **21.** Planul căutat π, paralel cu planele date, are ecuaţia $x+y-2z+D=0$. Cum $A(1,0,0)\in\pi_1$, $B(-3,0,0)\in\pi_2$, din $d(A,\pi)=d(B,\pi)$ se obţine $D=1$, deci ecuaţia planului π este $x+y-2z+1=0$. **22.** $\overrightarrow{v}_1=\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v}_2=-5\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$. $\arccos\frac{6}{\sqrt{247}}$. **23.** a) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$. b) $\frac{\pi}{2}$. **24.** $\arcsin\frac{1}{6}$. **25.** Un plan arbitrar care trece prin dreapta dată are ecuaţia $\alpha(x+5y+z)+\beta(x-z+4)=0$, $\alpha^2+\beta^2>0$. Condiţia din problemă conduce la relaţia $3\alpha^2+4\alpha\beta=0$. Se obţin planele de ecuaţii $x-z+4=0$ şi $-x-20y-7z+12=0$. **26.** a) Folosim (1.24), se obţine $d=0$, deci punctul se află în plan. b) $\frac{5\sqrt{38}}{\sqrt{29}}$. **27.** Ecuaţia planului BCD este $10x+17y-11z-23=0$. Înălţimea din A este distanţa de la punctul A la acest plan. $h=\frac{20}{\sqrt{510}}$. **28.** Planele sunt paralele. $A(1,-2,3)\in\pi_1$. $d=d(A,\pi_2)=4$. **29.** Dreptele sunt paralele. $d=3$. **30.** Fie $M_1(1,1,1)\in d_1$ şi $M_2(0,0,-2)\in d_2$. Direcţiile celor două drepte sunt $\overrightarrow{v}_1=\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ respectiv $\overrightarrow{v}_2=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$. Rezultă $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})=3$, deci dreptele nu sunt concurente. Ca în problema rezolvată 8, se obţin ecuaţiile perpendicularei comune: $4x-y+z-4=0$, $2x+4y+5z+10=0$. **31.** Fie $M_1(2,-1,0)\in d_1$ şi $M_2(-1,8,3)\in d_2$. Direcţiile celor două drepte sunt $\overrightarrow{v}_1=-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ respectiv $\overrightarrow{v}_2=7\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$. Rezultă $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})=0$, deci dreptele sunt concurente. Punctul de concurenţă este $P(-1,8,3)$. **32.** a) Folosim (1.26) cu $M_1(-3,6,3)$, $M_2(4,-1,-7)$, $\overrightarrow{v_1}=4\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2}=8\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=-3\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}+12\overrightarrow{k}$, $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})=-169$, rezultă că $d(\Delta_1,\Delta_2)=13$. b) Eliminând parametrul t, se obţin ecuaţiile canonice ale dreptelor. În acest caz, $M_1(-4,4,-1)$, $M_2(-5,5,5)$, $\overrightarrow{v_1}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2}=4\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-2\overrightarrow{k}$, $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})=-9$, rezultă că $d(\Delta_1, \Delta_2) = 3$. **33.** Direcţia dreptei Δ_1 este $\overrightarrow{v}_1 = -3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Fie $M_0(-12, 0, -34) \in \Delta_1$ şi $M_1(-7, 5, 9) \in \Delta_2$. Se obţine $d = 25$. **34.** $\Delta = \pi_1 \cap \pi_2$, unde $\pi_1 = (A, \Delta_1)$, $\pi_2 = (A, \Delta_2)$. Ecuaţiile dreptei Δ sunt $2x - y - z = 0$, $x + y - z - 1 = 0$. **35.** Fie $M_1(1, 0, -1) \in \Delta_1$ şi $M_2(0, -1, 1) \in \Delta_2$. Direcţiile celor două drepte sunt $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ respectiv $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. Dreapta căutată Δ are direcţia $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$. Atunci $\Delta = \pi_1 \cap \pi_2$, unde $\pi_1 = (M_1, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{n})$, $\pi_2 = (M_2, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{n})$. Ecuaţiile dreptei Δ sunt $x - 2y + z = 0$, $2x - y - 1 = 0$ sau $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.

CAPITOLUL 10

Conice

1. Preliminarii

Fie $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un reper cartezian în plan. Se numeşte *conică* o mulţime de puncte $\mathcal{C}$ din plan, de forma

$$\mathcal{C} = \{M(x,y) \mid f(x,y) = 0\},$$

unde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33},$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1,3}$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$. Ecuaţia

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1.1}$$

se numeşte *ecuaţia conicei* $\mathcal{C}$.

Prezentăm acum, conicele uzuale şi ecuaţiile lor standard, în raport cu repere carteziene convenabil alese.

Cercul. Ecuaţia cercului cu centrul în punctul $C(a,b)$ şi de rază r, este

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Ecuaţia generală a cercului este

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0, \tag{1.2}$$

unde m, n, $p \in \mathbb{R}$, $m^2 + n^2 - p > 0$.

În aplicaţii sunt utile *ecuaţiile parametrice* ale cercului:

$$\begin{cases} x = a + r\cos t \\ y = b + r\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Elipsa. Este mulţimea punctelor $M(x,y)$ din plan, ale căror coordonate satisfac ecuaţia $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. În aplicaţii sunt utile *ecuaţiile parametrice* ale elipsei:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$

Hiperbola. În acest caz, coordonatele punctelor satisfac ecuaţia $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Parabola. Este mulţimea punctelor $M(x,y)$ din plan, ale căror coordonate satisfac ecuaţia $y^2 = 2px$.

Reducera conicelor la forma canonică. Fie conica de ecuaţie (1.1). Se poate determina un reper cartezian convenabil faţă de care ecuaţia are o formă cât mai simplă, numită *formă canonică*. La această formă se poate ajunge printr-o translaţie şi o rotaţie adecvată a reperului cartezian.

Un punct C se numeşte *centru de simetrie* al conicei dacă simetricul faţă de C al oricărui punct M al conicei aparţine conicei. Dintre conicele de mai sus, cercul, elipsa, hiperbola au centru de simetrie şi se numesc *conice cu centru*, pe când parabola nu are centru de simetrie şi se numeşte *conică fără centru*. Notăm

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \ I = a_{11} + a_{22}.$$

Distingem următoarele cazuri:

I. Dacă $\delta \neq 0$, conica este *conică cu centru*, coordonatele centrului verificând sistemul

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{array} \right. . \tag{1.3}$$

I.1. Dacă $a_{12} \neq 0$, forma canonică este

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \tag{1.4}$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt rădăcinile *ecuaţiei caracteristice*

$$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0,$$

alese astfel încât să satisfacă condiţia

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot a_{12} > 0,$$

iar

$$\frac{\Delta}{\delta} = f(x_0, y_0) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}. \tag{1.5}$$

Conica are ecuaţia (1.4) în raport cu reperul cu originea în (x_0, y_0), obţinut din reperul iniţial printr-o translaţie urmată de o rotaţie de unghi θ dat de

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \tag{1.6}$$

sau

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}},$$

dacă $a_{11} \neq a_{22}$. În acest din urmă caz, dacă $a_{11} = a_{22}$, atunci $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Relaţiile de transformare a coordonatelor sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + X\cos\theta + Y\sin\theta \\ y = y_0 - X\sin\theta + Y\cos\theta \end{array} \right. .$$

I.2. Dacă $a_{12} = 0$, forma canonică este

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

raportul $\dfrac{\Delta}{\delta}$ fiind dat de (1.5), unde (x_0, y_0) este soluţie a sistemului (1.3), iar

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{array} \right. . \tag{1.7}$$

II. Dacă $\delta = 0$ şi

$$rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 1, \tag{1.8}$$

conica are o *infinitate de centre* (x_0, y_0), care satisfac ecuaţia

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0.$$

În urma translaţiei (1.7), ecuaţia conicei devine

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + f(x_0, y_0) = 0,$$

unde $f(x_0, y_0)$ se calculează cu formula (1.5). Scriind primii trei termeni ca pătratul unui binom, se constată că, în acest caz, conica degenerează în două drepte paralele sau confundate, sau este mulţimea vidă.

III. Dacă $\delta = 0$ şi

$$rang\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2,$$

conica este *conică fără centru.*

III.1. Dacă $a_{12} \neq 0$, forma canonică a ecuaţiei conicei este

$$Y^2 = \pm 2pX, \tag{1.9}$$

unde

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}.$$

Ecuaţia *axei parabolei* este

$$a_{11}\frac{\partial f}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

coordonatele x_0, y_0 ale *vârfului parabolei* verificând sistemul

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ a_{11}\dfrac{\partial f}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Conica este parabola de ecuaţie (1.9), în raport cu reperul obţinut după rotaţia de unghi θ dat de

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$$

urmată de o translaţie convenabilă. Semnul în (1.9) se alege în funcţie de poziţia parabolei faţă de axele de coordonate ale reperului iniţial, ceea ce se stabileşte intersectând parabola cu axele de coordonate.

III.2. Dacă $a_{12} = 0$, atunci conica este o parabolă sau degenerează în două drepte paralele sau confundate, sau este mulţimea vidă.

2. Probleme rezolvate

1. Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC, unde $A(1,2)$, $B(0,3)$, $C(-2,2)$. Să se găsească centrul şi raza acestui cerc.

Soluţie. Folosim ecuaţia (1.2). Cele trei puncte aflându-se pe cerc, coordonatele acestora trebuie să verifice ecuaţia cercului, ceea ce conduce la sistemul de ecuaţii $2m + 4n + p = -5$, $6n + p = -9$, $-4m + 4n + p = -8$. Rezolvând, găsim $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $p = 0$, deci ecuaţia cercului circumscris triunghiului este $x^2 + y^2 + x - 3y =$

0, care se mai scrie sub forma $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$. În consecinţă, centrul cercului este $C\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, iar raza $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$.

Soluţie. În acest caz $a_{11}=6$, $a_{12}=-2$, $a_{22}=9$, $a_{13}=-2$, $a_{23}=-16$, $a_{33}=-6$, deci $\delta=\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}=50>0$. Prin urmare, conica este o elipsă. Coordonatele centrului conicei sunt date de sistemul $6x_0-2y_0-2=0$, $-2x_0+9y_0-16=0$. Obţinem $x_0=1$, $y_0=2$. Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2-15\lambda+50=0$ şi are rădăcinile $\lambda_1=5$, $\lambda_2=10$ (am ţinut seama că $a_{12}<0$). Conform (1.5), $\frac{\Delta}{\delta}=-40$. Aşadar, forma canonică a ecuaţiei conicei este $5X^2+10Y^2-40=0$ sau $\frac{X^2}{8}+\frac{Y^2}{4}-1=0$. Unghiul de rotaţie θ este, conform (1.6), $\theta=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Atunci $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$. În consecinţă, relaţiile de transformare a coordonatelor sunt:

$$\begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y) \\ y=2+\frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y) \end{cases}.$$

Graficul conicei este cel din fig. 1.

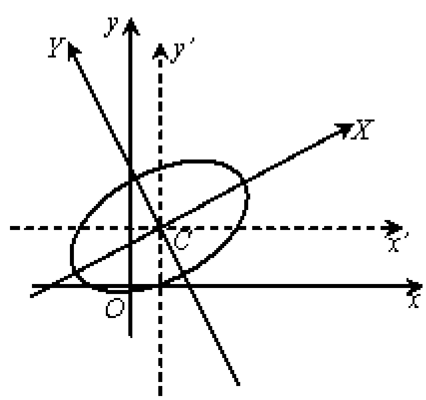

Fig. 1

3. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

Soluţie. Deoarece $a_{11}=5$, $a_{12}=6$, $a_{22}=0$, $a_{13}=-11$, $a_{23}=-6$, $a_{33}=-19$, rezultă că $\delta=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}=-36<0$, deci conica este o hiperbolă. Coordonatele centrului C al conicei sunt date de sistemul $5x_0+6y_0-11=0$, $6x_0-6=0$. Aşadar, $C(1,1)$. Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2-5\lambda-36=0$ şi are rădăcinile

$\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$ $(a_{12} > 0)$. Din (1.5), se obţine $\dfrac{\Delta}{\delta} = -36$. Prin urmare, forma canonică este $9X^2 - 4Y^2 - 36 = 0$ sau $\dfrac{X^2}{4} - \dfrac{Y^2}{9} - 1 = 0$. Unghiul de rotaţie este $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{3}$. Atunci $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$. În consecinţă, relaţiile de transformare a coordonatelor sunt:

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3X + 2Y) \\ y = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2X + 3Y) \end{cases}.$$

Graficul conicei este cel din fig. 2.

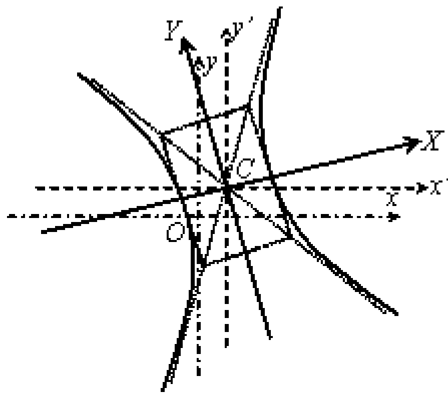

Fig. 2

4. Să se determine natura conicelor de ecuaţii:
a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 29 = 0$;
b) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 30 = 0$.

Soluţie. a) Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$, deci conica este o elipsă. Coordonatele centrului conicei sunt date de sistemul $x_0 - y_0 - 2 = 0$, $-x_0 + 2y_0 - 3 = 0$. Se obţine $x_0 = 7$, $y_0 = 5$, deci, conform (1.5), $\dfrac{\Delta}{\delta} = 0$. Prin urmare, conica este o elipsă degenerată în centrul său, $C(7, 5)$.

b) În acest caz, $\dfrac{\Delta}{\delta} = 1$, deci conica este o elipsă imaginară.

5. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y - 5 = 0$.

Soluţie. Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = -\dfrac{49}{4} > 0$, deci conica este o hiperbolă. Coordonatele centrului conicei sunt date de sistemul $2x_0 + \dfrac{5}{2}y_0 + \dfrac{3}{2} = 0$, $\dfrac{5}{2}x_0 - 3y_0 + 8 = 0$. Se obţine $x_0 = -2$, $y_0 = 1$, deci, conform (1.5), $\dfrac{\Delta}{\delta} = 0$. Prin urmare, conica este o hiperbolă degenerată. După translaţia $x = -2 + x'$, $y = 1 + y'$, ecuaţia conicei devine $2x'^{\,2} + 5x'y' - 3y'^{\,2} = 0$ sau $(2x' - y')(x' + 3y') = 0$. Trecând la variabilele x şi y rezultă că, în acest caz, conica degenerează în dreptele paralele de ecuaţii $2x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$ (fig. 3).

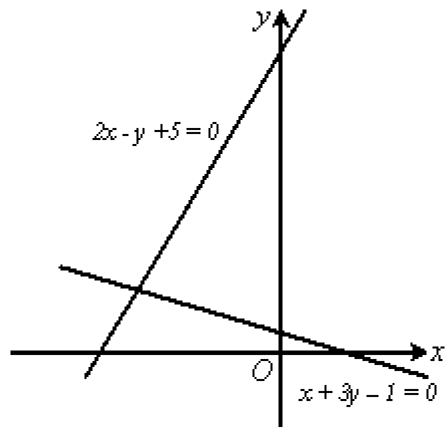

Fig. 3

6. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x - 7y + 3 = 0$.

Soluţie. Deoarece $\delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ şi rang $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -\dfrac{7}{2} \\ 2 & 2 & -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix} = 1$, conica are o infinitate de centre care se află pe dreapta de ecuaţie $2x + 2y - \dfrac{7}{2} = 0$. Alegem $x_0 = 1$, $y_0 = \dfrac{3}{4}$ o soluţie a acestei ecuaţii. După translaţia $x = 1 + x'$, $y = \dfrac{3}{4} + y'$, ecuaţia conicei devine $2x'^{\,2} + 4x'y' + 2y'^{\,2} - \dfrac{25}{8} = 0$ sau $(x' + y')^2 - \dfrac{25}{16} = 0$, care conduce la $(4x' + 4y' + 5)(4x' + 4y' - 5) = 0$. Trecând la variabilele x şi y rezultă că, în acest caz, conica degenerează în dreptele paralele de ecuaţii $2x + 2y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ (fig. 4).

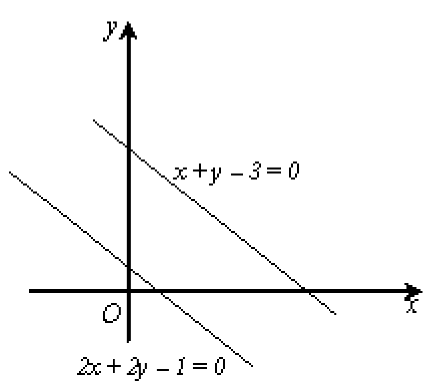

Fig. 4

7. Să se reprezinte grafic conica de ecuaţie $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

Soluţie. În acest caz $\delta = 0$ şi $rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$, deci conica este o parabolă. Deoarece $I = 5$, $\Delta = -25$, rezultă $p = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Prin urmare, ecuaţia canonică a parabolei este $Y^2 = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}X$. Unghiul de rotaţie este $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$. Conform (1.9), ecuaţia axei parabolei este $x - 2y - 1 = 0$. Intersectând cu parabola găsim vârful parabolei $V(\dfrac{1}{5}, \dfrac{-2}{5})$. Pentru a alege semnul, intersectăm, de exemplu, cu axa Oy. Dacă $x = 0$, ecuaţia $4y^2 + 2y + 1 = 0$ nu are rădăcini reale, deci parabola nu intersectează axa Oy. În consecinţă, forma canonică a ecuaţiei parabolei este $Y^2 = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}X$, iar graficul cel din fig. 5.

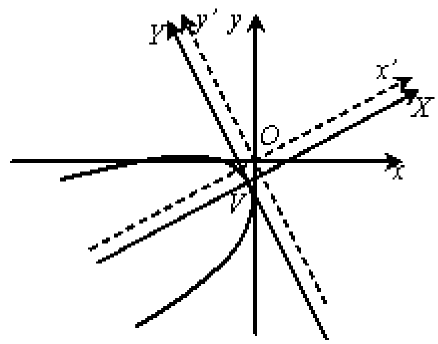

Fig. 5

3. Probleme propuse

1. Să se scrie ecuaţia cercului care:
a) trece prin punctul $A\,(3, 6)$ şi are centrul $C\,(-1, 3)$;
b) are ca diametru segmentul $[AB]$, unde $A\,(-1, 3)$, $B\,(3, 5)$;
c) are centrul $C\,(3, -5)$ şi este tangent dreptei de ecuaţie $2x - y + 1 = 0$;
d) trece prin punctele $A\,(1, 2)$, $B\,(3, -4)$ şi are centrul pe dreapta $x + y - 1 = 0$;
e) are centrul $C\,(2, -1)$ şi determină pe dreapta de ecuaţie $3x - 4y + 5 = 0$ o coardă de lungime 8.

2. Să se determine centrul şi raza cercului circumscris triunghiului ABC, unde $A\,(1, 2)$, $B\,(0, 3)$, $C\,(-2, 2)$.

3. Să se scrie ecuaţia elipsei ale cărei axe de simetrie coincid cu axele de coordonate, dacă:
a) are focarele $F_1(2\sqrt{2}, 0)$, $F_2(-2\sqrt{2}, 0)$ şi semiaxa mare 3;
b) are semiaxa mică 6, iar distanţa dintre focare este 8;
c) trece prin punctele $A(1, \dfrac{3\sqrt{3}}{2})$, $B(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}, -2)$;
d) are semiaxa mare 25, iar excentricitatea $0,6$.

4. Să se scrie ecuaţia hiperbolei ale cărei axe de simetrie coincid cu axele de coordonate, dacă:
a) are focarele $F_1(-2\sqrt{2}, 0)$, $F_2(2\sqrt{2}, 0)$ şi distanţa dintre vârfuri 4;
b) are focarele $F_1\,(-5, 0)$, $F_2\,(5, 0)$ şi trece prin punctul $A(8, 3\sqrt{3})$;
c) are focarele $F_1\,(0, 4)$, $F_2\,(0, -4)$ şi trece prin punctul $A(1, \sqrt{15})$;
d) este echilateră şi trece prin punctul $A(2\sqrt{3}, 2)$.

5. Să se scrie ecuaţia parabolei cu vârful în origine, cu axa transversă Ox, care:
a) are distanţa de la vârf la focar egală cu 5;
b) trece prin punctul $A\,(2, -4)$.

6. Să se scrie ecuaţia parabolei care are ca dreaptă directoare axa Ox şi focarul $F\,(0, 6)$.

7. Să se găsească locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente la conica $x^2 - 2y^2 - 2 = 0$, perpendiculare între ele.

8. Un punct M descrie o elipsă cu centrul în O, de semiaxe a şi b. Fie P proiecţia ortogonală a punctului M pe axa mare, iar N un punct pe OM astfel ca $\overrightarrow{ON} = \dfrac{a}{b}\overrightarrow{NM}$. Dreapta PN taie axa mică în Q. Să se arate că segmentul PQ este constant.

9. Fie M un punct mobil pe cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 4$ şi $A\,(-2, 0)$. Dreapta AM intersectează axa Oy în B, iar paralela în B la Ox intersectează OM în C. Să se găsească locul geometric al punctului C.

10. Să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conicele:
a) $4x^2 + 16y^2 + 4x - 80y + 85 = 0$;
b) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
c) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
d) $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$;
e) $xy + 2x + y = 0$;
f) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 3y - 18 = 0$;
g) $4xy + 3x - 3y - 18 = 0$;
h) $4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0$;
i) $9x^2 - 24xy + 12y^2 = 0$;
j) $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$;
k) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;
l) $4x^2 + 4xy + y^2 - 13x - 4y + 8 = 0$;
m) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

11. Să se discute natura conicelor de ecuaţie $x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. În cazul conicelor cu centru să se determine locul geometric al centrelor conicelor şi să se reprezinte grafic. Aceeaşi problemă pentru conicele de ecuaţii $x^2 - 2xy + (1 - \lambda)\,y^2 + 2\lambda x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Recunoaşteţi conicele de ecuaţii:
a) $x^2 + y^2 - 2tx - 4ty + 1 + t^2 = 0$, $t \in \mathbb{R}$;
b) $x = 2t^2 + t + 4$, $y = t^2 + t + 2$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. a) $x^2+y^2+2x-6y-15=0$. b) $x^2+y^2-2x-8y+12=0$. c) $5x^2+5y^2-30x+50y+26=0$. d) $x^2+y^2-4x+2y-5=0$. e) $x^2+y^2-4x+2y-20=0$. **2.** Ecuaţia cercului este $x^2+y^2+x-3y=0$, $C(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, $r=1$. **3.** a) $x^2+9y^2-9=0$. b) $9x^2+13y^2-468=0$. c) $9x^2+4y^2-36=0$. d) $16x^2+25y^2-10000=0$. **4.** a) $x^2-y^2-4=0$. b) $9x^2-16y^2-144=0$. c) $3x^2-y^2+12=0$. d) $x^2-y^2-8=0$. **5.** a) $y^2=\pm 20x$. b) $y^2=8x$. **6.** $x^2=18y-27$. **7.** Fie $M(X,Y)$. Dreapta $y=Y+m(x-X)$ este tangentă la hiperbola dată$\Leftrightarrow \Delta=0$, unde Δ este discriminantul ecuaţiei în x, care se obţine după înlocuirea lui y în ecuaţia conicei. Se obţine $m^2(X^2-2)-2mXY+Y^2+1=0$. Dacă M satisface $X^2-2Y^2-2<0$, această ecuaţie are două rădăcini reale distincte, deci din M se pot duce două tangente la hiperbolă. Acestea vor fi perpendiculare$\Leftrightarrow m_1m_2=-1$. Se obţine locul geometric: $X^2+Y^2=1$. **8.** $M(a\cos t, b\sin t)$, $N(\frac{a^2\cos t}{a+b},\frac{ab\sin t}{a+b})$, $P(a\cos t,0)$, $Q(0,a\sin t)$, $PQ=a$. **9.** $M(2\cos t,2\sin t)$, $B(0,\frac{2\sin t}{1+\cos t})$, $C(\frac{2\cos t}{1+\cos t},\frac{2\sin t}{1+\cos t})$. Eliminând parametrul, se obţine locul geometric: parabola de ecuaţie $y^2=-4x+4$. **10.** a) elipsa $\frac{x'^2}{4}+y'^2-1=0$, $x=-\frac{1}{2}+x'$, $y=\frac{5}{2}+y'$. b) elipsa $X^2+\frac{Y^2}{9}-1=0$, $C(1,1)$, $\theta=\frac{\pi}{4}$, $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$, $y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$. c) hiperbola $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{36}-1=0$, $C(3,-4)$, $\theta=arctg2$, $x=3+\frac{1}{\sqrt{5}}(X-2Y)$, $y=-4+\frac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y)$. d) elipsa imaginară $2x'^2+y'^2+1=0$. e) hiperbola echilateră $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{4}-1=0$, $C(-1,-2)$, $\theta=\frac{\pi}{4}$, $x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$, $y=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$. f) $Y^2=-\frac{3}{\sqrt{2}}X$, axa parabolei: $x+y=0$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $V(3,-3)$. g) hiperbola echilateră $8X^2-8Y^2-63=0$, $C(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})$, $\theta=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$, $y=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$. h) hiperbolă conjugată $X^2-4Y^2+4=0$, $C(2,-1)$, $\theta=arctg\frac{1}{2}$, $x=2+\frac{1}{\sqrt{5}}(2X-Y)$, $y=-1+\frac{1}{\sqrt{5}}(X+2Y)$. i) hiperbolă degenerată în asimptotele sale: $x-2y=0$, $3x-2y=0$. j) hiperbolă degenerată în asimptotele sale: $4x+3y+1=0$, $2x+1=0$. k) conică cu o infinitate de centre aflate pe dreapta de ecuaţie $2x+3y-2=0$, conica degenerează în dreptele paralele de ecuaţii $2x+3y-5=0$, $2x+3y+1=0$. l) $Y^2=\frac{1}{\sqrt{5}}X$, axa parabolei: $2x+y-3=0$, $\theta=-arctg2$, $V(1,1)$. m) $Y^2=\frac{2}{\sqrt{5}}X$, axa parabolei: $x-2y-1=0$, $\theta=arctg\frac{1}{2}$, $V(\frac{1}{5},-\frac{2}{5})$. **11.** a) $\delta=1-\lambda^2$, $\Delta=-(2\lambda-1)^2$. Dacă $|\lambda|>1$, conica este hiperbolă nedegenerată, iar dacă $\lambda\in(-1,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$, conica este elipsă reală. Dacă $\lambda=\frac{1}{2}$, conica degenerează într-un punct. Dacă $\lambda=\pm 1$, conica este o parabolă. În cazul conicelor cu centru nedegenerate, coordonatele centrelor sunt $x=\frac{1-2\lambda}{1-\lambda^2}$, $y=\frac{2-\lambda}{1-\lambda^2}$, $\lambda\notin\{-1,1,\frac{1}{2}\}$. Eliminând parametrul, se obţine ecuaţia locului geometric al centrelor: $x^2 - y^2 - x + 2y = 0$, care este hiperbola $x'^2 - y'^2 + \frac{3}{4} = 0$, $x = \frac{1}{2} + x'$, $y = 1 + y'$. b) $\delta = -\lambda$, $\Delta = -\lambda^2(1-\lambda)$. Dacă $\lambda < 0$, conica este elipsă reală. Dacă $\lambda \in (0,\infty)\backslash\{1\}$, conica este hiperbolă nedegenerată, iar dacă $\lambda = 1$, hiperbola degenerează în asimptotele sale, dreptele $x = 0$, $x - 2y + 2 = 0$. Dacă $\lambda = 0$, conica degenerează în două drepte confundate, de ecuaţie $x - y = 0$. În cazul conicelor cu centru nedegenerate, coordonatele centrelor sunt $x = 1 - \lambda$, $y = 1$, $\lambda \notin \{0, 1\}$, locul geometric fiind dreapta $y = 1$, mai puţin punctele $(1, 1)$, $(0, 1)$. **12.** a) Ecuaţia se mai scrie sub forma $(x-t)^2 + (y-2t)^2 = 4t^2 - 1$, deci: dacă $|t| > \frac{1}{2}$, conica este un cerc cu centrul în punctul $C(t, 2t)$, da rază $r = \sqrt{4t^2-1}$; dacă $|t| < \frac{1}{2}$, conica este un cerc imaginar; dacă $t = \frac{1}{2}$, conica este un cerc degenerat în centrul său $C(\frac{1}{2}, 1)$; dacă $t = -\frac{1}{2}$, conica este un cerc degenerat în centrul său $C(-\frac{1}{2}, -1)$. b) Se elimină parametrul t. Astfel, $x - 2y = -t$, de unde rezultă ecuaţia conicei: $x^2 - 4xy + 4y^2 - x + y + 2 = 0$, care este ecuaţia unei parabole.

CAPITOLUL 11

Cuadrice

1. Preliminarii

Fie $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un reper cartezian în spaţiu. Se numeşte *cuadrică* mulţimea punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu cu proprietatea

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$, $j \geq i$, iar a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} nu sunt toţi nuli.

Prezentăm acum, cuadricele uzuale şi ecuaţiile lor standard, în raport cu repere carteziene convenabil alese.

Sfera. Ecuaţia sferei cu centrul în punctul $C(a, b, c)$ şi de rază R, este

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Elipsoidul	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
Hiperboloidul cu o pânză	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
Hiperboloidul cu două pânze	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$
Conul	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$
Paraboloidul eliptic	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$
Paraboloidul hiperbolic	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$
Cilindrul eliptic	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Cilindrul hiperbolic	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Cilindrul parabolic	$y^2 = 2px$

Generatoare rectilininii la cuadrice. Următoarele două familii de drepte

$$D_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}, \tag{1.1}$$

unde α şi β nu sunt simultan nuli şi

$$D_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}, \tag{1.2}$$

unde λ şi μ nu sunt simultan nuli, se află pe hiperboloidul cu o pânză. Aceste două familii de drepte se numesc generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză. Prin fiecare punct al hiperboloidului cu o pânză. trece o generatoare şi numai una din fiecare familie. Un rezultat similar este valabil şi pentru paraboloidul hiperbolic. În acest caz:

$$D_{\alpha,\beta}:\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\beta z\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\alpha\end{cases}, \tag{1.3}$$

unde α şi β nu sunt simultan nuli şi

$$D_{\lambda,\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\mu\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\lambda z\end{cases}, \tag{1.4}$$

unde λ şi μ nu sunt simultan nuli.

Reducerea cuadricelor la forma canonică. Pentru orice cuadrică se poate determina un reper cartezian convenabil faţă de care ecuaţia

$$f(x,y,z)=0, \tag{1.5}$$

unde $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x+$ $+2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$, are o formă cât mai simplă. La această formă se poate ajunge printr-o translaţie şi o rotaţie adecvată a reperului cartezian.

Un punct C se numeşte *centru de simetrie* al cuadricei dacă simetricul faţă de C al oricărui punct M al cuadricei aparţine cuadricei. Dintre cuadricele de mai sus, elipsoidul, hiperboloizii şi conul au centru de simetrie şi se numesc *cuadrice cu centru*, pe când paraboloizii nu au centru de simetrie şi se numesc *cuadrice fără centru*.

Pentru fiecare cuadrică de ecuaţie (1.5), considerăm

$$\delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

Dacă $\delta\neq 0$, cuadrica are centru de simetrie punctul $C(x_0,y_0,z_0)$, unde x_0, y_0, z_0 sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii:

$$\begin{array}{l}a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0\\a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0\\a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0\end{array}. \tag{1.6}$$

În urma translaţiei

$$x=x_0+x',\ y=y_0+y',\ z=z_0+z',$$

ecuaţia conicei devine:

$$a_{11}x'^{\,2}+a_{22}y'^{\,2}+a_{33}z'^{\,2}+2a_{12}x'y'+2a_{13}x'z'+2a_{23}y'z'+f(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, ecuaţia cuadricei este deja sub formă canonică. Dacă cel puţin unul dintre coeficienţii a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul, se efectuează o rotaţie a reperului cartezian, folosind metoda valorilor şi vectorilor proprii. Mai precis, se consideră forma pătratică $\Phi : \mathcal{V}_3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(\overrightarrow{v}) = a_{11}x'^{\,2} + a_{22}y'^{\,2} + a_{33}z'^{\,2} + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z'$, $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$. Se determină valorile proprii λ_1, λ_2, λ_3 ale matricei acestei forme pătratice, precum şi vectorii proprii ortonormaţi corespunzători: $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$. Fie B matricea de trecere de la baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ la baza $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$. După schimbarea de variabilă

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

ecuaţia conicei devine

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Această ecuaţie este *ecuaţia canonică* a cuadricei.

Dacă $\delta = 0$, atunci sistemul (1.6) nu are soluţie unică. În acest caz, pentru reducerea ecuaţiei la forma canonică, se efectuează mai întâi o rotaţie ca mai sus, cu valori şi vectori proprii, urmată de o translaţie adecvată.

Generarea suprafeţelor

Suprafeţe riglate. O suprafaţă se numeşte *riglată* dacă poate fi generată prin mişcarea unei drepte care se sprijină pe o curbă dată.

Suprafeţe cilindrice. Fie $\overrightarrow{v} = l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ şi curba C de ecuaţii

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{array} \right. . \tag{1.7}$$

Se numeşte *suprafaţă cilindrică* suprafaţa generată prin mişcarea unei drepte de direcţie $\overrightarrow{v}$, numită *generatoare*, care se sprijină pe curba C, numită *curbă directoare* a suprafeţei.

Pentru a obţine ecuaţia suprafeţei cilindrice, se procedează după cum urmează.

O dreaptă variabilă de vector director $\overrightarrow{v}$ are ecuaţiile

$$\left\{ \begin{array}{l} nx - lz = \lambda \\ ny - mz = \mu \end{array} \right. ,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Aceste drepte trebuie să se sprijine pe curba C, deci sistemul de ecuaţii

$$\left\{ \begin{array}{l} nx - lz = \lambda \\ ny - mz = \mu \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{array} \right.$$

trebuie să fie compatibil. Eliminând x, y, z între aceste ecuaţii, se obţine *condiţia de compatibilitate*

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0. \tag{1.8}$$

Ecuaţia suprafeţei cilindrice va fi

$$\Phi(nx - lz, ny - mz) = 0.$$

Suprafeţe conice. Fie $V(x_0, y_0, z_0)$ un punct fix şi C curba de ecuaţii (1.7). Se numeşte *suprafaţă conică* suprafaţa generată prin mişcarea unei drepte, numită *generatoare*, care trece prin punctul fix V, numit *vârf,* şi se sprijină pe curba C, numită *curbă directoare*.

Pentru a obţine ecuaţia unei suprafeţe conice, presupunem că ecuaţiile generatoarei au forma

$$\frac{x-x_0}{\lambda} = \frac{y-y_0}{\mu} = \frac{z-z_0}{1}.$$

Această dreaptă trebuie să se sprijine pe curba C, deci sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\lambda} = \dfrac{y-y_0}{\mu} = \dfrac{z-z_0}{1} \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases},$$

trebuie să fie compatibil. Eliminând x, y, z între aceste ecuaţii obţinem *condiţia de compatibilitate* (1.8). Ecuaţia suprafeţei conice va fi

$$\Phi(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}) = 0.$$

Suprafeţe de rotaţie. Se numeşte *suprafaţă de rotaţie*, suprafaţa generată prin rotirea unei curbe C, de ecuaţii (1.7), în jurul unei drepte fixe d, numită *axă de rotaţie*.

Să presupunem că axa de rotaţie d are ecuaţiile

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

Când curba C se roteşte în jurul dreptei d, orice punct $M \in C$ descrie un cerc (numit *cerc generator* sau *paralel*) care se află într-un plan perpendicular pe d şi are centrul pe dreapta d. Acest cerc generator este intersecţia dintre o sferă de rază variabilă cu centrul pe d şi un plan perpendicular pe d , deci are ecuaţiile:

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu. \end{cases}.$$

Cum cercul se sprijină pe curba C, rezultă că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Eliminând x, y, z din cele trei ecuaţii rezultă condiţia de compatibilitate

$$\Phi(\lambda^2, \mu) = 0.$$

Ecuaţia suprafeţei de rotaţie va fi:

$$\Phi((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2, lx + my + nz) = 0.$$

2. Probleme rezolvate

1. Să se determine centrul şi raza sferei de ecuaţii:
a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
b) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y = 0$;
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

Soluţie. a) Deoarece ecuaţia sferei se mai scrie sub forma $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = 4$, rezultă că sfera are centrul în origine şi raza egală cu 2. b) Grupăm termenii care conţin variabila x şi formăm un pătrat perfect, adică $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Similar, $y^2+2y = (y+1)^2-1$. În consecinţă, ecuaţia sferei se poate scrie sub forma $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 + (z - 0)^2 = \frac{5}{4}$, deci sfera are centrul în punctul $C(\frac{1}{2}, -1, 0)$ şi raza $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. De remarcat că sfera trece prin origine. c) Procedând analog, ecuaţia sferei se poate scrie sub forma $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$. Aşadar, sfera are centrul $C(1, -2, 3)$ şi raza $r = 5$.

2. Să se găsească centrul şi raza cercului de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}.$$

Soluţie. Ecuaţia sferei se mai poate scrie sub forma $(x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2+z^2 = \frac{5}{4}$, deci sfera are centrul în punctul $C(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ şi raza $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Ecuaţiile dreptei care trece prin $C(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ şi perpendiculară pe planul de ecuaţie $x + y - z = 0$ sunt $x + \frac{1}{2} = y - 1 = -z$ sau sub formă parametrică $x = t - \frac{1}{2}$, $y = t + 1$, $z = -t$, $t \in \mathbb{R}$. Intersectând această dreaptă cu planul, se obţine centrul cercului de intersecţie dintre sferă şi plan, şi anume punctul $C'(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2})$. Raza r a acestui cerc se obţine din teorema lui Pitagora, $r = \sqrt{R^2 - CC'^{\,2}}$. Rezultă $r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

3. Să se arate că planul de ecuaţie $x+2y-2z-24 = 0$ este tangent la sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z-22 = 0$. Să se găsească coordonatele punctului de tangenţă.

Soluţie. Ecuaţia sferei se mai poate scrie sub forma $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2 = 36$, deci sfera are centrul în punctul $C(2, 3, 1)$ şi raza $R = 6$. Distanţa de la centrul sferei la planul dat este $d = \frac{|2 + 6 - 2 - 24|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 6$, deci $d = R$. Prin urmare, planul este tangent la sferă. Vom determina punctul de tangenţă. Din ecuaţia planului, avem $x = -2y + 2z + 24$. Înlocuind în ecuaţia sferei, obţinem ecuaţia unei conice, $5y^2 - 8yz + 5z^2 - 94y + 86z + 458 = 0$. Cum $\delta = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0$, conica este o elipsă al cărui centru satisface ecuaţiile $5y_0 - 4z_0 - 47 = 0$, $-4y_0 + 5z_0 + 43 = 0$, deci $y_0 = 7$, $z_0 = -3$. Deoarece $\frac{\Delta}{\delta} = -47y_0 + 43z_0 + 458 = 0$, elipsa degenerează în centrul său, $C(7, -3)$. Din ecuaţia planului, găsim $x_0 = 4$, deci punctul de tangenţă este $T(4, 7, -3)$.

4. Să se arate că planul de ecuaţie $4x - 12y + 9z - 6 = 0$ este tangent la cuadrica de ecuaţie $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} + 1 = 0$. Să se găsească coordonatele punctului de tangenţă.

Soluţie. Din ecuaţia planului, avem $x = 3y - \frac{9}{4}z + \frac{3}{2}$. Înlocuind în ecuaţia cuadricei, obţinem ecuaţia unei conice, $32y^2 - 24yz + 5z^2 + 16y - 12z + 20 = 0$. Cum $\delta = \begin{vmatrix} 32 & -12 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0$, conica este o elipsă al cărui centru satisface ecuaţiile $32y_0 - 12z_0 + 8 = 0$, $-12y_0 + 5z_0 - 6 = 0$, deci $y_0 = 2$, $z_0 = 6$. Deoarece $\frac{\Delta}{\delta} = 8y_0 - 6z_0 + 20 = 0$, elipsa degenerează în centrul său, $C(2, 6)$. Din ecuaţia planului, găsim $x_0 = -6$, deci punctul de tangenţă este $T(-6, 2, 6)$.

5. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$, care trec prin punctul $A\,(5, -4, 2)$.

Soluţie. Conform (1.1), ecuaţiile generatoarelor rectilinii sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\left(\frac{x}{5} + \frac{z}{2}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{4}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{5} - \frac{z}{2}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{4}\right) \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda\left(\frac{x}{5} + \frac{z}{2}\right) = \mu\left(1 - \frac{y}{4}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{5} - \frac{z}{2}\right) = \lambda\left(1 + \frac{y}{4}\right) \end{array} \right. . \tag{2.1}$$

Punând condiţia ca o generatoare din prima familie să treacă prin punctul A, se ajunge la relaţia $2\alpha = 0$. Prin urmare, $\alpha = 0$ şi $\beta \neq 0$, Înlocuind în (2.1) şi împărţind la β, se obţin ecuaţiile generatoarei: $\left\{ \begin{array}{l} y + 4 = 0 \\ 2x - 5z = 0 \end{array} \right.$. Similar, o generatoare din a doua familie trece prin punctul A dacă $\lambda = \mu \neq 0$. În consecinţă, ecuaţiile acestei generatoare vor fi $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 5y + 10z = 20 \\ 4x - 5y - 10z = 20 \end{array} \right.$.

6. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ care sunt paralele cu planul $3x + 2y - 4z = 0$.

Soluţie. În acest caz vom folosi (1.3) şi (1.4). Ecuaţiile generatoarelor vor fi $\left\{ \begin{array}{l} \alpha\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = \beta z \\ \beta\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) = \alpha \end{array} \right.$ şi $\left\{ \begin{array}{l} \lambda\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = \mu \\ \mu\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) = \lambda z \end{array} \right.$. Să remarcăm că $\beta \neq 0$ (altfel ar rezulta $\alpha = 0$, ceea ce contrazice ipoteza că α şi β nu sunt nuli simultan). Similar $\lambda \neq 0$. Direcţia primei generatoare este $\overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \alpha & 2\alpha & -4\beta \\ \beta & -2\beta & 0 \end{vmatrix} == 2\beta^2\overrightarrow{i} + \beta^2\overrightarrow{j} + \alpha\beta\overrightarrow{k}$. Similar, pentru a doua generatoare obţinem $\overrightarrow{v_1} = -8\lambda^2\overrightarrow{i} + +4\lambda^2\overrightarrow{j} - 4\lambda\mu\overrightarrow{k}$. Aceste drepte sunt paralele cu planul dat dacă şi numai dacă $\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{v_2} \perp \overrightarrow{n}$, unde $\overrightarrow{n} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$. Rezultă $\alpha = 2\beta$, $\beta \neq 0$, $\lambda = \mu$, $\mu \neq 0$. Înlocuind în ecuaţiile iniţiale şi simplificând corespunzător, rezultă că generatoarele căutate au ecuaţiile $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{array} \right.$ şi $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 4 = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{array} \right.$.

7. Să se reducă la forma canonică cuadrica $5x^2 + 7y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 6y + 4z + 1 = 0$. Să se precizeze natura acestei cuadrice.

Soluţie. În acest caz, $\delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, deci cuadrica este cu centru. Coordonatele centrului se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ x + 7y + z - 3 = 0 \\ x + y + 5z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Obţinem $C(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. După translaţia $x = x'$, $y = \frac{1}{2} + y'$, $z = -\frac{1}{2} + z'$, ecuaţia cuadricei devine

$$5x'^{\,2} + 7y'^{\,2} + 5z'^{\,2} + 2x'y' + 2x'z' + 2y'z' - \frac{3}{2} = 0.$$

Valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sunt $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$, iar vectorii proprii ortonormaţi corespunzători $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, matricea de trecere de la baza canonică la această bază fiind

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

După schimbarea de variabilă $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, ecuaţia cuadricei devine

$$4X^2 + 5Y^2 + 8Z^2 - \frac{3}{2} = 0 \text{ sau } \frac{X^2}{\frac{3}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{3}{10}} + \frac{Z^2}{\frac{3}{16}} - 1 = 0.$$

Aşadar cuadrica este un elipsoid.

8. Aceeaşi problemă pentru cuadrica $2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$.

Soluţie. În acest caz, $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -4$, iar vectorii proprii ortonormaţi corespunzători sunt $(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. După schimbarea de variabilă $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, ecuaţia cuadricei devine $6y'^{\,2} - 4z'^{\,2} - \sqrt{6}x' + 2\sqrt{3}y' + 3\sqrt{2}z' - 5 = 0$, care se mai poate scrie sub forma $6(y' + \frac{\sqrt{3}}{6})^2 - 4(z' - \frac{3\sqrt{2}}{8})^2 - \sqrt{6}x' - \frac{35}{8} = 0$. Notând $X = x' - \frac{35}{8\sqrt{6}}$, $Y = y' + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $Z = z' - \frac{3\sqrt{2}}{8}$, obţinem ecuaţia canonică a cuadricei: $6Y^2 - 4Z^2 - \sqrt{6}X = 0$. Cuadrica este un paraboloid hiperbolic.

9. Să se scrie ecuaţia cilindrului a cărui curbă directoare este curba de ecuaţii $\begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, generatoarele fiind perpendiculare pe planul curbei directoare.

Soluţie. Generatoarele fiind perpendiculare pe planul curbei, vor avea direcţia $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Ecuaţiile generatoarelor sunt $\begin{cases} x - z = \lambda \\ y - z = \mu \end{cases}$. Aceste generatoare se sprijină pe curba directoare dacă şi numai dacă sistemul $\begin{cases} x - z = \lambda \\ y - z = \mu \\ x^2 - y^2 = z \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ este compatibil. Eliminând x, y, z între cele patru relaţii, se obţine condiţia $(2\lambda - \mu)^2 - (2\mu - \lambda)^2 + 3(\lambda + \mu) = 0$, care este echivalentă cu $\lambda^2 - \mu^2 + \lambda + \mu = 0$. Aşadar, $\Phi(\lambda, \mu) = \lambda^2 - \mu^2 + \lambda + \mu$. În consecinţă, ecuaţia suprafeţei cilindrice va fi $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$.

10. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice circumscrise sferei de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta de ecuaţii $x = y = z$.

Soluţie. Ecuaţiile generatoarelor sunt $\begin{cases} x - y = \lambda \\ y - z = \mu \end{cases}$. În acest caz, generatoarele nu se sprijină pe o curbă directoare, ci sunt circumscrise unei sfere, deci intersectează sfera într-un singur punct. Înlocuind $x = y + \lambda$, $z = y - \mu$ în ecuaţia sferei, rezultă că ecuaţia $(y + \lambda)^2 + y^2 + (y - \mu)^2 = 1$ trebuie să aibă o singură soluţie, deci discriminantul său trebuie să fie nul. Se obţine astfel condiţia de compatibilitate $\Phi(\lambda, \mu) = 2\lambda^2 + 2\mu^2 + 2\lambda\mu - 3 = 0$. În consecinţă, ecuaţia suprafeţei este $2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) - 3 = 0$.

11. Să se găsească ecuaţiile proiecţiei ortogonale a curbei de ecuaţii $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$ pe planul xOy.

Soluţie. Determinăm ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu axa Oz, a cărei curbă directoare este curba dată. Ecuaţiile generatoarelor sunt $x = \lambda$, $y = \mu$. Procedând ca mai sus, ecuaţia suprafeţei cilindrice este $2x^2 + y^2 - 2\,(4 - x) = 0$. În consecinţă, proiecţia curbei date pe planul xOy are ecuaţiile $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2\,(4 - x) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

12. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful în origine, de curbă directoare de ecuaţii $x^2+y^2=1$, $z=1$.

Soluţie. Ecuaţiile generatoarelor sunt $\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{1}$. Cum aceste generatoare se sprijină pe curba directoare, rezultă că $\lambda^2+\mu^2=1$. În consecinţă, ecuaţia suprafeţei conice este $x^2+y^2=z^2$.

13. Să se scrie ecuaţia suprafeţei care se obţine prin rotirea dreptei de ecuaţii $x+z=2$, $y=0$ în jurul dreptei de ecuaţii $x-2=0$, $y-2=0$.

Soluţie. Axa de rotaţie trece prin punctul $(2,2,0)$ şi are ca vector director $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{k}$. În consecinţă, un cerc generator are ecuaţiile $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=\lambda^2$, $z=\mu$. Deoarece acest cerc se sprijină pe dreapta de ecuaţii $x+z=2$, $y=0$, rezultă că $2\mu^2-\lambda^2+4=0$. Prin urmare, ecuaţia suprafeţei de rotaţie este $(x-2)^2+(y-2)^2-z^2=4$.

3. Probleme propuse

1. Să se scrie ecuaţia sferei care:

a) trece prin punctul $A(2,-1,-3)$ şi are centrul $C(3,-2,1)$;

b) are ca diametru segmentul $[AB]$, $A(1,2,3)$, $B(1,-4,3)$;

c) are centrul $C(3,-5,-2)$ şi este tangentă planului $2x-y-3z+11=0$;

d) trece prin punctele $M(3,1,-3)$, $N(-2,4,1)$, $P(-5,0,0)$ şi are centrul în planul $2x+y-z+3=0$.

2. Să se găsească centrul şi raza sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$, unde $A(1,-2,-1)$, $B(-5,10,-1)$, $C(4,1,11)$, $D(-8,-2,2)$.

3. Să se scrie ecuaţia sferei cu centrul pe dreapta $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$, care trece prin punctul $A(0,2,-1)$ şi de rază $\sqrt{5}$.

4. Să se scrie ecuaţia sferei cu centrul în punctul $A(4,5,-2)$, ştiind că sfera $x^2+y^2+z^2-4x-12y+36=0$ este tangentă interioară la sfera căutată.

5. Să se determine centrul şi raza cercurilor de ecuaţii:

a) $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x-6z-14=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-59=0 \\ 18x-22y+5z-30=0 \end{cases}$.

6. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente la sfera de ecuaţie $x^2+y^2+z^2-8x-4z-205=0$, care sunt paralele cu planul de ecuaţie $10x-11y+2z=0$.

7. Să se determine curbele de intersecţie ale elipsoidului $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}-1=0$ cu planele de coordonate.

8. Să se arate că următoarele plane intersectează cuadricele corespunzătoare, după nişte conice. Să se precizeze după caz semiaxele, vârfurile sau parametrul parabolei.

a) $x=2$; $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}-1=0$; b) $z+1=0$; $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$;

c) $y+6=0$; $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{8}=6z$.

9. Să se precizeze poziţia dreptei de ecuaţii $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+6}{-3}=\dfrac{z+2}{-2}$ faţă de elipsoidul $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}-1=0$. Aceeaşi problemă pentru dreapta $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$ şi paraboloizii $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=2z$, $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=2z$.

10. Pentru ce valori ale lui m, planul de ecuaţie $2x-y-2z+m=0$, este tangent la paraboloidul eliptic de ecuaţie $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=2z$? Să se determine punctul de tangenţă.

11. Să se determine ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale suprafeţei $4x^2-9y^2=36z$ care trec prin punctul $A(3,0,1)$; să se calculeze unghiul dintre ele.

12. Aceeaşi problemă pentru suprafaţa $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1$ şi punctul $A(3,-2,4)$.

13. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale suprafeţei $x^2-4y^2=16z$ care sunt paralele cu planul $3x+2y-4z=0$.

14. Aceeaşi problemă pentru suprafaţa $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$ şi planul $6x+4y+3z-17=0$.

15. Să se determine generatoarele cuadricei $x^2-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}-1=0$ conţinute în planul $6x+3y-2z+6=0$.

16. Să se reducă la forma canonică şi să se precizeze natura cuadricelor:
a) $5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-10x+8y+14z-6=0$;
b) $2x^2+5y^2+11z^2-20xy+4xz+16yz-24x-6y-6z-180=0$;
c) $y^2-z^2+4xy-4xz-6x+4y+2z+8=0$;
d) $y^2+2\sqrt{3}yz-z^2-4x+2=0$;
e) $axz+byz-abx=0$, $a^2+b^2>0$.

17. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice având generatoarele paralele cu dreapta $x=y=z$ şi care se sprijină pe curba de ecuaţii $x=y^2$, $z=0$.

18. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta $x+y+z=0$, $x+2y+3z=0$ şi care are curba directoare de ecuaţii $x^2+y^2+z^2-2=0$, $y=0$.

19. Să se scrie ecuaţia cilindrului care are ca directoare curba de ecuaţii $y^2+z^2=x$, $x=2z$, ştiind că generatoarele sunt perpendiculare pe planul curbei directoare.

20. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele cu dreapta $x=y=z$ şi tangentă sferei de ecuaţie $(x-3)^2+y^2+z^2-1=0$.

21. Curba de ecuaţii $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{z^2}{3}=y \\ 3x-3y+4z+2=0 \end{cases}$ se proiectează ortogonal pe planul xOz. Să se precizeze natura şi centrul proiecţiei.

22. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în origine şi având curba directoare de ecuaţii $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$.

23. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful V dat de intersecţia planelor de ecuaţii $x + 3z - 10 = 0$, $y - 2 = 0$, $x - z + 2 = 0$ şi care are curba directoare de ecuaţii $x^2 + z^2 - 2x = 0$, $y = 0$.

24. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful $V(3, 0, -1)$, ale cărui generatoare sunt tangente elipsoidului $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} - 1 = 0$.

25. Să se găsească locul geometric al tangentelor duse din origine la sfera de ecuaţie $(x-5)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16$.

26. Să se scrie ecuaţia suprafeţelor generate prin rotirea hiperbolei $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = 0$ în planul axei Ox respectiv Oy.

27. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generată prin rotirea curbei de ecuaţii $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, $2x - y = 0$ în jurul dreptei de ecuaţii $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

28. Sfera de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$ este luminată de un fascicul de raze paralel cu dreapta $x = y = z$. Să se găsească forma umbrei aruncate de sferă pe planul xOy.

4. Indicaţii şi răspunsuri

1. a) $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-4=0$. b) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z+2=0$. c) $x^2+y^2+z^2-6x+10y+4z-18=0$. d) Fie $C(u, v, 2u+v+3)$ centrul sferei. Din $CM = CN = CP$, rezultă $u = 1$, $v = -2$. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-35=0$. **2.** Punând condiţia ca sfera $x^2+y^2+z^2+mx+ny+pz+q=0$ să treacă prin cele 4 puncte, ajungem la relaţiile: $m-2n-p+q=-6$, $-5m+10n-p+q=-126$, $4m+n+11p+q=-138$, $-8m-2n+2p+q=-72$. Rezolvând, obţinem $m=4$, $n=-8$, $p=-10$, $q=-36$, deci ecuaţia sferei căutate este $x^2+y^2+z^2+4x-8y-10z-36=0$. $C(-2,4,5)$, $R=9$. **3.** Sfera are centrul $C(t, -t+1, t-2)$. Din $AC = \sqrt{5}$, avem $t = \pm 1$. Se obţin două sfere de ecuaţii $x^2+y^2+z^2-2x+2z-3=0$, $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+9=0$. **4.** Centrul sferei interioare este $C(2,6,0)$, iar raza $r=2$. Raza sferei căutate este $R = r + AC = 5$. Sfera căutată are ecuaţia $x^2+y^2+z^2-8x-10y+4z+20=0$. **5.** a) $C(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3})$, $r = 5\sqrt{3}$. b) Cercul trece prin centrul sferei. $C(2,0,3)$, $r = R = 3\sqrt{3}$. c) $C(1,-1,-2)$, $r = R = 8$. **6.** Un plan paralel cu planul dat are ecuaţia $10x - 11y + 2z + D = 0$. Se pune condiţia ca distanţa de la centrul sferei la acest plan să fie 15. $10x - 11y + 2z + 189 = 0$, $10x - 11y + 2z - 261 = 0$. **7.** $\cap xOy$: elipsa $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\cap xOz$: elipsa $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $\cap yOz$: elipsa $\begin{cases} \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. **8.** a) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{3} - 1 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$, elipsă de semiaxe 3, $\sqrt{3}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$, hiperbolă de semiaxe 4, 3; $\begin{cases} 2x^2 = 60z - 45 \\ y + 6 = 0 \end{cases}$, parabolă

cu vârful $V(0,-6,\frac{3}{4})$, $p=15$. **9.** secantă, $A(2,-3,0)$, $B(0,0,2)$; secantă, $A(2,3,1)$, $O(0,0,0)$; tangentă, $O(0,0,0)$. **10.** Planul intersectează cuadrica după elipsa de ecuaţie $4x^2+3y^2-24x+12y-12m=0$. Această elipsă degenerează în centrul său, $(3,-2)$, dacă $\Delta=0$, deci când $m=-4$. Planul de ecuaţie $2x-y-2z-4=0$ este tangent la cuadrică în punctul $(3,-2,2)$. **11.** $\begin{cases} 2x+3y-6z=0 \\ 2x-3y-6=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ 2x-3y-6z=0 \end{cases}$, $\arccos\frac{9}{17}$. **12.** $\begin{cases} y+2=0 \\ 4x-3z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 4x+6y+3z-12=0 \\ 4x-6y-3z-12=0 \end{cases}$, $\arccos\frac{8}{5\sqrt{5}}$. **13.** $\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ x-2y-8=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ x-2y-4z=0 \end{cases}$. **14.** $\begin{cases} 2x+z=0 \\ y-3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 6x+4y+3z-12=0 \\ 6x-4y-3z-12=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 6x+4y+3z+12=0 \\ 6x-4y-3z+12=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+z=0 \\ y+3=0 \end{cases}$.
15. $\begin{cases} 2x+y=0 \\ z-3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 6x+3y-2z+6=0 \\ 6x-3y+2z+6=0 \end{cases}$. **16.** a) $3X^2+6Y^2+9Z^2-18=0$, $x=1+\frac{1}{3}(2X+2Y-Z)$, $y=\frac{1}{3}(2X-Y+2Z)$, $z=-1+\frac{1}{3}(-X+2Y+2Z)$. Cuadrica este un elipsoid. b) $-X^2+Y^2+2Z^2-20=0$, $x=\frac{1}{3}(2X+2Y-Z)$, $y=-1+\frac{1}{3}(2X-Y+2Z)$, $z=1+\frac{1}{3}(-X+2Y+2Z)$. Cuadrica este un hiperboloid cu o pânză. c) $Y^2-Z^2-2X=0$, $x=\frac{1}{3}(x'+2y'+2z')$, $y=\frac{1}{3}(-2x'+2y'-z')$, $z=\frac{1}{3}(-2x'-y'+2z'$, $X=x'-\frac{3}{2}$, $Y=y'-\frac{1}{3}$, $Z=z'+\frac{2}{3}$. Cuadrica este un paraboloid hiperbolic. d) $Y^2-Z^2-2X=0$, $X=x'+1$, $Y=y'$, $Z=z'$, $x=x'$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{3}y'+z')$, $z=\frac{1}{2}(y'-\sqrt{3}z')$. Cuadrica este un paraboloid hiperbolic. e) $Y^2-Z^2-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}X=0$, $x=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(bx'+\frac{a}{\sqrt{2}}y'-\frac{a}{\sqrt{2}}z')$, $y=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-ax'+\frac{b}{\sqrt{2}}y'-\frac{b}{\sqrt{2}}z')$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(y'+z')$, $X=x'$, $Y=y'-\frac{a^2b}{\sqrt{2}(a^2+b^2)}$, $Z=z'-\frac{a^2b}{\sqrt{2}(a^2+b^2)}$. Cuadrica este un paraboloid hiperbolic. **17.** $y^2-2yz+z^2-x+z=0$. **18.** $2x^2+y^2+2z^2+2xy+2yz-4=0$. **19.** $4x^2+25y^2+z^2+4xz-20x-10z=0$. **20.** $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-12x+6y+6z+15=0$. **21.** $3x^2-2z^2-6x-8y-4=0$, $y=0$. Proiecţia curbei pe planul xOz este o hiperbolă cu centrul în punctul $(1,0,-2)$. **22.** $3x^2-5y^2-z^2=0$. **23.** $V(1,2,3)$. $(x-1)^2+2(y-2)^2+(z-3)^2-3(y-2)(z-3)=0$. **24.** $4(x-3)^2-15y^2-6(z+1)^2-12(x-3)(z+1)=0$. **25.** $15x^2-9y^2-10z^2-10xy=0$. **26.** Ox: $b^2x^2-a^2y^2-a^2z^2-a^2b^2=0$, Oy: $b^2x^2-a^2y^2+b^2z^2-a^2b^2=0$. **27.** $18(x+2y+3z)^2(x^2+y^2+z^2-1)=[(x+2y+3z)^2+2x^2+2y^2+2z^2-7]^2$. **28.** Ecuaţia cilindrului cu generatoarele paralele cu dreapta dată, circumscris sferei, este $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz+2x+2y-4z-1=0$. Forma umbrei este interiorul curbei de intersecţie a acestui cilindru cu planul $z=0$, adică $2x^2+2y^2-2xy+2x+2y-1=0$, $z=0$. Prin urmare, umbra are forma unei elipse cu semiaxele $\sqrt{3}$ şi 1.

Bibliografie

[1] ATANASIU, GH., MUNTEANU, GH., POSTOLACHE, M., *Culegere de probleme de algebră liniară, geometrie analitică, diferenţială şi ecuaţii diferenţiale.* Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[2] CHIRIŢĂ, S., *Probleme de matematici superioare.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[3] COSTINESCU, C., *Algebră liniară şi aplicaţii în geometrie.* Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

[4] FADDÉEV, D., SOMINSKI, I., *Recueil d'exercises d'algèbre supérieure.* Editions de Moscou, 1977.

[5] GROZA, G. şi colectiv, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială (culegere de probleme).* UTCB, Bucureşti, 1997.

[6] LIPSCHUTZ, *Algèbre linéaire. Cours et problemes*, 2^{e} édition, série Schaum, McGraw-Hill Inc., Paris, 1994.

[7] MURGULESCU, E., DONCIU, N., POPESCU, V., *Geometrie analitică în spaţiu şi geometrie diferenţială-culegere de probleme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[8] MATEI, P., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, vol. I.* Editura AGIR, Bucureşti, 2002.

[9] PĂLTINEANU, G., DONESCU, Ş., *Algebră liniară.* Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2007.

[10] POPESCU, S.-A., *Curs practic de algebră liniară.* UTCB, Bucureşti, 1993.

[11] POPESCU, A., *Algebră liniară şi aplicaţii.* Editura Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 1994.

[12] PROSKURYAKOV, I.V., *Problems in linear algebra,* Mir Publishers Moscow, 1978.

[13] ŢUBERBILLER, O.N., *Probleme şi exerciţii de geometrie analitică.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1952.

[14] UDRIŞTE, C., RADU, C., DICU, C., MĂLĂNCIOIU, O., *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[15] UDRIŞTE, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.