Contents

Chapter 1. Spaţiul vectorilor liberi 3
1. Vectori liberi 3
2. Operaţii cu vectori liberi 5
3. Coliniaritate şi coplanaritate 8
4. Produse cu vectori liberi 15
5. Probleme 22

Chapter 2. Spaţii vectoriale 27
1. Definiţia unui spaţiu vectorial. Exemple 27
2. Subspaţii vectoriale. Operaţii cu subspaţii vectoriale 28
3. Combinaţii liniare. Sisteme de generatori. Dependenţă şi independenţă liniară 31
4. Bază. Dimensiune 33
5. Dimensiunea unui subspaţiu vectorial 36
6. Rangul unui sistem de vectori şi rangul matricei sale. Sisteme de ecuaţii liniare 37
7. Matricea de trecere de la o bază la alta. Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei 42
8. Metoda lui Gauss pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii algebrice liniare 44
9. Probleme 49

Chapter 3. Aplicaţii liniare 53
1. Aplicaţii liniare. Izomorfisme de spaţii vectoriale 53
2. Nucleu şi imagine 55
3. Matricea asociată unei aplicaţii liniare 58
4. Matrice şi aplicaţii liniare 60
5. Transformarea matricei unei aplicaţii liniare la schimbarea bazelor 62
6. Probleme 64

Chapter 4. Valori şi vectori proprii. Forma canonică a unui endomorfism 67
1. Valori şi vectori proprii ai unui endomorfism 67
2. Polinom caracteristic. Polinoame de matrice şi de endomorfism. Teorema Hamilton-Cayley 70
3. Diagonalizarea matricelor 72
4. Forma canonică Jordan 76
5. Probleme 80

Chapter 5. Spaţii euclidiene. Endomorfisme pe spaţii euclidiene 83
1. Spaţii euclidiene 83
2. Ortogonalitate. Baze ortonormate 86
3. Complementul ortogonal al unui subspaţiu 90
4. Transformări liniare autoadjuncte 91
5. Transformări liniare ortogonale 93
6. Probleme 95

Chapter 6. Forme biliniare. Forme pătratice 99
1. Forme biliniare. Matrice asociată. Rangul unei forme biliniare 99
2. Forme pătratice. Reducerea la forma canonică 101
3. Legea de inerţie a formelor pătratice 109
4. Reducerea simultană la forma canonică a două forme pătratice 110
5. Probleme 112

Chapter 7. Elemente de calcul tensorial 115
1. Dualul unui spaţiu vectorial 115
2. Aplicaţii multiliniare. Forme multiliniare 118
3. Tensori. Coordonatele unui tensor într-o bază 119
4. Operaţii cu tensori 120
5. Transformarea coeficienţilor unui tensor la schimbarea bazei 122
6. Probleme 124

CHAPTER 1

Spaţiul vectorilor liberi

Calculul vectorial este o creaţie matematică, care îşi află originea în fizică (mecanică). În acest capitol prezentăm operaţiile cu vectori care constituie algebra vectorială. Vectorii sunt entităţi matematice introduse pentru a reprezenta mărimi mecanice ca: forţa, viteza, acceleraţia etc.

1. Vectori liberi

Fie $\mathcal{S}$ spaţiul geometriei elementare definit cu axiomele lui Euclid (numit şi *spaţiul fizic* sau *spaţiul intuitiv*). Spaţiul $\mathcal{S}$ este tocmai spaţiul în care trăim şi este conceput ca o mulţime de puncte. Dreptele, planele sunt submulţimi ale lui $\mathcal{S}$. Punctul, dreapta, planul şi spaţiul $\mathcal{S}$ sunt noţiuni primare legate prin anumite axiome, cunoscute din geometria elementară.

În geometrie, vectorii sunt segmente orientate, iar în fizică acele mărimi reprezentabile geometric prin segmente orientate. Astfel forţa aplicată într-un punct al unui sistem material este un vector legat.

DEFINIŢIE. O pereche ordonată de puncte $(A, B) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ se numeşte *segment orientat* sau *vector legat* şi se notează $\overrightarrow{AB}$ (fig. 1.1). Punctul A se numeşte *origine*, iar punctul B *extremitate*. Dacă $A \neq B$, dreapta determinată de punctele A şi B se numeşte *dreapta suport* a vectorului $\overrightarrow{AB}$. Vectorul legat $\overrightarrow{AA}$ se numeşte *vector legat nul,* dreapta sa suport fiind nedeterminată.

Vectorii legaţi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BA}$ se numesc *opuşi* şi sunt distincţi dacă $A \neq B$.

DEFINIŢIE. Doi vectori legaţi nenuli $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au *aceeaşi direcţie* dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.

Un vector legat nenul $\overrightarrow{AB}$ determină unic dreapta AB şi un sens de parcurs pe această dreaptă: sensul de la A la B.

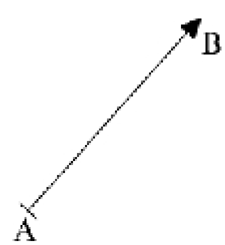

Fig. 1.1

DEFINIŢIE. Fie punctele necoliniare A, B, C, D. Vectorii legaţi nenuli $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au *aceeaşi orientare (acelaşi sens)* dacă au aceeaşi direcţie şi dacă punctele B şi D se află de aceeaşi parte a dreptei determinată de A şi C (fig. 1.2). Dacă A, B, C, D sunt coliniare, considerăm punctele $E, F \notin AB$ astfel încât $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{EF}$ au acelaşi sens. Spunem că $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au *acelaşi sens* dacă $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{EF}$ au acelaşi sens. Doi vectori legaţi care au aceeaşi direcţie, dar nu au aceeaşi orientare, se spune că au *orientări opuse* (*sensuri opuse*).

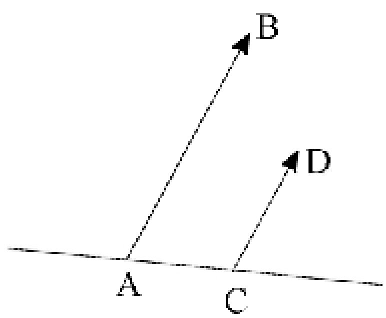

Fig. 1.2

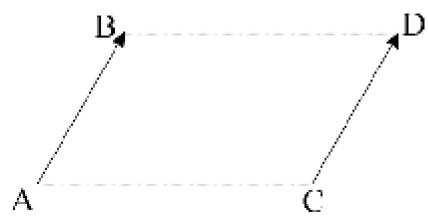

Fig. 1.3

DEFINIŢIE. Se numeşte *norma* (*lungimea* sau *modulul*) unui vector legat $\overrightarrow{AB}$, distanţa dintre punctele A şi B (relativ la o unitate de măsură fixată) şi se notează $\|\overrightarrow{AB}\|$. Evident lungimea vectorului legat nul este egală cu zero.

OBSERVAŢIE. Vectorii legaţi $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt *egali* dacă şi numai dacă $A \equiv C$ şi $B \equiv D$.

DEFINIŢIE. Doi vectori legaţi nenuli $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ se numesc *echipolenţi* (vom nota $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$) dacă au acelaşi sens şi aceeaşi lungime (fig.1.3). Vom admite că toţi vectorii legaţi nuli sunt echipolenţi.

Este clar că:
a) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$;
b) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow ABDC$ este paralelogram;
c) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow [AD]$ şi $[BC]$ au acelaşi mijloc.

EXEMPLU. În patrulaterul $ABCD$, fie I, J, K, L, M, N mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, respectiv $[BD]$. Deoarece IJ şi LK sunt linii mijlocii în triunghiurile ABC respectiv ACD, rezultă că $IJ \| LK$ şi $\|\overrightarrow{IJ}\| = \|\overrightarrow{LK}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|$. Cum J şi K se află în acelaşi semiplan, $\overrightarrow{IJ}$ şi $\overrightarrow{LK}$ au acelaşi sens. În consecinţă $\overrightarrow{IJ} \sim \overrightarrow{LK}$. Similar se arată că $\overrightarrow{NL} \sim \overrightarrow{JM}$ şi $\overrightarrow{LM} \sim \overrightarrow{NJ}$.

Relaţia de echipolenţă în mulţimea vectorilor legaţi are aceleaşi proprietăţi ca şi relaţia de egalitate a numerelor şi anume:
1) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$; *(reflexivitate)*
2) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$; *(simetrie)*
3) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. *(tranzitivitate)*

Aceste proprietăţi rezultă din definiţia echipolenţei. De exemplu, 3) este consecinţă a tranzitivităţii paralelismului şi a egalităţii numerelor reale.

Fiind dat un vector legat, există o infinitate de vectori legaţi echipolenţi cu acesta.

DEFINIŢIE. Se numeşte *vector liber* mulţimea tuturor vectorilor legaţi echipolenţi cu un vector legat dat.

Vom nota vectorii liberi cu litere latine mici cu săgeată: $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, ...$

Fie $\overrightarrow{AB}$ un vector legat. Considerăm vectorul liber $\overrightarrow{a}=\{\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}$. Orice vector legat din $\overrightarrow{a}$ se numeşte *reprezentant* al vectorului liber $\overrightarrow{a}$. Normal ar fi să scriem $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a}$, însă cum se obişnuieşte (prin abuz) vom scrie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$.

Vectorul liber determinat de toţi vectorii legaţi nuli îl vom nota cu $\overrightarrow{0}$ şi se va numi *vectorul nul*.

Vom nota cu $\mathcal{V}_3$ mulţimea vectorilor liberi din spaţiul $\mathcal{S}$.

DEFINIŢIE. Fie $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$. Prin *direcţie, sens* şi *lungime* ale vectorului liber $\overrightarrow{a}$ vom înţelege direcţia, sensul respectiv lungimea comune tuturor vectorilor legaţi din $\overrightarrow{a}$.

Pentru orice vector liber $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$ vom nota cu $\|\overrightarrow{a}\|$ *norma* sau *lungimea* lui $\overrightarrow{a}$, care coincide deci cu norma oricărui reprezentant al său. Dacă $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, atunci vectorul liber determinat de $\overrightarrow{BA}$ îl vom nota cu $-\overrightarrow{a}$, deci $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{a}$.

DEFINIŢIE. Doi vectori liberi $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt *egali* şi vom scrie $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ dacă reprezentanţii lor sunt echipolenţi sau, echivalent, dacă au acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

DEFINIŢIE. Un vector liber cu lungimea unu se numeşte *versor*.

DEFINIŢIE. Doi sau mai mulţi vectori liberi nenuli care au aceeaşi direcţie se numesc vectori *coliniari*. Trei sau mai mulţi vectori liberi nenuli care au reprezentanţii paraleli cu acelaşi plan se numesc vectori *coplanari*.Vectorul nul $\overrightarrow{0}$ având direcţia nedeterminată, se consideră coliniar cu orice vector liber.Vectorul nul $\overrightarrow{0}$ este coplanar cu orice doi vectori liberi nenuli.

OBSERVAŢIE. Fie $O \in \mathcal{S}$ un punct fixat, numit *origine*. Pentru orice $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$ există un singur punct M astfel încât $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$. În acest fel se stabileşte o bijecţie între $\mathcal{V}_3$ şi spaţiul fizic $\mathcal{S}$ în care am fixat originea O.

2. Operaţii cu vectori liberi

Fie, deci, $\mathcal{V}_3$ mulţimea tuturor vectorilor liberi din $\mathcal{S}_3$. Mulţimea $\mathcal{V}_3$ se poate organiza ca un grup aditiv comutativ, definind adunarea prin regula triunghiului sau a paralelogramului.

DEFINIŢIE. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$ şi $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{b}$. Vectorul liber $\overrightarrow{c}$ de reprezentant $\overrightarrow{OB}$ (fig. 2.1) se numeşte *vectorul sumă* al vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ şi se notează $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ sau în reprezentanţi $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

Este evident că vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ sunt coplanari. Regula cuprinsă în această definiţie se numeşte *regula triunghiului*.

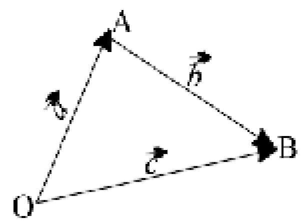

Fig. 2.1

OBSERVAŢII. 1) Vectorul liber sumă $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ nu depinde de alegerea punctului O, deci definiţia este "corectă". Aşadar dacă $\overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{a}, C \neq O$ şi $\overrightarrow{DE} \in \overrightarrow{b}$, atunci $\overrightarrow{CE}$ este echipolent cu $\overrightarrow{OB}$.

2) Dacă $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{b}$, atunci vectorul liber $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$, unde OC este diagonala paralelogramului $OACB$, este, evident, vectorul sumă $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (fig. 2.2), iar regula respectivă se numeşte *regula paralelogramului.* Această regulă se poate aplica numai dacă vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ nu sunt coliniari. Menţionăm că cele două reguli pot fi extinse la suma unui număr oarecare de vectori liberi.

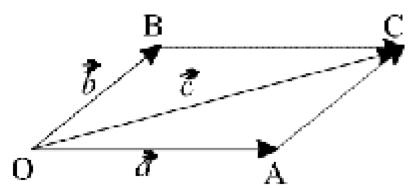

Fig. 2.2

3) Experienţa arată că acţiunea a două forţe în acelaşi punct poate fi înlocuită cu acţiunea unei singure forţe reprezentată de diagonala paralelogramului constituit cu cele două forţe (vectori). Aşadar, regula paralelogramului îşi are originea în mecanică, compunerea forţelor făcându-se după această regulă: $\overrightarrow{OC}$ este *rezultanta* forţelor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

PROPOZIŢIA 2.1. $(\mathcal{V}_3, +)$ *este un grup comutativ.Mai precis au loc:*

1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3;$ *(comutativitate)*
2) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}), \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3;$ *(asociativitate)*
3) $\exists\, \overrightarrow{0} \in \mathcal{V}_3$ *astfel încât* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}, \forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3;$
4) $\forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3 \quad \exists -\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$ *astfel încât* $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}.$

Demonstraţie. Comutativitatea este asigurată de regula paralelogramului. Să justificăm acum asociativitatea. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$, cu $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{c}$(fig. 2.3). Atunci $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ are ca reprezentant pe $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$, unde $\overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, iar vectorul $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$ are ca reprezentant pe $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, unde $\overrightarrow{AC} \in \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. Deci $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$, deoarece au acelaşi reprezentant $\overrightarrow{OC}$. Elementul neutru este vectorul nul $\overrightarrow{0}$. Pentru orice $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$, vectorul $-\overrightarrow{a}$ este simetricul (opusul) vectorului $\overrightarrow{a}$. ■

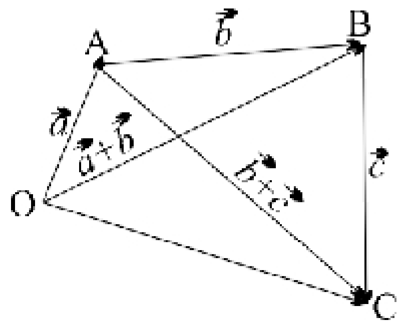

Fig. 2.3

OBSERVAŢIE. Existenţa opusului unui vector permite definirea *scăderii* a doi vectori liberi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ prin $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$.

În continuare, vom introduce o lege de compoziţie externă: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ numită *înmulţirea unui vector liber cu un număr real (scalar)* astfel:

DEFINIŢIE. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$. Prin vectorul liber $\lambda \overrightarrow{a}$ înţelegem un vector liber determinat astfel:

a) $\|\lambda \overrightarrow{a}\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{a}\|$;

b) dacă $\overrightarrow{a} \neq 0$ şi $\lambda > 0$ atunci $\lambda \overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{a}$ au acelaşi sens, iar dacă $\lambda < 0$ au sensuri opuse; când $\lambda = 0$ sau $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, atunci $\lambda \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

PROPOZIŢIA 2.2. *În $\mathcal{V}_3$, înmulţirea cu scalari a vectorilor liberi are următoarele proprietăţi:*

5) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}, \forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$;

6) $\alpha(\beta \overrightarrow{a}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$;

7) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$;

8) $\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha \overrightarrow{a} + \alpha \overrightarrow{b}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$.

Demonstraţie. Propunem 5) şi 6) ca exerciţiu. 7) Aşadar, fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$. Vom arăta că $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{a}$. Distingem mai multe cazuri.

a) Dacă $\alpha\beta > 0$, atunci vectorii $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a}$ şi $\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{a}$ au acelaşi sens cu $\overrightarrow{a}$ dacă $\alpha, \beta > 0$ şi sens contrar lui $\overrightarrow{a}$ dacă $\alpha, \beta < 0$. Totodată $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$. Atunci $\|\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{a}\| = \|\alpha \overrightarrow{a}\| + \|\beta \overrightarrow{a}\| = |\alpha| \, \|\overrightarrow{a}\| + |\beta| \, \|\overrightarrow{a}\| = (|\alpha| + |\beta|)\|\overrightarrow{a}\| = |\alpha + \beta| \, \|\overrightarrow{a}\| = \|(\alpha + \beta)\overrightarrow{a}\|$.

b) Dacă $\alpha > 0, \beta < 0$ şi $\alpha + \beta < 0$, atunci $\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{a} = \alpha \overrightarrow{a} + [-\alpha + (\alpha + \beta)]\overrightarrow{a} = \alpha \overrightarrow{a} - \alpha \overrightarrow{a} + (\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{a}$, conform a).

Similar se tratează celelalte cazuri.

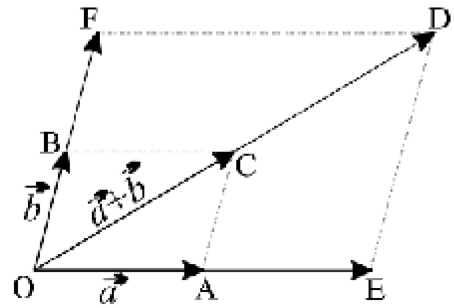

Fig. 2.4

8) Fie $\alpha > 0$ şi $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ reprezentanţi ai vectorilor $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ (fig. 2.4). Dacă $ED \parallel OB$, $E \in OA$ şi $FD \parallel OA$, $F \in OB$, din teorema fundamentală a asemănării rezultă $\|\overrightarrow{OE}\| = \alpha\|\overrightarrow{OA}\|$. Similar $\|\overrightarrow{OF}\| = \alpha\|\overrightarrow{OB}\|$. În consecinţă $\overrightarrow{OE} = \alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OF} = \alpha\overrightarrow{OB}$. Din $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ rezultă 8). Dacă $\alpha < 0$, atunci $\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = -(-\alpha)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = -[(-\alpha)\overrightarrow{a} + (-\alpha)\overrightarrow{b}]$. Dar $-(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ şi $(-1)(-\alpha)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a}$ (vezi 6)). Se obţine 8). ■

DEFINIŢIE. Dacă $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, atunci $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}$ se numeşte *versor al vectorului* $\overrightarrow{a}$.

3. Coliniaritate şi coplanaritate

Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3, \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$.

PROPOZIŢIA 3.1. *Dacă $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{a}$ sunt coliniari, atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$, unic, astfel încât $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$.*

Demonstraţie. Cum $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, atunci există versorii acestor vectori $\overrightarrow{a'} = = \overrightarrow{a}/\|\overrightarrow{a}\|, \overrightarrow{b'} = \overrightarrow{b}/\|\overrightarrow{b}\|$. Deoarece $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari rezultă $\overrightarrow{a'} = \pm\overrightarrow{b'}$. Atunci avem succesiv: $\overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{b}\| \cdot \overrightarrow{b'} = \|\overrightarrow{b}\|(\pm\overrightarrow{a'}) = \pm\dfrac{\|\overrightarrow{b}\|}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a}$, unde $\lambda = \pm\dfrac{\|\overrightarrow{b}\|}{\|\overrightarrow{a}\|}$.
■

OBSERVAŢII. 1) Evident, dacă $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari, atunci există $\lambda' \in \mathbb{R}$, unic, astfel încât $\overrightarrow{a} = \lambda'\overrightarrow{b}$.

2) $\overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{a}$.

TEOREMA 3.2. *Vectorii nenuli $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, nenule simultan, astfel încât $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.*

Demonstraţie. Folosind propoziţia 3.1 rezultă că dacă $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari, atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b}$, deci $1 \cdot \overrightarrow{a} + (-\lambda)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Reciproc, dacă, de exemplu, $\alpha \neq 0$, atunci $\overrightarrow{a} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{b}$, adică $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari. Cazul $\beta \neq 0$ se tratează similar. ■

PROPOZIŢIA 3.3. *Dacă* $\overrightarrow{a}$ *şi* $\overrightarrow{b}$ *sunt necoliniari, atunci* $\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ *dacă şi numai dacă* $\alpha=\beta=0$.

Demonstraţie. Dacă $\alpha\neq 0$ sau $\beta\neq 0$ ar rezulta că $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt coliniari ceea ce ar contrazice ipoteza, deci $\alpha=\beta=0$. Reciproca este imediată. ■

PROBLEMĂ. Fie vectorii necoliniari $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$. Să se determine α, astfel încât vectorii $\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ să fie coliniari.

Soluţie. Din $\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}$, rezultă $(\alpha-\lambda)\overrightarrow{u}+(3-\lambda)\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$. Conform propoziţiei 3.3, $\alpha-\lambda=0$, $3-\lambda=0$, deci $\lambda=3$ şi $\alpha=3$.

Fie, acum, $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\in\mathcal{V}_3$, $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ necoliniari.

PROPOZIŢIA 3.4. (Descompunerea unui vector după două direcţii necoliniare) *Dacă vectorii* $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ *sunt coplanari, atunci există* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *unic determinaţi astfel ca* $\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{b}+\beta\overrightarrow{c}$.

Demonstraţie. Dacă $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ propoziţia este evidentă. Presupunem că $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$. Fie $\overrightarrow{OA}\in\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}\in\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC}\in\overrightarrow{c}$. Cum $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ sunt coplanari, rezultă că punctele O,A,B,C sunt coplanare (fig. 3.1).

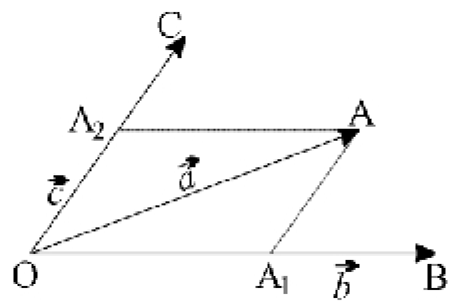

Fig. 3.1

Cazurile $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{a}$ coliniari sau $\overrightarrow{c}$ şi $\overrightarrow{a}$ coliniari sunt evidente şi nu le abordăm. Ducem $AA_1\|OC$ şi $AA_2\|OB$. Deoarece $\overrightarrow{OA_1}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OA_2}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OC}$, conform propoziţiei 3.1, există $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, astfel ca $\overrightarrow{OA_1}=\alpha\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_2}=\beta\overrightarrow{OC}$. Dar $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=\alpha\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}$. În concluzie $\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{b}+\beta\overrightarrow{c}$. În plus, dacă $\overrightarrow{a}=\alpha'\overrightarrow{b}+\beta'\overrightarrow{c}$, atunci $(\alpha-\alpha')\overrightarrow{b}++(\beta-\beta')\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$. Conform propoziţiei 3.3 rezultă $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, deci α şi β sunt unic determinaţi. ■

PROBLEME REZOLVATE. 1) Fie O un punct fixat. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă există $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, nenule simultan, astfel ca

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}\text{şi } \alpha+\beta+\gamma=0. \tag{3.1}$$

Soluţie. Dacă A, B, C sunt coliniare, conform propoziţiei 3.1, există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ sau $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$. Atunci are loc (3.1) cu $\alpha=\lambda-1$, $\beta=-\lambda$, $\gamma=1$. Reciproc, dacă, de exemplu, $\alpha\neq 0$, atunci $\beta+\gamma\neq 0$ şi $\overrightarrow{OA}=\dfrac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$. Dar $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$. Înlocuind, obţinem $\overrightarrow{BA}=\dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$, deci punctele A, B, C sunt coliniare.

2) Fie O un punct fixat şi A, B, C trei puncte necoliniare. Pentru orice punct M din planul ABC există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} \text{şi } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Afirmaţia reciprocă este adevărată?

Soluţie. Conform propoziţiei 3.4 există $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \mu(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$. În consecinţă $\overrightarrow{OM} = (-\lambda - \mu + 1)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$. Luăm $\alpha = -\lambda - \mu + 1$, $\beta = \lambda$, $\gamma = \mu$.

Reciproc, dacă $\alpha = 1 - \beta - \gamma$, introducând în relaţia dată, rezultă $\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ adică punctele M, A, B, C sunt coplanare.

PROPOZIŢIA 3.5. *Fie vectorii necoplanari* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$. *Dacă* $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, *atunci* $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Demonstraţie. Dacă, de exemplu, $\alpha \neq 0$, atunci $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c}$, $\lambda = -\beta/\alpha$, $\mu = -\gamma/\alpha$, deci vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sunt coplanari, ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar $\alpha = 0$. Cum $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ sunt necoliniari, rezultă $\beta = \gamma = 0$ (prop. 3.3). ■

TEOREMA 3.6. (Descompunerea unui vector după trei direcţii) *Fie* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$ *necoplanari şi* $\overrightarrow{d} \in \mathcal{V}_3$. *Atunci există* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *unic determinaţi astfel ca* $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$.

Demonstraţie. Fie $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} \in \overrightarrow{c}$ şi $\overrightarrow{OD} \in \overrightarrow{d}$ (fig. 3.2). Cazurile $D \equiv O, \overrightarrow{OD}$ coliniar cu $\overrightarrow{a}, ..., \overrightarrow{OD}$ coplanar cu $\overrightarrow{a}, b$ etc., sunt evidente, deci nu le abordăm.

Fie Δ intersecţia dintre planul OAB şi planul OCD. În acest din urmă plan, construim $DC_1 \| \Delta$, $C_1 \in OC$ şi $DE \| OC$, $E \in OAB$. În planul OAB, fie $EA_1 \| OB$, $A_1 \in OA$ şi $EB_1 \| OA$, $B_1 \in OB$. Atunci $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$ şi $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}$, deci $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, deoarece $\overrightarrow{ED} \sim \overrightarrow{OC_1}$. Deoarece $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}$ sunt coliniari cu $\overrightarrow{OA}$, respectiv $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, atunci există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, deci $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$. Dacă $\overrightarrow{d} = \alpha'\overrightarrow{a} + \beta'\overrightarrow{b} + \gamma'\overrightarrow{c}$,atunci $(\alpha - \alpha')\overrightarrow{a} + (\beta - \beta')\overrightarrow{b} + (\gamma - \gamma')\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Aplicând propoziţia 3.5 rezultă că $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, deci α, β, γ sunt unic determinaţi. ■

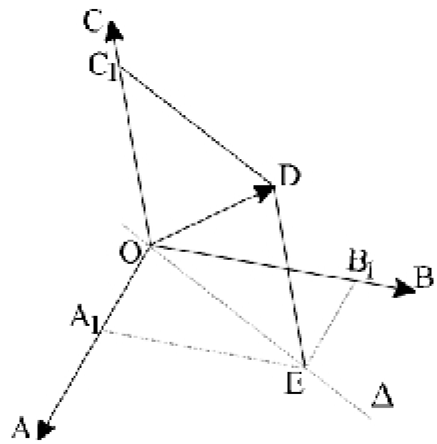

Fig. 3.2

Fie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \in \mathcal{V}_3$ trei versori ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$) astfel ca $OA \perp OB \perp$ $\perp OC$, unde $\overrightarrow{OA} \in \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} \in \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} \in \vec{k}$ (fig. 3.3). Deoarece aceşti versori sunt necoplanari, dacă $\vec{a} \in \mathcal{V}_3$, atunci există $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, unic determinaţi (teorema 3.6), astfel ca:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}. \tag{3.2}$$

DEFINIŢIE. Numerele reale a_1, a_2, a_3 se numesc *coordonatele euclidiene* ale vectorului $\vec{a}$, iar egalitatea (3.2) se numeşte *expresia analitică* a vectorului $\vec{a}$. Vom scrie $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Fie $O \in \mathcal{S}$, fixat.

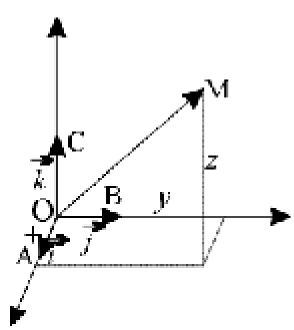

Fig. 3.3

DEFINIŢIE. Dacă $M \in \mathcal{S}$, atunci vectorul $\vec{r}_M \in \mathcal{V}_3$ de reprezentant $\overrightarrow{OM}$ se numeşte *vector de poziţie* al punctului M. Atunci $\vec{r}_M = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şi vom nota $M(x, y, z)$ (fig. 3.3). Sistemul $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se numeşte *reper cartezian ortogonal* în $\mathcal{V}_3$. Numerele x, y, z se numesc *coordonatele* punctului M în raport cu reperul cartezian $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dacă $A, B \in \mathcal{S}$ şi $\overrightarrow{OA} = x_A \overrightarrow{i} + y_A \overrightarrow{j} + z_A \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{OB} = x_B \overrightarrow{i} + y_B \overrightarrow{j} + z_B \overrightarrow{k}$, atunci:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A) \overrightarrow{i} + (y_B - y_A) \overrightarrow{j} + (z_B - z_A) \overrightarrow{k}.$$

DEFINIŢIE. Fie $A, B \in \mathcal{S}, A \neq B$. Punctul $M \in AB$ *împarte segmentul* $[AB]$ *în raportul* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dacă $\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{MB}$. Punctele M şi M' care împart segmentul $[AB]$ în raportul λ respectiv $-\lambda$ $(\lambda \neq -1)$ se numesc *conjugate armonic.*

Evident, dacă M împarte segmentul $[AB]$ în raportul λ, atunci $\lambda \leq 0$ dacă $M \in$ $\in [AB)$ şi $\lambda > 0$ dacă $M \in AB - [AB]$.

PROPOZIŢIA 3.7. *Dacă* $A, B \in \mathcal{S}, A \neq B$ *şi punctul* $M \in AB$ *împarte* $[AB]$ *în raportul* λ, *atunci*

$$\overrightarrow{r}_M = \frac{1}{1-\lambda}(\overrightarrow{r_A} - \lambda \overrightarrow{r_B}).$$

Demonstraţie. Deoarece $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OM} + \lambda \overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, rezultă $\overrightarrow{OA} = (1-\lambda)\overrightarrow{OM} + \lambda \overrightarrow{OB}$, adică tocmai relaţia din enunţ. ■

COROLAR 3.7.1. *Dacă* $M(x, y, z)$ *împarte segmentul* $[AB]$ *în raportul* λ *şi* $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, *atunci*

$$x = \frac{1}{1-\lambda}(x_A - \lambda x_B), \; y = \frac{1}{1-\lambda}(y_A - \lambda y_B), \; z = \frac{1}{1-\lambda}(z_A - \lambda z_B).$$

În particular, dacă M *este mijlocul lui* $[AB]$, *atunci* $\lambda = -1$ *şi deci*

$$x = \frac{1}{2}(x_A + x_B), y = \frac{1}{2}(y_A + y_B), z = \frac{1}{2}(z_A + z_B).$$

PROBLEME REZOLVATE 1) Fie G centrul de greutate al unui triunghi ABC şi O un punct oarecare din spaţiu. Să se arate că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Soluţie. Dacă AD este mediană, $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DC}$, deci $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. De asemenea din $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GD}$ obţinem $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OD})$, de unde rezultă afirmaţia.

2) Fie n puncte materiale M_1, M_2, ..., M_n, de mase m_1, m_2, ..., m_n, respectiv. Să se arate că există un punct G unic determinat astfel încât

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + ... + m_n\overrightarrow{GM_n} = \overrightarrow{0}. \tag{3.3}$$

Dacă M este un punct oarecare, atunci

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + ... + m_n\overrightarrow{GM_n} = (m_1 + m_2 + ... + m_n)\overrightarrow{MG}. \tag{3.4}$$

Soluţie. Punctul G, dacă există, este unic. Într-adevăr, dacă G_1 ar fi un alt punct ce satisface

$$m_1\overrightarrow{G_1M_1} + m_2\overrightarrow{G_1M_2} + ... + m_n\overrightarrow{G_1M_n} = \overrightarrow{0},$$

atunci, scazând din (3.3) şi ţinând seama că $\overrightarrow{G_1M_i} - \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{G_1G}$, $1 \leq i \leq n$, rezultă că $(m_1 + m_2 + ... + m_n)\overrightarrow{G_1G} = \overrightarrow{0}$. Cum $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0$, obţinem că $G_1 = G$.

În ceea ce priveşte existenţa punctului G, fie O un punct fixat. Cum $\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}$, $1 \leq i \leq n$, rezultă că

$$OG = \frac{1}{m_1 + m_2 + ... + m_n}(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + ... + m_n\overrightarrow{OM_n}).$$

Punctul O fiind fix, iar punctele M_i şi numerele reale m_i, $1 \leq i \leq n$ fiind date, rezultă că punctul G este bine determinat prin relaţia de mai sus. Relaţia (3.4) se obţine folosind faptul că $\overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_i}$, $1 \leq i \leq n$, şi (3.3).

DEFINIŢIE. Punctul G dat de relaţia (3.3) se numeşte *baricentrul (centrul de greutate) sistemului de puncte* (M_1, M_2, ..., M_n) relativ la sistemul de ponderi (m_1, m_2, ..., m_n). Dacă $m_1 = m_2 = ... = m_n \neq 0$, se spune că sistemul de puncte este *omogen*, iar punctul G se numeşte *izobaricentrul* sistemului de puncte.

Să remarcăm că:

a) punctul G rămâne acelaşi când ponderile se înmulţesc cu un acelaşi număr real nenul;

b) baricentrul nu depinde de ordinea punctelor M_i;

c) baricentrul nu se schimbă dacă se înlocuiesc r puncte ($r < n$) prin baricentrul lor având ca pondere suma nenulă a ponderilor acestor puncte;

d) dacă $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ este un reper cartezian ortogonal în spaţiu şi $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $1 \leq i \leq n$, $G(x_G, y_G, z_G)$, atunci

$$x_G = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad y_G = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \qquad z_G = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Dacă sistemul de puncte este omogen, atunci $x_G = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $y_G = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $z_G = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i$. Pentru $n = 2$ obţinem mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, iar pentru $n = 3$, G este centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

Fie $\overrightarrow{AB}$ un vector legat şi $d \subset \mathcal{S}$ o dreaptă. Prin A şi B ducem planele P_1 respectiv P_2, perpendiculare pe d. Notăm $C = d \cap P_1$, $D = d \cap P_2$.

DEFINIŢIE. Vectorul legat $\overrightarrow{CD}$ construit mai sus se numeşte *proiecţia ortogonală* a vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ pe dreapta d.

Dacă $AB \perp d$, atunci $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$.

Dacă $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{GH}$ este proiecţia ortogonală a lui $\overrightarrow{EF}$ pe dreapta d, atunci este evident că $\overrightarrow{GH} \sim \overrightarrow{CD}$. Putem, deci, defini *proiecţia ortogonală a unui vector liber* $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$ pe o dreaptă ca fiind proiecţia ortogonală a unui reprezentant oarecare al vectorului. Dacă $d' \| d$ atunci proiecţiile ortogonale ale unui vector legat $\overrightarrow{AB}$ pe d' respectiv d sunt vectori legaţi echipolenţi. Putem vorbi deci de *proiecţia ortogonală* a unui vector liber $\overrightarrow{a}$ pe un alt vector liber nenul $\overrightarrow{b}$, pe care o notăm $\pi_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ (este un vector liber!).

DEFINIŢIE. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ şi $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{b}$. Numărul real $\varphi \in [0, \pi]$ ce reprezintă unghiul dintre dreptele suport ale vectorilor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ se numeşte *unghiul* dintre vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

Evident, definiţia nu depinde de alegerea punctului O.

DEFINIŢIE. Dacă unghiul $\varphi = \frac{\pi}{2}$, atunci vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ se numesc *vectori ortogonali*.

Prin convenţie, se acceptă că vectorul nul $\overrightarrow{0}$ este ortogonal pe orice vector.

Dacă $\overrightarrow{u}$ este un versor al vectorului $\pi_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}$, atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\pi_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{u}$. Este clar că dacă unghiul dintre $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ este φ, atunci $\lambda = = \|\overrightarrow{a}\| \cos\varphi$ şi că $\lambda > 0$, dacă $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, $\lambda < 0$ dacă $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ şi $\lambda = 0$ dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

DEFINIŢIE. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$, $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre ei. Numărul real $\|\overrightarrow{a}\| \cos\varphi$, notat $pr_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}$ se numeşte *mărimea algebrică* a proiecţiei ortogonale a vectorului $\overrightarrow{a}$ pe vectorul $\overrightarrow{b}$. Deci $pr_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{a}\| \cos\varphi$ (fig.3.4).

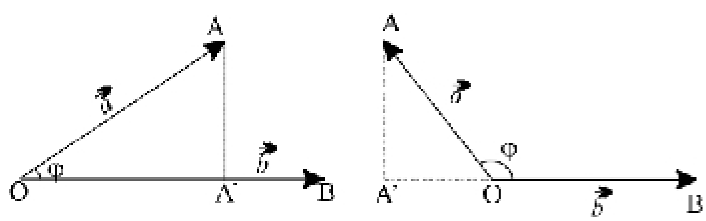

Fig. 3.4

$$OA' = \|\overrightarrow{a}\| \cos\varphi = pr_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}.$$

PROPOZIŢIA 3.8. *Mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale are următoarele proprietăţi:*

1) $pr_{\overrightarrow{c}}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = pr_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{a} + pr_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{b}, \quad \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$.

2) $pr_{\overrightarrow{b}}(\lambda \overrightarrow{a}) = \lambda pr_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$.

Demonstraţia nu prezintă dificultăţi.Vom justifica, de exemplu, 1).

Fie $\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (fig. 3.5). Atunci

$$pr_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{a} = O'A',\ pr_{\overrightarrow{c}} \overrightarrow{b} = A'B',\ pr_{\overrightarrow{c}}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = O'B'.$$

Afirmaţia rezultă deoarece $O'B' = O'A' + A'B'$.

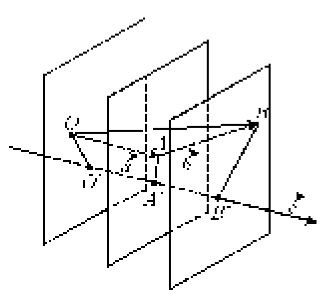

Fig. 3.5

4. Produse cu vectori liberi

4.1. Produsul scalar a doi vectori liberi. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$ şi $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

DEFINIŢIE. Se numeşte *produs scalar* al vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$ numărul real notat $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, definit prin:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{cases} \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cos\varphi & , \text{dacă } \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\} \\ 0 & , \text{dacă } \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \text{ } sau \text{ } \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \end{cases} .$$

Evident $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} > 0$ dacă $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} < 0$ dacă $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

OBSERVAŢIE. Noţiunea de produs scalar îşi are originea în fizică. Este cunoscut că lucrul mecanic efectuat de o forţă $\overrightarrow{F}$ care acţionează asupra unui punct material care se deplasează cu vectorul $\overrightarrow{d}$ este $L = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = \|\overrightarrow{F} \cdot \|\|\overrightarrow{d}\| \cos\varphi$, unde φ este unghiul dintre $\overrightarrow{F}$ şi $\overrightarrow{d}$.

PROPOZIŢIA 4.1. *Produsul scalar al vectorilor liberi are următoarele proprietăţi:*

1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$ *(comutativitate)*;
2) $\lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{b}), \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3, \lambda \in \mathbb{R}$;
3) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$
(distributivitatea faţă de adunarea vectorilor);
4) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} > 0, \forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$; $\quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;
5) $\overrightarrow{a}$ *şi* $\overrightarrow{b}$ *sunt ortogonali* $\Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$;
6) *dacă* $\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j} + b_3 \overrightarrow{k}$, *atunci:*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

(*expresia analitică a produsului scalar*)

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2;$$

7) *dacă* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$, *atunci:*

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};$$

8) *dacă* $A, B \in \mathcal{S}_3$ *şi* $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, *atunci distanţa dintre punctele* A *şi* B, *notată* $d(A, B)$ *este dată de:*

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Demonstraţie. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$. Atunci avem:
1) $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{b}\| \, \|\overrightarrow{a}\| \cos(-\varphi) = \|\overrightarrow{a}\| \, \|\overrightarrow{b}\| \cos\varphi = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$.
2) Pentru $\lambda > 0$ obţinem:

$$\lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = \lambda\|\overrightarrow{a}\| \, \|\overrightarrow{b}\| \cos\varphi = \|\lambda \overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \cos\varphi = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b},$$

iar pentru $\lambda < 0$:

$$\lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = -(-\lambda)\|\overrightarrow{a}\| \, \|\overrightarrow{b}\| \cos\varphi = \|\lambda \overrightarrow{a}\| \, \|\overrightarrow{b}\| \cos(\pi - \varphi) = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b},$$

deoarece unghiul dintre $\lambda \overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ este $\pi - \varphi$, dacă $\lambda < 0$.

Analog se obţine ultima egalitate.

3) Se observă că $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \| \overrightarrow{b} \| \, pr_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \| \overrightarrow{a} \| \, pr_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b}$. Atunci:

$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \| \overrightarrow{a} \| \, pr_{\overrightarrow{a}} (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \| \overrightarrow{a} \| (pr_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b} + pr_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} +$ $+ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$ (propoziţia 3.5).

4) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \| \overrightarrow{a} \|^2 \cos 0 = \| \overrightarrow{a} \|^2 > 0, \quad \forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{ \overrightarrow{0} \}; \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \Longleftrightarrow$ $\| \overrightarrow{a} \| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

5) Dacă $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{ \overrightarrow{0} \}$ sunt ortogonali, atunci $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, deci $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. Reciproc, dacă $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, atunci sau $\| \overrightarrow{a} \| = 0$ ($\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$), sau $\overrightarrow{b} = 0$ sau $\cos \varphi = 0$, deci $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, adică $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt ortogonali.

6) Folosind 5) rezultă $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$, $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$, $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0$. În plus, $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} =$ $= \| \overrightarrow{i} \|^2 = 1$, $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1$, $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$. Expresia analitică se obţine atunci folosind 1),2),3).

7) Ţinem seama de cele de mai sus şi de $\cos \varphi = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} / (\| \overrightarrow{a} \| \, \| \overrightarrow{b} \|)$.

8) Folosim (6).■

PROBLEME REZOLVATE. 1) Fie $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$, $\| \overrightarrow{u} \| = 3$, $\| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{2}$, $\mu(\theta) = \dfrac{\pi}{4}$, θ fiind unghiul dintre $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$. Să se calculeze:

a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$;

b) lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ şi unghiul dintre ele.

Soluţie. a) Cum $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3$, rezultă că $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -6$. b) Diagonalele paralelogramului sunt $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, deci $\overrightarrow{d_1} = -\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{d_2} = 2\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v}$. Atunci $\| \overrightarrow{d_1} \| = \| \overrightarrow{v} \| = \sqrt{2}$, $\| \overrightarrow{d_2} \|^2 = (2\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v})(2\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v}) = 26$. În consecinţă $\| \overrightarrow{d_2} \| = \sqrt{26}$. $cos\ \theta = \dfrac{\overrightarrow{d_1} . \overrightarrow{d_2}}{\| \overrightarrow{d_1} \| \, \| \overrightarrow{d_2} \|} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

2) Fie A, B, C, D patru puncte în spaţiu. Să se demonstreze *egalitatea lui Euler*:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0.$$

Soluţie. Dacă O este un punct din spaţiu, egalitatea rezultă folosind $\overrightarrow{AB} =$ $\overrightarrow{OB} -$ $- \overrightarrow{OA}$ etc.

Din această egalitate obţinem:

a) În triunghiul ABC, fie H punctul de intersecţie a două înălţimi, fie ele AH şi BH. Aplicând egalitatea lui Euler punctelor A, B, C, H, rezultă că şi CH este înălţime. Astfel se demonstrează vectorial concurenţa înălţimilor într-un triunghi.

b) Dacă într-un tetraedru există două perechi de muchii opuse perpendiculare, atunci şi cea de a treia pereche de muchii opuse este formată din muchii perpendiculare.

3) Se dau punctele $A(2, -1, 3)$, $B(3, 3, 1)$, $C(4, 2, 2)$. Să se calculeze perimetrul, aria triunghiului ABC şi lungimea înălţimii din B.

Soluţie. Cum $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{21}$, $\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{14}$, $\| \overrightarrow{BC} \| = \sqrt{3}$, perimetrul este $\sqrt{21} +$ $+ \sqrt{14} + \sqrt{3}$. Dar $4S^2 = \| \overrightarrow{AB} \|^2 \| \overrightarrow{AC} \|^2 \sin^2 A = \| \overrightarrow{AB} \|^2 \| \overrightarrow{AC} \|^2 - \| \overrightarrow{AB} \|^2 \| \overrightarrow{AC} \|^2 \cdot$

$\cdot \cos^2 A$, deci $S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2\|\overrightarrow{AC}\|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$. Calculând obţinem $S = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$, $h_b = = \dfrac{2S}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}}$.

4.2. Produsul vectorial a doi vectori liberi. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$ şi $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ dacă $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

DEFINIŢIE. Se numeşte *produs vectorial* al vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ şi se notează $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, vectorul:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{cases} \|\overrightarrow{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\| \sin\varphi \cdot \overrightarrow{e} & \text{, dacă } \overrightarrow{a} \text{ şi } \overrightarrow{b} \text{ sunt necoliniari} \\ \overrightarrow{0} & \text{, dacă } \overrightarrow{a} \text{ şi } \overrightarrow{b} \text{ sunt coliniari} \end{cases},$$

unde $\overrightarrow{e}$ este un versor perpendicular pe planul determinat de reprezentanţii lui $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ având aceeaşi origine şi orientat după "regula burghiului" şi anume în sensul de înaintare a unui burghiu când $\overrightarrow{a}$ se roteşte către $\overrightarrow{b}$ printr-un unghi minim (fig. 4.1).

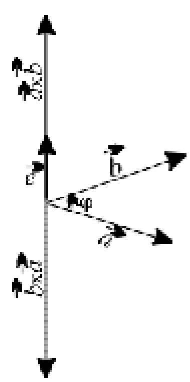

Fig. 4.1

OBSERVAŢIE. Efectul de rotire pe care îl produce o forţă $\overrightarrow{F}$ se măsoară prin *momentul forţei*. Dacă O este un punct fixat şi P punctul de aplicaţie al forţei $\overrightarrow{F}$, momentul este prin definiţie vectorul $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{F}$. Punctul O se mai numeşte şi *polul* momentului.

PROPOZIŢIA 4.2. *Produsul vectorial are proprietăţile:*
1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$, $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$; *(anticomutativitate)*
2) $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \lambda\overrightarrow{b}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$;
3) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$, $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$;
(distributivitate faţă de adunarea vectorilor)
4) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, $\forall \overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$;
5) $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{b}\|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2$, $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3$;
(identitatea lui Lagrange)

6) *Dacă* $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$, *atunci*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k} = \\ = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

(expresia analitică a produsului vectorial)

7) $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|$ *este aria paralelogramului construit pe suporturile reprezentanţilor lui* $\overrightarrow{a}$ *şi* $\overrightarrow{b}$ *având aceeaşi origine. Aria unui triunghi ABC este dată de*

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Demonstraţie.

1) Dacă $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$, atunci:

$$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{b}\|\|\overrightarrow{a}\| \sin(-\varphi)\overrightarrow{e} = -\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \sin\varphi\overrightarrow{e} = -\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}.$$

2) Dacă $\lambda > 0$ şi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathcal{V}_3 \backslash \{\overrightarrow{0}\}$, atunci $\sphericalangle(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, deci:

$$\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \lambda\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \sin\varphi \cdot \overrightarrow{e} = \|\lambda\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \sin\varphi\overrightarrow{e} = (\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}.$$

Celelalte cazuri se tratează analog.

3) Fie $\overrightarrow{OA} \in a$, $\overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} \in \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{OD} \in \overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (fig. 4.2) şi α un plan perpendicular pe OC în O. Fie A', B', D' proiecţiile ortogonale ale punctelor A, B respectiv D pe planul α. Evident $OA'D'B'$ este un paralelogram. Fie $\overrightarrow{OA''} = = \overrightarrow{OA'} \times \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{OB'} \times \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD''} = \overrightarrow{OD'} \times \overrightarrow{OC}$. Dacă φ este unghiul dintre $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OC}$, atunci $\|\overrightarrow{OA'}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \sin\varphi$ şi cum unghiul dintre $\overrightarrow{OA'}$ şi $\overrightarrow{OC}$ este 90^0, rezultă că $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} \times \overrightarrow{OC}$. Similar obţinem $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'} \times \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD'} \times \overrightarrow{OC}$. Dar $\|\overrightarrow{OA''}\| = \|\overrightarrow{OA'}\| \, \|\overrightarrow{OC}\|$, $\overrightarrow{OA''} \perp \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA''} \perp \overrightarrow{OA'}$. Rezultă că $\overrightarrow{OA''}$ se obţine rotind vectorul $\overrightarrow{OA'}$ în planul α cu un unghi de 90^0. Analog se obţin $\overrightarrow{OB''}$, $\overrightarrow{OD''}$. Aşadar $OA''D''B''$ se obţine rotind paralelogramul $OA'D'B'$ cu 90^0, deci este un paralelogram. În concluzie $\overrightarrow{OD''} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''}$ sau, folosind relaţiile anterioare, $\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$, adică $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$.

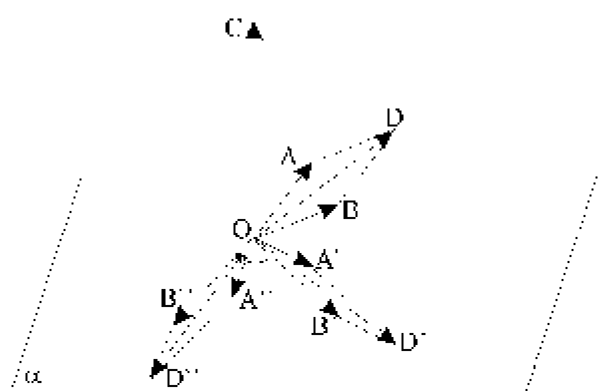

Fig. 4.2

4) Folosim definiţia.

5) Deoarece $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, rezultă

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2 - \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2\cos^2\varphi = \|\overrightarrow{a}\|^2\|\overrightarrow{b}\|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2.$$

6) Se ţine seama că $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}$ şi $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$. Determinantul se va dezvolta după elementele primei linii.

7) Dacă $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, atunci aria paralelogramului este $\|\overrightarrow{OA}\|\ \|\overrightarrow{OB}\|\sin\varphi = \|\overrightarrow{a}\|\ \|\overrightarrow{b}\|\sin\varphi = \|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\|$. (fig. 4.3) ■

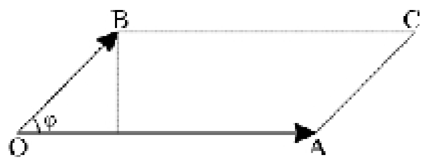

Fig. 4.3

OBSERVAŢIE. Din proprietatea 3 rezultă că dacă într-un punct P sunt aplicate mai multe forţe, atunci momentul rezultantei este egal cu suma momentelor forţelor (*Varignon*).

PROBLEME REZOLVATE. 1) Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, ştiind că $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{b}\| = 4$ şi $\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Soluţie. $\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \sin\dfrac{\pi}{3} = 6$, $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = 7\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$. Aria paralelogramului este $\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\| = 7\|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\| = 42$.

2) Fie $A(-1,1,0)$, $B(2,-1,3)$, $C(4,2,2)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Soluţie. $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -7\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 13\overrightarrow{k}$. Atunci

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{299}.$$

4.3. Produsul mixt a trei vectori liberi. DEFINIŢIE. Se numeşte *produs mixt* al vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$, numărul real, notat $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, care este egal cu produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$$

PROPOZIŢIA 4.3. *Produsul mixt are următoarele proprietăţi:*

1) *Dacă*

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{c} = c_1\overrightarrow{i} + c_2\overrightarrow{j} + c_3\overrightarrow{k},$$

atunci

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

(expresia analitică a produsului mixt a trei vectori liberi);

2) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$;

3) $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$ *dacă şi numai dacă* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *sunt coplanari;*

4) $\left|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\right|$ *este volumul paralelipipedului oblic construit pe suporturile reprezentanţilor vectorilor* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *consideraţi cu origine comună;*

5) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Demonstraţie. 1) Se folosesc expresiile analitice ale produsului scalar şi ale produsului vectorial.

2) Se utilizează proprietăţile determinanţilor.

3) Produsul mixt este nul dacă şi numai dacă o linie a determinantului din (4.1) este combinaţie liniară de celelalte două, ceea ce este echivalent cu faptul că unul dintre vectori este combinaţie liniară a celorlalţi doi, adică sunt coplanari.

4) Dacă

$$\overrightarrow{OA} \in \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} \in \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} \in \overrightarrow{c}, \overrightarrow{OD} \in \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}, \varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}),$$

atunci considerând ca bază paralelogramul $OBCM$ (fig. 4.4) şi cum OA' este înălţimea paralelipipedului relativ la această bază, rezultă:

$$V = \|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\|\; OA' = \|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\|\|\overrightarrow{a}\|\,|\cos\varphi| = \left|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\right|.$$

5) Se folosesc proprietăţile determinanţilor.

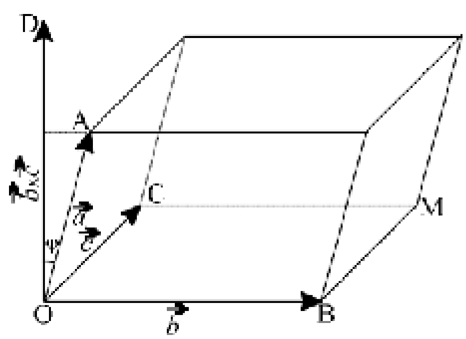

Fig. 4.4

PROBLEME REZOLVATE. 1) Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$, ştiind că $\|\overrightarrow{u}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{w}\| = 2$, $\sphericalangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{\pi}{3}$, iar unghiul dintre vectorul $\overrightarrow{u}$ şi planul determinat de vectorii $\overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{w}$ este $\frac{\pi}{4}$.

Soluţie. $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 17(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| \cos\frac{\pi}{4} = 6$, deoarece $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \sin\frac{\pi}{3} = 3$. Atunci volumul este $V = 17 \cdot 3 = 51$.

2) Să se determine volumul V şi înălţimea h din D ale tetraedrului $ABCD$, dacă $A\,(1, -5, 4)$, $B\,(0, -3, 1)$, $C\,(2, 4, 3)$, $D\,(1, 0, 1)$.

Soluţie. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 13$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 25\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 11\overrightarrow{k}$. $V = \dfrac{\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}{6} = \dfrac{13}{6}$. Aria $\triangle ABC$ este $\dfrac{\sqrt{762}}{2}$, deci $h = \dfrac{13}{\sqrt{762}}$.

4.4. Dublul produs vectorial. DEFINIŢIE. Dacă $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$, vectorul $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ se numeşte *dublul produs vectorial* al vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

PROPOZIŢIA 4.4. *Dublul produs vectorial $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ este un vector coplanar cu vectorii $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$ şi*

$$\overrightarrow{d} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \end{vmatrix}.$$

Demonstraţie. Din definiţie $\overrightarrow{d} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{d} \perp \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$. Dar şi $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$, deci $\overrightarrow{d}$ este coplanar cu $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$. Egalitatea din enunţ se demonstrează folosind expresiile analitice ale produsului vectorial şi ale produsului scalar. ■

OBSERVAŢIE. Deoarece produsul vectorial nu este asociativ, este obligatorie e-xistenţa parantezelor în expresia dublului produs vectorial. Spre exemplu, dacă $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k} + \overrightarrow{i}$, atunci $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, iar $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$.

PROPOZIŢIA 4.5. *Dacă $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \in \mathcal{V}_3$, atunci*

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} \end{vmatrix}.$$

Demonstraţie. Fie $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}$. Folosind proprietăţile produsului mixt şi produsului scalar, rezultă:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = ((\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = [(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{d} - \\ -(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})\overrightarrow{c}] \cdot \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}) - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}).■$$

DEFINIŢIE. Dacă $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$, numărul real:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinantul Gram* al celor trei vectori.

PROPOZIŢIA 4.6. *Vectorii $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă determinantul lor Gram este nul.*

Demonstraţie. Folosind expresiile analitice ale vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ se arată că determinantul Gram este egal cu $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})^2$. ■

5. Probleme

1. Fie ABC un triunghi şi M un punct variabil. Să se arate că vectorul $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ este constant.

2. Dacă O este punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului $ABCD$, iar M un punct oarecare, atunci $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

3. Fie AB şi CD două coarde perpendiculare în cercul de centru O şi I punctul lor de intersecţie. Să se arate că $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{IO}$.

4. Să se arate că G este centrul de greutate al unui triunghi ABC, dacă şi numai dacă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. În plus, dacă M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC, atunci triunghiurile MNP şi ABC au acelaşi centru de greutate.

5. Fie A_i, $1 \leq i \leq 6$ mijloacele laturilor unui hexagon convex. Să se arate că:

a) se poate construi un triunghi cu segmentele $[A_1A_2]$, $[A_3A_4]$, $[A_5A_6]$;
b) triunghiurile $A_1A_3A_5$ şi $A_2A_4A_6$ au acelaşi centru de greutate.

6. Punctul C se află pe segmentul $[AB]$ la $\dfrac{3}{5}$ de B. Dacă M este un punct oarecare, să se exprime $\overrightarrow{MC}$ în funcţie de $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{MB}$.

7. Dacă punctele A_1, B_1, C_1 împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ respectiv în acelaşi raport λ, să se arate că segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ pot fi laturile unui triunghi.

8. Dacă AD este bisectoarea unghiului A a triunghiului ABC, $D \in (BC)$, iar b, c sunt lungimile laturilor $[BC]$ şi $[AB]$, atunci $\overrightarrow{r_D} = \dfrac{b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}}{b+c}$.

9. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ ale unui triunghi ABC, iar I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci are loc

$$a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C} = (a+b+c)\,\overrightarrow{r_I}.$$

10. Să se demonstreze că cele trei drepte care unesc mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru şi cele patru drepte care unesc fiecare vârf cu centrul de greutate al feţei opuse sunt concurente.

11. Fie A şi B două puncte distincte. Determinaţi mulţimea punctelor M pentru care există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{r_M} = t\overrightarrow{r_A} + (1+t)\,\overrightarrow{r_B}$. Caz particular $t \in [0,1]$.

12. Punctele C_1, A_1, B_1 împart laturile $[AB]$, $[BC]$ respectiv $[CA]$ în rapoartele λ, μ, respectiv ν. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare dacă şi numai dacă $\lambda\mu\nu = 1$ (teorema lui Menelaus).

13. Se dau punctele $A\,(2,-3,4)$, $B\,(3,2,-1)$, $C\,(0,1,-2)$. Să se determine un punct D astfel încât $ABCD$ să fie paralelogram.

14. a) Să se arate că punctele $A\,(1,5,-2)$, $B\,(9,-1,22)$, $C\,(-3,8,-14)$ sunt coliniare;
b) Pentru ce valoare a lui λ punctele A, B şi $D\,(-7,11,-2+12\lambda)$ sunt coliniare?
c) Punctele A, B şi $E\,(-7,5-2\lambda,-2+12\lambda)$ pot fi coliniare?

15. Să se determine λ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + (\lambda - 1)\overrightarrow{j} + (6 - \lambda)\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{i} - \lambda\overrightarrow{j} + (\lambda + 4)\overrightarrow{k}$ să fie coplanari. Pentru $\lambda = \dfrac{20}{9}$ să se descompună vectorul $\overrightarrow{a}$ după direcţiile lui $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$.

16. Fie $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{p}$ trei vectori necoplanari.

a) Sunt coplanari vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n} - 3\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{m} + 4\overrightarrow{n} + 9\overrightarrow{p}$?

b) Să se descompună vectorul $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{m} + 7\overrightarrow{n} + 21\overrightarrow{p}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.

17. Fie $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vectori nenuli. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\|$.

18. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{a}$ sunt ortogonali.

19. Dacă $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ sunt doi versori ortogonali, atunci vectorii $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ şi $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ sunt ortogonali.

20. Să se interpreteze geometric egalitatea $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2$.

21. Să se arate că $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 + \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2)$. Interpretare geometrică.

22. Dacă G este baricentrul sistemului de puncte materiale $(M_1, M_2, ..., M_n)$ re-lativ la sistemul de ponderi $(m_1, m_2, ..., m_n)$, iar M un punct arbitrar, să se arate că $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \|\overrightarrow{MM_i}\|^2 = \|\overrightarrow{MG}\|^2 \sum\limits_{i=1}^{n} m_i + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \|\overrightarrow{GM_i}\|^2$ (Stewart).

23. Să se calculeze rezultanta forţelor $\overrightarrow{F_1} = 2\overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{m} - 3\overrightarrow{n}$, dacă $\|\overrightarrow{m}\| = 1$, $\|\overrightarrow{p}\| = 2$, $\measuredangle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{p}) = \dfrac{\pi}{3}$.

24. Dacă $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{c}\| = 1$ şi $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, să se calculeze $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}$.

25. Fie vectorii $\overrightarrow{m}$ şi $\overrightarrow{n}$, unde $\|\overrightarrow{m}\| = 2$, $\|\overrightarrow{n}\| = \sqrt{2}$, $\measuredangle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \dfrac{\pi}{4}$. Să se determine λ astfel ca vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{m} - 3\overrightarrow{n}$ şi $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ să fie ortogonali.

26. Pentru ce valoare a lui λ, vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + (\lambda - 1)\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ sunt ortogonali?

27. Fie vectorii $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, unde $\|\overrightarrow{a}\| = 3$, $\|\overrightarrow{b}\| = 4$, iar $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ sunt ortogonali. Să se calculeze lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ şi unghiul dintre ele.

28. Se dau punctele $A(1, -1, 1)$, $B(2, -1, -1)$, $C(0, 2, 4)$. Să se calculeze perime-trul şi unghiurile triunghiului ABC.

29. Se dau punctele $A(12, -4, 3)$, $B(3, 12, -4)$, $C(2, 3, -4)$. Să se arate că:

a) triunghiul AOB este isoscel;

b) triunghiul AOC este dreptunghic;

c) să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

30. Să se determine un vector de normă 26 situat în planul xOy, care să fie perpendicular pe vectorul $\overrightarrow{a} = 12\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$.

31. Se consideră vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Să se calculeze unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$, precum şi $pr_{\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}\overrightarrow{b}$.

32. Să se determine un versor al bisectoarei unghiului C al triunghiului ABC, unde $A(0,1,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(1,2,3)$.

33. Să se arate că punctele $A(-4,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(4,4,0)$, $D(4,6,-1)$ sunt coplanari. Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

34. Să se calculeze $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})$. Interpretare geometrică.

35. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}$.

36. Să se calculeze aria şi lungimile diagonalelor paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$, ştiind că $\|\overrightarrow{a}\| = 4$, $\|\overrightarrow{b}\| = 5$, $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

37. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Să se determine un versor perpendicular pe cei doi vectori.

38. Fie vectorii necoliniari $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$. Pentru ce valoare a lui α vectorii $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sunt coliniari?

39. Se dau punctele $A(-1,2,0)$, $B(1,1,1)$, $C(2,3,4)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC şi lungimea înălţimii din C pe AB.

40. Fie vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Să se determine un vector $\overrightarrow{v}$ astfel încât $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.

41. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, unde $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n} + 3\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{m} + 7\overrightarrow{n} + \overrightarrow{p}$, unde $\|\overrightarrow{m}\| = 1$, $\|\overrightarrow{n}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{p}\| = 2\sqrt{3}$, $\measuredangle(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{p}) = \dfrac{\pi}{3}$, iar unghiul dintre vectorul $\overrightarrow{m}$ şi planul determinat de vectorii $\overrightarrow{n}$ şi $\overrightarrow{p}$ are măsura $\dfrac{\pi}{4}$.

42. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$ sunt coplanari.

43. Să se arate că vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ nu sunt coplanari. Să se descompună vectorul $\overrightarrow{v} = 6\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 14\overrightarrow{k}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

44. Se dau vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} == \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Se cere:

a) volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$;
b) lungimea înălţimii paralelipipedului pe baza determinată de $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$.

45. Se dau punctele $A(3,1,4)$, $B(5,2,1)$, $C(1,1,-6)$, $D(1,2,3)$. Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$ şi lungimea înălţimii din B pe planul ACDa acestui tetraedru.

46. Să se determine λ astfel încât volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ să fie 10.

47. Să se determine λ astfel încât vectorii $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \lambda\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = (\lambda - 1)\cdot$ $\cdot\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ să fie coplanari. Pentru $\lambda = 2$ să se descompună $\overrightarrow{a}$ după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{b}$ şi $\overrightarrow{c}$.

48. Să se arate că $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}$.

49. Să se arate că $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})^2$.

CHAPTER 2

Spaţii vectoriale

Noţiunea de spaţiu vectorial este una din noţiunile cele mai importante în matematică şi în aplicaţiile acesteia în alte ştiinţe. În fizică şi în ştiinţele inginereşti, spaţiile vectoriale constituie un aparat indispensabil pentru a reprezenta anumite mărimi: forţe, viteze, starea unui sistem în mecanica cuantică etc.

1. Definiţia unui spaţiu vectorial. Exemple

În cele ce urmează vom nota cu K, fie corpul numerelor complexe ($\mathbb{C}$), fie corpul numerelor reale ($\mathbb{R}$).

DEFINIŢIE. O mulţime nevidă V se numeşte *spaţiu vectorial* (sau *liniar*) *peste corpul* K dacă este înzestrată cu două legi de compoziţie: una *internă*, notată *aditiv*, $(x, y) \to x + y$ (deci o aplicaţie a produsului cartezian $V \times V$ în V) şi una *externă*, notată *multiplicativ* $(\alpha, x) \to \alpha x$ (deci o aplicaţie a produsului cartezian $K \times V$ în V), cu următoarele proprietăţi:
1) $x + y = y + x$, $\forall x,\, y \in V$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x,\, y,\, z \in V$;
3) există un element 0_V astfel încât $x + 0_V = x$, $\forall x \in V$;
4) pentru orice $x \in V$ există un element $x^{'} \in V$ astfel încât $x + x^{'} = 0_V$;
5) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$;
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall \alpha,\, \beta \in K$, $\forall x \in V$;
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha,\, \beta \in K$, $\forall x \in V$;
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in K$, $\forall x,\, y \in V$.

Adesea, în loc de spaţiu vectorial peste corpul K vom spune, simplu, K*-spaţiu vectorial*. Când $K = \mathbb{R}$, V se numeşte *spaţiu vectorial real*, iar când $K = \mathbb{C}$, V se numeşte *spaţiu vectorial complex*.

Elementele lui V se numesc *vectori*, iar cele din K se numesc *scalari*. Vom nota, în general, vectorii cu litere latine, iar scalarii prin litere greceşti.

Proprietăţile 1)-4) spun că $(V, +)$ este grup comutativ. Vectorul 0_V din 3) este unic şi se numeşte *vector nul* al spaţiului V. De asemenea, pentru orice $x \in V$, elementul $x^{'}$ care intervine în 4) este unic, se numeşte *opusul* lui x şi se notează $-x$. Suma dintre vectorul x şi opusul vectorului y se notează $x - y$ şi se numeşte *diferenţa* dintre x şi y.

PROPOZIŢIA 1.1. (Reguli de calcul într-un spaţiu vectorial).
a) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$, $\forall x,\, y \in V$, $\forall \alpha \in K$;
b) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$, $\forall \alpha \in K$;
c) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha,\, \beta \in K$;
d) $0 \cdot x = 0_V$, $\forall x \in V$;
e) $(-\alpha)\, x = \alpha\, (-x) = -\, (\alpha x)\,$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in K$;

f) *dacă* $x \in V$ *şi* $\alpha \in K$, *atunci* $\alpha x = 0_V \Longleftrightarrow \alpha = 0$ *sau* $x = 0_V$.

Demonstraţie. a) $\alpha(x-y)+\alpha y = \alpha[(x-y)+y] = \alpha x$. b) În a) se ia $x = y$.
c) $(\alpha-\beta)x+\beta x = [(\alpha-\beta)+\beta]x = \alpha x$. d) În c) se ia $\alpha = \beta$.
e) $\alpha x + \alpha(-x) = \alpha(x-x) = \alpha 0_V = 0_V$. $\alpha x + (-\alpha)x = [\alpha + (-\alpha)]x = = (\alpha-\alpha)x = 0 \cdot x = 0_V$. f) Conform b) şi d), $\lambda \cdot 0_V = 0 \cdot x = 0_V$. Reciproc, dacă $\alpha x = 0_V$ şi $\alpha \neq 0$, atunci există α^{-1} (K fiind corp), deci $\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V$. Dar $\alpha^{-1}(\alpha x) = = \left(\alpha^{-1} \cdot \alpha\right) x = 1 \cdot x = x$, deci $x = 0_V$. ■

EXEMPLE. 1) Mulţimea vectorilor liberi din spaţiu sau din plan, notată $\mathcal{V}_3$ respectiv $\mathcal{V}_2$ (cap.1), este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor liberi şi înmulţirea cu un scalar a unui vector liber(prop. 2.1, 2.2, cap. 1).

2) Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi $K^n = K \times K \times ... \times K = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in K, i = \overline{1,n}\right\}$. Dacă $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n, y = (y_1, ..., y_n) \in K^n$ şi $\alpha \in K$, definim:

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n),\ \alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n).$$

De exemplu, în $\mathbb{R}^2$, $(2,-3)+(0,3) = (2,0)$, $(-5)(1,-2) = (-5,10)$. De asemenea, în $\mathbb{R}^3$, $(1,2,-2)+(-2,0,1) = (-1,2,-1)$, $3(1,2,0) = (3,6,0)$. Înzestrat cu cele două legi de compoziţie K^n este un K-spaţiu vectorial. Vectorul nul este $0 = (0,0,...,0)$, iar opusul vectorului $x = (x_1,...,x_n)$ este vectorul $-x = (-x_1,...,-x_n)$. Proprietăţile 1)-8) se verifică imediat. Astfel se poate organiza $\mathbb{R}^n$ ca $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, iar $\mathbb{C}^n$ ca $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial. Elementele lui K^n se numesc *vectori (linie) n-dimensionali*, iar K^n se numeşte *spaţiu aritmetic cu n dimensiuni*. În particular $\mathbb{R}^n$ se numeşte *spaţiu aritmetic real cu n dimensiuni*.

În unele aplicaţii este avantajos să dăm vectorii lui K^n sub formă de coloane

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in K, i = \overline{1,n}.$$

În acest caz K^n va fi numit *spaţiul vectorilor coloană n-dimensionali*.

3) Mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane cu coeficienţii în K, notată $M_{m,n}(K)$, poate fi înzestrată cu o structură de K-spaţiu vectorial, cele două operaţii fiind adunarea matricelor şi înmulţirea cu un scalar a unei matrice.

4) Fie $\mathbb{R}[X]$ mulţimea polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi în $\mathbb{R}$. În raport cu adunarea polinoamelor şi înmulţirea unui polinom cu un scalar, $\mathbb{R}[X]$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial.

5) Fie M o mulţime oarecare, V un K-spaţiu vectorial şi $\mathcal{F}(M,V) = \{f; f: M \to V\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{F}(M,V)$ şi $\alpha \in K$, definim

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in M,\ \ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall x \in M.$$

Se verifică uşor că $\mathcal{F}(M,V)$ înzestrat cu cele două legi de compoziţie este un K-spaţiu vectorial.

2. Subspaţii vectoriale. Operaţii cu subspaţii vectoriale

DEFINIŢIE. Fie V un K-spaţiu vectorial. O submulţime nevidă $S \subset V$ se numeşte *subspaţiu vectorial* dacă:

1) $x, y \in S \Rightarrow x + y \in S$;
2) $x \in S, \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in S$.

Mulţimea S înzestrată cu legile induse de $(x, y) \to x + y$ şi $(x, y) \to \alpha x$ este un K-spaţiu vectorial.

PROPOZIŢIA 2.1. (Criteriul subspaţiului). *$S \subset V$ este subspaţiu vectorial $\iff \forall x, y \in S$ şi $\alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in S$.*

EXEMPLE. 1) Mulţimea $\{0_V\}$ este un subspaţiu vectorial al lui V numit *subspaţiu nul*, iar V se numeşte *subspaţiu total.* $\{0_V\}$ este cel mai mic (faţă de incluziune) subspaţiu posibil al lui V, iar V cel mai mare subspaţiu posibil al lui V. Cele două subspaţii se numesc *improprii* sau *triviale.* Orice subspaţiu diferit de aceste două subspaţii se numeşte *subspaţiu propriu.*

2) În K^n considerăm, pentru orice $1 \le i \le n$, mulţimile

$$S_i = \{x \in K^n; x = (x_1, ..., x_{i-1}, 0_K, x_{i+1}, ..., x_n)\}.$$

Se verifică uşor că S_i este subspaţiu vectorial al lui K^n, pentru orice indice i, $1 \le i \le n$. Mai general, fie $m \in N, m \le n$. Submulţimea $S \subset K^n$ formată din toţi vectorii ce au pe m componente fixate elementul 0_K, este un subspaţiu vectorial al lui K^n.

3) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Mulţimea $\mathbb{R}_n[X]$ a polinoamelor în nedeterminata X, cu coeficienţi în $\mathbb{R}$, de grad $\le n$, este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}[X]$. Într-adevăr, dacă $f, g \in \mathbb{R}_n[X]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $grad(\alpha f + \beta g) \le \max(grad\ f, grad\ g)$, deci $\mathbb{R}_n[X]$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}[X]$.

4) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Submulţimea $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to R;\ f \text{ continuă}\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$.

PROPOZIŢIA 2.2. *Dacă V_1 şi V_2 sunt două subspaţii vectoriale ale lui V, atunci $V_1 \cap V_2$ este un subspaţiu vectorial al lui V.*

Demonstraţie. De remarcat că $V_1 \cap V_2 \ne \phi$, deoarece $0_V \in V_1 \cap V_2$. De asemenea dacă $x, y \in V_1 \cap V_2$, atunci $x, y \in V_i, i = 1, 2$, deci $\alpha x + \beta y \in V_i, i = 1, 2, \forall \alpha, \beta \in K$, deoarece V_i sunt subspaţii vectoriale. În consecinţă, $\alpha x + \beta y \in V_1 \cap V_2$. ■

OBSERVAŢIE. În general, orice intersecţie de subspaţii vectoriale este un subspaţiu vectorial.

Fie acum M o submulţime a unui K-spaţiu vectorial V. Există subspaţii vectoriale ale lui V care conţin submulţimea M (spre exemplu V însuşi). Intersecţia acestor subspaţii vectoriale este cel mai mic subspaţiu vectorial (în raport cu incluziunea) care conţine M.

DEFINIŢIE. Se numeşte *subspaţiu vectorial generat de M* şi se notează $Sp(M)$ intersecţia tuturor subspaţiilor vectoriale ale lui V care conţin M. Mulţimea M se numeşte *sistem de generatori* pentru $Sp(M)$. Prin convenţie, vom considera că $Sp(\phi) = \{0_V\}$.

DEFINIŢIE. Dacă V_1, V_2 sunt două subspaţii vectoriale ale lui V, definim *suma* subspaţiilor V_1 şi V_2, notată $V_1 + V_2$, ca fiind:

$$V_1 + V_2 = \{x \in V;\ x = x_1 + x_2,\ x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}.$$

Analog se poate defini:

$$V_1 + V_2 + ... + V_n = \{x \in V;\ x = x_1 + ... + x_n,\ x_i \in V_i,\ i = \overline{1,n}\}.$$

OBSERVAŢIE. În general, reuniunea a două subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial nu este subspaţiu vectorial. De exemplu, mulţimile $V_1 = \{(x, 0);$

$x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $V_2 = \{(0, y);\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^2$, dar reuniunea lor nu este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$, deoarece $(1, 0) \in V_1$ şi $(0, 1) \in V_2$, dar $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin V_1 \cup V_2$. Dacă $V_1 \subset V_2$ sau $V_2 \subset V_1$ atunci $V_1 \cup V_2$ este subspaţiu vectorial al lui V şi în acest caz $V_1 \cup V_2 = V_2$ respectiv $V_1 \cup V_2 = V_1$.

PROPOZIŢIA 2.3. *Dacă* V_1, V_2 *sunt subspaţii vectoriale ale lui* V, *atunci:*
a) $V_1 + V_2$ *este subspaţiu vectorial al lui* V;
b) $V_1 + V_2 = Sp\,(V_1 \cup V_2)$.

Demonstraţie. a) Este clar că $0_V \in V_1 + V_2$, deci $V_1 + V_2 \neq \phi$. Fie acum $x, y \in V_1 + V_2$. Atunci $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ cu $x_1, y_1 \in V_1$ şi $x_2, y_2 \in V_2$. Dacă $\alpha, \beta \in K$ atunci $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$. Cum V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale, rezultă că $\alpha x_i + \beta y_i \in V_i, i = 1, 2$, deci $\alpha x + \beta y \in V_1 + V_2$. În consecinţă $V_1 + V_2$ este un subspaţiu vectorial.

b) Vom arăta mai întâi că $V_1 + V_2 \subset Sp\,(V_1 \cup V_2)$. Fie $x \in V_1 + V_2$ şi S un spaţiu vectorial ce conţine $V_1 \cup V_2$. Atunci $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$. În consecinţă $x_i \in S$, $i = 1, 2$ deci $x \in S$. Aşadar x este în intersecţia tuturor subspaţiilor care conţin $V_1 \cup V_2$, adică $x \in Sp\,(V_1 \cup V_2)$. Să arătăm acum incluziunea inversă, $Sp\,(V_1 \cup V_2) \subset V_1 + V_2$. Conform a), $V_1 + V_2$ este un subspaţiu vectorial. Afirmaţia rezultă dacă arătăm $V_1 \cup V_2 \subset V_1 + V_2$. Aceasta este imediată, deoarece dacă $x_1 \in V_1$, atunci $x_1 = x_1 + 0_V \in V_1 + V_2$, adică $V_1 \subset V_1 + V_2$. Similar $V_2 \subset V_1 + V_2$, deci $V_1 \cup V_2 \subset V_1 + V_2$. ■

OBSERVAŢIE. Dacă $x \in V_1 + V_2$, atunci $x = x_1 + x_2$ cu $x_i \in V_i$, $i = 1, 2$. Nu înseamnă că vectorii x_1, x_2 sunt unici (Construiţi un exemplu!). Suntem deci conduşi la examinarea condiţiilor în care descompunerea este unică.

DEFINIŢIE. Suma subspaţiilor vectoriale V_1 şi V_2 se numeşte *directă* şi se notează $V_1 \oplus V_2$, dacă orice vector $x \in V_1 + V_2$ se scrie în mod unic sub forma $x = x_1 + x_2$, cu $x_i \in V_i, i = 1, 2$. Mai general, suma subspaţiilor vectoriale $V_1, ..., V_n$ este *directă* şi se notează $V_1 \oplus ... \oplus V_n$, dacă orice $x \in V_1 + ... + V_n$ se scrie în mod unic sub forma $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$, cu $x_i \in V_i$, $\forall i = \overline{1, n}$.

PROPOZIŢIA 2.4. *Fie* V_1, V_2 *subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial* V. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
a) *Suma* $V_1 + V_2$ *este directă;*
b) $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Demonstraţie. a)⇒b) Fie $y \in V_1 \cap V_2$. Atunci $0_V = 0_V + 0_V \in V_1 + V_2$ şi $0_V = y + (-y)$. Cum suma este directă, scrierea fiind unică, rezultă $y = 0_V$, deci $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

b)⇒a) Dacă $x = x_1 + x_2$, $x' = x_1' + x_2'$, cu $x_i, x_i' \in V_i$, $i = 1, 2$ atunci $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$. Dar $x_1 - x_1' \in V_1$, $x_2' - x_2 \in V_2$, iar $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$, deci $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 = 0_V$. În consecinţă $x_1 = x_1'$ şi $x_2 = x_2'$, deci scrierea este unică. ■

DEFINIŢIE. Se spune că două subspaţii vectoriale V_1, V_2 ale unui subspaţiu vectorial V sunt *suplementare* în V, dacă $V = V_1 \oplus V_2$.

EXEMPLE. 1) Fie $V_1 = \{(x, 0)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$, $V_2 = \{(0, x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$, $V_3 = \{(x, x)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$. V_1, V_2, V_3 sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^2$. Atunci $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2 = = V_1 \oplus V_3 = V_2 \oplus V_3$. Vom arăta, de exemplu, că $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_3$. Fie $x, y \in \mathbb{R}^2$. Atunci

$(x,y) = (x-y,0) + (y,y)$, deci $(x,y) \in V_1 + V_3$. Fie acum $(x,y) \in V_1 \cap V_3$. Cum $(x,y) \in V_1$, rezultă $y = 0$, iar din $(x,y) \in V_3$, rezultă $x = y = 0$, deci $(x,y) = (0,0)$.

2) Fie $D \subset \mathbb{R}$, o mulţime simetrică faţă de origine (adică $x \in D \Rightarrow -x \in D$), $V = \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ (ex. 5, §1), V_1 mulţimea funcţiilor pare din V şi V_2 mulţimea funcţiilor impare din V. Atunci V_1 şi V_2 sunt subspaţii vectoriale suplementare în V. Întradevăr, orice funcţie f se scrie în mod unic sub forma $f(x) = h(x) + g(x)$, unde $h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \in V_1$ şi $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \in V_2$.

3. Combinaţii liniare. Sisteme de generatori. Dependenţă şi independenţă liniară

Fie V un K-spaţiu vectorial. Orice parte finită a lui V se numeşte *sistem de vectori* sau *familie finită de vectori* din V.

DEFINIŢIE. Fie $\{x_1, ..., x_n\}$ un sistem finit de n vectori din V. Se numeşte *combinaţie liniară a vectorilor* $x_1, ..., x_n$ orice vector $x \in V$, de forma $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, unde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ şi se numesc *coeficienţii* combinaţiei liniare.

EXEMPLU. În $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, considerăm vectorii

$$e_1 = (1,0,...,0),\ e_2 = (0,1,0,...,0), ..., e_n = (0,...,0,1).$$

Orice vector $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ este combinaţie liniară de $e_1, e_2, ..., e_n$, deoarece

$$\begin{aligned}(x_1,...,x_n) &= (x_1,0,...,0) + (0,x_2,0,...,0) + ... + (0,...,x_n) = \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.\end{aligned}$$

În particular pentru $n = 2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ şi $(2,-3) = 2e_1 - 3e_2$.

Fie acum o submulţime nevidă $M \subset V$.

DEFINIŢIE. Se numeşte *combinaţie liniară* a vectorilor din M, orice vector $x \in V$ cu proprietatea următoare: există $n \in \mathbf{N}^*$, o familie finită de vectori $\{x_1, ..., x_n\} \subset M$ şi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$.

TEOREMA 3.1. *Fie V un K-spaţiu vectorial şi M o submulţime nevidă a lui V. Atunci subspaţiul vectorial generat de M coincide cu mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor din M.*

Demonstraţie. Fie M' mulţimea combinaţiilor liniare ale vectorilor din M. Vom arăta mai întâi că M' este subspaţiu vectorial al lui V care conţine M, deci $Sp(M) \subset M'$. Dacă $x \in M$, atunci $0_V = x - x \in M'$, deci $M' \neq \phi$. Fie acum $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n, y = \beta_1 y_1 + ... + \beta_m y_m$ doi vectori din M' şi $\lambda, \mu \in K$. Atunci $\lambda x + \mu y = \lambda \alpha x_1 + ... + \lambda \alpha_n x_n + \mu \beta_1 y_1 + ... + \mu \beta_m y_m$ este o combinaţie liniară a vectorilor $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m$ din M, deci $\lambda x + \mu y \in M'$ şi, în consecinţă, M' este subspaţiu vectorial al lui V. În plus $M \subset M'$, deoarece pentru orice $x \in M, x = 1 \cdot x \in M'$. Pentru incluziunea inversă, să remarcăm că dacă S este un subspaţiu vectorial al lui V ce conţine M, atunci S conţine mulţimea combinaţiilor liniare ale vectorilor din M, deci $M' \subset S$. Prin urmare $M' \subset Sp(M)$. ■

COROLAR 3.1.1. *Fie V un K-spaţiu vectorial şi $x_1, ..., x_n \in V$. Subspaţiul vectorial generat de $\{x_1, ..., x_n\}$ este mulţimea combinaţiilor liniare cu vectorii $x_1, x_2, ..., x_n$.*

În particular, pentru orice vector nenul $x \in V$, subspaţiul generat de $\{x\}$ este mulţimea $\{\lambda x; \lambda \in K\}$ numită *dreapta vectorială generată de x*. De asemenea, dacă $x \neq 0_V$ şi $y \in \{\lambda x; \lambda \in K\}$, subspaţiul generat de vectorii $x, y \in V$ este mulţimea $\{\lambda x + \mu y; \lambda, \mu \in K\}$ numită *plan vectorial generat de x şi y*.

DEFINIŢIE. Se spune că vectorii $x_1, ..., x_n$ din V formează un *sistem de generatori* pentru V, dacă subspaţiul vectorial generat de $\{x_1, ..., x_n\}$ coincide cu V, adică pentru orice $x \in V$ există $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel ca $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$.

EXEMPLE. 1) În $\mathbb{R}_n[X]$, vectorii $1, X, ..., X^n$ constituie un sistem de generatori.

2) În $\mathbb{R}^3$, vectorii $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)$ formează un sistem de generatori. Într-adevăr, fie $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Trebuie să arătăm că putem determina $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Această relaţie se mai scrie $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, de unde $\alpha_1 = x_1, \alpha_1 + \alpha_2 = = x_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_3$. Rezultă $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_2 = x_2 - x_2$, $\alpha_3 = x_3 - x_2$, deci v_1, v_2, v_3 formează un sistem de generatori în $\mathbb{R}^3$.

DEFINIŢIE. Vom spune că vectorii $x_1, ..., x_n$ din V sunt *liniar independenţi* (sau că familia $\{x_1, ..., x_n\}$ este *liberă*) dacă din $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V$ rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Vom spune că vectorii $x_1, ..., x_n$ din V sunt *liniar dependenţi* (sau că familia $\{x_1, ..., x_n\}$ este *legată*) dacă există scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n$ nu toţi nuli astfel încât $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V$. O familie infinită de vectori din V se numeşte *liniar independentă* sau *liberă* dacă orice submulţime finită a sa este liniar independentă.

OBSERVAŢII. 1) Orice subfamilie a unei familii libere este o familie liberă.

2) Elementele unei familii libere sunt nenule.

3) Orice suprafamilie a unei familii legate este o familie legată.

EXEMPLE. 1) În $\mathbb{R}_n[X]$, familia $\{1, X, ..., X^n\}$ este liniar independentă, deoarece orice polinom nul are toţi coeficienţii nuli.

2) În $\mathbb{R}^n$, vectorii $e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0), ..., e_n = (0,...,0,1)$ sunt liniar independenţi, deoarece din $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0$ se obţine $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

3) În $\mathbb{R}^3$, vectorii $x_1 = (1,0,0), x_2 = (0,1,1), x_3 = (1,1,1)$ sunt liniar dependenţi deoarece $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

4) În $M_{m,n}(\mathbb{R})$, matricele E_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ date de

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \to i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & \downarrow & & \\ & & j & & \end{array} & \end{array}$$

sunt liniar independente.

5) În $\mathbb{R}^3$, vectorii $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)$ sunt liniar independenţi. Într-adevăr, dacă $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ satisfac $\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0,0,0)$, atunci $\alpha_1 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, de unde $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie V un K-spaţiu vectorial şi $x_1, ..., x_n$ vectori în V. Pentru ca familia $\{x_1, ..., x_n\}$ să fie legată este necesar şi suficient ca unul dintre vectorii x_i să fie combinaţie liniară de ceilalţi.*

Demonstraţie. Dacă familia $\{x_1, ..., x_n\}$ este legată, atunci există scalarii α_1, ..., α_n nu toţi nuli astfel ca $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V$. Dacă, de exemplu, $\alpha_1 \neq 0$, atunci $x_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 x_2 - ... - \alpha_1^{-1}\alpha_n x_n$, deci x_i este combinaţie liniară de $x_2, ..., x_n$. Reciproc, dacă, de exemplu, $x_1 = \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$, $\alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, atunci $1 \cdot x_1 + (-\alpha_2)\, x_2 + ... + (-\alpha_n)\, x_n = 0_V$, ceea ce arată că familia $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ este legată, deoarece coeficientul lui x_1 este 1, deci nenul. ■

4. Bază. Dimensiune

Familiile de vectori care sunt simultan sisteme de generatori şi familii libere vor juca un rol fundamental în ceea ce urmează.

DEFINIŢIE. Fie V un K-spaţiu vectorial. Se spune că familia $\{e_1, ..., e_n\}$ de vectori din V este o *bază* în V dacă vectorii $e_1, ..., e_n$ sunt liniar independenţi şi generează V.

TEOREMA 4.1. *Familia $F = \{e_1, ..., e_n\}$ este bază în V dacă şi numai dacă orice vector $x \in V$ se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii $e_1, ..., e_n$.*

Demonstraţie. Necesitatea. Familia F fiind bază în V, există $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$. Dacă ar exista $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ astfel ca $x = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$, atunci $(\beta_1 - \alpha_1)e_1 + ... + (\beta_n - \alpha_n)e_n = 0_V$. Familia $\{e_1, ..., e_n\}$ fiind liberă, rezultă $\beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 = ... = \beta_n - \alpha_n = 0$, adică $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_n = \beta_n$, deci scrierea lui x ca o combinaţie liniară de $e_1, e_2, ..., e_n$ este unică.

Suficienţa. Cum orice vector $x \in V$ se scrie în mod unic ca o combinaţie liniară de $e_1, e_2, ..., e_n$, rezultă că familia $\{e_1, ..., e_n\}$ generează V. Fie acum $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0_V$. Cum $0 \cdot e_1 + ... + 0 \cdot e_n = 0_V$ şi scrierea elementului nul este unică, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, adică familia $\{e_1, ..., e_n\}$ este liberă, deci este bază în V. ■

DEFINIŢIE. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V. Atunci pentru orice $x \in V$ există o familie unică de scalari din K, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ astfel încât $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$. Scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n$ se numesc *coordonatele* sau *componentele lui x în raport cu baza B.*

Este evidentă

TEOREMA 4.2. *Dacă $B = \{e_1, ..., e_n\}$ este bază în V şi $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + ... + y_n e_n$, atunci*

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + ... + (x_n + y_n)e_n,\ \lambda x = \lambda x_1 e_1 + ... + \lambda x_n e_n,\ \lambda \in K.$$

$$\lambda x = \lambda x_1 e_1 + ... + \lambda x_n e_n, \lambda \in K.$$

COMENTARIU. Teorema scoate în evidenţă importanţa noţiunii de bază. Operaţiile definite în mod abstract într-un spaţiu vectorial devin operaţii uzuale cu numere şi anume cu coordonatele vectorilor relativ la acea bază.

DEFINIŢIE. Spunem că spaţiul vectorial V este de *dimensiune n* sau *n-dimensional* şi se notează $dim_K V = n$ dacă există în V n vectori liniar independenţi şi orice $n + 1$ vectori sunt liniar dependenţi. În acest caz spaţiul se numeşte *finit-dimensional.* Spaţiul vectorial care conţine o familie liberă infinită se numeşte *infinit-dimensional.*

Deoarece orice sistem de $n + 1$ vectori este legat rezultă că toate sistemele de vectori care conţin mai mult de n vectori este legat. În consecinţă dimensiunea unui spaţiu vectorial este numărul maxim de vectori liniar independenţi din acest spaţiu vectorial.

TEOREMA 4.3. *Într-un spaţiu vectorial V de dimensiune n există o bază formată din n vectori; mai mult, orice sistem de n vectori liniar independenţi din V constituie o bază a lui V.*

Demonstraţie. Cum V este de dimensiune n, există un sistem de vectori liniar independenţi, $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Vom arăta că S este sistem de generatori, deci bază a lui V. Fie $x \in V$. Vectorii $x, e_1, e_2, ..., e_n$ sunt liniar dependenţi, deci există $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, nu toţi nuli astfel încât $\alpha x + \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0_V$. Atunci $\alpha \neq 0$, deoarece în caz contrar, S ar fi liniar dependent. În consecinţă $x = -\alpha^{-1}(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)$, deci S este sistem de generatori. ■

TEOREMA 4.4. *Dacă $B = \{e_1, ..., e_n\}$ este bază în V , atunci $dim_K V = n$.*

Demonstraţie. Evident în V există n vectori liniar independenţi. Fie $S = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$ un sistem format din $n+1$ vectori. Presupunem prin absurd că S este liber. Atunci $x_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$. Cum $x_1 \neq 0_V$ rezultă că $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ nu sunt toţi nuli. Renumerotând eventual elementele lui B, putem presupune că $\alpha_1 \neq 0$. În consecinţă putem scrie $e_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$. Cum $x_2 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + ... + \gamma_n e_n$, ţinând seama de expresia lui e_1 rezultă că $x_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$. Dacă $\lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0$, atunci $x_2 = \lambda_1 x_1$, deci vectorii x_1, x_2 sunt liniar dependenţi, ceea ce contrazice ipoteza că S este liber. Renumerotând convenabil elementele lui B, putem presupune că $\lambda_2 \neq 0$. Atunci din expresia lui x_2 rezultă că $e_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 e_{3+} ... + \mu_n e_n$, $x_3 = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 e_{3+} ... + \delta_n e_n$. Procedând din aproape în aproape, obţinem că $x_{n+1} = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + ... + \eta_n x_n$, ceea ce contrazice ipoteza că S este liber. Aşadar S este liniar dependent, deci $dim_K V = n$. ■

TEOREMA 4.5. (Teorema bazei incomplete) *Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n. Pentru orice parte liberă $S = \{x_1, ..., x_p\}$ din $V, p < n$, există vectorii $x_{p+1}, ..., x_n \in V$ astfel încât $\{x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_n\}$ să fie bază în V.*

Demonstraţie. Fie $V' = Sp(S)$. Atunci $dimV' = p < n$, $V' \neq V$. Aşadar $V - V' \neq \phi$ şi nu conţine 0_V. Orice $x \in V - V'$ formează împreună cu S un sistem liber. Într-adevăr, dacă $S \cup \{x\}$ ar fi legat, ar exista $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p, \alpha \in K$ nu toţi nuli astfel încât $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_p x_p + \alpha x = 0_V$. Dacă $\alpha = 0$, ar rezulta că S este legat, deci $\alpha \neq 0$. Atunci $x = -\alpha^{-1}(\ \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_p x_p)$, adică $x \in V'$, ceea ce contrazice faptul că $x \in V - V'$. Notăm $x_{p+1} = x$, deci $S' = \{x_1, ..., x_p, x_{p+1}\}$ este liber. Fie $V'' = Sp(S')$, $dimV'' = p+1$. Dacă $p+1 < n$ se repetă procedeul de mai sus. Alegem $x_{p+2} \in V - V''$ şi sistemul $S' \cup \{x_{p+2}\}$ este liber etc. Obţinem astfel din aproape în aproape un sistem liber $B = \{x_1, ..., x_n\}$ care conform teoremei 4.3 este bază în V . ■

EXEMPLE. 1) În $\mathcal{V}_3$ orice trei vectori necoplanari formează o bază (teorema 3.6, prop. 3.5, cap. 1). În particular $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ este o bază, numită *baza canonică* a lui $\mathcal{V}_3$. Deci $dim\mathcal{V}_3 = 3$. Similar în $\mathcal{V}_2$ orice doi vectori liberi necoli-niari formează o bază, deci $dim\mathcal{V}_2 = 2$. În $\mathcal{V}_1$ orice vector nenul este bază, deci $dim\mathcal{V}_1$=1.

2) În $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ vectorii $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$ formează o bază, deci $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$. Cum pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ avem $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, rezultă că coordonatele în baza canonică a unui

vector $x \in \mathbb{R}^n$ coincid cu componentele acestuia. De aceea baza $\{e_1, ..., e_n\}$ se numeşte *baza canonică* a lui $\mathbb{R}^n$. Să observăm că coordonatele unui vector diferă de la o bază la alta. De exemplu, în $\mathbb{R}^3$, coordonatele vectorului $x = (2, 1, 3)$ în bază canonică sunt $2, 1, 3$, coincizând cu componentele lui x. Pe de altă parte, vectorii $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)$ formează, de asemenea, o bază a lui $\mathbb{R}^3$. Coordonatele lui $x = (2, 1, 3)$ în baza v_1, v_2, v_3 sunt $2, -1, 2$, pentru că $x = 2v_1 - v_2 + 2v_3$.

3) În $\mathbb{R}_n[X]$, polinoamele $1, X, ..., X^n$ formează o bază, numită *baza canonică* a lui $\mathbb{R}_n[X]$. De asemenea, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, polinoamele $p_i = (X - a)^i$, $0 \le i \le n$ formează o bază a lui V, deci $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_n[X] = n+1$. Vom arăta aceasta pentru $n = 3$. Fie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot (X - a) + \alpha_2 (X - a)^2 + \alpha_3 \cdot (X - a)^3 = 0.$$

Rezultă că $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 - 3\alpha_3 a = 0$, $\alpha_1 - 2\alpha_2 a + 3\alpha_3 a^2 = 0$, $\alpha_0 - \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 - -\alpha_3 a^3 = 0$, de unde $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_3 = 0$, deci polinoamele p_0, p_1, p_2, p_3 sunt liniar independente. Să arătăm că aceste polinoame formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_3[X]$. Fie $f \in \mathbb{R}_3[X]$. Trebuie să arătăm că există $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ astfel încât

$$f = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot (X - a) + \alpha_2 (X - a)^2 + \alpha_3 (X - a)^3 .$$

Derivând formal, obţinem succesiv:

$$\begin{gathered} Df = \alpha_1 + 2\alpha_2 (X - a) + 3\alpha_3 (X - a)^2 , \\ D^2 f = 2!\alpha_2 + 2 \cdot 3\alpha_3 (X - a) , \\ D^3 f = 3!\alpha_3. \end{gathered}$$

Luând în egalităţile de mai sus valoarea polinomului în punctul a, obţinem $\alpha_0 = f(a), \alpha_1 = \dfrac{1}{1!} Df(a)$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{2!} D^2 f(a), \alpha_3 = \dfrac{1}{3!} D^3 f(a)$, deci:

$$f = f(a) + \frac{1}{1!} Df(a)(X - a) + \frac{1}{2!} D^3 f(a)(X - a)^2 + \frac{1}{3!} D^3 f(a)(X - a)^3 .$$

În general, în $\mathbb{R}_n[X]$, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, polinoamele

$$1, X - a, (X - a)^2 , ..., (X - a)^n ,$$

formează o bază şi coordonatele unui polinom $f \in \mathbb{R}_n[X]$ în această bază sunt:

$$f(a), \frac{1}{1!} Df(a), \frac{1}{2!} D^2 f(a), ..., \frac{1}{n!} D^n f(a),$$

deci

$$f = f(a) + \frac{1}{1!} Df(a)(X - a) + \frac{1}{2!} D^2 f(a)(X - a)^2 + ... + \frac{1}{n!} D^n f(a)(X - a)^n .$$

4) În $M_{m,n}(\mathbb{R})$, matricele $E_{ij}, i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$,

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \rightarrow i \\ \quad\downarrow \\ \quad j \end{array} ,$$

formează o bază, numită *baza canonică* a lui $M_{m,n}(\mathbb{R})$.În concluzie $dimM_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$.

5) În spaţiul vectorial $\mathcal{C}((a,b),\mathbb{R})$, funcţiile $1, t, t^2, ..., t^k$ sunt liniar independente. Cum aceasta se întâmplă pentru orice k, rezultă că acest spaţiu vectorial este infinit dimensional.

OBSERVAŢIE. Dimensiunea unui spaţiu vectorial depinde de corpul de bază. Astfel $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, dar $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Mai general, orice $\mathbb{C}$-spaţiu vecto-rial de dimensiune n este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune $2n$. Este suficient să remarcăm că dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este bază într-un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial, atunci $\{e_1, ..., e_n, ie_1, ..., ie_n\}$ este bază în acel spaţiu considerat ca $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial.

5. Dimensiunea unui subspaţiu vectorial

Subspaţiul nul $\{0_V\}$ nu conţine nici un sistem liber. De aceea dimensiunea acestuia se consideră egală cu zero.

TEOREMA 5.1. *Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi S un subspaţiu vectorial al lui V. Atunci:*

a*)* $\dim_K(S) = \dim_K(V)$ *dacă şi numai dacă* $V = S$*;*

b*) dacă S este subspaţiu propriu al lui V, atunci* $\dim_K(S) < \dim_K(V)$;

c*) S admite un suplement S_1 şi avem:*

$$\dim_K(V) = \dim_K(S) + \dim_K(S_1).$$

Demonstraţie. a) Fie $n = \dim_K(S) = \dim_K(V)$ şi $B \subset S$ o bază cu n elemente. Cum $B \subset V$, conform teoremei 4.3, rezultă că B este bază în V. Atunci orice element din V este combinaţie liniară de elemente din $B \subset S$, deci este în S. În concluzie $S = V$.

b) Fie $p = \dim_K(S)$, $n = \dim_K(V)$. Dacă $p > n$, deoarece $S \subset V$, rezultă că ar exista în V un sistem liber cu p vectori, depăşind dimensiunea lui V, ceea ce nu se poate. Cum S este subspaţiu propriu al lui V, ţinând seama de a), rezultă că $p < n$.

c) Fie $\{x_1, ..., x_p\}$ o bază a lui S. Cum V este de dimensiune n, există $n - p$ vectori $x_{p+1}, ..., x_n$ astfel ca $\{x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_n\}$ este o bază în V (teorema 4.5). Familia $\{x_{p+1}, ..., x_n\}$ fiind liberă, $S_1 = Sp(\{x_{p+1}, ..., x_n\})$ este de dimensiune $n-p$. Pe de altă parte, orice vector $x \in V$ se scrie în mod unic sub forma

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1} + ... + \lambda_n x_n = y + z,$$

unde $y = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p \in S$ şi $z = \lambda_{p+1} x_{p+1} + ... + \lambda_n x_n \in S_1$, ceea ce arată că $V = S \oplus S_1$ şi $\dim_K(V) = \dim_K(S) + \dim_K(S_1)$. ■

TEOREMA 5.2. (Grassmann) *Dacă S_1 şi S_2 sunt subspaţii vectoriale finit dimensionale ale lui V, atunci*

$$\dim_K(S_1 + S_2) = \dim_K(S_1) + \dim_K(S_2) - \dim_K(S_1 \cap S_2).$$

Demonstraţie. Fie $B' = \{e_1, ..., e_k\}$ o bază în $S_1 \cap S_2 \subset S_1$. O completăm până la o bază a lui S_1, fie aceasta $B'' = \{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_l\}$, respectiv până la o bază $B''' = \{e_1, ..., e_k, g_1, ..., g_m\}$ a lui S_2. Deci presupunem că $\dim_K(S_1 \cap S_2) = k, \dim_K(S_1) = k + l, \dim_K(S_2) = k + m$. Dacă arătăm că sistemul de vectori din V, $B = \{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_l, g_1, ..., g_m\}$ formează o bază a subspaţiului $S_1 + S_2$ demonstraţia este încheiată, deoarece $\dim_K(S_1 + S_2) = k + l + m$ şi identitatea din enunţ este satisfăcută.

Vom arăta mai întâi că B este liniar independentă.

Fie $\alpha, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l, \gamma_1, ..., \gamma_k \in K$ astfel ca

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j f_j + \sum_{s=1}^{m} \gamma_s g_s = 0_V. \tag{5.1}$$

Dacă notăm $x = \sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_s g_s \in S_2$, atunci din (5.1) rezultă $x \in S_1$, deci $x \in S_1 \cap S_2$. În consecinţă există $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ astfel ca $\sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_s g_s = \sum\limits_{h=1}^{k} \lambda_h \cdot e_h$,care se mai scrie $\sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_s g_s + \sum\limits_{h=1}^{k} (-\lambda_h) e_h = 0_V$. Deoarece B''' este bază în S_2, rezultă $\gamma_1 = ... = \gamma_m = 0$ şi $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$. Atunci (5.1) se mai scrie $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j f_j = 0_V$ şi cum B'' este bază în S_1, rezultă $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$ şi $\beta_1 = ... = = \beta_l = 0$. Aşadar toţi scalarii din (5.1) sunt nuli, deci B este liniar independentă. Vom arăta acum că B este un sistem de generatori pentru $S_1 + S_2$. Fie deci $x \in S_1 + S_2$, $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$. Atunci $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j f_j$ şi $x_2 = \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i e_i + \sum\limits_{s=1}^{m} \delta_s g_s$, deoarece B'', B''' sunt baze în S_1, respectiv S_2. În consecinţă $x = \sum\limits_{i=1}^{k} (\alpha_i + \gamma_i) e_i + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j f_j + \sum\limits_{s=1}^{m} \delta_s g_s$ şi teorema este demonstrată. ■

COROLAR 5.2.1. *Fie S_1, S_2 subspaţii vectoriale finit dimensionale ale lui V. Dacă suma $S_1 + S_2$ este directă, atunci*

$$\dim_K (S_1 \oplus S_2) = \dim_K (S_1) + \dim_K (S_2).$$

Demonstraţie. Se ţine seama că $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$. ■

6. Rangul unui sistem de vectori şi rangul matricei sale. Sisteme de ecuaţii liniare

DEFINIŢIE. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $S = \{x_1, ..., x_m\}$ un sistem de vectori din V. Se numeşte *rangul sistemului* S dimensiunea subspaţiului generat de S.

Evident, dimensiunea subspaţiului generat de un sistem $S \subset V$ este egală cu numărul maxim de vectori liniar independenţi conţinuţi în S.

Dacă $B = \{e_1, ..., e_n\}$ este bază în V, atunci $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \forall j = \overline{1, m}$.

DEFINIŢIE. Matricea $A = (a_{ij})$, de tip $n \times m$, formată cu coordonatele vectorilor x_j (unic determinate), pe coloane, se numeşte *matricea sistemului* S în raport cu baza B.

TEOREMA 6.1. (teorema rangului). *Rangul unui sistem de vectori $S = \{x_1, ..., x_m\}$ din V este egal cu rangul matricei sale în raport cu o bază arbitrară $B = \{e_1, ..., e_n\}$ din V.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})$ matricea sistemului S în raport cu baza B. Reamintim că rangul unei matrice A, nenulă, este un întreg r, $0 < r \leq \min(m, n)$, cu proprietatea că există un minor nenul al lui A de ordin r, iar toţi minorii de ordin $r+1$, dacă există, sunt nuli. Să presupunem că $rangA = r$. Deoarece rangul unei matrice nu se schimbă dacă se permută liniile sau coloanele între ele, putem presupune că următorul determinant este nenul:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2r} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Dacă vectorii $x_1, ..., x_r$ ar fi liniar dependenţi, atunci un vector ar fi combinaţie liniară de ceilalţi, deci una dintre coloanele minorului D este combinaţie liniară de celelalte. Atunci $D = 0$, ceea ce nu este posibil. În consecinţă, vectorii $x_1, ..., x_r$ sunt liniar independenţi.

Vom arăta acum că $Sp(\{x_1, ..., x_r\}) = Sp(\{x_1, ..., x_m\})$. Dacă $r < m$, este suficient să arătăm că $Sp(\{x_1, ..., x_m\}) \subset Sp(\{x_1, ..., x_r\})$. Cum rangul lui A este r, pentru fiecare $j > r$, următorii determinanţi sunt nuli:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & a_{1j} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & ... & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}, i = \overline{1, n}.$$

Dezvoltând după ultima linie, obţinem: $c_{i1}a_{i1} + ... + c_{ir}a_{ir} + D \cdot a_{ij} = 0$, unde prin $c_{il}, l = \overline{1, r}$, am notat complemenţii algebrici ai elementelor de pe ultima linie. Cum $D \neq 0$, rezultă

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{i1} + ... + \lambda_r a_{ir}, i = \overline{1, n},$$

unde $\lambda_k = -D^{-1}c_{ik}$, $k = \overline{1, r}$, nu depind de i, ci numai de elementele primelor r linii, deci rămân fixe când $i = \overline{1, n}$. Prin urmare pentru $j > r$, avem

$$x_j = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_r x_r,$$

deci $Sp(\{x_1, ..., x_m\}) \subset Sp(\{x_1, ..., x_r\})$. În concluzie $rangA = rangS$. ■

OBSERVAŢIE. Din demonstraţia teoremei, rezultă că rangul unei matrice este egal cu numărul maxim de coloane liniar independente. Cum rangul unei matrice coincide cu rangul matricei transpuse, rezultă că rangul unei matrice este egal cu numărul maxim de linii liniar independente.

DEFINIŢIE. O matrice pătratică A se numeşte *singulară* dacă $\det A = 0$ şi *nesingulară* în caz contrar.

COROLAR 6.1.1. *O matrice pătratică este nesingulară dacă şi numai dacă toate liniile sau toate coloanele sunt liniar independente.*

Pentru determinarea rangului unei matrice se pot folosi transformări elementare.

DEFINIŢIE. Se numesc *transformări elementare* ale unei matrice următoarele operaţii:
- schimbarea a două linii (coloane) între ele;
- înmulţirea tuturor elementelor unei linii (coloane) cu acelaşi factor nenul;
- adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor corespunzătoare ale altei linii (coloane).

Ţinând seama că aceste transformări elementare nu afectează proprietatea unui determinant de a fi nul sau nenul, rezultă că rangul unei matrice nu se modifică dacă asupra matricei se efectuează transformări elementare. În practică, pentru determinarea rangului unei matrice, procedăm astfel: se efectuează transformări elementare asupra matricei până când toate elementele devin nule cu excepţia unor elemente de pe diagonala principală care devin 1. Rangul unei matrice este numărul elementelor 1 de pe diagonala principală.

EXEMPLU. Să determinăm rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Avem succesiv

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 + L_4 \\ L_2 \to L_2 + L_4 \\ L_3 \to L_3 + 3L_4 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4 \to L_4 + L_1 \\ \\ \to \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 13 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ 0 & 14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 \to C_2 - 9C_1 \\ C_3 \to C_3 - 5C_1 \\ C_4 \to C_4 - 13C_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \\ 0 & 16 & 11 & 27 \\ 0 & 14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{matrix} L_2 \to L_2/7 \\ L_3 \to L_3 - 16L_2 \\ L_4 \to L_4 - 14L_2 \\ \to \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 29/7 & 29/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \to C_3 - 3/7C_2 \\ C_4 \to C_4 - 10/7C_2 \\ \to \end{matrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 29/7 & 29/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} L_3 \to 7/29L_3 \\ L_4 \to L_4 - L_3 \\ \to \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{matrix} C_4 \to C_4 - C_3 \\ \to \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci $rangA = 3$ (În fiecare caz s-au menţionat operaţiile indicate: notaţia $L_1 \to L_1 + L_4$ înseamnă linia 1 se înlocuieşte cu suma liniilor 1 şi 4 etc.).

În continuare vom utiliza teorema rangului în studiul sistemelor de ecuaţii liniare. Fie deci sistemul de ecuaţii liniare:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. , \tag{6.1}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$.

Reamintim că un sistem ordonat de numere reale $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ se numeşte *soluţie* a sistemului (6.1), dacă înlocuind necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_n$ respectiv prin aceste numere, toate ecuaţiile acestui sistem sunt verificate, adică:

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, i = \overline{1, m}.$$

Dacă admite cel puţin o soluţie, sistemul se numeşte *compatibil*, iar dacă nu admite nici o soluţie sistemul se numeşte *incompatibil*. Dacă sistemul (6.1) admite o singură soluţie, sistemul se numeşte *compatibil determinat*, iar dacă admite mai multe soluţii sistemul se numeşte *compatibil nedeterminat*. Să remarcăm că sistemul se scrie sub forma $Ax = b$, unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ bm \end{pmatrix}$$

Matricea

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se numeşte *matricea extinsă* a sistemului (6.1).

Dacă $r = rangA$ şi

$$D_r = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} \\ ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci D_r se numeşte *determinant principal* al sistemului (6.1), necunoscutele $x_1, ..., x_r$ se numesc *necunoscute principale*, iar $x_{r+1}, ..., x_n$ dacă $n > r$ se numesc *necunoscute secundare*. Primele r ecuaţii se numesc *ecuaţii principale*, celelalte (dacă $r < m$) se numesc *ecuaţii secundare*. Dacă $r < m$, pentru orice $j > r$, determinantul de forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & b_r \\ a_{j1} & ... & a_j & b_j \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinant caracteristic* al sistemului (6). Deci numărul determinanţilor caracteristici este egal cu numărul ecuaţiilor secundare.

TEOREMA 6.2. (Kronecker-Capelli) *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul (6.1) să fie compatibil este ca* $rangA = rang\widetilde{A}$.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Notăm cu $a^j, j = \overline{1, n}$, vectorii coloană ai matricei A. Sistemul fiind compatibil există $\alpha_1, ..., \alpha_n$ astfel încât:

$$\alpha_1 a^1 + ... + \alpha_n a^n = b.$$

Aşadar $b \in Sp\left(\left\{a^1, ..., a^n\right\}\right)$ şi din teorema rangului rezultă că $rangA = = rang\widetilde{A}$.

"$\Leftarrow$" Dacă $rangA = rang\widetilde{A}$, atunci $b \in Sp\left(\left\{a^1, ..., a^n\right\}\right)$, deci există $\alpha_1, ..., \alpha_n$ astfel încât $b = \alpha_1 a^1 + ... + \alpha_n a^n$, deci sistemul $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ este soluţie a sistemului (6). ■

COROLAR 6.2.1. *Sistemul (6.1) este compatibil determinat dacă şi numai dacă* $rangA = rang\widetilde{A} = n$.

Demonstraţie. Conform teoremei Kronecker-Capelli, prima egalitate este echivalentă cu existenţa a cel puţin o soluţie. Deoarece $rangA = n$, înseamnă că, coloanele matricei A sunt liniar independente, deci b are o singură exprimare ca o combinaţie liniară de coloanele matricei A, adică sistemul (6.1) este compatibil determinat. Reciproc, dacă sistemul (6.1) are o singură soluţie atunci $rangA = rang\widetilde{A}$ (teorema 6.2), iar b are o singură exprimare ca combinaţie liniară de coloanele matricei A, deci acestea sunt liniar independente (dacă $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a^j = 0$ cu $\lambda_j, j = \overline{1,n}$ nu toţi nuli şi dacă $\alpha_1, ..., \alpha_n$ este o soluţie a sistemului (6.1) atunci şi $\alpha_1 + +\lambda_1, ..., \alpha_n + \lambda_n$ ar fi o soluţie diferită de prima, ceea ce nu este posibil). ■

TEOREMA 6.3. (Rouché). *Dacă* $rangA = r < m$, *atunci sistemul (6.1) este compatibil dacă şi numai dacă toţi determinanţii caracteristici sunt nuli.*

Demonstraţie. Dacă sistemul este compatibil, conform teoremei Kronecker-Capelli, $rangA = rang\widetilde{A} = r$. Cum orice determinant caracteristic este un determinant de ordin $r + 1$ din $\widetilde{A}$, deci este nul. Reciproc, dacă toţi determinanţii caracteristici sunt nuli, atunci $rangA = rang\widetilde{A} = r$, deci sistemul este compatibil.■

În continuare vom studia mulţimea soluţiilor unui sistem omogen de ecuaţii liniare. Fie deci sistemul $Ax = 0$, unde 0 este vectorul coloană cu m elemente, toate nule. Evident, sistemul este compatibil, deoarece admite soluţia cu toate elementele egale cu zero (această soluţie se mai numeşte *soluţie banală*). Din corolarul 6.2.1 obţinem:

COROLAR 6.3.1. *Sistemul* $Ax = 0$ *are numai soluţia banală dacă şi numai dacă* $rangA = n$. *În particular, dacă A este matrice pătratică, sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă matricea A este nesingulară.*

TEOREMA 6.4. *Fie S mulţimea soluţiilor sistemului* $Ax = 0$. *Dacă* $rangA = = r$, *atunci S este un subspaţiu vectorial de dimensiune* $n - r$.

Demonstraţie. Este clar că S este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$. Vom căuta o bază a acestui spaţiu formată din $n - r$ elemente. Pentru aceasta putem presupune că primele r coloane ale matricei A sunt liniar independente, ceea ce se poate realiza printr-o permutare a indicilor. Atunci pentru $j > r$, avem $a^j = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i^j a^i$. Considerăm vectorii $y_j = (\alpha_1^j, ..., \alpha_r^j, 0, ..., 0, -1, ..., 0)$, unde -1 se află pe locul $j > r$. Evident $y_j \in S$ şi sunt liniar independenţi. Dacă arătăm că ei generează S, teorema este demonstrată. Fie $z = (\beta_1, ..., \beta_n)$ o soluţie a sistemului $Ax = 0$. Atunci $z' = z + \sum\limits_{j=r+1}^{n} \beta_j y_j$ este evident şi el o soluţie a sistemului. În plus, dacă $z' = (\beta_1', ..., \beta_n')$, atunci $\beta_j' = 0$ pentru $j > r$, deci $\sum\limits_{j=1}^{r} \beta_j' a^j = 0$ şi deoarece vectorii

$a_1, ..., a_r$ sunt liniar independenţi, deducem că $\beta'_j = 0$, $j = \overline{1,r}$. În consecinţă $z' = 0$ şi deci $z = -\sum\limits_{j=r+1}^{n} \beta_j y_j$. ■

DEFINIŢIE. O bază a subspaţiului vectorial S se numeşte *sistem fundamental de soluţii* al sistemului $Ax = 0$.

TEOREMA 6.5. *Presupunem că sistemul $Ax = b$ este compatibil. Dacă $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ este o soluţie a acestui sistem, atunci $x \in \mathbb{R}^n$ este soluţie a sistemului $Ax = b$, dacă şi numai dacă există $\alpha_1, ..., \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \overline{x} + \sum\limits_{i=1}^{n-r} \alpha_i y_i$, unde $y_1, ..., y_{n-r}$ este un sistem fundamental de soluţii al sistemului $Ax = 0$.*

Demonstraţie. Dacă x şi $\overline{x}$ sunt soluţii ale sistemului $Ax = b$, atunci $A(x - \overline{x}) = 0$, deci $x - \overline{x} \in S$, S fiind mulţimea soluţiilor sistemului omogen. Cum y_1, ..., y_{n-r} este bază în S, rezultă că există α_1, ..., α_{n-r} astfel încât $x - \overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n-r} \alpha_i y_i$, ceea ce trebuia dovedit. Reciproc $Ax = A\overline{x} + \sum\limits_{i=1}^{n-r} \alpha_i A y_i = b$, deoarece $Ay_i = 0$, pentru că $y_i \in S$. ■

7. Matricea de trecere de la o bază la alta. Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ două baze ale sale. Putem exprima vectorii din baza B' în baza B. Pentru orice vector $e'_j, j = \overline{1,n}$, există şi sunt unici $c_{ij} \in K, i = \overline{1,n}$ astfel încât

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i,\ j = \overline{1,n}. \tag{7.1}$$

DEFINIŢIE. Matricea $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$ se numeşte *matricea de trecere* de la baza B la baza B'.

Se observă că pe coloana j se găsesc coordonatele vectorului e'_j în baza B.

OBSERVAŢIE. Relaţiile (7.1) se mai pot scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ . \\ . \\ . \\ e'_n \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{pmatrix},$$

unde C^T este transpusa matricei C.

PROPOZIŢIA 7.1. *Matricea de trecere de la o bază la alta este inversabilă.*

Demonstraţie. Deoarece B' este bază, din orice relaţie de forma $\alpha_1 e'_1 + ... + \alpha_n e'_n = 0_V$ rezultă $\alpha_i = 0, i = \overline{1,n}$. Ţinând seama de (7.1) obţinem

$$(\alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + ... + \alpha_n c_{1n})\, e_1 + ... + (\alpha_1 c_{n1} + \alpha_2 c_{n2} + ... + \alpha_n c_{nn})\, e_n = 0_V,$$

relaţie care are loc dacă şi numai dacă $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,n}$. Cum şi B este bază, se obţine sistemul omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + ... + \alpha_n c_{1n} = 0 \\ .... \\ \alpha_1 c_{n1} + \alpha_2 c_{n2} + ... + \alpha_n c_{nn} = 0 \end{cases},$$

în necunoscutele $\alpha_1, ..., \alpha_n$, care trebuie să admită numai soluţia banală, ceea ce implică $\det C \neq 0$ (corolar 6.3.1). ■

PROPOZIŢIA 7.2. *Dacă C este matricea de trecere de la baza B la baza B', atunci C^{-1} este matricea de trecere de la baza B' la baza B.*

Demonstraţie. Fie D matricea de trecere de la baza B' la baza B. Vom arăta că $D = C^{-1}$.

Ţinând seama de (7.1), putem scrie

$$e_s = d_{1s}e'_1 + d_{2s}e'_2 + ... + d_{ns}e'_n, \forall s = \overline{1,n},$$

deci

$$e_s = d_{1s}\left(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + ... + c_{n1}e_n\right) + d_{2s}\left(c_{12}e_1 + ... + c_{n2}e_2\right) + \\ +... + d_{ns}\left(c_{1n}e_1 + ... + c_{nn}e_n\right), \forall s = \overline{1,n}.$$

Aceste egalităţi se mai scriu

$$e_s = \left(d_{1s}c_{11} + d_{2s}c_{12} + ... + d_{ns}c_{1n}\right)e_1 + ... + \left(d_{1s}c_{n1} + ... + d_{ns}c_{nn}\right)e_n, \forall s = \overline{1,n}.$$

Cum B este bază în V, rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}d_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = \overline{1,n}.$$

Prin urmare $CD = I_n$, unde I_n este matricea unitate. Cum C este inversabilă, rezultă $D = C^{-1}$. ■

PROPOZIŢIA 7.3. *Fie $x \in V$ şi $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, x = \sum\limits_{j=1}^{n} x'_j e'_j$ sunt reprezentările lui x în cele două baze B şi B'. Atunci are loc*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

C fiind matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Demonstraţie. Folosind (7.1) putem scrie

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_j\right)e_i.$$

Pe de altă parte $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi scrierea lui x în baza B fiind unică, rezultă

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_j, \forall i = \overline{1,n},$$

ceea ce este echivalent cu (7.2). ■

EXEMPLU. În $\mathbb{R}^3$, fie baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ şi vectorul $x = (1, 2, 3)$. Să determinăm coordonatele vectorului x în baza $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, unde $e'_1 = (1, 0, 1), e'_2 = (1, -1, 0), e'_3 = (2, 0, 1)$. Deoarece $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = 2e_1 + e_3$, rezultă că matricea de trecere de la baza B la baza B' este $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Totodată $e_1 = -e'_1 + e'_3, e_2 = -e'_1 - e'_2 + e'_3, e_3 = 2e'_1 - e'_3$, deci matricea de trecere de la baza B' la baza B este $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dacă, în baza B', $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$, atunci din (7.2) rezultă $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aşadar $x = 3e'_1 - 2e'_2$. ■

8. Metoda lui Gauss pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii algebrice liniare

Să cosiderăm sistemul de ecuaţii algebrice liniare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \tag{8.1}$$

Metoda este de fapt procedeul de eliminare a necunoscutelor pe care îl descriem în continuare.

Să presupunem $a_{11} \neq 0$; atunci putem elimina prima necunoscută x_1 din ecuaţiile $2, 3, ..., m$, înmulţind prima ecuaţie cu factorii:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \ i = \overline{2, m}$$

şi scăzând-o, respectiv din ecuaţiile $2, 3, ..., m$.

Obţinem astfel sistemul echivalent

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)}x_1 + & a_{12}^{(2)}x_2 + a_{13}^{(2)}x_3 + ... + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)} \\ & a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + ... + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & a_{m2}^{(2)}x_2 + a_{m3}^{(2)}x_3 + ... + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)} \end{cases} , \tag{8.2}$$

unde dacă $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $b_i^{(1)} = b_i$, $i = \overline{1, n}$, avem

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} a_{ij}^{(1)} & , \textit{dacă } i \leq 1 \\ 0 & , \textit{dacă } i \geq 2, \ j \leq 1 \\ a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)} & , \textit{dacă } i \geq 2, \ j \geq 2 \end{cases} ,$$

$$b_i^{(2)} = \begin{cases} b_i^{(1)} & , \textit{dacă } i \leq 1 \\ b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)} & , \textit{dacă } i \geq 2 \end{cases} .$$

Dacă $a_{11} = 0$ schimbăm prima ecuaţie a sistemului cu o altă ecuaţie în care coeficientul lui x_1 este nenul. Se observă că prima ecuaţie a sistemului (8.2) coincide cu prima ecuaţie a sistemului (8.1). Dacă $a_{22}^{(2)} \neq 0$, atunci, în mod analog, putem elimina necunoscuta x_2 din ultimele $m-2$ ecuaţii ale sistemului (8.2). Introducând *multiplicatorii*

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}},\ i = \overline{3, m},$$

obţinem sistemul echivalent

$$\text{(8.3)} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} a_{11}^{(3)} x_1 + & a_{12}^{(3)} x_2 + & a_{13}^{(3)} x_3 + ... + a_{1n}^{(3)} x_n = b_1^{(3)} \\ & a_{22}^{(3)} x_2 + & a_{23}^{(3)} x_3 + ... + a_{2n}^{(3)} x_n = b_2^{(3)} \\ & & a_{33}^{(3)} x_3 + ... + a_{3n}^{(3)} x_n = b_3^{(3)} \\ & & .... \\ & & a_{m3}^{(3)} x_3 + ... + a_{mn}^{(3)} x_n = b_m^{(3)} \end{array} \right. ,$$

cu coeficienţii şi termenii liberi

$$a_{ij}^{(3)} = \left\{ \begin{array}{ll} a_{ij}^{(2)} & , \textit{dacă } i \leq 2 \\ 0 & , \textit{dacă } i \geq 3,\ j \leq 2 \\ a_{ij}^{(2)} - m_{i2} a_{2j}^{(2)} & , \textit{dacă } i \geq 3,\ j \geq 3 \end{array} \right.$$

$$\text{respectiv } b_i^{(3)} = \left\{ \begin{array}{ll} b_i^{(2)} & , \textit{dacă } i \leq 2 \\ b_i^{(2)} - m_{i2} b_2^{(2)} & , \textit{dacă } i \geq 3 \end{array} \right. .$$

Dacă $a_{22}^{(2)} = 0$ schimbăm ecuaţia a doua cu una din ecuaţiile $3, 4, ..., m$ în care coeficientul lui x_2 este nenul. Primele două ecuaţii ale sistemului (8.3) coincid cu primele două ecuaţii ale sistemului (8.2). Procedeul continuă. Elementele $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(2)}$, $a_{33}^{(3)}$, ... se numesc *elemente pivot*. Dacă $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, notând cu $A^{(k+1)}$ matricea sistemului echivalent din care au fost eliminaţi x_1, x_2, ..., x_k (adică matricea sistemului după $k < m$ paşi), prin $b^{(k+1)}$ vectorul coloană al termenilor liberi corespunzători, atunci elementele $a_{ij}^{(k+1)}$ ale lui $A^{(k+1)}$ şi $b_i^{(k+1)}$ ale lui $b^{(k+1)}$ se calculează recursiv prin formulele

$$a_{ij}^{(k+1)} = \left\{ \begin{array}{ll} a_{ij}^{(k)} & , \textit{dacă } i \leq k \\ 0 & , \textit{dacă } i \geq k+1,\ j \leq k \\ a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} & , \textit{dacă } i \geq k+1,\ j \geq k+1 \end{array} \right. ,$$

$$b_i^{(k)} = \left\{ \begin{array}{ll} b_i^{(k)} & , \textit{dacă } i \leq k \\ b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} & , \textit{dacă } i \geq k+1 \end{array} \right. .$$

unde $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, $i = \overline{k+1, m}$. Prin urmare, matricea sistemului, după efectuarea pasului k, va fi

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2k}^{(2)} & a_{2,k+1}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & & & \\ & & & & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \ldots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ & 0 & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & a_{m,k+1}^{(k+1)} & \ldots & a_{mn}^{(k+1)} \end{pmatrix},$$

$$b^{(k+1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ . \\ . \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k+1)} \\ b_{k+2}^{(k+1)} \\ . \\ . \\ b_m^{(k+1)} \end{pmatrix}.$$

Dacă $a_{kk}^{(k)} = 0$ şi cel puţin unul din elementele de pe coloana k şi de pe liniile $k+1$, $k+2$, ..., m este nenul, fie acesta $a_{rk}^{(k)}$, atunci permutăm liniile k şi r între ele şi continuăm eliminarea. Pe parcursul algoritmului pot apare următoarele situaţii:

-coeficienţii unei ecuaţii devin toţi nuli, iar termenul liber corespunzător este nenul, caz în care sistemul este incompatibil;

-coeficienţii unei ecuaţii sunt toţi nuli şi termenul liber corespunzător este nul, atunci ecuaţia respectivă este consecinţă a celorlaltor (deci inutilă).

Dacă $m = n$ şi sistemul este compatibil, atunci este compatibil nedeterminat. Dacă $m = n$ şi rangul matricei sistemului este n, atunci toţi pivoţii sunt nenuli.

După $n-1$ paşi vom obţine sistemul triunghiurilor echivalent cu sistemul (8.1):

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + & a_{12}^{(1)}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases},$$

care se poate rezolva regresiv:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$
$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}}, \; i = n-1, \ldots, 1. \tag{8.4}$$

Algoritmul lui Gauss ne permite să rezolvăm simultan p sisteme de ecuaţii cu aceeaşi matrice A, dar cu termeni liberi diferiţi. În acest caz, la fiecare pas operaţiile aplicate asupra termenului liber se aplică tuturor celor p vectori coloană termeni liberi. După eliminare vom obţine p sisteme triunghiulare. Un caz particular al acestui procedeu este inversarea unei matrice. Într-adevăr, dacă în relaţia

$AA^{-1} = I_n$, notăm $A^{-1} = X$, atunci $AX = I_n$ sau $Ax_j = e_j$ unde x_j şi e_j sunt coloanele j din X respectiv I_n. Astfel, coloanele matricei A^{-1} sunt soluţiile sistemelor liniare cu termenii liberi respectiv egali cu coloanele matricii unitate.

OBSERVAŢII. 1) Am văzut mai sus că este posibil să fie necesar să efectuăm permutări de linii când un element pivot este nul. Din motive de stabilitate numerică, trebuie să efectuăm permutări de linii nu numai când un element pivot este exact egal cu zero ci şi când el este aproape egal cu zero. De asemenea, pentru a preveni ca influenţa erorilor de rotunjire să devină catastrofală, este, de obicei, necesar să alegem elementul pivot, la efectuarea pasului k, astfel: se alege numărul r egal sau cel mai mic număr întreg pentru care

$$\left|a_{rk}^{(k)}\right| = \max_{k\le i\le m}\left|a_{ik}^{(k)}\right|$$

şi se permută liniile k şi r. Deci, alegem ca pivot, la fiecare pas k, primul element maxim în modul întâlnit sub elementul $a_{kk}^{(k)}$.

2) Dacă $m = n$, atunci determinantul matricei sistemului (8.1) este egal cu $(-1)^s a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} ... a_{nn}^{(n)}$ unde s este numărul total de permutări de linii efectuate (evident când se aplică pivotarea).

3) Când $m = n$, există cazuri când pivotarea nu este necesară şi anume când:
- matricea sistemului este slab diagonal dominantă;
- matricea sistemului este simetrică şi pozitiv definită.

În încheiere, menţionăm că metoda lui Gauss este o metodă *directă* de rezolvare a sistemelor, adică după un număr finit de operaţii logice şi aritmetice şi în ipoteza absenţei rotunjirilor, metoda dă soluţia exactă a sistemului.

EXEMPLE. 1. Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}.$$

Să rezolvăm sistemul prin metoda lui Gauss. Vom elimina pe rând necunoscutele x_1, x_2, x_3. Pentru simplitatea scrierii, operaţiile necesare vor fi efectuate asupra matricei extinse a sistemului.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{11}{2} & -3 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Deci ultima ecuaţie este consecinţă a celorlalte. Sistemul este compatibil determinat. Avem de rezolvat sistemul superior triunghiular

$$\begin{cases} 2x_1 \quad +5x_2 \quad -8x_3 = 8 \\ \qquad\quad -7x_2 \quad +7x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 = 1 \end{cases},$$

care are soluţia $(3, 2, 1)$.

2. Aceeaşi problemă, pentru sistemul

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x_1- & 2x_2+ & & x_4 = & -3 \\ 3x_1- & x_2- & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1+ & x_2- & 2x_3- & x_4 = & 4 \\ x_1+ & 3x_2- & 2x_3- & 2x_4 = & 7 \end{array}\right. .$$

Procedând ca mai sus, obţinem succesiv

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ultimele două ecuaţii sunt consecinţă a primelor două. sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Sistemul:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + \qquad\qquad x_4 = -3 \\ \qquad\;\; 5x_2 - \;\; 2x_3 - \;\; 3x_4 = 10 \end{array}\right.$$

este echivalent cu sistemul iniţial şi are o infinitate de soluţii:

$$x_1 = 1 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4,\ x_2 = 2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}.$$

3. Aceeaşi problemă pentru sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + \;\; 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + \quad x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - \;\; 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{array}\right. .$$

Obţinem succesiv:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{23}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{46}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{38}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{23}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Sistemul este incompatibil.

4. Să se calculeze inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema se reduce la rezolvarea simultană a trei sisteme de ecuaţii cu aceeaşi matrice, iar termenii liberi sunt coloanele matricei unitate I_3. Obţinem succesiv:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Pentru rezolvarea celor trei sisteme, vom căuta ca prin transformări elementare asupra liniilor să obţinem în stânga, matricea unitate. Deci

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 + L_3 \to L_1 \\ L_2 + L_3 \to L_1 \\ -L_3 \to L_3 \end{array} \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

deci $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Probleme

1. Fie $V = (0, \infty)$. Să se arate că în raport cu operaţiile $x \oplus y = xy$, $x, y \in V$ şi $\alpha \otimes x = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in V$, V devine spaţiu vectorial real.

2. Fie V un K-spaţiu vectorial şi $v \in V$, $v \neq 0_V$. Definim $x \oplus y = x + y - v$, $x, y \in V$, $\alpha \otimes x = \alpha x + f(\alpha) v$, $\alpha \in K$, $x \in V$. Să se determine $f(\alpha)$ astfel încât V înzestrat cu cele două operaţii să fie spaţiu vectorial.

3. Să se precizeze care din următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$?

a) $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$; b) $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$;
c) $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, |x_1| + |x_2| = 1\}$; d) $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, x_1^2 - x_2 = 0\}$;
e) $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3)\,;\, x_1 = 2x_2\}$.

4. În $M_n(\mathbb{R})$, fie $S_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^T = A\}$, $S_2 = \{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^T = -A\}$. Să se arate că S_1 şi S_2 sunt subspaţii vectoriale ale lui $M_n(\mathbb{R})$ şi $M_n(\mathbb{R}) = S_1 \oplus S_2$. Să se găsească dimensiunile acestor subspaţii.

5. Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ şi $S = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,\ 1 \leq i \leq m\}$. Să se arate că S este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

6. Fie V un spaţiu vectorial şi v_1, v_2, $v_3 \in V$ liniar independenţi. Să se arate că şi vectorii $w_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $w_2 = v_1 + v_2 - v_3$, $w_3 = v_1 - v_2 + v_3$ sunt liniar independenţi.

7. Să se arate că vectorii $v_1 = (1, 2, 2, 1)$, $v_2 = (5, 6, 6, 5)$, $v_3 = (-1, -3, 4, 0)$, $v_4 = (0, 4, -3, -1)$ sunt liniar dependenţi. Să se scrie v_4 ca o combinaţie liniară de v_1, v_2, v_3.

8. Să se arate că vectorii $v_1 = (2, 1, -3)$, $v_2 = (3, 2, -5)$, $v_3 = (1, -1, 1)$ formează o bază a lui $\mathbb{R}^3$. Să se determine coordonatele vectorilor $x = (4, 4, -9)$

şi $y = (6, 2, -7)$ în această bază. Aceeaşi problemă pentru vectorii $v_1' = (1, 2, 1)$, $v_2' = (1, 1, 1)$, $v_3' = (1, 3, 2)$, $x' = (2, 1, 1)$, $y' = (1, 1, 0)$.

9. Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3, v_4 formează o bază a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine coordonatele vectorului x în raport cu această bază:
a) $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 2, 1)$, $v_4 = (1, 3, 2, 3)$; $x = (1, -4, -2, -5)$;
b) $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 1, -1, 1)$; $x = (0, 0, 0, 1)$.

10. Sunt liniar independente matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$? Dar funcţiile $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = e^{2x}$?

11. Să se determine dimensiunea şi o bază a subspaţiului generat de vectorii:
a) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (0, 1, 1)$, $v_4 = (0, 0, 0)$;
b) $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (2, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1, 1)$, $v_4 = (1, 2, 3, 4)$, $v_5 = (0, 1, 2, 3)$.

12. Să se determine dimensiunile sumei şi intersecţiei subspaţiilor generate:
a) $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (3, 4, -2)$, $u_3 = (2, 2, -1)$, respectiv $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$;
b) $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 3, 1, 3)$, respectiv $v_1 = (1, 2, 0, 2)$, $v_2 = (1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (3, 1, 3, 1)$.

13. Să se completeze sistemul format din vectorii $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (4, 1, 1)$ la o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

14. Să se arate că funcţiile $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t^2 + 1$, $f_3(t) = t^2 + t$ formează o bază în spaţiul polinoamelor de grad cel mult 2. Să se determine coordonatele funcţiilor $t^2 + 2t + 4$ respectiv $t^2 + 3$ în raport cu această bază.

15. Să se găsească o bază în spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_4 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$.

16. În spaţiul vectorial al funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să se arate că funcţiile $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \cos t$, $f_3(t) = t$ sunt liniar independente.

17. Să se găsească rangul matricelor:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Fie S_1 şi S_2 subspaţiile vectoriale ale lui $\mathbb{R}^4$ date de: $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 2x_4\}$. Să se găsească dimensiunile şi baze ale acestor subspaţii, precum şi ale subspaţiilor $S_1 \cap S_2$, $S_1 + S_2$.

19. În $\mathbb{R}^2$ fie $x = 2f_1 + f_2$, unde $f_1 = (-1, 1)$, $f_2 = (2, 3)$. Să se determine coordonatele lui x în baza $\{g_1, g_2\}$, unde $g_1 = (1, 3)$, $g_2 = (3, 8)$.

20. Să se determine matricea de trecere de la baza $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ la baza $B' = \{g_1, g_2, g_3\}$, dacă $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$, $g_1 = (3, 0, 2)$,

$g_2 = (-1, 1, 4)$, $g_3 = (3, 5, 2)$. Cum se schimbă coordonatele unui vector când se trece de la baza B' la baza B?

CHAPTER 3

Aplicaţii liniare

Alături de noţiunea de spaţiu vectorial, noţiunea de aplicaţie liniară sau de operator liniar are o importanţă deosebită în algebra liniară şi în aplicaţiile acesteia, ca "purtător de informaţie liniară" de la un spaţiu vectorial la altul. Vom prezenta acest concept de bază în cele ce urmează.

1. Aplicaţii liniare. Izomorfisme de spaţii vectoriale

DEFINIŢIE**.** Fie V, W două subspaţii vectoriale peste acelaşi corp K. Se numeşte *aplicaţie liniară* sau *operator liniar* (sau *morfism* de spaţii vectoriale) o funcţie $T : V \longrightarrow W$ cu proprietăţile:

a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$, $\forall x, y \in V$; $\quad$ (T este *aditivă*)

b) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall \alpha \in K$, $x \in V$. $\quad$ (T este *omogenă*)

Dacă, în plus, T este bijectivă, atunci T se numeşte *izomorfism* de spaţii vectoriale, iar spaţiile V şi W se numesc *izomorfe* şi se notează $V \simeq W$.

Vom folosi de asemenea, notaţia Tx în loc de $T(x)$, dacă nu este pericol de confuzie.

O aplicaţie liniară $T : V \longrightarrow V$ se numeşte *transformare liniară* sau *operator liniar* al lui V sau *endomorfism* al lui V. Se numeşte *automorfism* al lui V orice endomorfism bijectiv al lui V.

O aplicaţie liniară $f : V \longrightarrow K$ se numeşte *formă liniară* pe V sau *funcţională liniară* pe V.

Vom nota cu $\mathcal{L}(V, W)$ mulţimea aplicaţiilor liniare de la V la W şi cu $\mathcal{L}(V)$ mulţimea endomorfismelor lui V.

OBSERVAŢII. 1) Dacă în condiţia a) punem $x = 0_V$, se obţine $T(0_V) = 0_W$. De asemenea, luând $\alpha = -1$ în b), se obţine $T(-x) = -Tx$.

2) $T : V \longrightarrow W$ este liniară dacă şi numai dacă $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$, $\forall x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$.

EXEMPLE. 1) Aplicaţia $\theta : V \longrightarrow W$, $\theta(x) = 0_W$, $\forall x \in V$, este liniară şi se numeşte *aplicaţia nulă* de la V la W.

2) Aplicaţia identică, $1_V : V \longrightarrow V$, $1_V(x) = x$, $\forall x \in V$ este liniară. Mai mult, este automorfism al lui V.

3) Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice fixată, $A = (a_{ij})$. Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, definim:

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad Tx = (\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i).$$

T este o aplicaţie liniară numită *aplicaţia liniară asociată matricei* A. De exemplu, aplicaţia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1 + x_2+$ $+x_3)$, este aplicaţia generată de matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Fie V un K-spaţiu vectorial şi α un element nenul din K. Aplicaţia $T_\alpha : V \longrightarrow V$, $T_\alpha(x) = \alpha x$ este un automorfism al lui V şi se numeşte *omotetie de raport* α.

5) Fie $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Pentru orice k, $1 \leq k \leq n$, aplicaţia $p_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_k(x) = x_k$ este o aplicaţie liniară numită *proiecţie canonică de indice* k.

6) Fie $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}^n$ numere fixate; aplicaţia $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x_1, ..., x_n) =$ $= c_1x_1 + ... + c_nx_n$ este o formă liniară pe $\mathbb{R}^n$.

7) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Aplicaţia $D : \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $Df = f'$, $\forall f \in$ $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ este o aplicaţie liniară (numită operatorul de derivare). De asemenea $\mathbf{I} : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{I}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ este o funcţională liniară.

8) În spaţiul vectorilor liberi $\mathcal{V}_3$, considerăm baza canonică $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Dacă $\vec{v} \in \mathcal{V}_3$ atunci $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Aplicaţia $T : \mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ este, evident, un izomorfism de spaţii vectoriale.

PROPOZIŢIA 1.1. *Dacă V, W sunt K-spaţii vectoriale, atunci $\mathcal{L}(V, W)$ are o structură naturală de K-spaţiu vectorial.*

Demonstraţie. Fie $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $\lambda \in K$. Definim $T + S$, $\lambda T : V \longrightarrow W$ astfel: $(T + S)(x) = Tx + Sx$, $\forall x \in V$ şi $(\lambda T)(x) = \lambda Tx$, $\forall x \in V$. $T + S$ este o aplicaţie liniară. Într-adevăr,

$$(T + S)(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x + \beta y) + S(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty + \alpha Sx + \beta Sy =$$

$$= \alpha(Tx + Sx) + \beta(Ty + Sy) = \alpha(T + S)(x) + \beta(T + S)(x), \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in K.$$

Similar,

$$(\lambda T)(\alpha x + \beta y) = \lambda T(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha Tx + \beta Ty) = \alpha(\lambda Tx) + \beta(\lambda Ty) =$$

$$= \alpha(\lambda T)(x) + \beta(\lambda T)(y), \forall \alpha, \beta \in K, x, y \in V.$$

Se verifică uşor că $\mathcal{L}(V, W)$ înzestrat cu cele două operaţii are o structură de K-spaţiu vectorial. ■

PROPOZIŢIA 1.2. *Fie V_i, $i = 1, 2, 3$, trei K-spaţii vectoriale şi $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, $S \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Atunci:*

a) *Aplicaţia $S \circ T$ este liniară;*

b) *Dacă T este izomorfism, atunci $T^{-1} : V_2 \longrightarrow V_1$ este un izomorfism de spaţii vectoriale.*

Demonstraţie. a) Din liniaritatea lui T şi S, rezultă că pentru orice $x, y \in V_1$, $\alpha, \beta \in K$ avem:

$$(S \circ T)(\alpha x + \beta y) = S(T(\alpha x + \beta y)) = S(\alpha Tx + \beta Ty) =$$

$$= \alpha S(Tx) + \beta S(Ty) = \alpha(S \circ T)(x) + \beta(S \circ T)(y).$$

b) Deoarece inversa unei aplicaţii bijective este bijectivă, este suficient să arătăm că T^{-1} este liniară. Fie $x, y \in V_2$, $\alpha, \beta \in K$. Există $x', y' \in V_1$ astfel încât $x = Tx'$, $y = Ty'$. Atunci:

$$T^{-1}(\alpha x + \beta y) = T^{-1}(\alpha Tx' + \beta Ty') = T^{-1}(T(\alpha x' + \beta y')) =$$
$$= \alpha x' + \beta y' = \alpha T^{-1}x + \beta T^{-1}y,$$

deci T^{-1} este liniară. ■

TEOREMA 1.3. a) *Orice K-spaţiu vectorial de dimensiune n este izomorf cu K^n.*

b) *Două K-spaţii vectoriale finit dimensionale V şi W sunt izomorfe dacă şi numai dacă* $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

Demonstraţie. a) Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi $x \in K^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Definim $T : K^n \longrightarrow V$ astfel $Tx = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$. Vom arăta că T este un izomorfism de spaţii vectoriale. T este surjectivă, deoarece, dacă $v \in V$ atunci există $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $v = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$. Există, deci, $x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$ astfel ca $Tx = v$. De asemenea, T este injectivă, deoarece dacă $x, y \in K^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ şi $Tx = Ty$, atunci $(x_1 - y_1)e_1 + +... + (x_n - y_n)e_n = 0_V$. Cum sistemul de vectori $\{e_1, ..., e_n\}$ este liniar independent, rezultă $x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$, adică $x = y$. Aşadar T este bijectivă.

Vom arăta acum că T este liniară. Fie $x, y \in K^n$ ca mai sus şi $\alpha, \beta \in K$. Atunci:

$$T(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1)e_1 + ... + (\alpha x_n + \beta y_n)e_n = \alpha(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) +$$
$$+ \beta(y_1 e_1 + ... + y_n e_n) = \alpha Tx + \beta Ty,$$

deci T este liniară. În concluzie $K^n \simeq V$.

b) " $\Longrightarrow$ " Să presupunem că $V \simeq W$, deci există $T : V \longrightarrow W$ izomorfism. Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ bază în V. Vom arăta că $B' = \{Te_1, ..., Te_n\}$ este bază în W, de unde $\dim_K(V) = \dim_K(W)$. T fiind surjectivă, pentru orice $y \in W$ există $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ astfel încât $y = Tx = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot T(e_i)$ (T fiind liniară). Atunci B' este un sistem de generatori în W. Pe de altă parte, dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i Te_i = 0_W$, atunci $T(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = 0_W = T0_V$. Cum T este injectivă, rezultă $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i Te_i = 0_V$ şi cum B este liniar independentă, vom avea $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Aşadar B' este liniar independentă şi, în consecinţă, bază în W.

" $\Longleftarrow$ " Dacă $\dim_K(V) = \dim_K(W) = n$, conform *a)*, există $S_1 : K^n \longrightarrow V$, $S_2 : K^n \longrightarrow W$ izomorfisme de spaţii vectoriale, Atunci $T = S_2 \circ S_1^{-1}$ este un izomorfism. ■

OBSERVAŢIE. Izomorfismul $U : V \longrightarrow K^n$, $x \in V$, $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, $Ux = (x_1, ..., x_n)$ se numeşte *izomorfism canonic.*

2. Nucleu şi imagine

Fie V, W două K-spaţii vectoriale şi $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

TEOREMA 2.1. a) *Dacă M este subspaţiu vectorial al lui V, atunci $T(M)$ este subspaţiu vectorial al lui W;*

b) *Dacă* N *este subspaţiu vectorial al lui* W*, atunci* $T^{-1}(N) = \{x \in V;\ Tx \in N\}$ *este subspaţiu vectorial al lui* V*.*

*Demonstraţie***.** a) Cum $0_V \in M$, rezultă $T0_V = 0_W \in T(M)$, deci $T(M) \neq \phi$. Fie acum $y, y' \in T(M)$ şi $\alpha, \beta \in K$. Există $x, x' \in M$ astfel ca $Tx = y$, $Tx' = y'$. T fiind liniară, rezultă $\alpha y + \beta y' = \alpha Tx + \beta Tx' = T(\alpha x + \beta x')$. Cum M este subspaţiu vectorial al lui V, rezultă $\alpha x + \beta x' \in M$, deci $\alpha y + \beta y' \in T(M)$, adică $T(M)$ este subspaţiu vectorial al lui W.

b) $0_V \in T^{-1}(N)$, deoarece $0_W \in N$, deci $T^{-1}(N) \neq \phi$. Fie $x, y \in T^{-1}(N)$, $\alpha, \beta \in K$. Atunci $Tx, Ty \in N$, deci $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \in N$, deoarece N este subspaţiu vectorial al lui W. În consecinţă, $\alpha x + \beta y \in T^{-1}(N)$.■

DEFINIŢIE**.** Subspaţiul vectorial $T^{-1}(0_W) = \{x \in V; Tx = 0_V\}$ se numeşte *nucleul* lui T şi se notează $KerT$. De asemenea, subspaţiul $T(V) = \{y \in W;\ \exists x \in V$ *a.î.* $Tx = y\}$ se numeşte *imaginea* lui T şi se notează $\operatorname{Im} T$.

Evident, $KerT \subset V$ şi $\operatorname{Im} T \subset W$.

TEOREMA 2.2**.** a) T *injectivă* $\Longleftrightarrow KerT = \{0_V\}$.
b) T *surjectivă* $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} T = W$.

*Demonstraţie***.** a)" $\Longrightarrow$ " Fie $x \in KerT$, deci $Tx = 0_W = T0_V$. Cum T este injectivă, rezultă $x = 0_V$, deci $KerT = \{0_V\}$.

" $\Longleftarrow$ " Fie $x, y \in V$ astfel ca $Tx = Ty$. Atunci $T(x - y) = 0_V$, adică $x - y \in KerT$, deci $x - y = 0_V$. Aşadar $x = y$ şi T injectivă.

b) rezultă imediat din definiţia lui $\operatorname{Im} T$.■

LEMĂ 2.3**.** *Dacă* $\dim_K V = n$ *şi* $\{e_1, ..., e_n\}$ *este o bază a lui* V*, atunci* $\{Te_1, ..., Te_n\}$ *este un sistem de generatori pentru* $\operatorname{Im} T$*.Acest sistem de generatori va fi bază în* $\operatorname{Im} T$ *dacă şi numai dacă* T *este injectivă.*

*Demonstraţie***.** Într-adevăr, dacă $y \in \operatorname{Im} T$, există $x \in V$ astfel ca $Tx = y$. Dar $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1, n}$, deci $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot Te_i$, adică $\{Te_1, ..., Te_n\}$ este sistem de generatori în $\operatorname{Im} T$. Dacă T este injectivă şi $\alpha_1 Te_1 + ... + \alpha_n Te_n = 0_W$, atunci $T(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) = 0_W = T(0_V)$, deci $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0_V$. Cum $\{e_1, ..., e_n\}$ este liniar independentă, rezultă $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, adică $\{Te_1, ..., Te_n\}$ este liniar independentă, deci bază în $\operatorname{Im} T$.

Reciproc, presupunem că $\{Te_1, ..., Te_n\}$ este liniar independentă. Fie $x \in KerT$, $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ şi cum $Tx = 0_W$, rezultă $\alpha_1 Te_1 + ... + \alpha_n Te_n = 0_W$. Cum $\{Te_1, ..., Te_n\}$ este liniar independentă, rezultă $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, deci $x = 0_V$, adică T este injectivă. ■

OBSERVAŢIE**.** Fie V astfel ca $\dim_K(V) = n$. Cum $KerT \subset V$, conform teoremelor 2.1 şi 5.1, cap. 2, $\dim_K(KerT) \leq n$. Conform teoremelor 2.1 şi 4.2, cap. 2, $\dim_K(\operatorname{Im} T) \leq n$.

Putem deci formula:

DEFINIŢIE**.** Presupunem că $\dim_K(V) = n$. Dacă T este o aplicaţie liniară $T : V \longrightarrow W$, atunci $\dim_K(KerT)$ se numeşte *defectul* lui T şi se notează $defT$. De asemenea, $\dim_K(\operatorname{Im} T)$ se numeşte *rangul* lui T şi se notează $rangT$.

TEOREMA 2.4. (teorema rang-defect) *Fie* V,W *două* K-*spaţii vectoriale cu* $\dim_K(V) = n$ *şi* $T \in \mathcal{L}(V, W)$. *Atunci:*

$$\dim_K(V) = defT + rangT.$$

Demonstraţie. Fie $p = defT$, $0 \leq p \leq n$, $B = \{e_1, ..., e_n\}$ bază în $KerT$, deci $Te_i = 0$, $1 \leq i \leq p$. Completăm baza B la o bază $B' = \{e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n\}$ a lui V. Vom demonstra că $B'' = \{Te_{p+1}, ..., Te_n\}$ formează o bază în $\operatorname{Im} T$. Vom arăta mai întâi că B'' este liniar independentă. Dacă $\alpha_{p+1}Te_{p+1} + ... + \alpha_n Te_n = 0_W$, rezultă $T(\alpha_{p+1}e_{p+1} + ... + \alpha_n e_n) = 0_W$, deci $\alpha_{p+1}e_{p+1} + ... + \alpha_n e_n \in KerT$. Prin urmare există $\alpha_1, ..., \alpha_p \in K$ astfel încât $\alpha_{p+1}e_{p+1} + ... + \alpha_n e_n = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p$ sau $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p + (-\alpha_{p+1})e_{p+1} + ... + (-\alpha_n)e_n = 0_V$. B' fiind bază în V, rezultă $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, deci B'' este liniar independentă. Să arătăm acum că B'' este sistem de generatori în $\operatorname{Im} T$. Dacă $y \in \operatorname{Im} T$ atunci există $x \in V$ astfel ca $Tx = y$. Dar $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ unde $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i \in KerT$. T fiind liniară, rezultă $y = Tx = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i Te_i$, deci B'' este bază în $\operatorname{Im} T$. Atunci $rangT = n - p =$ $= \dim_K(V) - defT$. ■

COROLAR 2.4.1. *Dacă* V *este un* K-*spaţiu vectorial de dimensiune* n *şi* T *un endomorfism al lui* V, *atunci* T *este injectiv* $\Longleftrightarrow$ T *este surjectiv.*

Demonstraţie. T este injectiv $\Longleftrightarrow KerT = \{0_V\} \Longleftrightarrow defT = 0 \Longleftrightarrow rangT =$ $n \Longleftrightarrow \operatorname{Im} T = V \Longleftrightarrow T$ surjectiv.

EXEMPLU. Fie $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1 + x_2 -$ $-x_3, x_1 - x_2 + x_3, 5x_1 - x_2 + x_3)$. Se verifică uşor că T este liniară. Pe de altă parte $x \in KerT$ dacă şi numai dacă, coordonatele sale verifică sistemul liniar omogen $\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array}$. Soluţia generală a acestui sistem fiind $x_1 = 0$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, rezultă că $KerT = \{x \in \mathbb{R}^3; x = t(0, 1, 1),\ t \in \mathbb{R}\} = Sp(\{u\})$, unde $u = (0, 1, 1)$. Atunci $defT = 1$, o bază în $KerT$ fiind vectorul u. Conform teoremei 2.3, rezultă că $rangT = 2$. După lema de mai sus, $Te_1 = (1, 1, 5)$, $Te_2 =$ $= (1, -1, -1)$, $Te_3 = (-1, 1, 1)(\{e_1, e_2, e_3\}$ fiind bază canonică în $\mathbb{R}^3)$ formează un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} T$. Deci doar doi sunt liniar independenţi, de exemplu Te_1 şi Te_2, aceştia constituind o bază în $\operatorname{Im} T$.

COROLAR 2.4.2. *Fie* V, V', V'' *trei* K-*spaţii vectoriale finit dimensionale şi* $S : V \longrightarrow V'$, $T : V' \longrightarrow V''$ *două aplicaţii liniare. Atunci:*

a) $rang(T \circ S) \leq rangT$;
b) $rang(T \circ S) \leq rangS$;
c) *dacă* T *este izomorfism, atunci* $rang(T \circ S) = rangS$;
d) *dacă* S *este izomorfism, atunci* $rang(T \circ S) = rangT$.

Demonstraţie. Evident, $T \circ S$ este o aplicaţie liniară. a) Deoarece $S(V) \subset V'$, rezultă $T(S(V)) \subset T(V')$. Atunci:

$$rang(T \circ S) = \dim_K(T \circ S)(V) \leq \dim_K T(V') = rangT.$$

b) Cum $KerS \subset Ker(T \circ S)$, rezultă $defS \leq def(T \circ S)$. Conform teoremei rang-defect,

$$rang(T \circ S) = \dim_K(V) - def(T \circ S) \leq \dim_K(V) - defS = rangS.$$

c) Deoarece T este izomorfism, există $T^{-1} : V'' \longrightarrow V'$. Putem scrie $S = T^{-1} \circ$ $\circ (T \circ S)$. Conform b) $rang S \leq rang(T \circ S) \leq rang S$. d) Se scrie $T = (T \circ S) \circ S^{-1}$.■

3. Matricea asociată unei aplicaţii liniare

Vom arăta că dacă V şi W sunt K-spaţii vectoriale finit dimensionale, atunci $\mathcal{L}(V, W)$ este izomorf cu un spaţiu de matrice. Fie deci $\dim_K(V) = n$, $B = = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază fixată în V şi $\dim_K(W) = m$, $C = \{f_1, ..., f_m\}$ o bază fixată în W.

Dacă $T \in \mathcal{L}(V, W)$, atunci pentru orice $j, 1 \leq j \leq n, Te_j \in W$, deci există scalarii $a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq m$, unic determinaţi, (fiind coordonatele vectorilor $Te_j, 1 \leq j \leq n$, în baza C) astfel ca:

$$Te_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.1}$$

DEFINIŢIE. Se numeşte *matricea lui T în raport cu bazele B şi C*, matricea $A_T^{B,C} = (a_{ij})$ de tip (m, n) a cărei coloană j este constituită din coordonatele vectorului Te_j în raport cu baza C. Dacă $V = W$ şi $B = C$, vom scrie $A_T^{B,B} = A_T^B$ şi vom spune că A_T^B este *matricea endomorfismului T în raport cu baza B*.

Aşadar matricea lui T depinde de bazele B şi C. Vom omite indicii când nu este pericol de confuzie. Numărul liniilor matricei A ataşată aplicaţiei liniare $T : V \to W$ este egal cu dimensiunea lui W, iar numărul coloanelor cu dimensiunea lui V. Evident, în cazul unui endomorfism numărul liniilor coincide cu numărul coloanelor, deci matricea este pătratică. Vom nota cu $M_n(K)$ mulţimea matricelor de tip (n, n).

EXEMPLE. 1) Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-x, -y)$ (simetria în raport cu originea). Considerăm în $\mathbb{R}^2$, baza canonică $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Să determinăm matricea endomorfismului T în baza $\{e_1, e_2\}$. Cum $Te_1 = -e_1, Te_2 = = -e_2$ rezultă că matricea lui T în baza $\{e_1, e_2\}$ este $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) În $\mathbb{R}^3$ considerăm baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, iar în $\mathbb{R}_1[X]$ baza $\{f_1, f_2\}$, $f_1 = 1$, $f_2 = X$. Dacă $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in$ $\in \mathbb{R}^3$, definim $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[X]$, $Tx = \alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)X$. Să se determine matricea lui T în cele două baze. Deoarece $Te_1 = f_1 + f_2, Te_2 = f_1 + 2f_2, Te_3 =$ $= -f_2$, rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3) Fie V un K-spaţiu vectorial şi $\{e_1, ..., e_n\}$ baza în V. Vom determina matricea aplicaţiei identice $1_V : V \to V, 1_V(x) = x, \forall x \in V$. Deoarece $1_V(e_i) = = e_i$, $1 \leq i \leq n$, rezultă că matricea lui 1_V este matricea unitate:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & ... & ... & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

LEMĂ 3.1. Fie V şi W K-spaţii vectoriale, $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi $\{y_1, ..., y_n\}$ un sistem arbitrar de vectori din W. Există o unică aplicaţie liniară $T : V \to W$ astfel ca $Te_i = y_i, 1 \leq i \leq n$.

Demonstraţie. Dacă $x \in V$, atunci $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Definim $Tx = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. T este evident liniară şi $Te_i = y_i, 1 \leq i \leq n$. Să verificăm unicitatea. Dacă $S : V \to W$ este o altă aplicaţie liniară satisfăcând $Se_i = y_i, 1 \leq i \leq n$, atunci pentru orice $x \in V$ avem:

$$Sx = S(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i S e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = Tx.\blacksquare$$

Lema 3.1 dă posibilitatea de a defini în mod unic o aplicaţie liniară punând în evidenţă doar valorile sale pe o bază a domeniului de definiţie.

TEOREMA 3.2**.** *Fie V şi W două K-spaţii vectoriale de dimensiune n şi respectiv m, $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V, $C = \{f_1, ..., f_n\}$ o bază în W. Aplicaţia $\varphi : \mathcal{L}(V, W) \to M_{m,n}(K)$ care face să corespundă oricărui $T \in \mathcal{L}(V, W)$ matricea $A_T^{B,C}$ definită mai sus este un izomorfism de spaţii vectoriale.*

Demonstraţie. Vom arăta mai întâi că φ este liniară. Fie $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $\alpha, \beta \in K$. Dacă $\varphi(S) = (a_{ij}), \varphi(T) = (b_{ij}), \varphi(\alpha S + \beta T) = (c_{ij})$, atunci:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} f_i = (\alpha S + \beta T)(e_j) = \alpha S e_j + \beta T e_j = \alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i + \beta \sum_{i=1}^{m} b_{ij} f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) f_i, \ j = \overline{1, n}.$$

Cum $\{f_1, ..., f_m\}$ este bază în W, rezultă $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = = \overline{1, n}$, adică $\varphi(\alpha S + \beta T) = \alpha \varphi(S) + \beta \varphi(T)$, deci φ este liniară. Vom arăta că φ este bijectivă. Dacă $T \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $\varphi(T) = 0$, atunci $Te_j = 0_W$, deci dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ atunci $Tx = 0_W$ deci T este aplicaţia nulă. În concluzie $Ker\varphi = \{\theta\}$, deci φ este injectivă. Să arătăm acum că φ este surjectivă. Fie $M = (a_{ij})$ o matrice de tip (m, n) cu coeficienţi în K. Considerăm vectorii y_j din W, $y_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, j = \overline{1, n}$. Conform lemei 3.1 există o aplicaţie liniară unică $T : V \to W$ astfel ca $Te_j = y_j$, $j = \overline{1, n}$, deci astfel ca $\varphi(T) = M$. În consecinţă φ este surjectivă şi teorema este demonstrată. $\blacksquare$

COROLAR 3.2.1**.** *Dacă* $\dim_K(V) = n, \dim_K(W) = m$*, atunci*

$$\dim_K(\mathcal{L}(V, W)) = m \cdot n.$$

Demonstraţie. Se ţine seama de teoremele 3.2 şi 1.3.

TEOREMA 3.3. În ipotezele teoremei 3.2, fie $T \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $M = (a_{ij})$ matricea lui T în raport cu bazele B şi C. Atunci dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$, coordonatele vectorului $y = Tx$ în baza C sunt date de

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = \overline{1, m}. \tag{3.2}$$

Demonstraţie. Avem: $y = Tx = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j T e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j (\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i) = = \sum\limits_{i=1}^{m} (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) f_i$, de unde (3.2).

4. Matrice şi aplicaţii liniare

Vom defini operaţiile cu matrice pornind de la operaţiile corespunzătoare cu aplicaţii liniare. Fie deci V, W două K-spaţii vectoriale, $\{e_1, ..., e_n\}$ baza în V, $\{f_1, ..., f_m\}$ baza în W şi $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$.

Fie A şi B matricele asociate lui S şi T respectiv, în raport cu cele două baze, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.

Egalitatea matricelor. Două aplicaţii liniare S şi T sunt egale dacă şi numai dacă $S(e_j) = T(e_j)$, $j = \overline{1, n}$, adică

$$a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + ... + a_{mj} f_m = b_{1j} f_1 + b_{2j} f_2 + ... + b_{mj} f_m.$$

Cum $\{f_1, ..., f_m\}$ este bază în W, rezultă că $S = T$ dacă şi numai dacă $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, ceea ce conduce la următoarea

DEFINIŢIE. Două matrice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ de tip (m, n) sunt *egale* dacă $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Adunarea matricelor. Fie $C = (c_{ij})$ matricea aplicaţiei liniare $S + T$. Avem:

$$(S + T)(e_j) = S(e_j) + T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) f_i, j = \overline{1, n}.$$

În consecinţă, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Putem deci formula următoarea

DEFINIŢIE. Dacă $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ sunt două matrice de tip (m, n), se numeşte *suma* lui A şi B şi se notează $A + B$, matricea de tip (m, n), ale cărei elemente sunt $a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Înmulţirea unei matrice cu un scalar. Fie $C = (c_{ij})$ matricea aplicaţiei λS, $\lambda \in K$. Atunci $(\lambda S)(e_j) = \lambda \cdot S e_j = \lambda \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij}) f_i$, $j = \overline{1, n}$. Deci $c_{ij} = \lambda a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

DEFINIŢIE. Dacă $A = (a_{ij})$ este o matrice de tip (m, n), *produsul dintre scalarul* λ *şi matricea* A este matricea λA obţinută multiplicând toate elementele lui A cu λ.

Produsul a două matrice. Fie U, V, W trei K-spaţii vectoriale $B_1 = \{e_1, ..., e_n\}$, $B_2 = \{f_1, ..., f_m\}$, $B_3 = \{g_1, ..., g_r\}$ baze ale lui U, V, W respectiv. Fie $S \in \mathcal{L}(U, V)$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matricele lui S şi T în raport cu bazele date.

Vrem să determinăm matricea lui $T \circ S$ în raport cu bazele B_1 şi B_3. Fie $C = (c_{ij})$ matricea asociată lui $T \circ S$. Atunci:

$$(T \circ S)(e_j) = T(S e_j) = T(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} T f_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}(\sum_{i=1}^{r} b_{ik}g_i) = \sum_{i=1}^{r}(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj})g_i,\ j = \overline{1,n}.$$

În consecinţă:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj},\ i = \overline{1,r},\ j = \overline{1,n}. \tag{4.1}$$

DEFINIŢIE. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice de tip (m, n) şi $B = (b_{ij})$ o matrice de tip (r, m). Se numeşte *produsul dintre B şi A* şi se notează BA, matricea de tip (r, n) al cărei element c_{ij} situat la intersecţia liniei i cu coloana j este dat de (4.1).

Să remarcăm că produsul BA nu este definit decât dacă numărul coloanelor lui B este egal cu numărul liniilor lui A. Expresia lui c_{ij} se obţine pornind de la linia i a lui B şi de la coloana j a lui A. Spunem că produsul BA se efectuează după regula "*linii pe coloane*".

PROPOZIŢIA 4.1. *Dacă A, B, C sunt matrice astfel încât diferitele produse de mai jos să fie definite şi $\lambda \in K$, atunci:*
a) $A(BC) = (AB)C$;
b) $A(B + C) = AB + AC$;
c) $(B + C)A = BA + CA$;
d) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.

Demonstraţie. Propoziţia se demonstrează utilizând proprietăţile binecunoscute ale aplicaţiilor liniare. Dacă, de exemplu, $S : K^r \longrightarrow K^s$, $T : K^m \longrightarrow K^r$ şi $U : K^n \longrightarrow K^m$ sunt aplicaţiile liniare ale căror matrice A, B şi C respectiv, în raport cu bazele canonice, atunci matricea lui $S \circ (T \circ U)$ este $A(BC)$, iar matricea lui $(S \circ T) \circ U$ este $(AB)C$. Cum $S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U$ rezultă $A(BC) = (AB)C$.
Celelalte egalităţi se demonstrează asemănător. ■

OBSERVAŢIE. Produsul a două matrice nu este comutativ în general.

Matrice inversabile. O matrice $A \in M_n(K)$ este *inversabilă* sau *regulată* dacă există o matrice $B \in M_n(K)$ astfel încât: $AB = BA = I_n$.
Matricea B este unică, se notează cu A^{-1} şi se numeşte *inversa* lui A.

TEOREMA 4.2. *Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune finită n, $C = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi T un endomorfism al lui V. Pentru ca matricea A a endomorfismului T în raport cu baza C să fie inversabilă, este necesar şi suficient ca T să fie un automorfism al lui V. În acest caz matricea lui T^{-1} în raport cu baza C este A^{-1}.*

Demonstraţie. "$\Longrightarrow$" A fiind inversabilă, există $B \in M_n(K)$ astfel ca $AB = BA = I_n$.Cum aplicaţia $T \longrightarrow A$ de la $\mathcal{L}(V)$ la $B_n(K)$ este bijectivă, fie S aplicaţia liniară asociată lui B. Ea este astfel încât $S \circ T = T \circ S = 1_V$, deci T este bijectivă şi $T^{-1} = S$ şi matricea asociată lui T^{-1} este A^{-1}.
"$\Longleftarrow$" Dacă T este bijectivă, există T^{-1} şi $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = 1_V$, deci dacă B este matricea asociată lui T^{-1}, atunci $AB = BA = I_n$. Prin urmare A este inversabilă şi $A^{-1} = B$.

Rangul unei matrice. Are loc:

TEOREMA 4.3. *Fie V, W două K-spaţii vectoriale având dimensiunile n, respectiv m şi $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este bază în V, $\{f_1, ..., f_n\}$ este bază* *în W, iar A este matricea aplicaţiei liniare T în raport cu cele două baze, atunci $rangT = rangA$.*

Demonstraţie. Deoarece $\{Te_1, ..., Te_n\}$ este sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} T$, ţinând seama de teorema 7.1, cap. 2, $rangT = \dim_K(\operatorname{Im} T) = rang\{Te_1, ..., Te_n\} = rangA$, deoarece coordonatele vectorilor $\{Te_1, ..., Te_n\}$ în baza $\{f_1, ..., f_n\}$ se găsesc pe coloanele matricei A. ■

COROLAR 4.3.1. *O matrice pătratică este inversabilă dacă şi numai dacă este nesingulară.*

Demonstraţie. Fie T endomorfismul care într-o bază $\{e_1, ..., e_n\}$ a unui K-spaţiu vectorial are matricea A. Aplicând corolar 2.4.1 şi teoremele 4.2 şi 4.3 obţinem:

$$A \; inversabil\check{a} \iff T \; automorfism \iff defT = 0 \iff$$

$$\iff n = rangT = rangA \iff \det A \neq 0.$$

5. Transformarea matricei unei aplicaţii liniare la schimbarea bazelor

Fie V, W două K-spaţii vectoriale având dimensiunile n respectiv m şi $T \in \in \mathcal{L}(V, W)$. Dacă $E = \{e_1, ..., e_n\}$ şi $F = \{f_1, ..., f_n\}$ sunt baze fixate în V respectiv W, iar $A = (a_{ij})$ este matricea aplicaţiei liniare T în cele două baze atunci

$$Te_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k, \forall j = \overline{1, n}.$$

Fie acum $E' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ şi $F' = \{f'_1, ..., f'_n\}$ o nouă pereche de baze fixate în V respectiv W şi $A' = (a'_{ij})$ matricea asociată aplicaţiei T în noua pereche de baze, deci

$$Te'_i = \sum_{l=1}^{m} a'_{lj} f'_l, \; \forall i = \overline{1, n}.$$

Vom stabili ce relaţie există între A şi A'.

Fie $C = (c_{ij})$ matricea de trecere de la baza E la baza E' şi $D = (d_{ij})$ matricea de trecere de la baza F la baza F', deci:

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j, \; \forall i = \overline{1, n},$$

$$f'_l = \sum_{k=1}^{m} d_{kl} f_k, \forall l = \overline{1, m}.$$

Atunci, obţinem pe de o parte

$$Te'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} Te_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} (\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} c_{ji}) f_k, \; i = \overline{1, n},$$

iar pe de altă parte,

$$Te'_i = \sum_{l=1}^{m} a'_{li} f'_l = \sum_{l=1}^{m} a'_{li} (\sum_{k=1}^{m} d_{kl} f_k) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{l=1}^{m} d_{kl} a'_{li}) f_k, \; i = \overline{1, n}.$$

Egalând coordonatele vectorilor Te'_i în baza F rezultă

$$\sum_{l=1}^{m} d_{kl}a'_{li} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}c_{ji},\ \forall i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m}.$$

Aceste relaţii mai pot fi scrise $DA' = AC$. D fiind o matrice de schimbare de bază este nesingulară deci

$$A' = D^{-1}AC,$$

această egalitate reprezentând formula de transformare a matricei unei aplicaţii $T \in \mathcal{L}(V,W)$ la schimbarea bazelor. În particular, dacă $V{=}W$, iar $T \in \mathcal{L}(V)$, atunci se lucrează cu aceeaşi bază atât în domeniul de definiţie cât şi în cel de valori. Dacă $E = \{e_1, ..., e_n\}$ este o bază fixată în V, iar $A = (a_{ij})$ este matricea aplicaţiei liniare T în baza E, avem:

$$Te_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\cdot e_k,\ \forall j=\overline{1,n}.$$

Dacă $E' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ este o altă bază fixată în V, iar $A' = (a'_{ij})$ este matricea asociată lui T în baza E', atunci

$$Te'_i = \sum_{l=1}^{n} a'_{lj}e'_l,\ \forall i=\overline{1,n}.$$

Dacă C este matricea de trecere de la baza E la baza E', procedând ca mai sus obţinem $A' = C^{-1}AC$ aceasta fiind formula de transformare a matricei unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(V,W)$ la schimbarea bazei.

DEFINIŢIE. Spunem că două matrice $A, B \in M_n(K)$ sunt *similare* sau *asemenea* dacă există o matrice C nesingulară astfel ca $B = C^{-1}AC$.

Are loc:

PROPOZIŢIA 5.1. *Fie $A, B \in M_n(K)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1) *A şi B sunt similare;*
2) *Există o aplicaţie liniară $T : V \longrightarrow V$, V fiind un K-spaţiu vectorial n-dimensional şi două baze E şi E' în V astfel ca A şi B să fie matricele asociate lui T în cele două baze.*

Demonstraţie. 2)$\Longrightarrow$1) rezultă din cele de mai sus. 1)$\Longrightarrow$2) A şi B fiind similare, fie C o matrice nesingulară astfel încât $CB = AC$. Fie $E = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază fixată în $V = K^n$ şi $T : V \longrightarrow V$ unica aplicaţie liniară care în baza E are matricea asociată A. Deci:

$$Te_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k,\ \forall j=\overline{1,n}.$$

Fie $S : V \longrightarrow V$ aplicaţia liniară care în baza E are matricea C, deci:

$$Se_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j, \forall i=\overline{1,n}.$$

Conform teoremei 4.2, S este un automorfism al lui V. Rezultă că $E' = = \{Se_1, ..., Se_n\}$ este o bază în V. Să notăm $e'_i = Se_i, i=\overline{1,n}$.

Vom arăta că matricea lui T în baza E' este chiar B. Fie deci $D = (d_{ij})$ matricea lui T în baza E', deci

$$Te'_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ji}e'_j = \sum_{j=1}^{n} d_{ji}Se_j = \sum_{j=1}^{n} d_{ji}(\sum_{k=1}^{n} c_{kj}e_k) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} c_{kj}d_{ji})e_k, \forall i = \overline{1,n}.$$

Pe de altă parte:

$$Te'_i = T(Se_i) = T(\sum_{j=1}^{n} c_{ji}e_j) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_{ji})e_k, \forall i = \overline{1,n}.$$

Din unicitatea scrierii vectorilor Te'_i în baza E rezultă

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}d_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_{ji}, \forall k = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$$

Deci $CD = AC$ sau $D = C^{-1}AC = B$. ■

EXEMPLU. Aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are în baza canonică $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să determinăm matricea lui T în baza $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}, e'_1 = (2, 1, -3), e'_2 = (3, 2, -5), e'_3 = (1, -1, 1)$. Matricea de trecere de la baza E la baza E' este:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar } C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci, dacă A' este matricea lui T în baza E', rezultă

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 12 & 19 & -10 \\ -7 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Probleme

1. Să se precizeze care din următoarele aplicaţii sunt liniare:
   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_3, 2x_1 - 3x_2 + 5x_3)$;
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_3, x_1 + 1, x_2 - 1)$;
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3)$;
   d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1, x_2 - x_1, 2x_1 + 3x_2)$;
   e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1^2, x_1 + x_2, x_3^2 + 1)$.

   Pentru aplicaţiile liniare să se determine $KerT$ şi ImT.

2. Să se găsească aplicaţia liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care duce vectorii $u_1 = (2, 0, 3)$, $u_2 = (4, 1, 5)$, $u_3 = (3, 1, 2)$ respectiv în vectorii $v_1 = (4, 5, -2)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 2, -1)$.

3. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3)$. Să se determine $rangT$, $defT$ şi câte o bază în $KerT$ şi ImT.

4. Fie $\overrightarrow{a} \in \mathcal{V}_3$ şi $T : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$, $T\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{a}$. Să se arate că T este liniară. Dacă $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ să se găsească matricele lui T în bazele $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ şi $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

5. Fie $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară, a cărei matrice în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^4$ respectiv $\mathbb{R}^3$ este $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Să se găsească o bază şi dimensiunea subspaţiilor $KerT$ şi ImT.

6. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_2 - 3x_3)$. Să se calculeze $T \circ T$ şi să se precizeze matricea lui T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Să se arate că T este automorfism, să se determine T^{-1} şi matricea acestuia în baza canonică.

7. Fie $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $S(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2 + x_3)$, $T(y_1, y_2) = (y_1, y_1 + y_2, y_2, y_1 - y_2)$. Să se determine $T \circ S$ şi matricele asociate lui S, T şi $T \circ S$ în bazele canonice ale spaţiilor respective.

8. Fie $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Matricea lui S în baza $f_1 = (-3, 7)$, $f_2 = (1, -2)$ este $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, iar matricea lui T în baza $g_1 = (6, -7)$, $g_2 = (-5, 6)$ este $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Să se determine S, T, $S + T$, $S \circ T$, S^{-1}.

9. Matricea unui endomorfism al lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu baza canonică este $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Care este matricea endomorfismului în baza $f_1 = (1, 2, 3)$, $f_2 = (3, 1, 2)$, $f_3 = (2, 3, 1)$?

10. Matricea unui endomorfism al lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu baza $g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (1, 1, 0)$, $g_3 = (1, 1, 1)$este $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Care este matricea acestui endomorfism în baza f_1, f_2, f_3 de la problema anterioară?

CHAPTER 4

Valori şi vectori proprii. Forma canonică a unui endomorfism

În acest capitol ne vom pune problema determinării unei baze a unui spaţiu vectorial V în care matricea unui endomorfism să aibă o formă cât mai simplă: diagonală.

1. Valori şi vectori proprii ai unui endomorfism

Fie V un K-spaţiu vectorial ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $T : V \to V$ un endomorfism.

DEFINIŢIE. Un vector $x \in V, x \neq 0_V$ se numeşte *vector propriu* pentru endomorfismul T, dacă există un scalar $\lambda \in K$ astfel încât

$$Tx = \lambda x. \tag{1.1}$$

Scalarul λ din (1.1) se numeşte *valoare proprie* a endomorfismului T corespunzătoare vectorului propriu x.

DEFINIŢIE. Dacă $T : V \to V$ este un endomorfism al lui V, un subspaţiu $S \subseteq V$ se numeşte *subspaţiu invariant în raport cu* T dacă $T(S) \subseteq S$.

OBSERVAŢIE. Dacă λ este valoare proprie a endomorfismului T, atunci mulţimea tuturor vectorilor proprii corespunzători lui λ la care adăugăm şi vectorul nul, notată V_λ este un subspaţiu vectorial invariant în raport cu T, numit *subspaţiu propriu* asociat valorii proprii λ. Aşadar:

$$V_\lambda = \{x \in V; Tx = \lambda x\} = \{x \in V; (T - \lambda 1_V)(x) = 0_V\} = Ker(T - \lambda 1_V).$$

Deci V_λ este subspaţiu vectorial (teorema 2.1, cap. 3). Totodată, V_λ fiind subspaţiu, $x \in V_\lambda$ implică $Tx = \lambda x$, deci V_λ este subspaţiu invariant în raport cu T. Dimensiunea acestui subspaţiu vectorial se numeşte *multiplicitatea geometrică* a valorii proprii λ şi o vom nota r_λ. Remarcăm că λ este valoare proprie dacă şi numai dacă $Ker(T - \lambda 1_V) \neq \{0_V\}$, deci $T - \lambda 1_V$ nu este izomorfism.

TEOREMA 1.1. *Fie V un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial de dimensiune n. Atunci, orice endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ are cel puţin un vector propriu.*

Demonstraţie. Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ e o bază fixată în V, iar $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ matricea endomorfismului T în această bază, adică:

$$Te_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \ \forall i = 1, ..., n.$$

Dacă $x \in V$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, atunci (1.1) revine la $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i T e_i = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, sau

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \text{ deci } \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i - \lambda x_j) e_j = 0_V.$$

Cum B este o bază în V, de aici rezultă $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = \lambda x_j$, $\forall j = 1, ..., n$, adică

$$\begin{array}{c} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + ... + a_{2n} x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0 \end{array} . \tag{1.2}$$

Sistemul (1.2) este liniar omogen în necunoscutele $x_1, ..., x_n$. Vectorul x va fi vector propriu pentru endomorfismul T dacă şi numai dacă coordonatele sale $x_1, ..., x_n$ constituie o soluţie nebanală a sistemului (1.2). Condiţia necesară şi suficientă ca acest sistem să admită soluţii nebanale este

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.3}$$

ceea ce reprezintă o ecuaţie polinomială de grad n în necunoscuta λ, cu coeficienţi în $\mathbb{C}$. Conform teoremei fundamentale a algebrei, există $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ astfel ca $\det(A - \lambda_0 I_n) = 0$. λ_0 va fi o valoare proprie a endomorfismului T. Introducem λ_0 în sistemul (1.2) şi obţinem o soluţie nebanală $(x_1^0, ..., x_n^0)$ a acestui sistem. Atunci vectorul $x^0 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 e_i$ este vector propriu al endomorfismului T corespunzător valorii proprii λ_0. ■

Teorema 1.1 indică un procedeu efectiv de determinare a valorilor proprii şi vectorilor proprii pentru un endomorfism T.

EXEMPLE. 1) Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul dat de $Tx = (7x_1 - 12x_2 + 6x_3, 10x_1 - 19x_2 + 10x_3, 12x_1 - 24x_2 + 13x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Considerând în $\mathbb{R}^3$ baza canonică, să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii ai lui T.

Soluţie. Matricea asociată lui T în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$. Ecuaţia (1.3) conduce la $-(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) = 0$. Obţinem $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Pentru $\lambda_1 = 1$, rezolvând sistemul (1.2) obţinem $x = (2\alpha - \beta, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, subspaţiul propriu asociat lui λ_1, fiind $V_{\lambda_1} = \{(2\alpha - \beta, \alpha, \beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Similar pentru $\lambda_3 = -1$, obţinem $V_{\lambda_3} = \{(3t, 5t, 6t)\,;\ t \in \mathbb{R}\}$. Aşadar dacă α, β nu sunt simultan nuli, orice vector propriu corespunzător lui $\lambda_1 = 1$ este de forma $\alpha\,(2, 1, 0) + \beta\,(-1, 0, 1)$, iar dacă $t \neq 0$, $t\,(3, 5, 6)$ este un vector propriu corespunzător lui $\lambda_3 = -1$.

2) Matricea unui endomorfism definit pe un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial într-o bază aleasă este $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii.

Soluţie. Procedând ca mai sus ajungem la ecuaţia $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = 0$, care are rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$. Vectorii proprii corespunzători vor fi $v_1 = t\,(1, 2, 1)$, $v_2 = s\,(3 - 3i, 5 - 3i, 4)$, respectiv $v_3 = r\,(3 + 3i, 5 + 3i, 4)$, cu $rst \neq 0$.

Valorile proprii ale unui endomorfism (unei matrice) pot fi *localizate* folosind

TEOREMA 1.2 (Gerschgorin). *Fie* $A \in M_n(\mathbb{C})$, $r_i = \sum\limits_{j=1;\ j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $D_i = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a_{ii}| \leq r_i,\ i = \overline{1,n}\}$. *Dacă* λ *este o valoare proprie a matricei* A, *atunci* $\lambda \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$. *În particular, când* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *şi* $\lambda \in \mathbb{R}$, *rezultă că*

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i] \subset \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Dacă λ este o valoare proprie şi $x \neq 0$ vectorul propriu corespunzător, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, atunci din (1.2) obţinem că

$$(\lambda - a_{ii})\, x_i = \sum_{j=1;\ j\neq i}^{n} a_{ij} x_j,\ i = \overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Alegem numărul p, astfel încât $|x_p| = max\,\{|x_1|, ..., |x_n|\} > 0$. Din (1.4) obţinem

$$|\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{j=1;\ j\neq i}^{n} \frac{|a_{pj}|\,|x_j|}{|x_p|} \leq r_p.$$

Aşadar $\lambda \in D_p \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$. ■

EXEMPLE. 1) Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 + 2i \\ 2 - 2i & 1 \end{pmatrix}$, $r_1 = 2\sqrt{2} = r_2$, $D_1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 3| \leq 2\sqrt{2}\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| \leq 2\sqrt{2}\}$. Dacă λ este valoare proprie, atunci $\lambda \in D_1 \cup D_2$ (fig. 1.1).

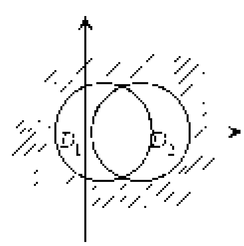

Fig. 1.1

Un calcul direct arată că $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, deci $\lambda_{1,2} \in [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}] \cup$ $\cup [1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}] = [1 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$.

2) Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $D_1 = D_2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 3| \leq 1\}$, $D_3 = \{z \in \mathbb{C}; |z - 4| \leq 0\} = \{4\}$. Orice valoare proprie se află în $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$.

2. Polinom caracteristic. Polinoame de matrice şi de endomorfism. Teorema Hamilton-Cayley

DEFINIŢIE. Dacă $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice dată, ecuaţia (1.3) se numeşte *ecuaţie caracteristică* sau *ecuaţie seculară* a matricei A. Polinomul de grad n cu coeficienţi în $\mathbb{C}$ dat de

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \tag{2.1}$$

se numeşte *polinom caracteristic* al matricei A. Rădăcinile sale le vom numi *rădăcini caracteristice.*

TEOREMA 2.1. *Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.*

Demonstraţie. Fie A şi B două matrice asemenea. Există o matrice nesingulară C astfel încât $B = C^{-1}AC$. Atunci $B - \lambda I_n = C^{-1}A - \lambda C^{-1}I_nC = C^{-1}(A - \lambda I_n)C$, deci $p_B(\lambda) = \det C^{-1}\ p_A(\lambda)\ \det C = \det\left(C^{-1}C\right)\ p_A(\lambda) = \det I_n\ p_A(\lambda) = p_A(\lambda)$ şi teorema este demonstrată. ■

În consecinţă, dacă se dă un endomorfism T pe spaţiul vectorial V, ecuaţia (1.3) nu depinde de matricea A, deci de baza aleasă în V, deoarece matricea lui T într-o nouă bază este $C^{-1}AC$, unde C este matricea de schimbare a bazelor şi conform teoremei 2.1, ecuaţia (1.3) rămâne aceeaşi.

DEFINIŢIE. Se numeşte *polinom caracteristic* al endomorfismului T şi se notează cu p_T polinomul p_A dat de (2.1), unde A este matricea asociată lui T într-o bază oarecare a lui V. Ecuaţia (1.3) se numeşte *ecuaţie caracteristică* a endomorfismului T, rădăcinile acestei ecuaţii numindu-se *rădăcini caracteristice.* Mulţimea rădăcinilor caracteristice ale unui endomorfism T se numeşte *spectrul* lui T. Spunem că *spectrul* lui T este *simplu* dacă orice rădăcină caracteristică λ_0 este rădăcină simplă a polinomului caracteristic.

Din demonstraţia teoremei 1.1, rezultă că în cazul unui $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial toate rădăcinile caracteristice sunt valori proprii. Dacă este vorba de un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, doar acele rădăcini caracteristice care sunt reale sunt valori proprii. În concluzie, trebuie făcută distincţia între endomorfismele definite pe $\mathbb{C}$-spaţii vectoriale şi cele definite pe $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale. Dacă λ este o valoare proprie a endomorfismului T, atunci subspaţiul propriu V_λ corespunzător va fi constituit din totalitatea vectorilor ale căror coordonate într-o bază fixată, sunt soluţii ale sistemului liniar omogen (1.2).

OBSERVAŢII. 1) Dacă A este matricea endomorfismului T într-o bază fixată, iar $p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + p_1(-\lambda)^{n-1} + ... + p_n$ polinomul său caracteristic, atunci $p_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = TrA$ este *urma* matricei A, iar $p_n = \det A$. Se poate arăta că, în general, pentru $1 < r < n$, coeficientul p_r este suma minorilor diagonali de ordin r. De exemplu, dacă $n = 3$, polinomul caracteristic are coeficienţii:

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = TrA,$$
$$p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$p_3 = \det A.$$

2) $p_A(0) = \det A$, deci matricea A este singulară dacă şi numai dacă $\lambda = 0$ este rădăcină a polinomului caracteristic.

DEFINIŢIE. Dacă $p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^{n_{\lambda_0}} q(\lambda)$, $q(\lambda_0) \neq 0$, numărul n_{λ_0} se numeşte *multiplicitate algebrică* a lui λ_0.

PROPOZIŢIA 2.2. Fie λ_0 o valoare proprie a endomorfismului T, având multiplicitatea algebrică n_{λ_0} şi multiplicitatea geometrică r_{λ_0}. Atunci $r_{\lambda_0} \leq n_{\lambda_0}$.

Demonstraţie. Fie V_{λ_0} subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_0 şi $r_{\lambda_0} = \dim_K(V_{\lambda_0})$. Dacă $B_1 = \{e_1, ..., e_{r_{\lambda_0}}\}$ este bază în V_{λ_0}, o completăm la o bază a lui V, $B = \{e_1, ..., e_{r_{\lambda_0}}, e_{r_{\lambda_0}+1}, ..., e_n\}$.

Cum $Te_1 = \lambda_0 e_1, ..., Te_{r_{\lambda_0}} = \lambda_0 e_{r_{\lambda_0}}$, $Te_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, $j > r_{\lambda_0}$, matricea asociată lui T în baza B este:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & ... & 0 & a_{1,r_{\lambda_0}+1} & ... & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & ... & 0 & a_{2,r_{\lambda_0}+1} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_0 & a_{r_{\lambda_0},r_{\lambda_0}+1} & ... & a_{r_{\lambda_0},n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n,r_{\lambda_0}+1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Atunci $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda_0 - \lambda)^{r_{\lambda_0}} q(\lambda)$. Pe de altă parte, dacă n_{λ_0} este multiplicitatea algebrică avem $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n_{\lambda_0}} r(\lambda)$, cu $r(\lambda_0) \neq 0$. Dacă $q(\lambda_0) \neq 0$, atunci $r_{\lambda_0} = n_{\lambda_0}$, iar dacă $q(\lambda_0) = 0$, atunci $r_{\lambda_0} < n_{\lambda_0}$. În concluzie $r_{\lambda_0} \leq n_{\lambda_0}$. ■

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n, $T \in \mathcal{L}(V)$ un endomorfism având într-o bază fixată a spaţiului matricea $A \in M_n(K)$ şi f un polinom de grad m cu coeficienţi în K, $f = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + ... + a_m$, $a_0 \neq 0$.

DEFINIŢIE. Matricea $f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + ... + a_{m-1} A + a_m I_m$ se numeşte *polinom de matricea* A definit de f. Endomorfismul $f(T) = a_0 T^m + a_1 T^{m-1} +$ $+ ... + a_{m-1} T + a_m 1_V$ (unde $T^k = T^{k-1} \circ T = T \circ T^{k-1}$) se numeşte *polinom de endomorfismul* T definit de f.

TEOREMA 2.3. (Hamilton-Cayley). *Dacă $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ este polinomul caracteristic al endomorfismului T, atunci $p_A(A) = 0$ (deci $p_A(T) = 0$).*

Demonstraţie. Fie $(A - \lambda I_n)^*$ adjuncta matricei $A - \lambda I_n$. Fiecare element al acestei matrice este un determinant de ordin $n-1$. Atunci $(A - \lambda I_n)^* = B_{n-1}$ $\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + B_1\lambda + B_0$, unde $B_i \in M_n(K)$, $i = 0, ..., n-1$. Fie acum $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$, polinomul caracteristic al endomorfismului T. Deoarece $(A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^* = \det(A - \lambda I_n) \cdot I_n$, avem:

$$(A - \lambda I_n)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + B_1\lambda + B_0) =$$

$$= (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n) I_n,$$

sau

$$(-B_{n-1})\lambda^n + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} + ... + (AB_1 - B_0)\lambda + AB_0 =$$

$$= (a_n I_n)\lambda^n + ... + (a_1 I_n)\lambda + a_n I_n.$$

Identificând după puterile lui λ, rezultă:

$$\begin{array}{r} -B_{n-1} = a_n I_n \\ AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1} I_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ AB_1 - B_0 = a_1 I_n \\ AB_0 = a_0 I_n \end{array}.$$

Amplificând, la stânga, respectiv cu $A^n, A^{n-1}, ..., A, I_n$ şi adunând se obţine $p_A(A) = 0$. ■

În baza acestei teoreme, obţinem:

COROLAR 2.3.1. *Orice polinom de matrice de grad* $\geq n$*, poate fi exprimat printr-un polinom de grad* $n-1$.

Demonstraţie. Din teorema 2.3 rezultă că A^n, se exprimă în funcţie de A^n, A^{n-1}, $..., A, I_n$. Atunci, prin recurenţă, puterile A^{n+m}, $m \in \mathbb{N}$, se exprimă cu ajutorul puterilor $A^n, A^{n-1}, ..., A, I_n$.■

Dacă $\lambda = 0$ nu este valoare proprie atunci A este nesingulară. În acest caz are loc:

COROLAR 2.3.2. *Dacă* $p_A(0) \neq 0$, *atunci:*

$$A^{-1} = \alpha_0 A^{n-1} + \alpha_1 A^{n-2} + ... + \alpha_{n-1} I_n, \alpha_i \in K, i = 0, ..., n-1.$$

Demonstraţie. Din teorema 2.3 se obţine:

$$(-1)^n A^n + a_1 A^{n-1} + ... + \alpha_n I_n = 0, \text{unde } a_n = \det A \neq 0.$$

Înmulţind această relaţie cu A^{-1}, se obţine:

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n} A^{n-1} - \frac{a_1}{a_n} A^{n-2} - ... - \frac{a_{n-1}}{a_n} I_n,$$

ceea ce trebuia arătat. ■

EXEMPLU. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$. Cum 0 nu este rădăcină a polinomului caracteristic, A este inversabilă. Conform teoremei Hamilton-Cayley $-A^3 - 3A^2 - 3A - I_n = O_n$. Înmulţind cu A^{-1} obţinem $A^2 + 3A + 3I_n + A^{-1} = O_n$, deci $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_n$. Calculând rezultă $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pe de altă parte, înmulţind relaţia $A^3 = -3A^2 - 3A - I_n$ cu A, obţinem $A^4 = -3A^3 - 3A^2 - A$. Înlocuind A^3, rezultă $A^4 = 6A^2 + 6A + 3I_n$ ş.a.m.d.

3. Diagonalizarea matricelor

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n, B o bază fixată în V, $T \in \mathcal{L}(V)$ şi A matricea lui T în această bază.

DEFINIŢIE. Fie $A \in M_n(K)$. Matricea A este *diagonalizabilă* dacă există o matrice nesingulară $C \in M_n(K)$ astfel încât $D = C^{-1}AC$ să fie o matrice diagonală (altfel spus, A este asemenea cu o matrice diagonală). Endomorfismul $T \in \mathcal{L}(V)$

este *diagonalizabil* dacă există o bază în V astfel încât matricea lui T în această bază este diagonală.

Dacă A este o matrice diagonalizabilă, în matricea diagonală D apar chiar valorile proprii ale lui A:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

(valorile proprii nu sunt neapărat distincte). Atunci

$$p_D(\lambda) = \det(D - \lambda I_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = p_A(\lambda),$$

deci polinomul caracteristic se descompune în factori liniari peste corpul K. În concluzie, dacă polinomul caracteristic nu se descompune în factori liniari, matricea nu se diagonalizează.

PROPOZIŢIA 3.1. *Endomorfismul $T \in \mathcal{L}(V)$ este diagonalizabil dacă şi numai dacă există în V o bază formată din vectori proprii ai lui T.*

Demonstraţie. Dacă T este diagonalizabil, rezultă că există o bază $x_1, ..., x_n$ în V astfel încât matricea lui T în această bază are forma (3.1), unde λ_i sunt valorile proprii ale lui T. Rezultă $Tx_1 = \lambda_1 x_1, ..., Tx_n = \lambda_n x_n$, deci $x_1, ..., x_n$ sunt vectori proprii. Reciproc, dacă vectorii proprii $x_1, ..., x_n$ formează o bază în V este imediat că matricea lui T în această bază are formă diagonală.■

TEOREMA 3.2. *Dacă toate valorile proprii ale lui T sunt distincte două câte două, atunci T este diagonalizabil.*

Demonstraţie. Conform propoziţiei 3.1 este suficient să arătăm că vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte ale lui T sunt liniar independenţi.

Vom folosi inducţia matematică după numărul n al valorilor proprii.

Dacă $n = 1$, vectorul propriu x_1 fiind nenul este liniar independent. Presupunem afirmaţia adevărată pentru n valori proprii distincte două câte două şi fie $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1} \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$, $i, j = 1, ..., n+1$, $Tx_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, ..., n+1$. Fie $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in K$ astfel încât:

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0_V. \tag{3.2}$$

Aplicând T acestei egalităţi obţinem:

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + ... + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0_V. \tag{3.3}$$

Înmulţind (3.2) cu λ_{n+1} şi scăzând (3.3) obţinem:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x_1 + ... + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})x_n = 0_V.$$

Utilizând ipoteza de inducţie, rezultă $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$, $\forall i = 1, ..., n$ şi cum $\lambda_i \neq \lambda_{n+1}$, $\forall i = 1, ..., n$, rezultă $\alpha_i = 0$, $\forall i = 1, ..., n$. Introducând în (3.2) rezultă $\alpha_{n+1} x_{n+1} = 0_V$ şi cum $x_{n+1} \neq 0_V$ rezultă $\alpha_{n+1} = 0$, deci $x_1, ..., x_{n+1}$ sunt liniar independenţi. ■

Vom aborda acum cazul în care nu toate rădăcinile polinomului caracteristic sunt simple, deci când:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{n_1}...(\lambda - \lambda_p)^{n_p}, \text{ unde } n_i \geq 1, n_1 + ... + n_p = n.$$

TEOREMA 3.3. (Criteriul general de diagonalizare) *Cu notaţiile anterioare, dacă $r_i = n_i$, $\forall i = 1, ..., p$, atunci endomorfismul T este diagonalizabil.*

Demonstraţie. Cum $\dim_K(V_{\lambda_i}) = n_i$, există vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ_i, $e_{i,1}, ..., e_{i,n_i}$ care formează o bază B_i în V_{λ_i}. Vom arăta că $B = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$ este bază a lui V. Dacă $\lambda_i \neq \lambda_j$, atunci $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0_V\}$. Evident $0_V \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$. Dacă $x \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, $Tx = \lambda_i x$ şi $Tx = \lambda_j x$. Atunci $(\lambda_i - \lambda_j)x = 0_V$ şi cum $\lambda_i \neq \lambda_j$, rezultă $x = 0_V$, deci $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0_V\}$. Cum $B_i \subset V_{\lambda_i}$, rezultă că $B_i \cap B_j = \phi$, deci B are exact n elemente. Este suficient să arătăm că vectorii din B sunt liniar independenţi (teorema 4.4, cap.2). Considerăm scalarii $\alpha_{i,j} \in K$ astfel încât $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} e_{i,j} = 0_V$. Notând $y_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$, $i = 1, ..., p$, această egalitate se mai scrie:

$$y_1 + ... + y_p = 0_V. \tag{3.4}$$

Pe de altă parte $Ty_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} T e_{i,j} = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} \lambda_i e_{i,j} = \lambda_i y_i$, $\forall i = 1, ..., p$. Vom arăta că din (3.4) rezultă $y_i = 0_V$, $\forall i = 1, ..., p$. Pentru simplitate, presupunem $p = 3$, deci:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0_V. \tag{3.5}$$

Aplicând T obţinem $Ty_1 + Ty_2 + Ty_3 = 0_V$, deci:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0_V. \tag{3.6}$$

Înmulţind (3.5) cu λ_3 şi scăzând din (3.6) se obţine:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)y_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)y_2 = 0_V. \tag{3.7}$$

Aplicăm încă o dată T:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_1 y_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\lambda_2 y_2 = 0_V. \tag{3.8}$$

Înmulţind (3.7) cu λ_2 şi scăzând din (3.8), rezultă $(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)y_1 = 0_V$. Cum $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, rezultă $y_1 = 0_V$. Înlocuind succesiv în (3.7) şi (3.6) obţinem $y_1 = y_2 = 0_V$. În general $y_i = 0_V$, $i = 1, ..., p$. Cum B_i este bază în V_{λ_i} avem $\alpha_{i,1} = \alpha_{i,2} = ... = \alpha_{i,n_i} = 0$, $\forall i = 1, ..., p$, deci B este bază în V. În consecinţă putem scrie

$$\begin{gathered}
T(e_{1,1}) = \lambda_1 e_{1,1} = \lambda_1 e_{1,1} + 0 \cdot e_{1,2} + ... + 0 \cdot e_{1,n_1} + ... + 0 \cdot e_{p,n_p} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
T(e_{1,n_1}) = \lambda_1 e_{1,n_1} = 0 \cdot e_{1,1} + 0 \cdot e_{1,2} + ... + \lambda_1 e_{1,n_1} + ... + 0 \cdot e_{p,n_p} \quad . \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
T(e_{1,1}) = \lambda_p e_{p,n_p} = 0 \cdot e_{1,1} + 0 \cdot e_{1,2} + ... + 0 \cdot e_{1,n_1} + ... + \lambda_p e_{p,n_p}
\end{gathered}$$

Atunci, matricea lui T în baza B este

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc}
\lambda_1 & 0 & ... & 0 & & & & & & & & \\
0 & \lambda_1 & ... & 0 & & & & & & 0 & & \\
... & ... & ... & ... & & & & & & & & \\
0 & 0 & ... & \lambda_1 & & & & & & & & \\
 & & & & \lambda_2 & 0 & ... & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & \lambda_2 & ... & 0 & & & & \\
 & & & & ... & ... & ... & ... & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & ... & \lambda_2 & & & & \\
 & & & & & & & & \lambda_p & 0 & ... & 0 \\
 & & 0 & & & & & & 0 & \lambda_p & ... & 0 \\
 & & & & & & & & ... & ... & ... & ... \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & ... & \lambda_p
\end{array}\right),$$

deci T este diagonalizabil. ■

OBSERVAŢII. 1) Reciproca teoremei 3.3 se demonstrează fără dificultate.

2) Teorema 3.2 este o consecinţă a teoremei 3.3.

EXEMPLE. 1) Fie $V = \mathbb{R}^3$ şi $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ având în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $p_A(\lambda) = = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Să determinăm vectorii proprii. Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$, satisface sistemul $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$. Notând $x_3 = t$, rezultă $x_1 = 2t$, $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Deci: $V_{\lambda_1} = \{(t, 2t, t);\ t \in \mathbb{R}\}$. Un vector propriu este, de exemplu, $v_1 = (1, 2, 1)$. Similar $V_{\lambda_2} = \{(t, t, 0);\ t \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_3} = \{(t/2, t, t);\ t \in \mathbb{R}\}$. Luând $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 2, 2)$ şi aplicând teorema 3.2, rezultă că T este diagonalizabil. În baza $\{v_1, v_2, v_3\}$, matricea lui T este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Fie acum $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ care în baza canonică are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda-6)(\lambda-1)^2$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Procedând ca la exemplul anterior găsim: $V_{\lambda_1} = = \{(t, 0, -2t, -t);\ t \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_2} = \{(t, 0, -2t, 5t);\ t \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_3} = \{(2\alpha, \beta, \alpha, 0);\ \alpha, \beta \in \in \mathbb{R}\}$. Deoarece $\dim_{\mathbb{R}}(V_{\lambda_3}) = 2$, T este diagonalizabil. În baza $v_1 = (1, 0, -2, -1)$,

$v_2 = (1, 0, -2, 5)$, $v_3 = (2, 0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 1, 0, 0)$, matricea lui T este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Să cercetăm posibilitatea diagonalizării matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. În acest caz, $p_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$, deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. $V_{\lambda_1} = \{(t, 2t, t);\ t \in \mathbb{R}\}$. Cum $\dim_K(V_{\lambda_1}) = 1 < 2$, matricea A nu este diagonalizabilă.

4. Forma canonică Jordan

DEFINIŢIE. Se numeşte *celulă Jordan* de ordin p orice matrice pătratică de forma

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

O matrice J are *forma canonică Jordan* dacă are pe diagonală celule Jordan, iar restul elementelor sunt nule

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & \\ 0 & & J_{p_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

unde λ_1, ..., λ_k nu sunt neapărat distincte.

DEFINIŢIE. Fie V un spaţiu vectorial finit-dimensional şi $T \in \mathcal{L}(V)$. Se spune că T poate fi adus la *forma canonică Jordan* dacă există o bază B a lui V în care matricea lui T are forma canonică Jordan.

În continuare, vom spune, simplu, forma Jordan. Să remarcăm că matricile diagonale sunt cazuri particulare de matrice care au forma Jordan.

DEFINIŢIE. Un endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ se numeşte *nilpotent* dacă există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $T^p = \theta$ (aplicaţia nulă) în $\mathcal{L}(V)$.

În cele ce urmează vom presupune că V este un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial de dimensiune n, $T \in \mathcal{L}(V)$ şi polinomul caracteristic al lui T este $p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} ... (\lambda - \lambda_p)^{n_p}$, unde $n_1 + ... + n_p = n$. Notăm cu $E_i = Ker\,(T - \lambda_i \cdot 1_V)^{n_i}$ şi cu V_{λ_i} subspaţiile proprii corespunzătoare valoriilor proprii λ_i, $i = 1, ..., p$.

OBSERVAŢIE. Evident, E_i sunt subspaţii vectoriale ale lui V (teorema 3.2 b)) şi $V_{\lambda_i} \subseteq E_i$, $i = 1, ..., p$. Într-adevăr, dacă $n_i = 1$, atunci $V_{\lambda_i} = E_i$. Dacă $n_i > 1$ şi $x \in V_{\lambda_i}$ atunci $(T - \lambda_i \cdot 1_V)^{n_i}(x) = (T - \lambda_i \cdot 1_V)^{n_i - 1}[(T - \lambda_i \cdot 1_V)(x)] = 0_V$. Cum $V_{\lambda_i} \neq \{0_V\}$, rezultă $E_i \neq \{0_V\}$.

LEMA 4.1. *Cu notaţiile de mai sus, are loc:*
1) E_i, $i = 1, ..., p$ *sunt spaţii invariante în raport cu* T;
2) $V = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$.

Demonstraţie. 1) Fie $x \in E_i$, deci $(T-\lambda_i \cdot 1_V)^{n_i}(x) = 0_V$. Vom calcula $(T-\lambda_i \cdot 1_V)^{n_i}(Tx)$. Deoarece $T \circ 1_V = 1_V \circ T$, rezultă că $(T-\lambda_i \cdot 1_V)^{n_i} \circ T = T \circ (T-\lambda_i \cdot 1_V)^{n_i}$, deci $(T-\lambda_i \cdot 1_V)^{n_i}(Tx) = T\left((T-\lambda_i \cdot 1_V)^{n_i}(x)\right) = T0_V = 0_V$. Aşadar, pentru orice $x \in E_i$, $Tx \in E_i$.

2) Trebuie să demonstrăm că orice $x \in V$ se scrie în mod unic sub forma $x = x_1 + ... + x_p$, $x_i \in E_i$, $i = 1, ..., p$.

Fie $p(\lambda) = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \ldots (\lambda-\lambda_p)^{n_p}$ polinomul caracteristic al lui T şi $p_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{n_i}$, $q_i(\lambda) = \prod\limits_{j=1;\ j\neq i}^{p} (\lambda-\lambda_j)^{n_j}$, $i = 1, ..., p$. Evident, $p(\lambda) = p_i(\lambda) \cdot q_i(\lambda)$. Conform teoremei lui Hamilton - Cayley, $p(T) = \theta$, deci $p_i(T) \circ q_i(T) = \theta$, $\forall i = 1, ..., p$. Dacă $x \in V$, atunci $p_i(T)(q_i(T)(x)) = 0_V$, deci $q_i(T)(x) \in E_i$, $\forall i = 1, ..., p$.

Cum polinoamele $q_1, ..., q_p$ sunt prime între ele, rezultă că există polinoamele $h_1, ..., h_p$ astfel încât $q_1 h_1 + ... + q_p h_p = 1$. Atunci: $h_1(T) \circ q_1(T) + ... + h_p(T) \circ q_p(T) = 1_V$. Rezultă $x = \sum\limits_{j=1}^{p} (h_j(T) \circ q_j(T))(x)$, $\forall x \in V$. Dar $y_j = q_j(T)(x) \in E_j$ şi E_j este invariant în raport cu T, deci $Ty_j \in E_j$. În consecinţă $x_j = h_j(T)(y_j) \in E_j$ deci orice $x \in V$ se scrie

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j, x_j \in E_j, \forall j = 1, ..., p.$$

Să arătăm acum unicitatea descompunerii. Să presupunem că $x = x_1' + ... + x_p'$ cu $x_j' \in E_j$, $\forall j = 1, ..., p$. Notând $x_j - x_j' = z_j$, rezultă:

$$z_1 + ... + z_p = 0_V,\ z_j \in E_j,\ j = 1, ..., p. \tag{4.1}$$

Vom arăta că această egalitate implică $z_1 = z_2 = ... = z_p = 0_V$. Dar

$$p_1(T)(z_1) = 0_V, \forall z_1 \in E_1,\ \ q_1(T)(z_k) = 0_V,\ k = 2, ..., p. \tag{4.2}$$

Aplicând $q_1(T)$ în (4.1), obţinem ţinând cont de (4.2):

$$q_1(T)(z_1) = 0_V,\ \ p_1(T)(z_1) = 0_V. \tag{4.3}$$

Cum polinoamele p_1, q_1 sunt prime între ele, există polinoamele f_1, g_1 astfel încât $f_1 \cdot p_1 + g_1 \cdot q_1 = 1$, deci: $f_1(T) \circ p_1(T) + g_1(T) \circ q_1(T) = 1_V$. Atunci, din (4.3) rezultă

$$z_1 = f_1(T)(p_1(T)(z_1)) + g_1(T)(q_1(T)(z_1)) = 0_V.$$

Aşadar $z_1 = 0_V$. Analog se obţine $z_2 = ... = z_p = 0_V$. Lema este demonstrată. ■

LEMA 4.2. *Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n şi $T \in \mathcal{L}(V)$ un endomorfism nilpotent. Atunci, există o bază a lui V în raport cu care matricea asociată lui T are forma:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_k \in \{0, 1\},\ k = \overline{1, n-1}. \tag{4.4}$$

Demonstraţie. Fie q cel mai mic număr natural cu proprietatea că $T^q = \theta$. Au loc incluziunile:

$$0_V \subset KerT \subset KerT^2 \subset ... \subset KerT^q = V.$$

Pentru simplitate vom demonstra lema în cazul $q = 3$, deci când $0_V \subset KerT \subset \subset KerT^2 \subset KerT^3 = V$. Având în vedere alegerea lui q, rezultă că există $x \in V$, astfel încât $T^{q-1}x \neq 0_V$, deci incluziunea $KerT^2 \subset KerT^3 = V$ este strictă. Conform teoremei 1.7, $KerT^2$ admite un suplement, deci dacă B_2 este o bază a lui $KerT^2$, există $x_1, ..., x_k \in V - KerT^2$, astfel încât $B = B_2 \cup \{x_1, ..., x_k\}$ este o bază a lui V, deci $V = KerT^2 \oplus Sp(\{x_1, ..., x_k\})$. În plus, $Tx_1, ..., Tx_k$ sunt liniar independenţi. Într-adevăr dacă $\alpha_1 Tx_1 + ... + \alpha_k Tx_k = 0_V$, atunci $T(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k) = 0_V$, adică $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k \in KerT \subset KerT^2$. Totodată $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k \in Sp(\{x_1, ..., x_k\})$ şi cum $V = KerT^2 \oplus Sp(\{x_1, ..., x_k\})$ rezultă $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = 0_V$. Vectorii $x_1, ..., x_k$ fiind liniar independenţi, rezultă $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. În concluzie $Tx_1, ..., Tx_k \in KerT^2$ şi sunt liniar independenţi. Să observăm că $Tx_1, ..., Tx_k \notin KerT$ (dacă $Tx_i \in KerT$, atunci $T^2 x_i = 0$, adică $x_i \in KerT^2$, ceea ce nu se poate), deci incluziunea $KerT \subset KerT^2$ este strictă. Dacă B_1 este o bază a lui $KerT$, o completăm la o bază B_2 a lui $KerT^2$, luând mai întâi sistemul $\{Tx_1, ..., Tx_k\}$. Deci $KerT^2 = KerT \oplus S'$, $dim_K(S') \geq k$, deoarece S' conţine k vectori liniar independenţi. Dacă $dim_K(S') = k$, atunci alegem $B_2 = B_1 \cup \{Tx_1, ..., Tx_k\}$, iar dacă $dim_K(S') = k + r$, $r > 0$, atunci $B_2 = B_1 \cup \{Tx_1, ..., Tx_k, y_1, ..., y_r\}$, $y_1, ..., y_r \in KerT^2 \backslash KerT$. Procedând ca mai sus, se arată că $T^2x_1, ..., T^2x_k, Ty_1, ..., Ty_r \in KerT$ şi sunt liniar independenţi, deci $dim_K(KerT) \geq k + r$. Dacă $dim_K(KerT) = k + r$, atunci $B_1 = = \{T^2x_1, ..., T^2x_k, Ty_1, ..., Ty_r\}$, iar dacă $dim_K(KerT) > k + r$, atunci completăm la o bază a lui $KerT$, adică $B_1 = \{T^2x_1, ..., T^2x_k, Ty_1, ..., Ty_r, z_1, ..., z_s\}$, $z_1, ..., z_s \in KerT$. Întrucât sumele de subspaţii considerate mai sus sunt sume directe, rezultă că sistemul $B = B_1 \cup B_2 \cup \{x_1, ..., x_k\}$ este liniar independent şi conţine $dim_K(V) - dim_K(KerT^2) + dim_K(KerT^2) - dim_K(KerT) + +dim_K(KerT) = dim_K(V) = n$ vectori, deci formează o bază a lui V. Vom considera vectorii bazei B aşezaţi în ordinea: T^2x_1, Tx_1, x_1, T^2x_2, Tx_2, x_2, ..., T^2x_k, Tx_k, x_k, Ty_1, y_1, ..., Ty_r, y_r, z_1, ..., z_s şi îi notăm respectiv cu $f_1, f_2, ..., f_n$. Ţinând seama că

$$\begin{array}{l} Tf_1 = T\left(T^2x_1\right) = 0_V = 0 \cdot f_1 + ... + 0 \cdot f_n \\ Tf_2 = T^2x_1 = f_1 = 1 \cdot f_1 + ... + 0 \cdot f_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Tf_n = Tz_s = 0_V = 0 \cdot f_1 + ... + 0 \cdot f_n \end{array},$$

rezultă că matricea endomorfismului nilpotent T are forma din enunţ. ■

TEOREMA 4.3. *Fie V un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $T : V \to V$. Atunci există o bază B în V astfel încât matricea lui T în această bază are forma Jordan.*

Demonstraţie. Polinomul caracteristic al lui T este

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} ... (\lambda - \lambda_p)^{n_p}, \text{ cu } n_1 + ... + n_p = n \text{şi } \lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j.$$

Conform lemei 4.1, $E_i = Ker(T - \lambda_i 1_V)^{n_i}$, $i = 1, ..., p$ sunt subspaţii invariante în raport cu T ale lui $V = E_1 \oplus ... \oplus E_p$. Fie T_i restricţia lui T la E_i. Endomorfismul $S_i : E_i \to E_i$, definit prin $S_i = T_i - \lambda_i \cdot 1_{E_i}$ este nilpotent, deoarece $S_i^{n_i}(x) = 0$,

$\forall x \in E_i$. Conform lemei 4.2, există o bază B_i a lui E_i astfel încât matricea asociată lui S_i în baza B_i are forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{i,1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{i,2} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \varepsilon_{i,ri} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cu $\varepsilon_{i,k} \in \{0,1\}$, $k = \overline{1, r_i}$, $r_i = dim E_i - 1$.

Dar $T_i = S_i + \lambda_i \cdot 1_{E_i}$, deci matricea lui T_i în baza B_i este

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon_{i,1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon_{i,2} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & \varepsilon_{i,ri} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Deoarece $V = E_1 \oplus ... \oplus E_p$, $B = \bigcup\limits_{i=1}^{p} B_i$ este o bază în V şi matricea asociată lui T în baza B are forma Jordan. ■

EXEMPLE. 1) Endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ matricea $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. Să găsim forma canonică Jordan a acestei matrice. Polinomul caracteristic este $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$, deci valorile proprii ale lui T sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. $V_{\lambda_1} = \{(3t, t, t) ; t \in \mathbb{R}\}$, deci $dim_{\mathbb{R}}(V_{\lambda_1}) = 1 < 3$. Aşadar T nu este diagonalizabil. Vom nota $S = T - 1_V$. S este nilpotent, deoarece $S^3 x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Să vedem dacă 3 este exponentul minim. Matricea lui S în baza canonică este $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. Avem $Se_1 = -2e_2 - e_3$, $Se_2 = -3e_1 - 7e_2 - 4e_3$, $Se_3 = 3e_1 + 13e_2 + 7e_3$. Atunci $S^2 e_1 = -2Se_2 - Se_3 = (3, 1, 1)$, $S^2 e_2 = (9, 3, 3)$, $S^2 e_3 = (-18, -6, -6)$, deci exponentul minim este 3. Totodată $KerS = V_{\lambda_1}$, $KerS^2 = \{(-3\alpha + 6\beta, \alpha, \beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, deci $dim_{\mathbb{R}}(KerS) = 1$, $dim_{\mathbb{R}}\left(KerS^2\right) = 2$. Cu procedeul descris în demonstraţia lemei 4.2, alegem $x_1 \in KerS^3 \backslash KerS^2$. Fie $x_1 = e_1 = (1, 0, 0)$. Atunci $Sx_1 = Se_1 = -2e_2 - e_3 = (0, -2, -1) \in KerS^2 \backslash KerS$ şi $S^2 x_1 = S^2 e_1 = (3, 1, 1) \in KerS$. Avem deci baza $B = \left\{S^2 x_1, Sx_1, x_1\right\}$ în $\mathbb{R}^3$, adică $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ unde $f_1 = (3, 1, 1)$, $f_2 = (0, -2, -1)$, $f_3 = (1, 0, 0)$ şi $Tf_1 = 3Te_1 + Te_2 + Te_3 = (3, 1, 1) = f_1$, $Tf_2 = -2Te_2 - Te_3 = (3, -1, 0) = f_1 + f_2$, $Tf_3 = Te_1 = (1, -2, -1) = f_2 + f_3$.

Matricea lui T în baza B are deci forma Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Aceeaşi problemă pentru endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, care în baza canonică, are matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Polinomul caracteristic este $p(\lambda) = -(\lambda-2)^3$, deci valorile proprii ale lui T sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Cum $V_{\lambda_1} = \{(\alpha, 2\alpha, \beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $dim_{\mathbb{R}}(V_{\lambda_1}) = 2$, deci T nu este diagonalizabil. Vom nota $S = T - 2\cdot 1_V$. S este nilpotent, deoarece $S^3x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Să vedem dacă 3 este exponentul minim. Matricea lui S în baza canonică este $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ca la exemplul anterior, obţinem $S^2e_1 = S^2e_2 = S^2e_3 = 0$, deci exponentul minim este 2. Aşadar $KerS^2 = \mathbb{R}^3$ şi $KerS = V_{\lambda_1}$. Alegem $x_1 \in \mathbb{R}^3 \backslash KerS$, $x_1 = e_1 = (1,0,0)$. Atunci $Sx_1 = = (-2,-4,-2) \in KerS$. În $KerS$ ne mai trebuie un vector liniar independent de acesta. Vom lua $y_1 = (0,0,1) = e_3$. Avem deci baza $B = \{Sx_1, x_1, y_1\}$ în $\mathbb{R}^3$, adică $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ cu $f_1 = (-2,-4,-2)$, $f_2 = (1,0,0)$, $f_3 = (0,0,1)$ şi $Tf_1 = (-4,-8,-4) = 2f_1$, $Tf_2 = (0,-4,-2) = f_1 + 2f_2$, $Tf_3 = (0,0,2) = 2f_3$. Matricea lui T în baza B are deci forma Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Aceeaşi problemă pentru endomorfismul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care, în baza canonică, are matricea $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. (vezi exemplul 3) din secţiunea anterioară). Deci $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ şi $V_{\lambda_1} = \{(t, 2t, t); t \in \mathbb{R}\}$, $V_{\lambda_2} = \{(\frac{t}{2}, t, t); t \in \mathbb{R}\}$. Fie $S_1 = T - 1_V$, $S_2 = T - 3\cdot 1_V$. Avem: $E_1 = KerS_1^2 = \{(\alpha-\beta, \alpha, \beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = KerS_2 = V_{\lambda_2}$, deci $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$. Vom lua $x_1 = (1,1,0) \in KerS_1^2 - KerS_1$ şi avem $S_1x_1 = (-1,-2,-1) \in KerS_1$. Cum $dim_{\mathbb{R}}(V_{\lambda_1}) = 1$, S_1x_1 este suficient. Am obţinut o bază $B_1 = \{S_1x_1, x_1\}$ în E_1şi vom lua ca bază B_2 în E_2, vectorul $(1,2,2)$. Obţinem astfel baza $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ în $\mathbb{R}^3$, $f_1 = (-1,-2,-1)$, $f_2 = = (1,1,0)$, $f_3 = (1,2,2)$. Atunci $Tf_1 = (1,2,1) = -f_1$, $Tf_2 = (-2,-3,-1) = = f_1 - f_2$, $Tf_3 = (3,6,6) = 3f_3$. În raport cu baza B matricea lui T are forma Jordan

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Probleme

1. Să se găsească valorile şi vectorii proprii ai endomorfismelor:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Tx = (x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, x_1\sin\theta + x_2\cdot$ $\cdot\cos\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$;

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $Tx = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2)$;

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $Tx = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 +$ $+3x_3, -x_1 - 2x_3)$.

2. Să se găsească valorile şi vectorii proprii ai următoarelor matrice. Sunt diagonalizabile?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Să se arate că următoarele matrice sunt diagonalizabile, să se găsească forma diagonală şi baza formei diagonale. Folosind forma diagonală să se calculeze apoi A^{2002}.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Fără a calcula valorile proprii să s determine domeniul plan în care se află valorile proprii ale următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$.

5. Fie $T : \mathcal{C}([0,2\pi]) \to \mathcal{C}([0,2\pi])$, $T(f) = g$,

$g(x) = \int\limits_0^{2\pi} [1 + \sin(x-t)]\ f(t)\ \mathrm{d}t$, $x \in [0,2\pi]$. Să se determine valorile şi vectorii proprii.

6. Să se reducă la forma canonică Jordan matricele:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

CHAPTER 5

Spaţii euclidiene. Endomorfisme pe spaţii euclidiene

În capitolele precedente am prezentat spaţiile vectoriale abstracte, neînzestrate cu o structură geometrică, ceea ce restrânge domeniul de studiu. În acest capitol, vom introduce noţiunea fundamentală de spaţiu cu produs scalar, care permite determinarea lungimii vectorilor, a unghiului dintre doi vectori nenuli etc. Astfel metodele geometriei metrice se extind la spaţii vectoriale mai generale.

1. Spaţii euclidiene

DEFINIŢIE. Fie V un $\mathbb{R}-$spaţiu vectorial. Se numeşte *produs scalar real* pe V, o aplicaţie $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$, cu proprietăţile:

1) $< x, y >=< y, x >, \quad \forall x, y \in V$;
2) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >, \quad \forall x, y, z \in V$;
3) $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in V$;
4) $< x, x >\geq 0, \quad \forall x \in V$ şi $< x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0_V$.

Dacă V este un $\mathbb{C}-$spaţiu vectorial, se numeşte *produs scalar complex* pe V, o aplicaţie $< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{C}$, cu proprietăţile:

1') $< x, y >=< \overline{y, x} >, \quad \forall x, y \in V$ şi 2), 3), 4) de mai sus.

OBSERVAŢII. 1) În cazul produsului scalar real, din 1) şi 2) obţinem

$$\begin{aligned} &< x, y + z >=< y + z, x >=< y, x > + < z, x >= \\ &=< x + y > + < x, z >, \quad \forall x, y, z \in V, \end{aligned}$$

iar în cazul produsului scalar complex, din 1') şi 2) rezultă:

$$\begin{aligned} &< x, y + z >=< \overline{y + z, x} >= \overline{< y, x > + < z, x >} = \\ &= \overline{< y, x >} + \overline{< z, x >} =< x, y > + < x, z >, \forall x, y, z \in V. \end{aligned}$$

Aşadar, în ambele situaţii, se obţine:

$$< x, y + z >=< x, y > + < x, z >, \quad \forall x, y, z \in V.$$

2) Dacă V este un $\mathbb{R}-$spaţiu vectorial, atunci

$$< x, \lambda y >=< \lambda y, x >= \lambda < y, x >= \lambda < x, y >, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in V,$$

iar dacă este un $\mathbb{C}-$spaţiu vectorial:

$$\begin{aligned} &< x, \lambda y >=< \overline{\lambda y, x} >= \overline{\lambda < y, x >} = \\ &= \overline{\lambda} < \overline{y, x} >= \overline{\lambda} < x, y >, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, x, y \in V. \end{aligned}$$

3) În ambele cazuri: $< 0_V, x >=< x, 0_V >= 0, \ \forall x \in V$.

DEFINIŢIE. Un $\mathbb{R}-$spaţiu ($\mathbb{C}-$spaţiu) vectorial V pe care s-a definit un produs scalar real (complex) se numeşte *prehilbertian* real (complex). Dacă V este finit dimensional, atunci spaţiul prehilbertian V se numeşte *spaţiu euclidian real* (*complex*). Un spaţiu euclidian complex se mai numeşte şi *spaţiu unitar*.

EXEMPLE. 1) Fie $V = \mathbb{R}^n$. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, definim produsul scalar $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Proprietăţile 1)-4) se verifică uşor ţinând seama de proprietăţile înmulţirii şi adunării numerelor reale. Spaţiul $\mathbb{R}^n$ cu produsul scalar definit mai sus este un "model" pentru spaţiile euclidiene reale.

2) Fie $V = \mathbb{C}^n$. Dacă $x, y \in \mathbb{C}^n, x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$, definim $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$. $\mathbb{C}^n$ înzestrat cu acest produs scalar este "modelul" spaţiului unitar.

3) Spaţiul vectorilor liberi $\mathcal{V}_3$ înzestrat cu produsul scalar a doi vectori liberi (cap. 1) este un spaţiu euclidian real.

4) Fie $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dacă $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}), A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, definim produsul scalar real $< A, B >= Tr(A^T \cdot B) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ij}$.

5) Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dacă $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ definim $< f, g >= \int\limits_a^b f(t) g(t) dt$, iar dacă $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, definim $< f, g >= \int\limits_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$.

În ambele cazuri se obţin produse scalare. Toate produsele scalare de mai sus se numesc *produse scalare canonice (uzuale)* în spaţiile respective.

DEFINIŢIE. Dacă V este un $K-$spaţiu vectorial ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), aplicaţia $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$, cu proprietăţile:

1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$; $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_V$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in V$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$, (inegalitatea triunghiului)

se numeşte *normă* pe V. Spaţiul V pe care s-a definit o normă se numeşte *spaţiu vectorial normat*.

În continuare, ne vom ocupa de studiul spaţiilor cu produs scalar real.

PROPOZIŢIA 1.1. *Fie V un spaţiu prehilbertian real. Atunci:*

a) $|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}$, $\forall x, y \in V$;
(inegalitatea lui Cauchy-Schwarz-Buniakowski)

b) $x \rightarrowtail \|x\| = \sqrt{< x, x}$ *este o normă pe* V*, numită normă euclidiană*;

c) $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, $\forall x, y \in V$.
(regula paralelogramului)

Demonstraţie. a) Dacă $x, y \in V$ sunt liniar dependenţi, adică, de exemplu, $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$, atunci

$$|< x, y >| = |< x, \lambda x >| = |\lambda < x, x >| = |\lambda| < x, x >,$$

iar

$$\sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >} = |\lambda| < x, x >,$$

deci în acest caz în a) avem egalitate. Dacă y, x sunt liniar independenţi (deci $x \neq 0_V$, $y \neq 0_V$), din

$$< x + \lambda y, x + \lambda y > \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

folosind proprietăţile produsului scalar, rezultă

$$< x, x > +2\lambda < x, y > +\lambda^2 < y, y > \geq 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Deci, trinomul de gradul doi în λ trebuie să ia numai valori nenegative, ceea ce are loc numai dacă discriminantul trinomului este negativ, adică

$$< x, y >^2 - < x, x >< y, y > \leq 0,$$

de unde rezultă

$$|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}.$$

b) Trebuie să verificăm proprietăţile normei. Vom justifica inegalitatea triunghiului, celelalte două proprietăţi fiind evidente. Vom folosi inegalitatea lui Cauchy. Avem

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= < x + y, x + y > = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \forall x, y \in V, \end{aligned}$$

adică $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$.

c) Procedând ca mai sus, rezultă

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2,$$
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x, y > + \|y\|^2.$$

Adunând cele două egalităţi se obţine regula paralelogramului. ■

OBSERVAŢIE. Se ştie că orice spaţiu vectorial normat V este metric, cu distanţa $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia $d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in V$. În consecinţă, orice spaţiu prehilbertian este metric, distanţa fiind dată de

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{< x - y, x - y >}.$$

DEFINIŢIE. Fie E un spaţiu euclidian real. Se numeşte *unghiul* a doi vectori $x, y \in E - \{0_E\}$, numărul real $\theta \in [0, \pi]$ dat de:

$$\cos\theta = \frac{< x, y >}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Definiţia este corectă, deoarece din propoziţia 1.1, a), $|< x, y >| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, deci $|< x, y >| \ / \ (\|x\| \cdot \|y\|) \leq 1$.

EXEMPLE. 1) $\mathbb{R}^n$ poate fi organizat ca spaţiu vectorial normat. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n, \ x = (x_1, ..., x_n), \ y = (y_1, ..., y_n)$, atunci

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{şi } d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Inegalitatea lui Cauchy-Schwarz-Buniakowski devine:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{1/2}.$$

2) Dacă $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ şi $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, atunci $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$. Inegalitatea lui Cauchy-Schwarz-Buniakowski devine:

$$(\int_a^b f(t)g(t)dt)^2 \leq (\int_a^b f^2(t)dt)(\int_a^b g^2(t)dt).$$

2. Ortogonalitate. Baze ortonormate

Fie E un spaţiu euclidian.

DEFINIŢIE. Vectorii $x, y \in E$ se numesc *ortogonali* dacă şi numai dacă $< x, y >= 0$ şi vom nota aceasta $x \perp y$. Un sistem $\{x_1, ..., x_m\}$ de vectori din E se numeşte *sistem ortogonal* dacă pentru orice $j = \overline{1, m}, i \neq j$, avem $< x_i x_j >= 0$. Sistemul $\{x_1, ..., x_m\}$ se numeşte sistem *ortonormat* dacă pentru orice $i, j = \overline{1, m}$,

$$< x_i, x_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} .$$

OBSERVAŢII. 1) $0_E \perp x$, $\forall x \in E$.
2) Dacă $x \perp x$, atunci $x = 0_E$.
3) Dacă $x \perp y$, atunci $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. (teorema lui Pitagora)

PROPOZIŢIA 2.1. *Orice sistem ortogonal de vectori nenuli dintr-un spaţiu euclidian este liniar independent.*

Demonstraţie. Fie $S = \{x_1, ..., x_m\}$ un sistem ortogonal de vectori nenuli din E şi $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ astfel ca $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0_E$. Pentru orice $j = \overline{1, m}$, avem:

$$0 =< 0_E, x_j >=< \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, x_j >= \sum \lambda_i < x_i, x_j >= \lambda_j < x_j, x_j >$$

şi cum $x_j \neq 0_E$, rezultă $\lambda_j = 0$, deci S este liniar independent. ■

OBSERVAŢIE. Într-un spaţiu euclidian numărul vectorilor dintr-un sistem ortogonal nu poate depăşi dimensiunea spaţiului.

PROPOZIŢIA 2.2. *Fie $S = \{x_1, ..., x_m\}$ un sistem ortogonal de vectori nenuli în spaţiul euclidian E. Dacă $x \in Sp\{x_1, ..., x_m\}$, atunci:*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \text{cu } \lambda_i = \frac{< x, x_i >}{< x_i, x_i >}. \tag{2.1}$$

Demonstraţie. Cum $x \in Sp(\{x_1, ..., x_m\})$, există scalarii $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ astfel ca $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$. Atunci, pentru orice $i = \overline{1, m}$, avem:

$$< x, x_i >=< \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j, x_i >= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j < x_j, x_i >= \lambda_i < x_i, x_i > .$$

Deci are loc (1). ■

DEFINIŢIE. Coeficienţii $\lambda_i, i = \overline{1, m}$ din relaţia (2.1) de mai sus, se numesc *coeficienţii Fourier* ai vectorului $x \in E$ în raport cu sistemul ortogonal S.

Dacă sistemul S de vectori este ortonormat, atunci coeficienţii Fourier ai vectorului x vor fi $\lambda_i =< x, x_i >, i = \overline{1, m}$.
Din propoziţia 2.1 rezultă:

COROLAR 2.1.1. *Într-un spaţiu euclidian E de dimensiune n, orice sistem ortogonal $\{e_1, ..., e_n\}$ de vectori nenuli din E este o bază a lui E.*

Putem formula:

DEFINIŢIE. Se numeşte *bază ortogonală* a unui spaţiu euclidian E, de dimensiune n, orice sistem ortogonal constituit din n vectori nenuli. Se numeşte *bază ortonormată* a lui E orice sistem ortonormat constituit din n vectori.

TEOREMA 2.3. *În orice spaţiu euclidian E există baze ortonormate.*

Demonstraţie. Pornind de la o bază $\{e_1, ..., e_n\}$ a lui E, vom construi o nouă bază, ortogonală, folosind *procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.* Vom arăta, de fapt, că, pornind de la un sistem liniar independent de n vectori, se poate construi un sistem ortogonal tot de n vectori, toţi nenuli, daţi de:

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = e_2 + \lambda_{21} f_1 \\ \text{.........................} \\ f_i = e_i + \lambda_{i1} f_1 + ... + \lambda_{i,i-1} f_{i-1} \\ \text{..} \\ f_n = e_n + \lambda_{n1} f_1 + ... + \lambda_{n,n-1} f_{n-1} \end{cases}, \tag{2.2}$$

unde pentru orice $i = \overline{2, n}$:

$$\lambda_{ij} = -\frac{< e_i, f_j >}{< f_i, f_i >},\ j = \overline{1, i-1}. \tag{2.3}$$

Demonstraţia se face prin inducţie. Pentru $n = 2$, pornind de la sistemul liniar independent $\{e_1, e_2\}$, construim sistemul $\{f_1, f_2\}$ conform formulelor (2.2) unde λ_{21} se determină din condiţia $< f_2, f_1 >= 0$, adică $f_2 \perp f_1$. Mai precis, din $< f_2, f_1 >=< e_2 + \lambda_{21} f_1, f_1 >=< e_2, f_1 > +\lambda_{21} < f_1, f_1 >= 0$, obţinem $\lambda_{21} = -< e_2, f_1 > / < f_1, f_1 >$, deoarece $< f_1, f_1 >=< e_1, e_1 >\neq 0$, e_1 fiind nenul. În plus $f_2 \neq 0_E$, căci dacă am presupune prin absurd că $f_2 = 0_E$, ar rezulta că sistemul iniţial $\{e_1, e_2\}$ ar fi liniar dependent, ceea ce nu este posibil.

Presupunem proprietatea adevărată pentru $k-1$ şi o demonstrăm pentru k. Fie deci $\{e_1, ..., e_k\}$ sistemul liniar dependent. Prin formulele (2.2) de mai sus, construin un nou sistem de vectori $\{f_1, ..., f_k\}$ dintre care primii $k-1$ sunt, conform ipotezei de inducţie, ortogonali doi câte doi şi nenuli. Vom demonstra că şi scalarii $\lambda_{k1}, ..., \lambda_{k,k+1}$ pot fi determinaţi astfel încât $< f_k, f_i >= 0, i = \overline{1, k-1}$ şi $f_k \neq 0_E$. Într-adevăr, avem ipoteza:

$$\begin{array}{l} 0 =< f_k, f_1 >=< e_k, f_1 > +\lambda_{k1} < f_1, f_1 > +... + \lambda_{k,k-1} < f_{k-1}, f_k > \\ \text{...} \\ 0 =< f_k, f_{k-1} >=< e_k, f_{k-1} > +\lambda_{k1} < f_1, f_{k-1} > + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ... + \lambda_{k,k-1} < f_{k-1}, f_{k-1} > \end{array}. \tag{2.4}$$

Cum sistemul $\{f_1, ..., f_{k-1}\}$ este presupus ortogonal, relaţiile (2.4) se reduc la:

$$\begin{array}{l} 0 =< e_k, f_1 > +\lambda_{k1} < f_1, f_1 > \\ \text{...} \\ 0 =< e_k, f_{k-1} > +\lambda_{k,k-1} < f_{k-1}, f_{k-1} > \end{array},$$

deci $\lambda_{k1}, ..., \lambda_{k,k-1}$ pot fi determinaţi conform (2.3) astfel ca $f_k \perp f_i, i = \overline{1, k-1}$.

Mai mult $f_k \neq 0_E$, căci dacă prin absurd $f_k = 0_E$, atunci:

$$0_E = f_k = e_k + \lambda_{k1} f_1 + ... + \lambda_{k,k-1} f_{k-1} = e_k + \lambda_{k1} e_1 + \lambda_{k2}(e_2 + \lambda_{21} f_1) +$$
$$+ ... + \lambda_{k,k-1}(e_{k-1} + \lambda_{k-1,1}, f_1 + ... + \lambda_{k-1,k-2} f_{k-2}).$$

În final s-ar obţine coeficienţii $\mu_1, ..., \mu_{k-1}$ din K astfel ca:

$$0_E = f_k = e_k + \mu_1 e_1 + ... + \mu_{k-1} e_{k-1},$$

deci sistemul $\{e_1, ..., e_k\}$ ar fi liniar dependent.

În concluzie proprietatea este adevărată pentru orice n natural. Aşadar, pornind de la o bază oarecare $\{e_1, ..., e_n\}$ a spaţiului euclidian E, vom putea construi o bază ortogonală $\{f_1, ..., f_n\}$ cu ajutorul relaţiilor (2.2), (2.3). Din baza ortogonală astfel construită, vom putea obţine o bază ortonormată a lui E, $\{g_1, ..., g_n\}$, normând fiecare vector:

$$g_i = \frac{f_i}{\|f_i\|},\ i = \overline{1, n}. \blacksquare \tag{2.5}$$

EXEMPLE. 1) În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ (în raport cu produsul scalar canonic), considerăm baza $e_1 = (1, -2, 2), e_2 = (-1, 0, -1), e_3 = (5, -3, -7)$. Să construim, pornind de la ea, o nouă bază, ortogonală, folosind procedeul Gram-Schmidt.

Aşadar $f_1 = (1, -2, 2)$, iar $f_2 = (-1, 0, -1) + \lambda_{21}\ (1, -2, 2)$, $\lambda_{21} = -< e_2, f_1 > / < f_1, f_1 >$. Dar $< e_2, f_1 >= -3$, $< f_1, f_1 >= 9$. În consecinţă $f_2 = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Fie acum $f_3 = (5, -3, -7) + \lambda_{31}(1, -2, 2) + \lambda_{32}(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ unde: $\lambda_{31} = -\frac{< e_3, f_1 >}{< f_1, f_1 >}, \lambda_{32} = -\frac{< e_3, f_2 >}{< f_2, f_2 >}$. Cum $< e_3, f_1 >= -3$, $< e_3, f_2 >= 1$, $< f_2, f_2 >= 1$, rezultă $f_3 = (6, -3, -6)$. Atunci baza ortonormată este:

$$g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),\ g_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}),$$

$$g_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}).$$

2) Fie $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ spaţiul euclidian tridimensional al funcţiilor polinomiale cu coeficienţi reali de grad ≤ 2, cu produsul scalar dat de:

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \qquad \forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Sistemul $\{1, t, t^2\}$ formează o bază în acest spaţiu. Construim, pornind de la ea, o nouă bază, ortogonală, folosind procedeul Gram-Schmidt. Fie, deci, $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$. Atunci $f_1 = 1$, $f_2 = t + \lambda_{21} \cdot 1$. Cum $< e_2, f_1 >= \int_{-1}^{1} t \cdot 1dt = 0$, rezultă $\lambda_{21} = 0$, deci $f_2 = t$. Fie acum $f_3 = t^2 + \lambda_{31} \cdot 1 + \lambda_{32} \cdot t$. Calculând, obţinem: $< e_3, f_1 >= \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\ dt = \frac{2}{3}$, $< e_3, f_2 >= \int_{-1}^{1} t^2 \cdot t\ dt = 0$, $< f_1, f_1 >= 2$. Aşadar $\lambda_{31} = -\frac{1}{3}, \lambda_{32} = 0$, deci $f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. Am obţinut baza ortogonală $f_1 = 1$, $f_2 = t$, $f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$.

Mai general, dacă $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ este spaţiul euclidian al funcţiilor polinomiale de grad $\leq n$ cu produsul scalar definit ca mai sus, atunci pornind de la baza $\{1, t, ..., t^n\}$, construim prin procedeul de ortogonalizare o nouă bază:

$$\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t, ...\}.$$

Polinoamele din baza ortogonală astfel construită coincid, abstracţie făcând de un factor multiplicativ, cu polinoamele:

$$\frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k[\left(t^2-1\right)^k]}{dt^k}, k=\overline{0,n},$$

numite *polinoame Legendre*. Polinoamele Legendre formează deci o bază ortogonală în acest spaţiu euclidian. Prin normarea vectorilor acestor baze, obţinem o bază ortonormată $\{g_k\}_{k=\overline{0,n}}$. Dacă q este un polinom arbitrar de grad $\leq n$, coordonateke $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ ale lui q în baza $\{g_k\}_{k=\overline{0,n}}$, vor fi determinate prin relaţiile:

$$c_k =< q, g_k >= \int\limits_{-1}^{1} q(t)g_k(t)dt, \qquad k=\overline{0,n}.$$

3) Considerăm pe intervalul $[0, 2\pi]$ sistemul de funcţii $f_0, f_1, ..., f_{2n+1}$, unde $f_0 = 1, f_1(t) = \cos t, f_2(t) = \sin t, ..., f_{2n}(t) = \cos nt, f_{2n+1}(t) = \sin nt$. Combinaţia lor liniară cu coeficienţii $a_0, a_1, ..., a_n, b_1, .., b_n \in \mathbb{R}$,

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + ... + a_n \cos nt + b_n \sin nt \tag{2.6}$$

se numeşte *polinom trigonometric* de grad n.

Mulţimea tuturor polinoamelor trigonometrice de grad $\leq n$, formează un spaţiu vectorial de dimensiune $2n + 1$. Considerăm pe acest spaţiu vectorial, produsul scalar:

$$< p, q >= \int\limits_{0}^{2\pi} p(t)q(t)dt.$$

Se verifică uşor că, dacă $l \neq m$, atunci

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \cos lt \cos mtdt = 0, \int\limits_{0}^{2\pi} \sin lt \cos mtdt = 0, \int\limits_{0}^{2\pi} \sin lt \sin mtdt = 0.$$

De asemenea $\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 ktdt = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 kt = \pi, k \in \mathbf{N}^*, \int\limits_{0}^{2\pi} 1dt = 2\pi$.

În consecinţă, funcţiile:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, \tag{2.7}$$

formează o bază ortonormată în acest spaţiu.

OBSERVAŢIE. Dacă E este un spaţiu euclidian real de dimensiune n, iar $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată în E, produsul scalar a doi vectori $x, y \in V$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, devine:

$$< x, y >=< \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j >= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j < e_i, e_j >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Similar, într-un spaţiu unitar, obţinem: $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.

În aceste condiţii avem: $\|x\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ respectiv $\|x\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}$.

Reciproc, dacă într-o bază $\{e_1, ..., e_n\}$ a spaţiului euclidian E, produsul scalar a doi vectori $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ este dat de relaţia $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, rezultă că $< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$, deci baza este ortonormată.

PROPOZIŢIA 2.4. *Fie E un spaţiu prehilbertian real sau complex. Dacă $S = \{x_1, .., x_m\}$ este un sistem ortonormat de vectori din E, $x \in E$, iar $\lambda_i =< x, x_i >, i = \overline{1, m}$ sunt coeficienţii Fourier ai lui x în raport cu sistemul S, atunci:*

a) *vectorul $y = x - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ este ortogonal pe toţi vectorii sistemului S ;*

b) $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \leq \|x\|^2$. (inegalitatea lui Bessel).

Demonstraţie. a) Pentru orice $x_j \in S, j = \overline{1, m}$, obţinem:

$$< y, x_j >=< x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, x_j >=< x, x_j > - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < x_i, x_j >= \lambda_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_{ij} = 0.$$

b) Din proprietăţile produsului scalar, rezultă:

$$0 \leq< y, y >=< x, x > -2 \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < x_i, x > + \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j < x_i, x_j >=$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 . \blacksquare$$

OBSERVAŢIE. Dacă sistemul S din enunţ este o bază ortonormată, inegalitatea lui Bessel devine egalitate. În acest caz $\lambda_i =< x, x_i >$ sunt chiar coordonatele vectorului x în baza S.

3. Complementul ortogonal al unui subspaţiu

DEFINIŢIE. Fie E un spaţiu euclidian şi M un subspaţiu vectorial al său. Vectorul $x \in E$ este *ortogonal* pe M, dacă $< x, y >= 0, \forall y \in M$.

Se observă că x este ortogonal pe M dacă şi numai dacă x este ortogonal pe vectorii unei baze din M. Într-adevăr, dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază a lui M şi $< x, e_i >= 0, \forall i = \overline{1, m}$, atunci pentru orice $y \in M, y = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i e_i$, avem $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{m} y_i < x, e_i >= 0$. Reciproca este evidentă.

DEFINIŢIE. Se numeşte *complement ortogonal* al subspaţiului M în E şi se notează cu $M^\perp$, mulţimea:

$$M^\perp = \{x \in E; < x, y >= 0, \forall y \in M\}.$$

Evident $0_E \in M^\perp$, deci $M^\perp \neq \phi$.

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie E un spaţiu euclidian şi M un subspaţiu vectorial al său. Atunci:*

a) *$M^\perp$ este un subspaţiu vectorial al lui E;*

b) $E = M \oplus M^\perp$.

Demonstraţie. a) Fie $x, y \in M^\perp$ şi $\alpha, \beta \in K$. Dacă $z \in M$, atunci:

$$<\alpha x + \beta y, z>= \alpha < x, z> + \beta < y, z>= 0,$$

deci $\alpha x + \beta y \in M^\perp$, adică $M^\perp$ este subspaţiu vectorial al lui E.

b) Vom arăta că orice $x \in E$ se poate scrie sub forma

$$x = x' + x'', \text{ cu } x' \in M, \ x'' \in M^\perp.$$

Într-adevăr, dacă $S = \{e_1, ..., e_m\}$ este o bază ortonormată a lui M, iar $x \in E$, atunci $x' = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i e_i, \lambda_i =< x, x_i >, i = \overline{1, m}$, este un vector din M. În consecinţă, conform propoziţiei 2.4, $x'' = x - x'$ este ortogonal pe toţi vectorii bazei S, deci este ortogonal pe M. Aşadar $x = x' + x''$, cu $x' \in M, x'' \in M^\perp$. Rămâne să verificăm că $M \cap M^\perp = \{0_E\}$. Fie deci $x \in M \cap M^\perp$. Atunci $x \in M$ şi $< x, y >= 0, \forall y \in M^\perp$. Cum $x \in M^\perp$, rezultă $< x, x >= 0$ şi deci $x = 0_E$. ■

4. Transformări liniare autoadjuncte

Fie E un spaţiu euclidian de dimensiune n.

TEOREMA 4.1. *Dacă $T \in \mathcal{L}(E)$, atunci există un unic operator liniar $T^* : E \to E$ astfel ca:*

$$< Tx, y >=< x, T^* y >, \forall x, y \in E. \tag{4.1}$$

T^* se numeşte adjunctul operatorului liniar T.

Demonstraţie. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată a lui E şi $y \in E$. Definim $T^* : E \to E$ astfel:

$$T^* y = \sum_{i=1}^{n} < Te_i, y > e_i.$$

Evident $T^* \in \mathcal{L}(E)$. În plus, dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, atunci conform propoziţiei 2.2, $x_i =< x, e_i >$, $i = \overline{1, n}$, deci:

$$< Tx, y >=< T(\sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i), y >= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< Te_i, y > .$$

Totodată:

$$< x, T^* y >=< x, \sum_{i=1}^{n} < Te_i, y > e_i >= \sum_{i=1}^{n} < Te_i, y >< x, e_i >,$$

deci (4.1) este dovedită.

Pentru unicitatea lui T^*, presupunem că ar exista $S \in \mathcal{L}(E)$, astfel ca:

$$< Tx, y >=< x, Sy >, \forall x, y \in E.$$

Atunci $< x, T^* y >=< x, Sy >$, adică $< x, (T^* - S)(y) >= 0, \forall x, y \in E$.
Luând $x = (T^* - S)(y)$ în egalitatea anterioară, obţinem:
$< (T^* - S)y, (T^* - S)y >= 0$, de unde $(T^* - S)(y) = 0_E$, adică $T^* = S$.
Teorema este demonstrată. ■

DEFINIŢIE. $T \in \mathcal{L}(E)$ se numeşte *transformare autoadjunctă* (*operator autoadjunct*) dacă $T = T^*$, adică dacă satisface:

$$< Tx, y >=< x, Ty >, \forall x, y \in E. \tag{4.2}$$

EXEMPLU. Aplicaţia identică 1_E şi pentru $\alpha \neq 0$, omotetia de raport α, $T_\alpha : E \to E, T_\alpha(x) = \alpha x, \forall x \in E$ sunt transformări autoadjuncte.

PROPOZIŢIA 4.2. *Fie E un spaţiu euclidian real şi $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată a lui E. Atunci $T \in \mathcal{L}(E)$ este autoadjunct dacă şi numai dacă matricea lui T în baza B este simetrică.*

Demonstraţie. " $\Longrightarrow$ " Fie $A = (a_{ij})$ matricea asociată lui T în baza B. Atunci $Te_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, i = \overline{1,n}$. Conform (4.2), $< Te_i, e_j > = < e_i, Te_j >, \forall i, j = \overline{1,n}$, deci $< \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j > = < e_i, \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k >$, adică

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} < e_k, e_j > = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} < e_i, e_k > .$$

Baza B fiind ortonormată, rezultă $a_{ji} = a_{ij}$, deci matricea A este simetrică.

" $\Longleftarrow$ " Dacă matricea A este simetrică, atunci $< Te_i, e_j > = < e_i, Te_j >, \forall i, j = \overline{1,n}$ (vezi mai sus). Fie $x, y \in E$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$. Folosind proprietăţile produsului scalar obţinem:

$$< Tx, y > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} < Te_i, e_j > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i, Te_j > = < x, Ty >, \forall x, y \in E,$$

deci T este autoadjunctă. ■

OBSERVAŢIE. Dacă E este un spaţiu euclidian complex de dimensiune n, procedând ca în propoziţia anterioară, se poate arăta că $T \in \mathcal{L}(E)$ este autoadjunctă dacă şi numai dacă matricea lui T într-o bază ortonormată, $A = (a_{ij})$ este *hermitică*, adică $a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \forall i, j = \overline{1,n}$.

PROPOZIŢIA 4.3. *Fie E un spaţiu euclidian (real sau complex) de dimensiune n. Dacă $T \in \mathcal{L}(E)$ este transformare autoadjunctă atunci:*

a) *valorile proprii ale lui T sunt numere reale;*

b) *la valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali.*

Demonstraţie. a) Considerăm mai întâi cazul când E este complex. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a lui T şi $x \in E, x \neq 0_E$ vectorul propriu corespunzător. T fiind autoadjunctă, din $< Tx, x > = < x, Tx >$, rezultă $< \lambda x, x > = < x, \lambda x >$. Atunci $\lambda < x, x > = \overline{\lambda} < x, x >$, adică $(\lambda - \overline{\lambda}) < x, x > = 0$, şi cum $x \neq 0_E$, rezultă $\lambda = \overline{\lambda}$, adică $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dacă E este un spaţiu euclidian real de dimensiune n, B o bază ortonormată a sa şi $T \in \mathcal{L}(E)$ o transformare autoadjunctă, atunci matricea asociată lui T este simetrica $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$. Considerând, de exemplu, spaţiul euclidian complex $\mathbb{C}^n$ şi $\widetilde{B}$ o bază ortonormată a sa, există un endomorfism $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ astfel ca matricea lui $\widetilde{T}$ în baza $\widetilde{B}$ să fie A. A fiind simetrică, conform observaţiei de mai sus, $\widetilde{T}$ este autoadjunctă.

Cele două endomorfisme T şi $\widetilde{T}$ au acelaşi polinom caracteristic. Cum valorile proprii ale lui $\widetilde{T}$ sunt reale, rezultă că toate rădăcinile acestui polinom caracteristic sunt reale.

b) Fie λ şi μ două valori proprii distincte ale lui T şi $x \neq 0_E$, $y \neq 0_E$ vectorii proprii corespunzători. Conform a) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. T fiind autoadjunctă, din

$< Tx, y >=< x, Ty >$, obţinem $< \lambda x, y >=< x, \mu y >$, adică $(\lambda - \mu) < x, y >= 0$. Cum $\lambda \neq \mu$, rezultă că $< x, y >= 0$, deci $x \perp y$. ■

LEMĂ 4.4. *Dacă $T \in \mathcal{L}(E)$ este autoadjunct şi $M \subset E$ este un subspaţiu invariant în raport cu T, atunci şi complementul său ortogonal $M^{\perp}$ este invariant în raport cu T.*

Demonstraţie. Fie $y \in M^{\perp}$, adică $< y, x >= 0, \forall x \in M$. Atunci, pentru orice $x \in M, < Ty, x >=< y, Tx >= 0$, deoarece ($M$ fiind invariant) $Tx \in M$. În consecinţă $Ty \in M^{\perp}$, adică $M^{\perp}$ este invariant. ■

TEOREMA 4.5. *Fie E un spaţiu euclidian de dimensiune n şi $T \in \mathcal{L}(E)$ un operator autoadjunct. Atunci există în E o bază ortonormată B astfel încât T este diagonalizabil în raport cu B (adică matricea A a lui T în baza B este diagonală).*

Demonstraţie. Vom folosi inducţia matematică. Afirmaţia este evidentă pentru $n = 1$. Presupunem acum că afirmaţia este adevărată pentru orice spaţiu euclidian de dimensiune $n - 1$.

Fie $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ o valoare proprie a lui T (conform propoziţiei 4.3) şi $x_1 \neq 0_E$, vectorul propriu corespunzător. Putem presupune $\|x_1\| = 1$, în caz contrar înlocuim x_1 cu $x_1/\|x_1\|$. Considerăm $M = Sp(\{x_1\})$, care este invariant în raport cu T. Conform lemei 4.4, complementul său ortogonal, $M^{\perp}$ este invariant în raport cu T. Atunci restricţia lui T la $M^{\perp}$, $T_1 = T|_{M^{\perp}} : M^{\perp} \to M^{\perp}$ este, de asemenea, un operator autoadjunct. Cum $\dim M^{\perp} = n - 1$, conform ipotezei de inducţie există o bază ortonormată $B' = \{x_2, ..., x_n\}$ în $M^{\perp}$ astfel ca matricea lui T_1 în această bază să fie diagonală. Deoarece $E = M \oplus M^{\perp}$ şi $< x_1, x_i >= 0, \forall i = \overline{2, n}$, rezultă că $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ este o bază ortonormată în E şi matricea lui T în baza B este diagonală:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ & .... & \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Ţinând seama de propoziţia 4.2, obţinem:

COROLAR 3.4.1. *Orice matrice simetrică A este diagonalizabilă.*

5. Transformări liniare ortogonale

Fie E un spaţiu euclidian real.

DEFINIŢIE. Endomorfismul $T \in \mathcal{L}(E)$ se numeşte *transformare ortogonală* (*operator ortogonal*) dacă transformă orice bază ortonormată într-o bază ortonormată în E.

TEOREMA 5.1. *Dacă E este un spaţiu euclidian de dimensiune n şi $T \in \mathcal{L}(E)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) *T este transformare ortogonală;*

b) *T "păstrează" produsul scalar, adică:*

$$< Tx, Ty > \ = \ < x, y >, \forall x, y \in E; \tag{5.1}$$

c) *dacă A este matricea lui T într-o bază ortonormată B, atunci $A^T = A^{-1}$ (A^T este transpusa lui A).*

Demonstraţie. $a) \Longrightarrow b)$. Dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază ortonormată în E, atunci $\{Te_1, ..., Te_n\}$ este o bază ortonormată în E, adică $< e_i, e_j >= \delta_{ij} = =< Te_i, Te_j >, \forall i, j = \overline{1,n}$. Dacă $x, y \in E, x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, atunci $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i, e_j >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Pe de altă parte:

$$< Tx, Ty >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < Te_i, Te_j >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Deci $< Tx, Ty >=< x, y >, \forall x, y \in E$.

$b) \Longrightarrow c)$. Vom arăta că dacă T "păstrează" produsul scalar, atunci T este injectivă, deci izomorfism. Fie $x \in KerT$, deci $Tx = 0_E$. Dar $< x, x >= =< Tx, Tx >= 0$. Atunci $x = 0_E$ şi în consecinţă $KerT = \{0_E\}$, deci T este injectiv. Atunci există $T^{-1} : E \to E$. Alegând în (5.1) $y = T^{-1}z$, $\forall z \in E$, obţinem $< Tx, z >=< x, T^{-1}z >, \forall x, z \in E$ şi deci $T^{-1} = T^*$.

Fie B o bază ortonormată în E şi A matricea ataşată lui T în această bază, adică

$$Te_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \ i = \overline{1,n}.$$

Fie C matricea ataşată lui T^* în baza B, adică

$$T^* e_k = \sum_{l=1}^{n} c_{lk} e_l, \ k = \overline{1,n}.$$

Atunci:

$$< Te_i, e_k >= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} < e_j, e_k >= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \delta_{jk} = a_{ki}, \ i, k = \overline{1,n}$$

şi

$$< e_i, T^* e_k >= \sum_{l=1}^{n} c_{lk} < e_i, e_l > \sum_{l=1}^{n} c_{lk} \delta_{il} = c_{ik}, \ i, k = \overline{1,n}.$$

Ţinând seama de (4.1) rezultă $c_{ik} = a_{ki}, \forall i, k = \overline{1,n}$, adică $C = A^T$. Aşadar matricea ataşată lui T^* în baza B este A^T. Cum $T^{-1} = T^*$, rezultă $A^{-1} = A^T$.

$c) \Longrightarrow a)$ Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată şi A matricea lui T în această bază. Cum $A^T = A^{-1}$, rezultă că există $T^{-1} : E \to E$ astfel ca $T^{-1} = T^*$. Atunci $< Te_i, Te_j >=< e_i, T^*(Te_j) >=< e_i, e_j >= \delta_{ij}$, deci $\{Te_1, ..., Te_n\}$ este o bază ortonormată în E, ceea ce înseamnă că T este ortogonal. ■

COROLAR 5.1.1. *Un operator ortogonal păstrează distanţele şi unghiurile.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă T este ortogonal, atunci punând în (5.1) $y = x$, obţinem $< x, x >=< Tx, Tx >$, adică $\|x\| = \|Tx\|, \forall x \in E$. Luând $x = u - v$, cu $u, v \in E$, obţinem $\|u - v\| = \|T(u - v)\| = \|Tu - Tv\|$, adică $d(u, v) = d(Tu, Tv), \forall u, v \in E$, deci T păstrează distanţele. Analog, dacă θ este unghiul dintre vectorii $x, y \in E$, atunci $\cos\theta = \dfrac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} = \dfrac{< Tx, Ty >}{\|Tx\| \cdot \|Ty\|} = \cos\varphi$, unde φ este unghiul dintre Tx şi Ty. ■

EXEMPLU. Rotaţia plană $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cu matricea

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in (-\pi, \pi],$$

în baza canonică (deci ortonormată) a lui $\mathbb{R}^2$ este o transformare ortogonală, deoarece $A^T = A^{-1}$.

DEFINIŢIE. Matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numeşte *matrice ortogonală* dacă este inversabilă şi $A^{-1} = A^T$.

PROPOZIŢIA 5.2. *Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală, atunci*

$$\det A = \pm 1.$$

Demonstraţie. A fiind ortogonală, rezultă $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$ şi cum $\det A = \det A^T$, rezultă că $(\det A)^2 = 1$, adică $\det A = \pm 1$. ■

DEFINIŢIE. O matrice ortogonală cu $\det A = 1$ se numeşte *matrice de rotaţie* în $\mathbb{R}^n$.

În continuare vom determina matricele ortogonale din $M_2(\mathbb{R})$. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ este o matrice ortogonală, egalitatea $A^t \cdot A = I_2$ este echivalentă cu egalităţile $a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 1$. Rezultă că $a, b, c, d \in [-1, 1]$. Notând $-a/d = c/b = \lambda$, obţinem $\lambda = \pm 1$. Cum $a \in [-1, 1]$ rezultă că există $\theta \in [-\pi, \pi]$ astfel ca $a = \cos\theta$, deci $c^2 = \sin^2\theta$, adică $c = \pm\sin\theta$. Schimbând eventual θ în $-\theta$, putem presupune că $c = \sin\theta$. Pentru $\lambda = \pm 1$, rezultă că matricea ortogonală A va avea una din formele:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

În primul caz, $\det A = 1$. Vom arăta ulterior că în acest caz A determină o rotaţie de unghi θ în plan. În ceea ce priveşte a doua matrice pentru $\theta = 0$ sau $\theta = \pi$, obţinem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

cu $\det A = -1$. Vom arăta ulterior că matricele de forma (5.2) determină simetrii în plan. În sfârşit:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

În concluzie, transformările ortogonale în plan sunt fie rotaţii, fie simetrii, fie compuneri de rotaţii cu simetrii.

6. Probleme

1. Folosind produsele scalare canonice din spaţiile euclidiene corespunzătoare să se calculeze produsele scalare şi normele vectorilor:

a) $x = (2, 3)$, $y = (-6, 4)$;
b) $x = (1, 1, 0)$, $y = (1, -1, 2)$;
c) $x = (1, -1, 2, 3)$, $y = (1, 0, 2, -4)$.

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ şi $< x, y >= x_1y_1 + +6x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$. Să se arate că $< \cdot, \cdot >$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$. Dacă $x = (1, -1, 0)$, $y = (-1, 1 - 2)$ să se calculeze $< x, y >$ şi normele acestor vectori date de produsul scalar de mai sus. Precizaţi dacă $< x, y >= 3x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$ (justificare).

3. Fie E un spaţiu euclidian de dimensiune n. Să se arate că vectorii u_1, u_2, ..., u_n de normă 1 care satisfac $||u_i - u_j|| = 1$, $1 \leq i < j \leq n$, formează o bază a lui E.

Pe spaţiile euclidiene din problemele următoare considerăm produsele scalare canonice.

4. Fie $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, -3)$, $u_3 = (5, -4, -1)$. Să se arate că vectorii formează o bază ortogonală a lui $\mathbb{R}^3$. Să se determine coordonatele vectorului $x = (1, 2, 3)$ în raport cu această bază.

5. Să se calculeze distanţa şi unghiul dintre vectorii:

a) $u = (1, 2, -3, 0)$, $v = (2, 4, -3, 1)$;
b) $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = t^2 + 1$ pe $\mathcal{C}([0, 1])$.

6. Să se ortonormeze sistemele de vectori:

a) $u_1 = (1, -2, 2)$, $u_2 = (-1, 0, -1)$, $u_3 = (5, 3, -7)$;
b) $v_1 = (7, 4, 3, -3)$, $v_2 = (1, 1, -6, 0)$, $v_3 = (5, 7, 7, 8)$, $v_4 = (2, 1, 3, 0)$.

7. Să se găsească o bază ortonormată a subspaţiului vectorial generat de vectorii $v_1 = (1, 2, 2, -1)$, $v_2 = (1, 1, -5, 3)$, $v_3 = (3, 2, 8, -7)$. Să se completeze această bază la o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^4$.

8. Să se găsească un vector unitar ortogonal vectorilor $v_1 = (1, 0, 2, 1)$, $v_2 = = (2, 1, 2, 3)$, $v_3 = (0, 1, -2, 1)$.

9. Fie $\mathcal{S}$ subspaţiul vectorial al soluţiilor sistemului omogen

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & & -2x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +9x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Să se găsească o bază ortonormată în $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}^\perp$.

10. Fie S subspaţiul vectorial al lui $\mathbb{R}^4$, generat de vectorii $v_1 = (2, 1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 1, 3, 0)$, $v_3 = (1, 2, 8, 1)$. Să se arate că orice $x \in \mathbb{R}^4$ se poate scrie în mod unic sub forma $x = y + z$, $y \in S$, $z \in S^\perp$. Să se determine y şi z când $x = (5, 2, -2, 2)$.

11. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = (11x_1 + 2x_2 - 8x_3, 2x_1 + 2x_2 + 10x_3, -8x_1 + 10x_2 + +5x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Să se găsească o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^3$ astfel încât matricea lui T în această bază să fie diagonală.

12. Aceeaşi problemă ştiind că matricea lui T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

13. Să se arate că $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Tx = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2)$ este o transformare liniară ortogonală.

14. Este ortogonală matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$?

15. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfism a cărui matrice în baza canonică este $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Să se arate că T este o transformare ortogonală. Afirmaţia rămâne adevărată dacă A este matricea lui T într-o bază oarecare a lui $\mathbb{R}^3$?

CHAPTER 6

Forme biliniare. Forme pătratice

În acest capitol introducem noţiunea de formă biliniară care generalizează noţiunea de formă liniară. Studiul formelor biliniare conduce la noţiunea de formă pătratică, o clasă importantă de funcţii de o variabilă, neliniare.

1. Forme biliniare. Matrice asociată. Rangul unei forme biliniare

Fie V un spaţiu vectorial real.

DEFINIŢIE. Se numeşte *formă biliniară* pe V o aplicaţie $F : V \times V \to \mathbb{R}$, cu proprietăţile:
a) $F(\alpha x + \beta y, z) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in V$;
b) $F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, y) + \beta F(x, z), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in V$.
Formele biliniare definite pe spaţii infinit-dimensionale se numesc, de obicei, *funcţionale biliniare.*

OBSERVAŢIE. O formă biliniară este liniară în fiecare din cele două argumente.
Astfel, dacă, de exemplu, fixăm $x \in V$, atunci aplicaţia $F_x : V \to \mathbb{R}$, $F_x(y) = F(x, y)$, este o formă liniară pe V.

DEFINIŢIE. O formă biliniară $F : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte *simetrică* dacă $F(x, y) = F(y, x), \forall x, y \in V$.

DEFINIŢIE. O formă biliniară simetrică se numeşte *pozitiv semidefinită* dacă $F(x, x) \geq 0, \forall x \in V$ şi *pozitiv definită* dacă este pozitiv semidefinită şi, în plus, $F(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$. Dacă $F(x, x) \leq 0, \forall x \in V$, F se numeşte *negativ semidefinită*, iar dacă, în plus, $F(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$, F se numeşte *negativ definită*.

EXEMPLE. 1) Fie E un spaţiu euclidian real şi $F : E \times E \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = \,=< x, y >$. Atunci F este o formă biliniară simetrică, pozitiv definită.
2) Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b, V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ şi $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă. Funcţia

$$F : V \times V \to \mathbb{R},\ F(f, g) = \int_a^b \int_a^b K(s, t) f(s) g(t)\, ds dt, \forall f, g \in V,$$

este o funcţională biliniară pe V.
3) Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D. Fie $a = (a_1, ..., a_n) \in D$ un punct arbitrar. Atunci aplicaţia

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ F(h, k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i k_j, \forall h, k \in \mathbb{R}^n,$$

$h = (h_1, ..., h_n), k = (k_1, ..., k_n)$, este o formă biliniară simetrică, numită *diferenţiala a doua* a lui f şi se notează cu $d^2 f(a)$.

4) Aplicaţia $F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right)=x_1y_2-x_2y_1$ este o formă biliniară, dar nu este simetrică.

Fie acum V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune n, $B=\{e_1,...,e_n\}$ o bază a sa şi $F:V\times V\to\mathbb{R}$ o formă biliniară.

Dacă $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$, $y=\sum\limits_{j=1}^{n}y_je_j$, atunci: $F(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_iy_jF(e_i,e_j)$. Notând $a_{ij}=F(e_i,e_j)$, $i,j=\overline{1,n}$, obţinem

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j. \tag{1.1}$$

Această egalitate arată că forma biliniară F determină matricea $A=(a_{ij})\in$ $\in M_n(\mathbb{R})$ şi reciproc, matricea $A\in M_n(\mathbb{R})$ determină forma biliniară F.

DEFINIŢIE. Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, $B=\{e_1,...,e_n\}$ o bază în V şi F o formă biliniară pe V. Matricea $A=(a_{ij})$, unde $a_{ij}=F(e_i,e_j)$, $i,j=\overline{1,n}$, se numeşte *matricea asociată* formei biliniare F în baza B.

TEOREMA 1.1. *Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune n şi F o formă biliniară pe V. Dacă $B=\{e_1,...,e_n\}$ şi $B'=\{e'_1,...,e'_n\}$ sunt două baze în V, iar $C=(c_{ij})$ este matricea de trecere de la baza B la baza B', atunci notând cu $A=(a_{ij}),D=(d_{ij})$, matricele asociate formei biliniare F în bazele B respectiv B', are loc $D=C^TAC$.*

Demonstraţie. Din $e'_j=\sum\limits_{k=1}^{n}c_{kj}e_k$, rezultă:

$$d_{ij}=F(e'_i,e'_j)=F(\sum_{l=1}^{n}c_{li}e_l,\sum_{k=1}^{n}c_{kj}e_k)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}c_{li}c_{kj}F\left(e_l,e_k\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}c_{li}c_{kj}a_{lk}=\sum_{l=1}^{n}c_{li}(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}c_{kj}),\forall i,j=\overline{1,n},$$

adică $D=C^TAC$. ■

EXEMPLU. Fie E un spaţiu euclidian real de dimensiune n, $B=\{e_1,...,e_n\}$ o bază ortonormată A lui E şi F forma biliniară dată de $F(x,y)=<x,y>=$ $=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$, $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$, $y=\sum\limits_{i=1}^{n}y_ie_i$. Atunci $a_{ij}=F(e_i,e_j)=\delta_{ij},i,j=\overline{1,n}$, deci matricea asociată formei biliniare F în baza B este matricea unitate.

Este uşor de stabilit:

PROPOZIŢIA 1.2. *O formă biliniară F definită pe V este simetrică dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază a lui V este simetrică.*

OBSERVAŢIE. Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ şi B este inversabilă, atunci $rang\,(AB)=$ $=rangA$ şi $rang\,(BA)=rangA$.

Într-adevăr, dacă $G=\{e_1,...,e_n\}$ este o bază în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial V, conform teoremei 3.2, cap. 3, există endomorfismele $S,T\in\mathcal{L}(V)$ astfel ca matricele asociate lui S,T în baza G să fie A respectiv B. Cum B este inversabilă, rezultă că T este automorfism (teorema 4.2, cap. 3). Atunci, $rang\,(S\circ T)=rangS$ (corolar 2.4.2, cap. 3), deci $rang\,(AB)=rangA$ (teorema 4.3, cap. 3). Similar se arată că $rang\,(BA)=rang\,(A)$.

În consecinţă, dacă F este o formă biliniară, cum matricea sa se schimbă la schimbarea bazei după formula $D = C^T AC$, unde C este inversabilă, rezultă că $rangD = rangA$. Deci rangul matricei asociate unei forme biliniare nu depinde de baza aleasă. Putem deci formula următoarea

DEFINIŢIE. Se numeşte *rangul formei biliniare* F, rangul matricei asociate lui F în orice bază a spaţiului. Forma biliniară F se numeşte *nedegenerată* sau *nesingulară* dacă $rangF = \dim V$ şi *degenerată* dacă $rangF < \dim V$.

Deci F este nedegenerată dacă matricea sa într-o bază oarecare din V este nesingulară şi degenerată dacă această matrice este singulară.

TEOREMA 1.3. *Fie E un spaţiu euclidian real de dimensiune n şi $F : E \times E \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. Atunci există o unică transformare liniară autoadjunctă $T : E \to E$ astfel ca $F(x, y) = < Tx, y >$, $\forall x, y \in E$.*

Demonstraţie. Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormată a lui E şi $a_{ij} = F(e_i, e_j), i, j = \overline{1, n}$. Definim $T : E \to E$, prin $Te_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}e_k$. Se arată uşor că T este liniară şi cum $a_{ij} = a_{ji}$, T este autoadjunctă (propoziţia 3.2, cap. 5). Fie acum $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i, y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_je_j$. Atunci:

$$< Tx, y >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j < Te_i, e_j >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_i < \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k, e_j >=$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} < e_k, e_j >) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_{kj}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_ja_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = F(x, y).$$

Pentru unicitate, dacă S este o transformare autoadjunctă astfel încât $F(x, y) = < Sx, y >, \forall x, y \in E$, atunci $< (T - S)(x), y >= 0, \forall x, y \in E$. Alegând $y = (T - S)(x)$, rezultă că $\|(T - S)(x)\| = 0, \forall x \in E$, adică $\|Tx - Sx\| = 0, \forall x \in E$, deci $Tx = Sx, \forall x \in E$.

2. Forme pătratice. Reducerea la forma canonică

DEFINIŢIE. Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial. O aplicaţie $\Phi : V \to \mathbb{R}$ se numeşte *formă pătratică* pe V dacă există o formă biliniară simetrică $F : V \times V \to \mathbb{R}$ astfel ca $\Phi(x) = F(x, x), \forall x \in V$. Forma pătratică se numeşte *pozitiv definită* (*negativ definită*) dacă forma biliniară F este pozitiv definită (negativ definită). Forma pătratică este *cu semn nedefinit,* dacă există $x, y \in V \setminus \{0_V\}$, astfel încât $\Phi(x) > 0$ şi $\Phi(y) < 0$.

Se verifică imediat că F este unic determinată de Φ. Mai precis, corespondenţa $F \to \Phi$ este o bijecţie între mulţimea formelor biliniare simetrice pe V şi mulţimea formelor pătratice pe V.

Într-adevăr, dacă Φ este o formă pătratică, atunci forma biliniară simetrică F din care provine este dată de:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}[\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y)], \forall x, y \in V. \tag{2.1}$$

F se numeşte *polara* formei pătratice Φ.

Fie acum V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $B=\{e_1,...,e_n\}$ o bază în V. Dacă $\Phi : V \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică, iar $F : V\times V \to \mathbb{R}$ polara sa, atunci pentru orice $x \in V, x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, avem:

$$\Phi(x) = F(x,x) = F(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{2.2}$$

unde $a_{ij}=F(e_i,e_j)$, $i,j=\overline{1,n}$. De exemplu, când $n=2$ şi $x=x_1e_1+x_2e_2$, avem $\Phi(x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$.

DEFINIŢIE. Matricea $A=(a_{ij})$ asociată formei biliniare simetrice F se numeşte *matricea asociată formei pătratice* Φ. Rangul formei biliniare F îl vom numi *rangul formei pătratice* Φ şi coincide, evident, cu rangul matricei lui Φ într-o bază a lui V.

EXEMPLU. Dacă $x=(x_1x_2)\in\mathbb{R}^2, \Phi(x)=x_1^2+x_2^2-4x_1x_2$ este o formă pătratică pe $\mathbb{R}^2$. Dacă $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, atunci polara formei pătratice Φ este $F(x,y)=x_1y_1+x_2y_2-2x_1y_2-2x_2y_1$.

DEFINIŢIE. Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $\Phi : V\to\mathbb{R}$ o formă pătratică. Spunem că Φ este *redusă la forma canonică* dacă se determină o bază $B'=\{e_1',...,e_n'\}$ în V astfel:

$$\Phi(x)=\lambda_1 x_1'^2+...+\lambda_n x_n'^2, \tag{2.3}$$

unde $x_1',...,x_n'$ sunt coordonatele lui x în baza B', iar $\lambda_1,...,\lambda_n$ sunt scalari din $\mathbb{R}$, nu toţi neapărat nenuli, numiţi *coeficienţii* formei pătratice.

OBSERVAŢIE. În această bază matricea asociată formei pătratice este o matrice diagonală. Observăm că numărul de pătrate cu coeficienţii nenuli din (2.3) coincide cu rangul lui Φ.

TEOREMA 2.1. (Metoda lui Gauss). *Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune n, $\Phi : V \to R$ o formă pătratică, iar $B=\{e_1,...,e_n\}$ o bază faţă de care $\Phi(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, matricea $A=(a_{ij})$ fiind nenulă. Atunci există o bază $B'=\{e_1',...,e_n'\}$ în V în care Φ se scrie sub forma canonică (2.3).*

Demonstraţie. Distingem două situaţii:

a) există cel puţin un indice i, $1\le i\le n$, astfel ca $a_{ii}\neq 0$.

b) $a_{ii}=0, \forall i=\overline{1,n}$. În acest caz

$$\Phi(x)=2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j.$$

Ne ocupăm mai întâi de cazul a), aplicând inducţia matematică după n. Cazul $n=1$ este banal, deoarece $\Phi(x)=a_{11}x_1^2$, deci Φ este automat redusă la forma canonică în orice bază. Presupunem proprietatea adevărată pentru $n-1$ variabile şi o demonstrăm pentru n. Putem presupune $a_{11}\neq 0$ (în caz contrar renumerotăm convenabil vectorii bazei). Grupând toţi termenii care conţin pe x_1 şi formând un pătrat perfect, obţinem:

$$\Phi(x)=\Phi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n)^2+\Psi(x_2,...,x_n),$$

unde Ψ este o formă pătratică în $(n-1)$ variabile.

Construim baza $B_1 = \{f_1, ..., f_n\}$ cu ajutorul schimbării de coordonate:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, y_2 = x_2, ..., y_n = x_n.$$

Matricea de trecere de la baza B la baza B_1 este:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & ... & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

deci $f_1 = \frac{1}{a_{11}}e_1, f_2 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}e_1 + e_2, ..., f_n = -\frac{a_{1n}}{a_{11}}e_1 + e_n$. Dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i f_i$, atunci $\Phi(x) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{j=2}^{n} a'_{ij}y_i y_j = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + \Psi(x')$, unde

$$x' = \sum_{i=2}^{n} y_i f_i \in V_1 = Sp(\{f_2, ..., f_n\}).$$

Cum Ψ este o formă pătratică în $n-1$ variabile, conform ipotezei de inducţie, există o bază $\{e'_2, ..., e'_n\}$ a lui V_1 astfel încât $\Psi(x) = \sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i x_i'^2$, unde $x' = \sum\limits_{i=2}^{n} x'_i e'_i$. Cum $f \notin V_1$, luând $e'_1 = f_1$, rezultă că $\{e'_1, ..., e'_n\}$ este o bază a lui V şi în această bază $\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$, cu $\lambda_1 = \frac{1}{a_{11}}$ şi $x'_1 = y_1$. Teorema este demonstrată în acest caz.

b) Dacă toate elementele de pe diagonala principală sunt nule, atunci există cel puţin un element nediagonal $a_{ij} \neq 0, i \neq j$. Renumerotând, eventual, vectorii bazei, putem presupune $a_{12} \neq 0$. Construim baza $B_2 = \{g_1, ..., g_n\}$ astfel încât dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i g_i$ să avem $x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), x'_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, $x'_k = x_k, k = \overline{3, n}$. În acest caz matricea de trecere şi noua bază sunt respectiv:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} g_1 = e_1 + e_2 \\ g_2 = e_1 - e_2 \\ g_3 = e_3 \\ .... \\ g_n = e_n \end{array}$$

În această bază, obţinem $\Phi(x) = 2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2) + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j$, în care matricea asociată are pe a_{12} ca element diagonal. Se continuă ca în cazul a). ■

EXEMPLE. 1) Fie $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o formă pătratică, care în baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ a lui $\mathbb{R}^3$ are expresia $\Phi(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$. Să se reducă la forma canonică folosind metoda lui Gauss.

Avem $a_{11} = 5 \neq 0$. Grupăm termenii care conţin x_1 şi căutăm să formăm un pătrat perfect. Avem:

$$\Phi(x) = (5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3) + 6x_2^2 + 4x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + \frac{26}{5}x_2^2 + \frac{16}{5}x_3^2 - \frac{8}{5}x_2x_3.$$

Fie schimbarea de coordonate $y_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_3$. Matricea de trecere de la baza canonică la noua bază $\{f_1, f_2, f_3\}$ în care $x = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3$, este

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$f_1 = \frac{1}{5}e_1,\ f_2 = \frac{2}{5}e_1 + e_2,\ f_3 = \frac{2}{5}e_1 + e_3$$

Atunci, continuând procedeul, obţinem:

$$\Phi(x) = \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{5}{26}(\frac{26}{5}y_2 - \frac{4}{5}y_3)^2 + \frac{40}{13}y_3^2.$$

Cu schimbarea de coordonate $x_1' = y_1, x_2' = \frac{26}{5}y_2 - \frac{4}{5}y_3, x_3' = y_3$, se obţine forma canonică:

$$\Phi(x) = \frac{1}{5}x_1'^2 + \frac{5}{26}x_2'^2 + \frac{40}{13}x_3'^2,$$

unde $x = x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3'$, matricea de trecere de la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ la baza $\{e_1', e_2', e_3'\}$ fiind

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{iar}\quad \begin{aligned} e_1' &= f_1 \\ e_2' &= \frac{5}{26}f_2 \\ e_3' &= \frac{2}{13}f_2 + f_3 \end{aligned}.$$

Matricea de trecere de la baza iniţială B la baza $\{e_1', e_2', e_3'\}$ va fi:

$$C = C_1C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{13} & \frac{6}{13} \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \text{şi}\quad \begin{aligned} e_1' &= \frac{1}{5}e_1 \\ e_2' &= \frac{1}{13}e_1 + \frac{5}{26}e_2 \\ e_3' &= \frac{6}{13}e_1 + \frac{2}{13}e_2 + e_3 \end{aligned}.$$

În această bază, matricea formei pătratice va fi C^TAC, unde A este matricea formei pătratice în baza B, adică:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculând

$$C^TAC = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{13} \end{pmatrix},$$

obţinem matricea formei pătratice redusă la forma canonică, care este diagonală.

2) Aceeaşi problemă pentru forma pătratică, care în baza canonică B a lui $\mathbb{R}^3$, are expresia $\Phi(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Matricea formei pătratice în baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $a_{ii} = 0, i = \overline{1,3}$ şi cum $a_{12} = \frac{1}{2} \neq 0$, considerăm schimbarea de coordonate $x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), x_2' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), x_3' = x_3$, cu matricea de trecere de la baza B la o nouă bază $\{g_1, g_2, g_3\}$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În baza $g_1 = e_1 + e_2, g_2 = e_1 - e_2, g_3 = e_3, x = x_1'g_1 + x_2'g_2 + x_3'g_3$, avem:

$$\Phi(x) = x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_1'x_3' = (x_1' + x_3')^2 - x_2'^2 - x_3'^2.$$

Cu schimbarea $x_1'' = x_1' + x_3', x_2'' = x_2', x_3'' = x_3'$ obţinem forma canonică:

$$\Phi(x) = x_]''^2 - x_2''^2 - x_3''^2.$$

În acest ultim caz, matricea de trecere de la baza $\{g_1, g_2, g_3\}$ la noua bază $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ este

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } \begin{array}{l} e_1' = g_1 = e_1 + e_2 \\ e_2' = g_2 = e_1 - e_2 \\ e_3' = -g_1 + g_3 = -e_1 - e_2 + e_3 \end{array}.$$

În concluzie, matricea de trecere de la baza B la baza B' este $C = C_1C_2$, adică:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea formei pătratice în baza B' are formă diagonală, calculându-se cu formula C^TAC:

$$C^TAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 2.2 (metoda lui Jacobi). *Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $\Phi : V \to \mathbb{R}$, având în baza $B = \{e_1, ..., e_n\}$ matricea $A = (a_{ij})$ ce are proprietatea că pentru orice $i = \overline{1,n}$, minorii principali*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1i} \\ ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ii} \end{vmatrix}$$

sunt nenuli. Atunci, există o bază $B' = \{e_1', ..., e_n'\}$ a lui V în care Φ are forma canonică

$$\Phi(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2'^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n'^2, \tag{2.4}$$

unde $x = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$, *iar* $\Delta_0 = 1$.

Demonstraţie. Vom construi baza formei canonice B' astfel:

$$\left\{\begin{array}{l} e_1' = c_{11}e_1 \\ e_2' = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ e_i' = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + \dots + c_{ii}e_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n' = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{array}\right. . \tag{2.5}$$

Matricea schimbării de bază este triunghiulară, coeficienţii $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, n}$, $j \geq i$, urmând a fi determinaţi astfel încât în noua bază B', matricea formei pătratice să fie diagonală, pe diagonala principală găsindu-se chiar coeficienţii $c_{ii}, i = \overline{1, n}$, din relaţiile (2.5). Pentru aceasta, dacă F este polara formei pătratice Φ, este suficient să cerem

$$F(e_i', e_j) = 0, \text{ pentru orice } i, j = \overline{1, n}, j < i. \tag{2.6}$$

Vom arăta că dacă are loc (2.6) atunci $F(e_i', e_j') = 0$, pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Într-adevăr, din (2.5) şi (2.6) pentu $i \neq j, j < i$, avem:

$$F(e_i', e_j') = F(e_i', c_{1j}e_1 + \dots + c_{jj}e_j) = c_{1j}F(e_i', e_1) + \dots + c_{jj}F(e_i', e_j) = 0.$$

Folosind, apoi, simetria formei biliniare F, rezultă că pentru orice $i \neq j$, $F(e_i', e_j') = 0$, deci matricea lui Φ în baza B' este diagonală.

Vom impune acum condiţiile:

$$F(e_i', e_i) = 1, \forall i = \overline{1, n}. \tag{2.7}$$

Atunci conform (2.6) şi (2.7) elementele de pe diagonala principală vor fi:

$$F(e_i', e_i') = F(e_i', c_{1i}e_1 + \dots + c_{ii}e_i) =$$

$$= c_{1i}F(e_i', e_1) + \dots + c_{i-1,i}F(e_i', e_{i-1}) + c_{ii}F(e_i', e_i) = c_{ii}.$$

Vom arăta acum că pentru $i = \overline{1, n}$ avem:

$$c_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta i} \tag{2.8}$$

Din (2.7), pentru $i = 1$, obţinem $c_{11}F(e_1, e_1) = 1$, adică $c_{11} = \dfrac{1}{a_{11}} = \dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}$. Fixând $i, 2 \leq i \leq n$, din (2.6) şi (2.7) obţinem:

$$\begin{array}{l} F(e_i', e_1) = c_{1i}F(e_1, e_1) + c_{2i}F(e_2, e_1) + \dots + c_{ii}(e_i, e_1) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(e_i', e_{i-1}) = c_{1i}F(e_1, e_{i-1}) + c_{2i}F(e_2, e_{i-1}) + \dots + c_{ii}F(e_i, e_{i-1}) = 0 \\ F(e_i', e_i) = c_{1i}F(e_1, e_i) + c_{2i}F(e_2, e_1) + \dots + c_{ii}F(e_i, e_i) = 1 \end{array} .$$

Folosind faptul că $F(e_i, e_j) = a_{ij}$ precum şi simetria lui F, sistemul de mai sus devine

$$\left\{\begin{array}{l} c_{1i}a_{11} + c_{2i}a_{12} + \dots + c_{ii}a_{1i} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{1i}a_{i-1,1} + c_{2i}a_{i-1,2} + \dots + c_{ii}a_{i-1,i} = 0 \\ c_{1i}a_{i1} + c_{2i}a_{i2} + \dots + c_{ii}a_{ii} = 1 \end{array}\right. . \tag{2.9}$$

Determinantul sistemului (2.9) este chiar minorul principal Δ_i, care, prin ipoteză, este nenul. Deci sistemul (2.9) este un sistem Cramer. În consecinţă, avem:

$$c_{ii} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,i-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i-1,1} & ... & a_{i-1,i-1} & 0 \\ a_{i1} & ... & a_{i,i-1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_i} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.$$

În concluzie, matricea formei pătratice Φ în baza nou construită B', este:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

iar expresia lui Φ este dată de (5), unde $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i' e_i'$. ■

EXEMPLU. Forma pătratică $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ are în baza canonică $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ expresia $\Phi(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$, unde $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Matricea sa:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

are minorii principali:

$$\Delta_1 = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80.$$

Putem pune deja în evidenţă forma canonică a lui Φ, folosind (5):

$$\Phi(x) = \frac{1}{5}x_1'^2 + \frac{5}{26}x_2'^2 + \frac{13}{40}x_3'^2.$$

Să determinăm acum baza formei canonice. Conform (2.5), $e_1' = c_{11}e_1$ şi cum $F(e_1', e_1) = 1$, rezultă $c_{11} = \frac{1}{5}$.

Dar $e_2' = c_{12}e_1 + c_{22}e_2$. Condiţiile $F(e_2', e_1) = 0, F(e_2', e_2) = 1$, conduc la sistemul:

$$\begin{cases} 5c_{12} - 2c_{22} = 0 \\ -2c_{12} + 6c_{22} = 1 \end{cases}.$$

Rezolvând, obţinem $c_{12} = \frac{1}{13}$, $c_{22} = \frac{5}{26}$.

În sfârşit $e_3' = c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3$. Condiţiile $F(e_3', e_1) = 0$, $F(e_3', e_2) = 0$, $F(e_3', e_3) = 1$, conduc la sistemul

$$\begin{cases} 5c_{13} - 2c_{23} - 2c_{33} = 0 \\ -2c_{13} + 6c_{23} = 0 \\ -2c_{13} + 4c_{33} = 1 \end{cases}.$$

care are soluţia $c_{13} = \frac{3}{20}$, $c_{23} = \frac{1}{20}$, $c_{33} = \frac{13}{40}$. Aşadar $e_1' = \frac{1}{5}e_1$, $e_2' = \frac{1}{13}e_1 + \frac{5}{26}e_2$, $e_3' = \frac{3}{20}e_1 + \frac{1}{20}e_2 + \frac{13}{40}e_3$, matricea de trecere de la baza canonică la baza $\{e_1', e_2', e_3'\}$, fiind

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{13} & \frac{3}{20} \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{1}{20} \\ 0 & 0 & \frac{13}{40} \end{pmatrix}.$$

OBSERVAŢIE. Să remarcăm că în comparaţie cu metoda lui Gauss, condiţiile pe care trebuie să le satisfacă matricea unei forme pătratice într-o bază fixată, pentru a putea aplica metoda lui Jacobi, sunt mai restrictive. Se poate arăta totuşi că dacă unii minori principali sunt nuli, se poate schimba convenabil baza în V astfel încât toţi minorii principali ai matricei formei pătratice să fie nenuli.

TEOREMA 2.3 (metoda valorilor şi vectorilor proprii sau metoda transformărilor ortogonale). *Fie E un spaţiu euclidian real de dimensiune n şi $\Phi : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe E. Atunci există o bază ortogonală $B \subset E$ astfel încât matricea asociată lui Φ în baza B să fie diagonală (deci Φ are formă diagonală).*

Demonstraţie. Fie F polara formei pătratice Φ. Conform teoremei 1.3, există o unică transformare autoadjunctă $T : E \to E$ astfel încât $F(x, y) =< Tx, y >$, $\forall x, y \in E$. Atunci $\Phi(x) =< Tx, x >$, $\forall x \in E$. T fiind autoadjunctă, rezultă că există o bază ortonormată $B = \{e_1, ..., e_n\}$ a lui E, bază formată din vectori proprii ai lui T corespunzători valorilor proprii reale $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Aşadar $Te_i = \lambda_i e_i$, $\forall i = \overline{1, n}$. Dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, atunci

$$\begin{aligned} \Phi(x) &=< Tx, x >=< \sum_{i=1}^{n} x_i T e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j >= \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j < \lambda_i e_i, e_j >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \end{aligned}$$

adică Φ are formă diagonală. ■

OBSERVAŢIE. Pentru a reduce la forma canonică o formă pătratică, prin metoda transformărilor ortogonale, se procedează astfel:

- se determină valorile proprii $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, ale matricei asociate formei pătratice Φ şi subspaţiile corespunzătoare V_{λ_i}, $i = \overline{1, n}$;

- în fiecare subspaţiu propriu, construim o bază ortonormată, folosind procedeul Gram-Schmidt;

- se formează matricea $C \in M_n(\mathbb{R})$, ale cărei colone conţin componentele vectorilor proprii determinaţi mai sus. C este ortogonală şi $C^T AC$ este o matrice diagonală cu valorile proprii pe diagonală. (A este matricea formei pătratice în baza ortonormată iniţială);

- forma canonică este $\Phi(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$, $x_1, ..., x_n$ fiind componentele lui x în baza construită mai sus.

EXEMPLU. Pentru forma pătratică $\Phi(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$ să se determine forma canonică, folosind metoda transformărilor ortogonale. Valorile proprii ale matricei asociate în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, sunt $\lambda_2 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 8$, iar vectorii proprii corespunzători sunt $v_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $v_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$,

$v_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ respectiv (sunt ortogonali şi normaţi). În baza $\{v_1, v_2, v_3\}$, Φ are forma diagonală $\Phi(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2$, unde $x = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$.

OBSERVAŢIE. Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial şi $\Phi : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică al cărei rang este r, $0 \leq r \leq n$. Să presupunem că a fost determinată o bază $B = \{e_1', ..., e_n'\}$ a lui V în care Φ să fie redusă la forma canonică:

$$\Phi(x) = \lambda_1 x_1'^2 + ... + \lambda_r x_r'^2,$$

unde $x_1', ..., x_r'$ sunt coordonatele lui x în baza B, iar coeficienţii $\lambda_j, j = \overline{r+1, n}$ sunt nuli. Efectuând schimbarea de coordonate:

$$x_i = \sqrt{|\lambda_i|}\ x_i',\ i = \overline{1, r}, \quad x_j = x_j',\ j = \overline{r+1, n},$$

expresia lui Φ devine, după o eventuală renumerotare a coordonatelor lui x (presupunând $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, p}$, $\lambda_i < 0$, $i = \overline{p+1, r}$):

$$\Phi(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 \tag{2.11}$$

numită *forma normală* a formei pătratice.

3. Legea de inerţie a formelor pătratice

Analizând exemplele din 6.2 se constată că forma canonică la care este adusă o formă pătratică, nu are coeficienţii unic determinaţi, ci ei depind de metoda folosită. De asemenea, nici baza formei canonice nu este unic determinată. Totuşi, numărul coeficienţilor strict pozitivi, respectiv strict negativi, nu se schimbă, indiferent de metoda utilizată de reducere la forma canonică. Vom demonstra:

TEOREMA 3.1. (legea de inerţie). *Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial şi $\Phi : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci numărul termenilor pozitivi şi a celor negativi din forma normală a lui Φ nu depinde de alegerea bazei formei normale.*

Demonstraţie. Fie r rangul lui Φ şi $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e_1', ..., e_n'\}$ două baze în V în care Φ să aibă, respectiv, formele normale:

$$\Phi(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 \tag{3.1}$$

şi

$$\Phi(x) = x_1'^2 + ... + x_q'^2 - x_{q+1}'^2 - ... - x_r'^2, \tag{3.2}$$

unde $x_1, ..., x_n$ sunt coordonatele lui x în baza B, iar $x_1', ..., x_n'$ sunt coordonatele lui x în baza B'. Vom arăta că $p = q$, deci că numărul de pătrate pozitive este acelaşi, ceea ce atrage faptul că şi numărul de pătrate negative este acelaşi. Presupunem prin absurd că $p > q$. Fie $S_1 = Sp(\{e_1, ..., e_p\})$ şi $S_2 = Sp(\{e_{q+1}', ..., e_n'\})$, deci $\dim S_1 = p, \dim S_2 = n - q$. Cum $S_1 + S_2$ este subspaţiu vectorial al lui V, $\dim(S_1 + S_2) \leq n$. Conform teoremei lui Grassmann, $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2) \geq p + n - q - n > 0$. Există deci $x_0 \in S_1 \cap S_2, x_0 \neq 0_V$. Atunci $x_0 = x_1e_1 + ... + x_pe_p$ $(x_0 \in S_1)$ şi $x_0 = x_{q+1}'e_{q+1}' + ... + x_n'e_n'$ $(x_0 \in S_2)$. Obţinem: $\Phi(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 > 0$ şi $\Phi(x_0) = -x_{q+1}'^2 - ... - x_r'^2 < 0$. Am ajuns la o contradicţie, deci inegalitatea $p > q$ nu poate avea loc. Analog se verifică şi că inegalitatea $q > p$ nu poate avea loc. Rezultă $p = q$. ■

Teorema următoare ne dă posibilitatea să verificăm într-un mod foarte simplu dacă o formă pătratică este pozitiv sau negativ definită.

TEOREMA 3.2. (Sylvester) *În ipotezele teoremei 2.2, forma pătratică* Φ *este pozitiv definită dacă şi numai dacă* $\Delta_i > 0, \forall i = \overline{1,n}$, *iar* Φ *este negativ definită dacă şi numai dacă* $\Delta_{i-1} \cdot \Delta_i < 0, \forall i = \overline{1,n}$.

Demonstraţie. Conform teoremei 2.2 (metoda Jacobi), există o bază $B' = \{e_1', ..., e_n'\}$ a lui V în care:

$$\Phi(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n^2 \tag{3.3}$$

unde $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i'$. Dacă Φ este pozitiv definită, alegând succesiv $x = e_1'$, $x = e_2'$, ..., $x = e_n'$ se obţine $\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0, \forall i = \overline{1,n}$. Cum $\Delta_0 = 1$, rezultă $\Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$. Reciproc, dacă $\Delta_i > 0, \forall i = \overline{1,n}$, rezultă $\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0, \forall i = \overline{1,n}$ şi deci din (3.3) se obţine $\Phi(x) > 0, \forall x \neq 0_V$. Cazul formelor pătratice negativ definite se tratează similar. ■

4. Reducerea simultană la forma canonică a două forme pătratice

Fie V un spaţiu euclidian real de dimensiune n, $\Phi, \Psi : V \to \mathbb{R}$ două forme pătratice şi F şi G polarele celor două forme pătratice.

În anumite probleme de matematică şi fizică un rol important îl are determinarea unei baze a lui V în raport cu care cele două forme pătratice au simultan forma canonică.

O astfel de bază nu se poate determina totdeauna. Teorema următoare precizează când această problemă are soluţie.

G fiind o formă biliniară pozitiv definită, rezultă imediat că

$$< x, y >_G = G(x, y), \tag{4.1}$$

este un produs scalar pe V.

TEOREMA 4.1. *Dacă* Ψ *este pozitiv definită, atunci există o bază ortonormată (în raport cu* $< \cdot, \cdot >_G$*)* $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ *a lui* V *astfel încât dacă* $x = \zeta_1 f_1 + ... + \zeta_n f_n$, *avem*

$$\Phi(x) = \lambda_1\zeta_1^2 + ... + \lambda_n\zeta_n^2, \tag{4.2}$$

$$\Psi(x) = \zeta_1^2 + ... + \zeta_n^2. \tag{4.3}$$

Demonstraţie. Conform teoremei 2.3, există o bază ortonormată $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ relativ la produsul scalar dat de (4.1) în raport cu care $\Phi(x)$ se scrie sub forma (4.2). În aceeaşi bază avem

$$\Psi(x) = G(x, x) = < x, x >_G = \zeta_1^2 + ... + \zeta_n^2, \tag{4.4}$$

deci Φ şi Ψ au forma canonică în baza F. ■

În continuare vom indica modul în care se determină baza F. Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matricele asociate formelor pătratice Φ respectiv Ψ în baza ortonormată

$E = \{e_1, ..., e_n\}$ a lui V. Conform teoremei 1.3, există transformările autoadjuncte $S, T : V \to V$,

$$Se_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i,\ Te_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i, \tag{4.5}$$

$$F(x,y) =< Sx, y > ,\ G(x,y) =< Tx, y > . \tag{4.6}$$

Matricele formelor pătratice Φ şi Ψ în baza F sunt $D = C^T AC$ respectiv $I_n = C^T BC$, unde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

iar C este matricea de trecere de la baza E la baza F. Evident C este o matrice ortogonală.

Aşadar λ_1, λ_2, ...,λ_n sunt rădăcinile ecuaţiei $\det(D - \lambda I_n) = 0$, adică $\det(C^T AC - \lambda C^T BC) = 0$. Această ecuaţie se mai scrie sub forma $\det(A - \lambda B) = = 0$. Înlocuind λ_i în sistemul omogen

$$(A - \lambda_i B)\, x = 0, \tag{4.8}$$

vom găsi $Ker\,(S - \lambda_i T)$. În fiecare astfel de subspaţiu construim o bază ortonormată relativ la produsul scalar (4.1). Reuniunea acestor baze este baza căutată. În plus, din (4.8) rezultă $Sf_j = \lambda_i T f_j$, $j = \overline{1,n}$. Atunci, dacă $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \zeta_j f_j$,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = F(x,y) =< Sx, x >= \sum_{i,j=1}^{n} \zeta_i \zeta_j < Sf_j, f_i >= \\ = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \zeta_i \zeta_j < Tf_j, f_i >= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \zeta_i \zeta_j G(f_j, f_i) = \\ = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \zeta_i \zeta_j < f_j, f_i >_G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \zeta_i^2. \end{aligned}$$

EXEMPLU. Să se reducă simultan la forma canonică formele pătratice

$$\begin{aligned} &\Phi(x) = -10x_1^2 + 2x_2^2 - 15x_3^2 + 2x_1x_2 + 12x_1x_3, \\ &\Psi(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3. \end{aligned}$$

Să se găsească baza formelor canonice.

Matricele asociate formelor pătratice Φ şi Ψ sunt

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -15 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Folosind metoda lui Jacobi rezultă uşor că Ψ este pozitiv definită. Prin calcul rezultă că $\det(A - \lambda B) = -(1 - 2\lambda)(\lambda + 3)(4\lambda + 27)$. În concluzie, formele canonice sunt

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\zeta_1^2 - 3\zeta_2^2 - \frac{27}{4}\zeta_3^2, \qquad \Psi(x) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2.$$

Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$, obţinem $x = (0, t, 0)$. Pentru $t = 1$, $\|x\|$ dată de produsul scalar (4.1) este $\|x\| = 2$, deci $f_1 = (0, \frac{1}{2}, 0)$. Dacă $\lambda = -3$, atunci $x = (0, 0, t)$. Luând $t = 1$, $\|x\| = \sqrt{5}$. Obţinem $f_2 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$. Pentru $\lambda = -\frac{27}{4}$, $x = (10t, -5t, 4t)$, deci $f_3 = (\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{2\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})$.

5. Probleme

1. Să se arate că $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = 2x_1y_1 - 5x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$ este o formă biliniară. Care este matricea lui F în baza $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$? Este simetrică forma biliniară?

2. Pe $\mathbb{R}^2$, fie forma biliniară $F(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$. Găsiţi matricele asociate lui F în bazele $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, 0)$, respectiv $e_1' = (1, 2)$, $e_2' = (-1, 1)$. Ce relaţie este între cele două matrice?

3. Fie $F : \mathcal{C}([0, 1]) \times \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbb{R}$, $F(f, g) = \int_0^1 \int_0^1 f(t)\, g(s)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s$.

   a) Să se arate că F este o formă biliniară;
   b) Să se determine matricele lui F în bazele $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$ respectiv $f_1 = 1$, $f_2 = t - 1$, $f_3 = (t - 1)^2$.

4. Care este polara formei pătratice $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 3x_2x_3$?

5. Să se reducă la forma canonică, folosind metoda lui Gauss, următoarele forme pătratice definite pe $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{R}^4$. Să se specifice baza formei canonice. Care din aceste forme pătratice este pozitiv definită?

   a) $\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
   b) $\Phi(x) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
   c) $\Phi(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
   d) $\Phi(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
   e) $\Phi(x) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;
   f) $\Phi(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

6. Să se reducă la forma canonică, folosind metoda lui Jacobi, următoarele forme pătratice definite pe $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{R}^4$. Să se specifice baza formei canonice. Care din aceste forme pătratice este pozitiv definită?

   a) $\Phi(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
   b) $\Phi(x) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;
   c) $\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
   d) $\Phi(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4$;
   e) $\Phi(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$.

7. Pentru ce valori ale lui λ, următoarele forme pătratice sunt pozitiv definite?

   a) $\Phi(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
   b) $\Phi(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;
   c) $\Phi(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8. Folosind metoda transformărilor ortogonale să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice. Să se găsească baza formei canonice.

a) $\Phi(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
b) $\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
c) $\Phi(x) = 4x_1x_2 - x_3^2$;
d) $\Phi(x) = 2x_1x_2 + 2x_3x_4$;
e) $\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4$.

9. Pe $\mathbb{R}^3$ se consideră formele pătratice $\Phi(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$, $\Psi(x) = x_1^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3$. Să se reducă simultan la forma canonică precizându-se baza formelor canonice.

CHAPTER 7

Elemente de calcul tensorial

În acest capitol vom folosi o convenţie de sumare propusă de Einstein, care ne va permite să simplificăm foarte mult scrierea relaţiilor în care intervin sumări.

Mai precis, dacă într-o expresie acelaşi indice intervine de două ori, odată ca indice superior şi odată ca indice inferior, atunci se sumează după acest indice, dacă nu se face vreo menţiune specială. Semnul "$\sum$" nu se mai scrie. Indicele de sumare poate fi notat cu orice literă şi se numeşte *indice mut*. Spre exemplu, sumele $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y^i$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_i b^j c^i_{jk}$ vor fi scrise astfel: $x_i y^i$, $a_i b^j c^i_{jk}$. În ultima sumă i, j sunt indici muţi, dar k nu este indice mut.

1. Dualul unui spaţiu vectorial

Fie K un corp comutativ şi V un K-spaţiu vectorial. Reamintim (cap. 3) că prin *formă liniară* (sau *funcţională liniară*) pe V se înţelege o aplicaţie liniară $F : V \to K$ (aici K este considerat ca un K-spaţîu vectorial unidimensional).

Cum am văzut în capitolul 3, mulţimea tuturor formelor liniare, pe care o vom nota V^*, poate fi înzestrată cu o structură de K-spaţiu vectorial în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a formelor liniare. K-spaţiul vectorial V^* se *numeşte spaţiul dual* al spaţiului vectorial V. Vom folosi termenul de *formă liniară* daca V este finit dimensional şi de *funcţională liniară*, dacă V este infinit dimensional.

EXEMPLE. 1) Funcţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, care asociază oricărui vector $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ scalarul $Tx = x^1 + x^2 + 3x^3$ este o formă liniară.

2) Funcţia $\Im : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ care asociază oricărei funcţii continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ scalarul $\Im(f) = \int_a^b f(x)\, dx$, este o funcţională liniară.

OBSERVAŢII. Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V.

1) Dacă $x = x^i e_i$, atunci $f(x) = x^i f(e_i)$, deci o formă liniară este cunoscută dacă se cunosc valorile sale pe elementele din bază.

2) Dacă $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in K^n$, atunci conform lemei 3.2, cap. 3, există o unică formă liniară $F : V \to K$ astfel ca $F(e_i) = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$.

În consecinţă are loc:

PROPOZIŢIA 1.1. *Dacă V este un K-spaţiu vectorial n-dimensional şi $B = \{e_1, ..., e_n\}$ este o bază a sa, atunci pentru orice i, $i = \overline{1, n}$, există o formă liniară unică $f^i : V \to K$ astfel ca*

$$f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} . \tag{1.1}$$

Propoziţia rezultă imediat din observaţia anterioară, luând pentru fiecare i, $i = \overline{1,n}$, scalarii $\alpha_j = 0$ pentru $j \neq i$ şi $\alpha_i = 1$.

În continuare, pornind de la o bază $B = \{e_1, ..., e_n\}$ a spaţiului vectorial V, vom construi o bază în spaţiul dual, care se va numi duala bazei B. Vom folosi convenţia de sumare a lui Einstein.

TEOREMA 1.2. *Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază a spaţiului vectorial V. Sistemul de forme liniare $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ dat de (1.1) formează o bază a spaţiului vectorial V^*, numită duala bazei B.*

Demonstraţie. Sistemul B^* este liniar independent. Într-adevăr, fie $\lambda_1, ..., \lambda_n \in$ $\in K$ astfel ca $\lambda_1 f^1 + ... + \lambda_n f^n = 0_{V^*}$ adică $\left(\lambda_1 f^1 + ... + \lambda_n f^n\right)(x) = 0$; $\forall x \in V$. În particular, dacă $x = e_i$, $i = \overline{1,n}$, obţinem

$$\left(\lambda_1 f^1 + ... + \lambda_n f^n\right)(e_i) = \lambda_i = 0,$$

deci B^* este liniar independent. Fie acum $f \in V^*$ şi $\alpha_i = f(e_i) \in K$. Vom arăta că $f = \alpha_i f^i$, deci B^* este sistem de generatori pentru V^*, adică o bază a lui V^*. Într-adevăr, dacă $x = x^j e_j \in V$, atunci

$$\begin{aligned} \alpha_i f^i(x) &= \alpha_i f^i(x^i e_j) = \alpha_i x^i f^i(e_j) = \\ &= \alpha_i x^j \delta^i_j = \alpha_i x^i = x^i f(e_i) = f(x). \end{aligned}$$

Teorema este demonstrată. ■

OBSERVAŢII.1) Din teorema 1.2 rezultă că dacă $\dim_K V = n$, atunci $\dim_K V^* = n$, deci $V \simeq V^*$.

2) Din demonstraţia teoremei 1.2, rezultă că pentru orice formă liniară f, coordonatele sale în baza duală B^* a bazei B sunt $\alpha_i = f(e_i)$, $i = \overline{1,n}$.

În cele ce urmează, schimbând baza lui V, vom studia transformarea bazei duale şi a coordonatelor unei forme liniare în spaţiul dual V^*.

TEOREMA 1.3. *Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n şi V^* dualul să. Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ două baze în V, iar $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ şi $B'^* = \left\{f'^1, ..., f'^n\right\}$ bazele duale corespunzătoare. Dacă C este matricea de trecere de la baza B la baza B', atunci $\left(C^T\right)^{-1}$ este matricea de trecere de la baza B^* la baza B'^*. În plus, coordonatele unei forme liniare $f \in V^*$ se transformă după aceeaşi lege ca şi baza în V. când se trece de la baza B^* la baza B'^*.*

Demonstraţie. Relaţiile de schimbare a bazei în V sunt

$$e'_i = c^k_i e_k,\ i = \overline{1,n}. \tag{1.2}$$

(indicele superior k se referă la linie, iar cel inferior i la colană).

Să presupunem că, în dual, trecerea de la baza B^* la B'^* s-ar face prin relaţiile

$$f'^{\,j} = d^j_l f^l,\ j = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

(dacă $D = (d^j_l)$, D^t este matricea de trecere de la baza B^* la baza B'^*).

Din dualitatea bazelor rezultă

$$f^l(e_k) = \delta^l_k,\ k, l = \overline{1,n}, \quad f'^{\,j}(e'_i) = \delta^l_i,\ i, j = \overline{1,n}.$$

Din relaţiile (1.2)-(1.5), obţinem pentru orice $i, j = \overline{1,n}$

$$\delta^j_i = f'^{\,j}(e'_i) = d^j_l f^l(c^k_i e_k) = d^j_l c^k_i f^l(e_k) = d^j_l c^k_i \delta^l_k = d^j_k c^k_i.$$

Aceste relaţii stabilesc că $DC = I_n$, deci $D = C^{-1}$. Matricea de trecere de la baza B^* la baza B'^* în spaţiul V^* este $D^t = \left(C^{-1}\right)^T = \left(C^T\right)^{-1}$.

Fie acum $f \in V^*, f = \alpha_j f^j = \beta_i f'^{\,i}$, unde $\alpha_j = f(e_j)$, $j = \overline{1,n}$, $\beta_i = f(e'_i)$, $i = \overline{1,n}$. Atunci, din (1.2), rezultă:

$$\beta_i = f(c_i^k e_k) = c_i^k f\left(e_k\right) = c_i^k \alpha_k,\ i = \overline{1,n}, \tag{1.6}$$

adică, acelaşi gen de relaţie ca la schimbarea bazei în V. ■

În concluzie, din teorema 1.3 rezultă că, la o schimbare a bazei în V, bazele duale corespunzătoare se transformă după aceeaşi lege ca şi coordonatele unui vector arbitrar din V transformare ce se va numi *contravariantă*, iar coordonatele unei forme liniare din V^* se transformă după aceeaşi lege ca şi baza în V, transformare ce se va numi *covariantă*. Când folosim convenţia lui Einstein, coordonatele vectorilor din V, ca şi vectorii bazei duale vor avea indicii trecuţi superior, pe când coordonatele formelor liniare şi vectorii bazei din V vor avea indicii trecuţi inferior. Formele liniare se mai numesc şi *covectori*.

EXEMPLU. Fie baza canonică $B = \{e_1, ..., e_n\}$ în $\mathbb{R}^3$. Baza duală $B^* = \left\{f^1, f^2, f^3\right\}$ în spaţiul dual $(\mathbb{R}^3)^*$ satisface (1.1). Dacă $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$, atunci $f^1\left(x\right) = x^1$, $f^2\left(x\right) = x^2$, $f^3\left(x\right) = x^3$. Să considerăm acum forma liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = x^1 + 2x^2 + 3x^3$. Coordonatele lui f în baza duală sunt $\alpha_1 = f\left(e_1\right) = 1$, $\alpha_2 = f\left(e_2\right) = 2$, $\alpha_3 = f\left(e_3\right) = 3$. Fie acum baza $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ în $\mathbb{R}^3$, $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = -e_1 + e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

Matricele de trecere de la baza B la baza B' şi inversa sunt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Atunci, duala bazei B' este legată de B^* prin relaţiile

$$f'_1 = \frac{1}{2}f^1 + \frac{1}{2}f^2,\ f'_2 = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f^3,\ f'_3 = \frac{1}{2}f^1 + \frac{1}{2}f^3.$$

Coordonatele formei liniare f în noua bază vor fi

$$\beta_1 = f(e'_1) = f\left(e_1\right) + f\left(e_2\right) - f\left(e_3\right) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Similar $\beta_2 = f(e'_2) = 4$, $\beta_3 = f(e'_3) = 2$.

Dualul lui V^*, notat $V^{**} = \{f : V^* \to K;\ f \text{ formă liniară}\}$ se numeşte *bidualul* lui V. Conform teoremei 1.2, $\dim_K V = \dim_K V^* = \dim_K V^{**} = n$, deci $V \simeq V^* \simeq V^{**}$. Mai mult, are loc

TEOREMA 1.4. *Spaţiile V^* şi V^{**} sunt izomorfe prin aplicaţia*

$$\Im : V \to V^{**}, \Im x = F_x,$$

unde $F_x\left(f\right) = f\left(x\right), \forall f \in V^*$.

Demonstraţie. Stabilim mai intâi că F_x este o formă liniară pe V^*, adică $F_x \in V^{**}$. Fie deci $f, g \in V^*$ şi $\alpha, \beta \in K$. Atunci:

$$F_x(\alpha f + \beta g) = \left(\alpha f + \beta g\right)\left(x\right) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha F_x(f) + \beta F_x(g).$$

Vom arăta acum că $\Im$ este liniară. Fie $x, y \in V$ şi $\alpha, \beta \in K$. Atunci:

$$\begin{gathered}\Im(\alpha x + \beta y)(f) = F_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \\ = \alpha F_x(f) + \beta F_y(f) = (\alpha F_x + \beta F_y)(f),\ \forall\ f \in V^*,\end{gathered}$$

deci $\Im(\alpha x + \beta y) = \alpha \Im x + \beta \Im y$. Pentru a demonstra că $\Im$ este bijectivă, cum $\dim_K V = \dim_K V^{**}$, este suficient să aratăm că $\Im$ este injectivă. Fie deci $x, y \in V$ astfel încât $\Im x = \Im y$, adică $F_x = F_y$. Atunci, pentru orice $f \in V^*$, avem:

$$f(x) = F_x(f) = F_y(f) = f(y). \tag{1.7}$$

Dacă $B = \{e_1, ..., e_n\}$ este bază în V, iar $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ este bază duală şi $x = x^j e_j$, $y = y^j e_j$, luând în (1.7), $f = f^i$, $i = \overline{1, n}$, obţinem:

$$x^i = f^i(x) = f^i(y) = y^i,$$

adică $x = y$, deci $\Im$ este injectivă. ∎

OBSERVAŢIE. Prin acest izomorfism canonic dintre V şi V^{**}, vom identifica un spaţiu vectorial cu bidualul său. Prin această identificare, orice vector $x \in V$ poate fi privit ca o formă liniară pe V^* ce asociază oricărui $f \in V^*$, scalarul $f(x)$.

2. Aplicaţii multiliniare. Forme multiliniare

DEFINIŢIE. Fie $V_1, ..., V_n, W$ spaţii vectoriale peste acelaşi corp K. Aplicaţia $F : V_1 \times V_2 \times ... \times V_n \to W$ se numeşte *multiliniară (n-liniară)* dacă pentru orice i, $1 \le i \le n$, avem:

$$\begin{gathered}F(x_1, ..., x_{i-1}, \alpha x_i' + \beta x_i'', x_{i+1}, ..., x_n) = \alpha F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_n) + \\ + \beta F(x_1, ..., x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, ..., x_n),\ \forall \alpha, \beta \in K,\ x_i', x_i'' \in V_i,\ x_k \in V_k,\ k \ne i.\end{gathered}$$

EXEMPLU. Aplicaţia $F : V_3 \times V_3 \to V_3$, $F(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, este o aplicaţie biliniară antisimetrică ($\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$).

DEFINIŢIE. Fie $V_1, ..., V_n$ spaţii vectoriale peste corpul K. Se numeşte *formă multiliniară (n-liniară)* orice aplicaţie multiliniară $F : V_1 \times ... \times V_n \to K$.

În această definiţie K este considerat spaţiu vectorial unidimensional peste el însuşi.

EXEMPLE .1) $F : V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$, $F(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (deci produsul scalar a doi vectori liberi), este o formă biliniară simetrică.

2) $F : V_3 \times V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$, $F(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ (deci produsul mixt a trei vectori liberi), este o formă triliniară.

OBSERVAŢIE. Mulţimea formelor n-liniare se poate înzestra cu o structură de K-spaţiu vectorial peste K, notându-se cu $\mathcal{L}(V_1, ..., V_n; K)$. Adunarea formelor n-liniare $F, G \in \mathcal{L}(V_1, ..., V_n; K)$ se defineşte astfel:

$$(F + G)(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n) + G(x_1, ..., x_n),\ x_i \in V_i,\ i = \overline{1, n}.$$

Produsul unei forme n-liniare $F \in \mathcal{L}(V_1, ..., V_n; K)$ cu un scalar $\alpha \in K$ se defineşte prin:

$$(\alpha F)(x_1, ..., x_n) = \alpha F(x_1, ..., x_n),\ x_i \in V_i,\ i = \overline{1, n}.$$

Se verifică uşor ca $F + G$ şi αF definite mai sus, sunt forme n-liniare.

3. Tensori. Coordonatele unui tensor într-o bază

DEFINIŢIE. Fie V un spaţiu vectorial peste K, iar V^* dualul său. Dacă $p, q \in \mathbb{N}$, se numeşte *tensor de p ori covariant şi q ori contravariant* orice formă multiliniară $t : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p \text{ ori}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{q \text{ ori}} \to K$.

Se spune că t este *tensor de tip (p,q)*, p numindu-se *ordinul de covarianţă*, iar q *ordinul de contravarianţă*. Numărul $p+q$ se numeşte *rangul* sau *valenţa* tensorului.

EXEMPLE.1) Orice formă liniară $f \in V^*$, deci $f : V \to K$, este un tensor de tip $(1, 0)$.

2) Orice vector $x \in V$, privit ca o formă liniară $F_x : V^* \to K$ (conform teoremei 1.4) este un tensor de tip $(0, 1)$.

3) Orice scalar $\alpha \in K$ poate fi considerat tensor de tip $(0, 0)$.

Vom nota cu $T_p^q(V)$ mulţimea tuturor tensorilor de p ori covarianţi şi q ori contravarianţi pe spaţiul vectorial V. Conform observaţiei din secţiunea anterioară, $T_p^q(V)$ este un K-spaţiu vectorial în raport cu adunarea tensorilor şi produsul unui tensor cu un scalar.

În continuare, fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ bază duală în V^*. Fie $t \in T_p^q(V)$, iar $x_1, ..., x_p \in V$, $h^1, ..., h^q \in V^*$. Atunci

$$x_i = \xi_i^{j_i}\ e_{j_i},\ i = \overline{1,p}, \quad h^l = a_{k_l}^l\ f^{k_l},\ l = \overline{1,q}.$$

(aici j_i şi k_l sunt indici de sumare). Folosind liniaritatea lui t în fiecare argument, avem:

$$t(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) = \xi_1^{j_1} ... \xi_p^{j_p}\ \alpha_{k_1}^1 ... \alpha_{k_q}^q\ t(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}). \tag{3.1}$$

În această relaţie apar n^{p+q} scalari, pe care-i vom nota

$$\begin{gathered}\tau_{j_1,...,j_p}^{k_i,...,k_q} = t(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}),\\ j_i = \overline{1,n},\ \forall i = \overline{1,p},\ k_l = \overline{1,n},\ \forall l = \overline{1,q}\end{gathered} \tag{3.2}$$

şi se numesc *coeficienţii tensorului* t sau *componentele tensorului* t în baza B fixată în V. Atunci (3.1) se scrie:

$$t(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) = \xi_1^{j_1} ... \xi_p^{j_p}\ \alpha_{k_1}^1 ... \alpha_{k_q}^q\ \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} \tag{3.3}$$

În concluzie, fiecărui tensor $t \in T_p^q(V)$ i se poate asocia, fixând o bază în V, un sistem de n^{p+q} scalari unic determinaţi prin (3.2). Reciproc, se poate demonstra uşor

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie V un K-spaţiu vectorial n-dimensional şi $p, q \in \mathbb{N}$. Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ baza duală ei. Dat fiind un sistem de n^{p+q} scalari*

$$(\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}),\ j_i = \overline{1,n},\ \forall i = \overline{1,p},\ k_l = \overline{1,n},\ \forall l = \overline{1,q},$$

există un unic tensor $t \in T_p^q(V)$ astfel ca

$$t(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}) = \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q},$$

pentru orice $j_1, ..., j_p$, $k_1, ..., k_q$ luând independent valori de la 1 la n.

COROLAR 3.1.1. Dacă V este un K-spaţiu vectorial de dimensiune n, atunci $T_p^q(V) \simeq K^{n^{p+q}}$, deci $\dim_K T_p^q(V) = n^{p+q}$.

Demonstraţie. Fie $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază fixată în V, iar $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ duala sa în V^*. Izomorfismul căutat este aplicaţia care asociază fiecărui tensor $t \in T_p^q(V)$, coeficienţii săi în baza fixată. Din cele de mai sus, rezultă că această aplicaţie este o bijecţie. Liniaritatea acestei aplicaţii se verifică uşor şi o propunem ca exerciţiu.

EXEMPLE. 1) Formele biliniare pe un spaţiu vectorial V n-dimensional sunt tensori dublu covarianţi. Spaţiul vectorial al acestor tensori, $T_2^0(V)$ are dimensiunea n^2. Dacă $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi $t : V \times V \to K$ un tensor dublu covariant oarecare, atunci pentru orice $x, y \in V$, $x = \xi^i e_i$, $y = \eta^j e_j$, avem

$$t(x, y) = \xi^i \eta^j t(e_i, e_j) = \xi^i \eta^j \tau_{ij},$$
$$\tau_{ij} = t(e_i, e_j),\ i, j = \overline{1, n},$$

fiind coeficienţii tensorului în baza fixată.

2) Formele biliniare pe spaţiul V^* sunt tensori dublu contravarianţi. Dacă $\dim_K V = n$, spaţiul vectorial al acestor tensori notat $T_0^2(V)$ are dimensiunea n^2. Fie acum $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ duala sa. Dacă $t : V^* \times V^* \to K$ este un tensor dublu contravariant, atunci pentru orice $g, h \in V^*$, $g = \alpha_i j^i$, $h = \beta_j f^j$, avem $t(g, h) = \alpha_i \beta_j t\left(f^i, f^j\right) = \alpha_i \beta_j \tau^{ij}$,unde $\tau^{ij} = \left(f^i, f^j\right)$, $i, j = \overline{1, n}$ sunt coeficienţii tensorului în baza fixată.

3) Formele biliniare $t : V \times V^* \to K$ sunt tensori o data covarianţi şi o dată contravarianţi. Dacă $\dim_K V = n$, spaţiul vectorial al acestor tensori, $T_1^1(V)$ are dimensiunea n^2. Cu notaţiile de mai sus, dacă $x = \xi^i e_i \in V$, $h = \alpha_j f^j \in V^*$, atunci $t(x, h) = \xi^i \alpha_j t\left(e_i, f^j\right) = \xi^i \alpha_j \tau_i^j$,unde $\tau_i^j = t\left(e_i, f^j\right)$, $i, j = \overline{1, n}$ sunt coeficienţii tensorului t în baza fixată.

4. Operaţii cu tensori

Fie V un K-spaţiu vectorial n-dimensional, $B = \{e_1, ..., e_n\}$ o bază în V şi $B^* = \left\{f^1, ..., f^n\right\}$ duala sa. Considerăm $p, q \in \mathbb{N}$, $t, u \in T_p^q(V)$, $\alpha \in K$. Dacă $x_1, ..., x_p \in V$ şi $h^1, ..., h^q \in V^*$, atunci *suma* $t + u$ este un tensor de acelaşi tip şi

$$(t + u)(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) = t(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) + u(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q),$$

iar *produsul unui tensor t cu un scalar α* este un tensor de acelaşi tip

$$(\alpha t)(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) = \alpha t(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q).$$

Se verifică uşor că, într-o bază fixată, coeficienţii sumei $t+u$ se obţin însumând coeficienţii corespunzători lui t şi u, deci dacă:

$$\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} = t(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}),$$
$$\sigma_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} = u(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}),$$

atunci

$$(t + u)(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}) = \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} \sigma_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}.$$

Similar, coeficienţii produsului unui tensor cu un scalar într-o bază fixată, se obţin înmulţind coeficienţii tensorului cu scalarul respectiv, deci

$$(\alpha t)(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}) = \alpha \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}.$$

Produsul tensorial a doi tensori. Fie $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ şi $t \in T_p^q(V)$, $u \in T_r^s(V)$. Atunci aplicaţia:

$$t \oplus u : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p+r \ ori} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{q+s \ ori} \to K,$$

definită prin:

$$\begin{gathered}(t \oplus u)(x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_{p+r}, h^1, ..., h^q, h^{q+1}, ..., h^{q+s}) = \\ = t(x_1, ..., x_p, h^1, ..., h^q) \cdot u(x_{p+1}, ..., x_{p+r}, h^{q+1}, ..., h^{q+s}),\end{gathered}$$

pentru orice $x_i \in V_i$, $i = \overline{1, p+r}$, $h^j \in V^*$, $j = \overline{1, q+s}$, este un tensor de ordin $(p+r, q+s)$ numit *produsul tensorial* al celor doi tensori.

Dacă

$$\begin{aligned}\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} &= t(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q}), \\ \sigma_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} &= u(e_{j_1}, ..., e_{j_r}, f^{l_1}, ..., f^{l_s}),\end{aligned}$$

atunci:

$$\begin{gathered}\rho_{j_1,...,j_p,i_1,...,i_r}^{k_1,...,k_q,l_1,...,l_s} = (t \oplus u)(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, e_{i_1}, ..., e_{i_r} f^{k_1}, ..., f^{k_q}, f^{l_1}, ..., f^{l_s}) = \\ = \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} \cdot \sigma_{i_1,...,i_r}^{l_1,...,ls}.\end{gathered}$$

Aşadar coeficienţii tensorului $(t \oplus u) \in T_{p+r}^{q+s}(V)$ se obţin efectuând produsele coeficienţilor celor doi tensori.

EXEMPLU. Fie $\dim_K V = 2, B = \{e_1, e_2\}$ o bază în V, $B^* = \{f^1, f^2\}$ baza duală, $t \in T_2^0(V)$, $u \in T_0^1(V)$. Dacă $\tau_{ij} = t(e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2$ sunt coeficienţii lui t în baza fixată, iar $\sigma^k = u(f^k)$, $k = 1, 2$, coeficienţii lui u, atunci $(t \oplus u) \in T_2^1(V)$, coeficienţii săi fiind:

$$\rho_{ij}^k = (t \oplus u)(e_i, e_j, f^k) = t(e_i, e_j) u(f^k) = \tau_{ij} \sigma^k.$$

Contracţia unui tensor. Fie $t \in T_p^q(V)$ cu $p, q > 1$. Fixăm un indice i, $i = \overline{1, p}$ de covarianţă şi un indice l, $l = \overline{1, q}$ de contravarianţă. Vom construi un tensor $t' \in T_{p-1}^{q-1}(V)$, astfel: $t' : \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{p-1 \ ori} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{q-1 \ ori} \to K$,

$$\begin{gathered}t'(x_1, ..., x_{i-1} x_{i+1}, ..., x_p, h^1, ..., h^{l-1}, h^{l+1}, ..., h^q) = \\ = t(x_1, ..., x_{i-1}, e_s, x_{i+1}, ..., x_p, h^1, ..., h^{l-1}, f^s, h^{l+1}, ..., h^q),\end{gathered}$$

cu

$$x_j \in V, \ j = \overline{1, p}, \ j \neq i, \ h^k \in V^*, \ k = \overline{1, q}, \ k \neq l$$

(în această relaţie s este indice de sumare). Coeficienţii tensorului t' vor fi

$$\begin{gathered}\sigma_{j_1,...,j_{i-1},j_{i+1},...,j_p}^{k_1,...,k_{l-1},k_{l+1},...,k_q} = t'(e_{j_1}, ..., e_{j_{i-1}}, e_{j_{i+1}}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_{l-1}}, f^{k_{l+1}}, ..., f^{k_q}) = \\ = \tau_{j_1,...,j_{i-1},s,j_{i+1},...,j_p}^{k_1,...,k_{l-1},s,k_{l+1},...,k_q},\end{gathered}$$

s fiind indice de sumare, iar $\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}$ coeficienţii lui t în baza fixată.

Vom spune că am efectuat o contracţie după indicele de ordin i de covarianţă şi indicele de ordin l de contravarianţă. Tensorul astfel obţinut se va nota $(t)_i^l$.

EXEMPLE. 1) Fie $t \in T_1^1(V)$ şi τ_i^j, $i, j = \overline{1, n}$ coeficienţii tensorului. Efectuând o contracţie după cei doi indici, se obţine un tensor de tip $(0, 0)$ deci un scalar, numit *urma* tensorului t şi se notează

$$Tr \ t = \tau_i^i = \tau_1^1 + ... + \tau_n^n.$$

2) Fie $t \in T_2^1(V)$ şi τ_{ij}^k, $i,j,k = \overline{1,n}$ coeficienţii lui t. Coeficienţii lui $t' = (t)_2^1 \in T_1^0(V)$ sunt

$$\sigma_i = t'(e_i) = t(e_i, e_j, f^j) = \tau_{ij}^j = \tau_{i1}^1 + \tau_{i2}^2 + ... + \tau_{in}^n.$$

5. Transformarea coeficienţilor unui tensor la schimbarea bazei

Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune n, $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e_1', ..., e_n'\}$ două baze ale lui V şi $B^* = \{f^1, ..., f^n\}$, $B'^* = \{f'^1, ..., f'^n\}$ bazele duale respective. Fie $C = (c_i^j)$ matricea de trecere de la baza B la baza B' şi $D = (d_i^j)$ inversa ei. Are loc

TEOREMA 5.1. *Dacă coeficienţii tensorului $t \in T_p^q(V)$ în cele două baze sunt*

$$\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} = t(e_{j_1}, ..., e_{j_p}, f^{k_1}, ..., f^{k_q})$$

respectiv

$$\tau'^{\,l_1,...,l_q}_{\,i_1,...,i_p} = t(e_{i_1}', ..., e_{i_p}', f'^{\,l_1}, ..., f'^{\,l_q}),$$

atunci relaţia de transformare a coeficienţilor este

$$\tau'^{\,l_1,...,l_q}_{\,i_1,...,i_p} = c_{i_1}^{j_1}...c_{i_p}^{j_p}\, d_{k_1}^{l_1}...d_{k_q}^{l_q}\, \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q} \,. \tag{5.1}$$

Demonstraţie. Folosind formulele de schimbare de bază (1.2), (1.3), obţinem:

$$\tau'^{\,l_1,...,l_q}_{\,i_1,...,i_p} = t(e_{i_1}', ..., e_{i_p}', f'^{\,l_1}, ..., f'^{\,l_q}) =$$
$$= t(c_{i_1}^{j_1} e_{j_1}, ..., c_{i_p}^{j_p} e_{j_p}, d_{k_1}^{l_1} f^{k1}, ..., d_{k_q}^{l_q} f^{k_q}) = c_{l_1}^{j_1}...c_{i_p}^{j_p} d_{k_1}^{l_1}...d_{k_q}^{l_q} \tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}.$$

Am ţinut seama de liniaritatea lui t în fiecare argument. ■

OBSERVAŢIE. Relaţia (5.1) din enunţul teoremei 5.1 este folosită adesea pentru a prezenta noţiunea de tensor, în modul următor.

Dacă V este un spaţiu vectorial n-dimensional, spunem că am dat un *tensor de p ori covariant şi q ori contravariant pe V* dacă am asociat fiecărei baze $B = \{e_1, ..., e_n\}$ a spaţiului V un sistem de n^{p+q} scalari:

$$(\tau_{j_1,...,j_p}^{k_1,...,k_q}),\ j_1 = \overline{1,n},\ \forall i = \overline{1,p},\ k_l = \overline{1,n},\ \forall l = \overline{1,q}, \tag{5.2}$$

care la schimbarea bazei în V se transformă după legea (5.1).

Scalarii (5.2) se numesc *coeficienţii tensorului* de tip (p,q) considerat în baza B.

Această definiţie este echivalentă cu definiţia unui tensor, deoarece din propoziţia 3.1 rezultă că daţi fiind coeficienţii (5.2) există un unic tensor $t \in T_p^q(V)$ care are aceşti coeficienţi în baza fixată B din V. Reciproca, rezultă din teorema 5.1.

EXEMPLE. 1). Fie $t : V \times V^* \to K$, tensorul de tip $(1,1)$ definit prin $t(x,f) = f(x)$, $\forall x \in V$, $f \in V^*$. Considerăm în baza $B = \{e_1, ..., e_n\}$ şi $B^* = \{f^1, ..., f^n\}$ duala sa. Coeficienţii tensorului t în baza B sunt:

$$t(e_i, f^j) = f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases},\ \forall i,j = \overline{1,n}.$$

Dacă $B' = \{e_1', ..., e_n'\}$ este o altă bază în V, iar $B'^* = \{f'^{\,1}, ..., f'^{\,n}\}$ duala sa în V^*, atunci coeficienţii lui t în noua bază sunt $t(e_k', f'^{\,l}) = \delta_k^l$, $\forall k,l = \overline{1,n}$. Aşadar coeficienţii acestui tensor sunt independenţi de baza considerată. Acest tensor mai putea fi prezentat ca fiind sistemul de n^2 scalari, $\{\delta_i^j\}_{i,j=\overline{1,n}}$, care la schimbarea bazei spaţiului V se transformă după legea

$$\delta_i'^{\,j} = c_i^k d_l^j \delta_k^l,\ \ i,j=\overline{1,n}.$$

Dar cum $c_i^k d_l^j \delta_k^l = c_i^k d_k^j = \delta_i^j$, $\forall i,j=\overline{1,n}$ $(D=C^{-1})$, rezultă

$$\delta_i'^{\,j} = \delta_i^j,\ \ \forall i,j=\overline{1,n}.$$

2) Fie $t\in T_2^2(V)$ şi $t'=(t)_2^1$, tensorul obţinut prin contracţia după al doilea indice de covarianţă şi primul indice de contravarianţă, Cu relaţiile de mai sus, fie

$$\tau_{jk}^{rs} = t(e_j,e_k,f^r.f^s),\ \ j,k,r,s=\overline{1,n},$$

respectiv

$$\tau_{i\,l}'^{\,\alpha\,\beta} = t(e_i',e_l',f'^{\,\alpha}.f'^{\,\beta}),\ \ i,j,\alpha,\beta=\overline{1,n},$$

coeficienţii lui t în cele două baze fixate.

De asemenea, fie $\sigma_r^j = t'\left(e_r,f^j\right)$, $r,j=\overline{1,n}$ şi $\sigma_i'^{\,p} = t'(e_i',f'^{\,p})$, $i,p=\overline{1,n}$, coeficienţii tensorului contractat. Atunci:

$$\begin{aligned}\sigma_i'^{\,p} &= t(e_i',e_l',f'^{\,l},f'^{\,p}) = \tau_{il}'^{\,lp} = c_i^j c_l^k d_s^l d_r^p \tau_{jk}^{sr} = c_i^j \delta_s^k d_r^p \tau_{jk}^{sr} =\\ &= c_i^j d_r^p \tau_{jk}^{sr} = c_i^j d_r^p t(e_j,e_k,f^k,f^r) = c_i^j d_r^p t'(e_j,f^r) = c_i^j d_r^p \sigma_j^r,\end{aligned}$$

ceea ce reprezintă exact legea de transformare a unui tensor o dată covariant şi o dată contravariant la schimbarea bazei.

OBSERVAŢII. 1) Dacă $x\in V$ se scrie $x=\xi^i e_i = \xi'^{\,i} e_i'$, atunci în capitolul 1, am stabilit:

$$\xi'^{\,i} = d_j^i \xi^j,\ \ i=\overline{1,n}.$$

Aceste relaţii reprezintă chiar formulele de transformare ale unui tensor o dată contravariant. De aceea se mai spune că $x\in V$ este *vector contravariant.*

De asemenea, în acest capitol am stabilit că dacă $f\in V^*$ se scrie $f=\alpha_j f^j =$ $=\alpha_i' f'^{\,i}$, atunci (vezi (1.6))

$$\alpha_i' = c_i^j \alpha_j,\ \ i=\overline{1,n},$$

care reprezintă formulele de transformare ale unui tensor o dată covariant. De aceea, formele liniare se mai numesc *vectori covarianţi* sau *covectori.*

2) În capitolul 3 am studiat endomorfismele unui spaţiu vectorial. Fie $T\in$ $\in\mathcal{L}(V)$ şi $A=(a_j^k)$ matricea lui T în baza B, $A'=(a_i'^{\,l})$ matricea lui T în baza B'. Legătura dintre ele este (vezi §5, cap. 3)

$$a_i'^{\,l} c_l^k = c_i^j a_j^k,\ \ \forall i,k=\overline{1,n}$$

sau

$$a_t'^{\,s} = a_i'^{\,l}\delta_l^s = a_i'^{\,l} c_l^k d_k^s = c_i^j d_k^s a_j^k,\ \ \forall i,s=\overline{1,n},$$

care reprezintă formulele de transformare ale unui tensor o dată covariant şi o dată contravariant. Cum poate fi interpretat acest rezultat? Endomorfismului T îi punem în evidenţa în mod unic un tensor $t: V\times V^*\to K$, $t(x,f)=f(Tx)$, $\forall x\in V$, $f\in V^*$. În acest fel, se defineşte o aplicaţie $\varphi:\mathcal{L}(V)\to T_1^1(V)$ care este un izomorfism de spaţii vectoriale. Coeficienţii tensorului t astfel definit sunt

$$t\left(e_i,f^j\right) = f^j\left(Te_i\right) = f^j(a_i^k e_k) = a_i^k f^j\left(e_k\right) = a_i^k \delta_k^j = a_i^j,\ \ \forall i,j=\overline{1,n},$$

deci chiar elementele matricei lui T în baza B.

În acest mod orice endomorfism $T\in\mathcal{L}(V)$ poate fi privit ca un tensor o dată covariant şi o dată contravariant (identificând T cu t prin acest izomorfism).

6. Probleme

1. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Să se arate că $\operatorname{grad} f$ este un vector 1-covariant.

2. Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bază în V şi a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{R}$. Dacă $x = x^i e_i$, definim $f(x) = a_i x^i$. Să se arate că coeficienţii $a_i a_j$ ai lui f^2 sunt coeficienţii unui tensor de ordinul al doilea.

3. Fie $\left(a^{ij}\right)$ componentele unui tensor 2-contravariant. Cum se schimbă matricea acestui tensor la schimbarea bazei? Dar a tensorului de componente $\left(a_i^j\right)$?

4. Dacă (a_{ij}) şi $\left(b^{ij}\right)$ sunt componentele unui tensor simetric respectiv antisimetric, să se determine tensorul de componente $a_{ij} b^{ij}$.

5. Fie tensorul de ordinul al treilea de componente

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{dacă permutarea } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ este pară;} \\ -1, & \text{dacă permutarea } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ este impară;} \\ 0, & \text{dacă cel puţin doi indici sunt egali.} \end{cases},$$

numit *tensorul de permutare al lui Ricci*.

Dacă $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathcal{V}_3$, $\overrightarrow{a} = a^1 \overrightarrow{i} + a^2 \overrightarrow{j} + a^3 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b^1 \overrightarrow{i} + b^2 \overrightarrow{j} + b^3 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = c^1 \overrightarrow{i} + c^2 \overrightarrow{j} + c^3 \overrightarrow{k}$, să se arate că $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$.

6. Folosim notaţiile de la problema 5. Fie tensorul de componente $c^i_{jk} = \varepsilon_{ijk}$. Să se arate că vectorul $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ are componentele $d^i = c^i_{jk} a^j b^k$.

7. Fie $t \in T_3^2(V)$. Să se stabilească relaţiile de transformare a coordonatelor tensorului $(t)_2^1$ la schimbarea bazei.