

Seria „MATEMATICĂ“

ANALIZĂ MATEMATICĂ
Calcul diferențial

MATHEMATICAL ANALYSIS

Differential calculus

The present book is the first part of the course of Mathematical Analysis given by the author for many years at the Technical University of Civil Engineering of Bucharest. It contains: Sequences and Series of Numbers, Sequences and Series of Functions, Power Series, Taylor's Series, Metric Spaces, Normed and Hilbert Spaces, Functions of Several Variables, Limits and Continuity, Partial Derivatives, Differentiable Functions, Taylor's Formula, Local Extremum of a Function, Implicit Functions, Local Conditional Extremum, Dependent Functions.

This list itself demonstrates that the book provides the engineering disciplines with the necessary information of differential calculus of functions with one and several variables.

We tried to offer the fundamental material concisely and without distracting details. We focused on the presentation of basic ideas of differential calculus in order to make it detailed and as comprehensible as possible. The numerous examples also serve this aim.

Besides students in technical faculties and those starting a mathematics course, the book may be useful to engineers and scientists who wish to refresh their knowledge about some aspects of mathematics.

Lucrarea a fost realizată în cadrul Contractului de
Grant nr. 39643 / 11.08.1998, CNFIS, cod 54, acordat
de către Banca Mondială și Guvernul României.

Prof. univ. dr. GAVRIIL PĂLTINEANU

**ANALIZĂ
MATEMATICĂ
Calcul diferențial**

Seria „MATEMATICĂ“



Editura AGIR
București, 2002

ASOCIAȚIA GENERALĂ A INGINERILOR DIN ROMÂNIA
© EDITURA AGIR, 2002
Editură acreditată de C.N.C.S.I.S.

Toate drepturile pentru această ediție
sunt rezervate editurii.

Adresa: **Editura AGIR**
Calea Victoriei, nr. 118, sector 1, 70179 București
Telefon: 401-212 81 04; 401-212 81 06 (redacție)
401-211 83 50 (difuzare)
Fax: 401-312 55 31; E-mail: office@agir.ro

Referent: prof. univ. dr. Gheorghe Bucur,
Facultatea de Matematică,
Universitatea București

Redactor: ing. **Adina NEGOIȚĂ**
Coperta: **Camelia BOGOI**

Bun de tipar: 15.08.2002; Coli de tipar: 11,75
ISBN 973-8130-90-5

Imprimat în România

Prefață

*Lucrarea se adresează studenților din anul întâi din universitățile tehnice și are la bază experiența de peste 20 de ani a autorului în predarea cursului de **Analiză Matematică** la Facultatea de Construcții Civile și Industriale din Universitatea Tehnică de Construcții București. Materialul prezentat corespunde programei analitice din semestrul întâi și este împărțit în patru capitole: **Șiruri și serii de numere reale, Șiruri și serii de funcții reale, Spații metrice. Spații normate și Spații Hilbert, Calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile.***

În vasta ofertă de cursuri de Analiză Matematică de pe piața cărții din țara noastră, diferența este dată de măsura în care se păstrează un echilibru rezonabil între rigoare și accesibilitate. Acesta a fost criteriul de bază în scrierea acestui curs și sperăm că, măcar parțial, am reușit acest lucru.

*București,
februarie 2002*

G. Păltineanu

Cuprins

1. ȘIRURI ȘI SERII DE NUMERE REALE	9
1.1. Numere reale.....	9
1.2. Șiruri de numere reale (complemente).....	16
1.3. Dreapta încheiată. Limitele extreme ale unui șir	21
1.4. Serii numerice convergente și divergente.....	25
1.5. Serii cu termeni pozitivi.....	27
1.6. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare	39
1.7. Calculul aproximativ al sumei unor serii.....	41
1.8. Serii absolut convergente.....	44
1.9. Operații cu serii convergente	47
2. ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII REALE	49
2.1. Convergență simplă (punctuală) și convergență uniformă	49
2.2. Formula Taylor	60
2.3. Serii Taylor și Mac Laurin.....	66
2.4. Serii de puteri.....	71
3. SPAȚII METRICE. SPAȚII NORMATE. SPAȚII HILBERT	79
3.1. Spații metrice. Principiul contracției	79
3.2. Spații normate.....	87
3.3. Spații Hilbert.....	88
3.4. Serii în spații normate.....	92
3.5. Funcții elementare Formulele lui Euler	96
3.6. Funcții de matrice	99
3.7. Elemente de topologie în Y^n	102
3.8. Limite de funcții	112
3.9. Funcții continue	118
3.10. Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte și conexe	122
4. CALCULUL DIFERENȚIAL AL FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABLE.....	128
4.1. Derivate parțiale Diferențiabilitate	128
4.2. Diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale. Matrice iacobiene	136
4.3. Diferențiabilitatea funcțiilor compuse	138
4.4. Diferențiala de ordinul întâi și invarianța formei sale	142

4.5. Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale de ordin superior	144
4.6. Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcțiilor compuse de două variabile.....	150
4.7. Formula Taylor. Extremele funcțiilor de mai multe variabile	152
4.8. Teorema de inversiune locală	158
4.9. Transformări regulate	162
4.10. Funcții implicite.....	165
4.11. Funcții dependente și independente.....	170
4.12. Extreme cu legături.....	175
4.13. Schimbări de variabile	180
4.14. Elemente de teoria câmpurilor	182
 BIBLIOGRAFIE.....	 188

1. || Şiruri și serii de numere reale

1.1. Numere reale

În cele ce urmează vom nota cu \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale, adică mulțimea

$$\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} \text{ și cu } \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Pe mulțimea numerelor naturale sunt definite două operații: adunarea (notată cu $+$) și înmulțirea (notată cu \cdot).

Deoarece elementele din \mathbb{N}^* nu sunt simetrizabile nici față de adunare, nici față de înmulțire, operațiile de scădere și împărțire nu sunt posibile în \mathbb{N} . (\mathbb{N} nu are structură de grup nici față de adunare, nici față de înmulțire).

Pentru a face posibilă operația de scădere, la mulțimea numerelor naturale se adaugă mulțimea numerelor negative și se obține astfel mulțimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este inel comutativ. Următoarea extensie a numerelor este mulțimea numerelor raționale \mathbb{Q} , adică mulțimea numerelor de forma p/q , unde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, p și q prime între ele. În \mathbb{Q} sunt definite cele patru operații aritmetice: adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea (cu excepția împărțirii la zero). Din punct de vedere algebric $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ este corp comutativ.

Încă din antichitate s-a observat că mulțimea numerelor raționale nu este suficient de bogată pentru a servi la exprimarea măsurii oricărei mărimi din natură. Construcții geometrice foarte simple se conduc la mărimi a căror măsură nu se poate exprima cu ajutorul numerelor raționale. Cel mai simplu exemplu este diagonala unui pătrat de latură 1. Într-adevăr, conform teoremei lui Pitagora, pătratul lungimii acestei diagonale este 2 și este binecunoscut faptul că nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2. Este deci necesar să adăugăm la mulțimea numerelor raționale și numere de altă natură, pe care le numim numere iraționale și obținem mulțimea numerelor reale \mathbb{R} .

Dacă primele extensii ale mulțimii numerelor naturale \mathbb{N} și anume \mathbb{Z} și \mathbb{Q} , au fost determinate de necesități algebrice, extensia de la \mathbb{Q} la \mathbb{R} este determinată de necesități topologice (de convergență). Mulțimea numerelor raționale suferă de o anumită "incompletitudine", deoarece, în această mulțime există șiruri monotone și

mărginite care nu au limită (în \mathbb{Q}). Vezi de exemplu șirul $a_0 = 1$; $a_1 = 1,4$; $a_2 = 1,41$; $a_3 = 1,414$; ... a cărei limită este $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Prin crearea mulțimii numerelor reale se înlătură acest "defect".

În \mathbb{Y} , orice șir monoton și mărginit are o limită. Nu ne propunem să prezentăm aici construcția numerelor reale. O să spunem numai că se poate construi o mulțime \mathbb{Y} care conține corpul numerelor raționale \mathbb{Q} , pe care sunt definite două operații, adunarea (notată cu $+$) și înmulțirea (notată cu \cdot) și o relație de ordine (notată \leq) astfel încât $(\mathbb{Y}, +, \cdot, \leq)$ este corp comutativ total ordonat, care satisface în plus următoarele proprietăți:

(P.A.) (**Axioma lui Arhimede**)

Pentru orice $x \in \mathbb{Y}$ și orice $y \in \mathbb{Y}, y > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $ny \geq x$.

(PC) (**Axioma lui Cantor**)

Dacă $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ sunt două șiruri de numere raționale care au următoarele proprietăți:

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0^*)$$

atunci există $c \in \mathbb{Y}$ (unic) astfel încât $a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Prin urmare, din punct de vedere algebric, \mathbb{Y} este grup abelian față de adunare, având elementul neutru 0, iar $\mathbb{Y} \setminus \{0\}$ este grup abelian față de înmulțire, având elementul neutru 1. În plus are loc proprietatea de distributivitate:

$$x(y+z) = xy + xz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Relația de ordin " \leq " este **totală**, adică pentru orice $x, y \in \mathbb{Y}$ avem sau $x \leq y$ sau $y \leq x$ și **compatibilă** cu structura algebrică:

$$x' \leq y' \quad \text{și} \quad x'' \leq y'' \quad \text{atunci} \quad x' + x'' \leq y' + y''$$

$$x \leq y \quad \text{și} \quad \alpha \geq 0 \quad \text{atunci} \quad \alpha x \leq \alpha y$$

Din faptul că \mathbb{Y} este corp comutativ total ordonat rezultă toate regulile de calcul cu numere reale.

Observația 1.1.1. Axioma lui Arhimede este echivalentă cu următoarea proprietate:

$$\forall x \in \mathbb{Y}, \quad \exists [x] \in \mathbb{Q} \quad \text{astfel încât} \quad [x] \leq x < [x] + 1$$

($[x]$ se numește partea întreagă a lui x).

Într-adevăr, dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $[x] = x$. Dacă $x \in \mathbb{Y} \setminus \mathbb{Q}$ și $x > 0$, atunci considerând în axioma lui Arhimede $y = 1$, rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x < n$. Fie n_x cel mai mic număr natural mai mare ca x și fie $[x] = n_x - 1$. Se verifică imediat că:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{Q}^$ astfel încât $b_n - a_n < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.

Dacă $x \in \mathbb{Y} \setminus \mathbb{Q}$, $x < 0$, atunci $[x] = -[-x] - 1$.

Reciproc, fie $x \in \mathbb{Q}_+$ și $y > 0$. Dacă notăm cu $n = \left[\frac{x}{y} \right] + 1$, atunci $ny > \frac{x}{y}y = x$.

Propoziția 1.1.1. Pentru orice $x, y \in \mathbb{Y}$ în situația $x < y$ există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$x < r < y.$$

Demonstrație

Cazul 1: $x = 0 < y$. Deoarece $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n_0} < y$ și alegem $r = \frac{1}{n_0}$.

Cazul 2: $0 < x < y$. Fie $a = \frac{1}{2}(y-x) > 0$ și fie $r_1 \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea $0 < r_1 < a$.

Dacă notăm cu $r = r_1 \left(\left[\frac{x}{r_1} \right] + 1 \right)$, atunci $r \in \mathbb{Q}$ și avem

$$r \leq r_1 \left(\frac{x}{r_1} + 1 \right) = x + r_1 < x + \frac{1}{2}(y-x) = \frac{1}{2}(x+y) < y.$$

Pe de altă parte $r > r_1 \cdot \frac{x}{r_1} = x$. Așadar, $r \in \mathbb{Q}$ și $x < r < y$.

Cazul 3: $x < 0 < y$. Alegem $r = 0$.

Cazul 4: $x < y < 0$. Atunci $\exists \bar{r} \in \mathbb{Q}$ astfel încât $-x > \bar{r} > -y$. Alegem $r = -\bar{r}$.

Definiția 1.1.1. O mulțime A se numește numărabilă dacă există o aplicație bijectivă $f: \mathbb{N} \rightarrow A$. Dacă notăm cu $a_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că o mulțime este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui șir

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

Se observă ușor că o reuniune finită de mulțimi numărabile este de asemenea o mulțime numărabilă.

Propoziția 1.1.2. Mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

Demonstrație

Elementele mulțimii \mathbb{Q}_+ pot fi puse sub forma următorului tablou:

Pe de altă parte este evident că $y \neq x_n$ pentru orice n , deci $y \notin I$. Am ajuns astfel la o contradicție.

Corolarul 1. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ mulțimea $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ nu este numărabilă.

Într-adevăr, mulțimile $[a, b]$ și $[0, 1]$ pot fi puse în corespondență bijectivă prin funcția $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definită astfel:

$$f(x) = a + (b - a)x$$

Corolarul 2. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ există cel puțin un număr irațional z astfel încât $a < z < b$.

Demonstrație

Mulțimea numerelor raționale care aparține intervalului (a, b) este numărabilă, în timp ce mulțimea (a, b) este nenumerabilă. Dacă (a, b) ar fi numărabilă atunci $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$ ar fi numărabilă, ceea ce este absurd. Rezultă că există $z \in (a, b) \setminus \mathbb{Q}$.

Din Propoziția 1.1.1 și 1.1.3 rezultă că între două numere reale se află o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

Propoziția 1.1.4. Dacă $\{x_n\}, \{y_n\}$ sunt două șiruri de numere reale cu proprietățile:

- 1) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$,

atunci există $z \in \mathbb{R}$ (unic) astfel încât $x_n \leq z \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație

Din Propoziția 1.1 rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $a_n \in \mathbb{R}$ și $b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x_n - \frac{1}{2^n} < a_n < x_n \leq y_n < b_n < y_n + \frac{1}{2^n}. \quad (1.1)$$

Observăm că șirul $\{a_n\}$ poate fi ales crescător, iar șirul $\{b_n\}$ poate fi ales descrescător. Într-adevăr, fie $a_1, \bar{a}_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x_1 - \frac{1}{2} < a_1 < x_1 \quad \text{și} \quad x_2 - \frac{1}{2^2} < \bar{a}_2 < x_2.$$

Dacă notăm cu $a_2 = \max(a_1, \bar{a}_2)$ și ținem seama că $x_1 \leq x_2$, rezultă $x_2 - \frac{1}{2^2} < a_2 < x_2$. Evident $a_2 \geq a_1$. În continuare se poate arăta prin inducție completă că șirul $\{a_n\}$ este crescător. Analog se poate arăta că $\{b_n\}$ poate fi ales descrescător.

Deoarece $0 < b_n - a_n < (y_n - x_n) + \frac{1}{2^{n-1}}$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Din axioma Cantor rezultă că există $z \in Y$, unic, astfel încât $a_n \leq z \leq b_n, \forall n$. Cum $\{x_n\}$ este crescător avem:

$$x_n - \frac{1}{2^{n+k}} \leq x_{n+k} - \frac{1}{2^{n+k}} \leq a_{n+k} \leq z, \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

În continuare avem $x_n - z \leq \frac{1}{2^{n+k}}, \forall k \in \mathbb{N}$, de unde rezultă $x_n - z \leq 0$ și deci $x_n \leq z, \forall n$. În mod asemănător se arată că $z \leq y_n, \forall n$.

Observația 1.1.2. O mulțime de numere reale A se numește majorată (minorată) dacă există $b \in Y$ astfel încât $x \leq b$ ($x \geq b$), $\forall x \in A$.

Numărul b se numește majorant (minorant). Este evident că dacă A admite un majorant (minorant) atunci admite o infinitate de majoranți (minoranți). O mulțime se numește mărginită dacă este majorată și minorată.

Se numește marginea superioară (inferioară) a mulțimii A cel mai mic majorant (cel mai mare minorant) al mulțimii A .

Marginea superioară a mulțimii A se notează cu $\sup A$, iar marginea inferioară cu $\inf A$.

Teorema 1.1.1. Orice mulțime de numere reale majorată (minorată) are margine superioară (inferioară).

Demonstrație

Vom demonstra existența marginii superioare. Dacă mulțimea A e finită, adică $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, atunci evident $\sup A = \max\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.

Fie A majorată și infinită și fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât b este majorant pentru A , iar a nu este majorant pentru A . Fie c mijlocul intervalului $[a, b]$.

Dacă c este majorant pentru A , notăm cu $[a_1, b_1]$ intervalul $[a, c]$, iar dacă c nu este majorant pentru A notăm cu $[a_1, b_1]$ intervalul $[c, b]$. Fie c_2 mijlocul intervalului $[a_1, b_1]$. Procedând ca mai înainte, notăm cu $[a_2, b_2]$ intervalul

$[a_1, c_2]$ dacă c_2 este majorant pentru A , respectiv intervalul $[c_2, b_1]$, dacă c_2 nu este majorant pentru A și așa mai departe.

Se obțin astfel două șiruri de numere raționale $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ cu următoarele proprietăți:

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^n} = 0$$

3) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, b_n este majorant, iar a_n nu este majorant al mulțimii A .

Din axioma lui Cantor rezultă că există $M \in \mathbb{R}$ astfel, $a_n \leq M \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Observăm că $M = \sup A$. Într-adevăr, M este majorant pentru A , pentru că în caz contrar, există $x \in A$ astfel încât $M < x$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, există

$n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $b_{n_0} - a_{n_0} < x - M$.

În continuare avem $b_{n_0} < x + (a_{n_0} - M) \leq x$, ceea ce contrazice faptul că b_{n_0} este majorant pentru A . Arătăm acum că M este cel mai mic majorant al mulțimii A . Să presupunem prin absurd că există $M' < M$, M' majorant pentru A . Fie $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b_{n_1} - a_{n_1} < M - M'$. Mai departe avem:

$$a_{n_1} > M' + (b_{n_1} - M) \geq M'$$

de unde rezultă că a_{n_1} este majorant pentru A . Am ajuns astfel la o contradicție. În concluzie, M este cel mai mic majorant al mulțimii A , deci marginea superioară a mulțimii A . Demonstrația existenței marginii inferioare este analogă.

Observația 1.1.3. $M \in \Upsilon$ este marginea superioară a mulțimii A dacă și numai dacă

$$1) x \leq M, \forall x \in A$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \text{ astfel încât } M - \varepsilon < x_\varepsilon.$$

Într-adevăr, dacă $M = \sup A$, atunci M este majorant pentru A , de unde rezultă 1). Deoarece M este cel mai mic majorant al mulțimii A , rezultă că $\forall \varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ nu este majorant pentru A , deci $\exists x_\varepsilon > M - \varepsilon$. Fie acum $M \in \Upsilon$ cu proprietățile 1) și 2). Din 1) rezultă că M este majorant pentru A . Fie $M' < M$ și fie $\varepsilon = M - M' > 0$. Din 2) rezultă că există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon > M - \varepsilon = M'$. Prin urmare M' nu este majorant pentru A și deci $M = \sup A$.

1.2. Șiruri de numere reale (complemente)

Reamintim că un șir de numere reale $\{a_n\}$ se numește convergent (are limită finită) dacă există $l \in \mathbb{Y}$ astfel încât $\forall \varepsilon > 0, \exists$ un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $|a_n - l| < \varepsilon$.

Definiția 1.2.1. Fie $\{a_n\}$ un șir de numere reale și $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ un șir strict crescător de numere naturale. Șirul $\{a_{k_n}\}$ se numește subșir al șirului $\{a_n\}$. În particular șirul inițial $\{a_n\}$ poate fi privit ca un subșir al său (cazul $k_n = n$).

Dacă șirul $\{a_n\}$ este convergent și are limita l , atunci orice subșir al său este convergent și are limita l . (Afirmția rezultă imediat din Observația $n \leq k_n$).

Lema 1.2.1. (Cesàro). Orice șir mărginit de numere reale conține un subșir convergent.

Demonstrație

Fie $\{x_n\}$ un șir de numere reale mărginit. Atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < x_n < b, \forall n \in \mathbb{N}$. Fie c mijlocul intervalului $[a, b]$. Cel puțin unul din intervalele $[a, c], [c, b]$ conține o infinitate de termeni ai șirului $\{x_n\}$.

Presupunem că $[a, c]$ are această proprietate. Atunci notăm $a_1 = a$ și $b_1 = c$. Fie c_1 mijlocul intervalului $[a_1, b_1]$. Cel puțin unul din intervalele $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ conține o infinitate de termeni ai șirului $\{x_n\}$. Să presupunem că $[c_1, b_1]$ are această proprietate. Atunci notăm $a_2 = c_1, b_2 = b_1$ și așa mai departe. Se obțin astfel două șiruri de numere raționale $\{a_n\}, \{b_n\}$ cu proprietățile:

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^n} = 0.$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, \text{intervalul } [a_n, b_n] \text{ conține o infinitate de termeni ai șirului } \{x_n\}.$$

Din axioma lui Cantor rezultă că există $x \in \mathbb{Y}$ astfel încât $a_n \leq x \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Alegem $k_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$. Deoarece $[a_2, b_2]$ conține o infinitate de termeni ai șirului $\{x_n\}$, există $k_2 \in \mathbb{N}^*, k_2 > k_1$ astfel încât $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$.

Procedând în continuare în mod asemănător rezultă că există un șir strict crescător de numere naturale

$k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ astfel încât $x_{k_n} \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Deoarece $|x_{k_n} - x| \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ rezultă că $\{x_{k_n}\}$ converge la x .

Definiția 1.2.2. Un șir de numere reale $\{x_n\}$ se numește fundamental (Cauchy) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall m, n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Notând cu $p = m - n$ (dacă $m > n$), respectiv $p = n - m$ (dacă $m < n$) obținem următoarea definiție echivalentă: $\{x_n\}$ este fundamental dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$ avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Lema 1.2.2. Orice șir fundamental este mărginit.

Demonstrație

Fie $\{x_n\}$ un șir fundamental. Pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_{n+p} - x_n| < 1, \quad \forall n \geq n_1, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $n = n_1$ rezultă

$$|x_{n_1+p} - x_{n_1}| < 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \text{ deci}$$

$$x_{n_1} - 1 < x_{n_1+p} < x_{n_1} + 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă notăm cu

$$a = \min\{x_1, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} - 1\} \text{ și cu } b = \max\{x_1, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1} + 1\}$$

atunci $a \leq x_n \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.1. (Criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Condiția necesară și suficientă ca un șir de numere reale să fie convergent este să fie fundamental.

Demonstrație

Necesitatea. Fie $\{x_n\}$ un șir convergent, având limita $l \in \mathbb{Y}$. Pentru $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon$. Dacă $m \geq n_\varepsilon$, atunci $|x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ și

mai departe $|x_m - x_n| = |(x_m - l) + (l - x_n)| \leq |x_m - l| + |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Așadar,

$\forall n, m \geq n_\varepsilon$ avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$, deci $\{x_n\}$ este fundamental.

Suficiența. Fie $\{x_n\}$ un șir fundamental. Pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n, m \geq n'_\varepsilon$ avem:

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.3)$$

Pe de altă parte, din Lema 1.2.2. rezultă că șirul $\{x_n\}$ este mărginit, iar din Lema 1.2.1, că admite un subșir x_{k_n} convergent. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}$ și fie $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$|x_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n'_\varepsilon. \quad (1.4)$$

Dacă $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$ și $n \geq n_\varepsilon$, atunci din (1.3) și (1.4) rezultă:

$$|x_n - l| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - l| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Așadar, $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, deci $\{x_n\}$ este convergent și are limita l .

Criteriul general de convergență al lui Cauchy stabilește că pentru șirurile de numere reale noțiunile de șir convergent și șir fundamental sunt echivalente. Prin urmare, este suficient să verificăm pentru un șir că este fundamental (deci o condiție mai slabă) ca să tragem concluzia că este convergent.

Exemplu: Să se studieze convergența șirului cu termenul general $a_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{2^n}$ ($x \in \mathbb{Y}$ oarecare fixat). Verificăm că șirul $\{a_n\}$ este fundamental. Într-adevăr avem:

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}, \quad p \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Așadar, șirul $\{a_n\}$ este fundamental și deci convergent.

Datorită importanței deosebite pentru analiza matematică a criteriului general de convergență al lui Cauchy, prezentăm în continuare o altă demonstrație a sa, mai precis a implicației: orice șir fundamental este convergent.

Fie $\{x_n\}$ un șir fundamental. Pentru Fie $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ există $n_k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall n, m \geq n_k. \quad (1.5)$$

În particular avem:

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{1}{2^k}, \quad n \geq n_k. \quad (1.6)$$

Pentru $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ există $\bar{n}_{k+1} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall n, m \geq \bar{n}_{k+1}. \quad (1.7)$$

Dacă alegem $n_{k+1} > \max(n_k, \bar{n}_{k+1})$, atunci

$$n_{k+1} > n_k \quad \text{și} \quad |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \frac{1}{2^k}.$$

Prin urmare dacă $\{x_n\}$ este fundamental, există un subșir al său $\{x_{n_k}\}$ cu proprietatea:

$$x_{n_k} - \frac{1}{2^k} < x_{n_{k+1}} < x_{n_k} + \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Dacă notăm cu $a_k = x_{n_k} - \frac{1}{2^{k-1}}$ și $b_k = x_{n_k} + \frac{1}{2^{k-1}}$ atunci șirurile $\{a_k\}$ și

$\{b_k\}$ satisfac condițiile Propoziției 1.1.4. Într-adevăr, ținând seama de (1.8) avem:

$$a_{k+1} - a_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} > -\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} = 0$$

$$b_{k+1} - b_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}} = 0$$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-2}} \rightarrow 0 \quad \text{pentru } k \rightarrow \infty.$$

Prin urmare, există $x \in Y$ astfel încât

$$x_{n_k} - \frac{1}{2^{k-1}} = a_k \leq x \leq b_k = x_{n_k} + \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Din (1.8) și (1.9) rezultă

$$|x_{n_{k+1}} - x| < \frac{3}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

Așadar, subșirul $\{x_{n_k}\}$ este convergent și are limita x . Fie $\varepsilon > 0$ și $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq n'_\varepsilon. \quad (1.11)$$

Fie $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m, n \geq n''_{\varepsilon} \quad (1.12)$$

Dacă notăm cu $n_{\varepsilon} = \max(n'_{\varepsilon}, n''_{\varepsilon})$, atunci din (11) și (12), pentru $n \geq n_{\varepsilon}$ avem:

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de unde rezultă că $\{x_n\}$ converge la x .

Teorema 1.2.2. *Orice șir monoton și mărginit este convergent.*

Demonstrație

Fie $\{x_n\}$ un șir monoton crescător și mărginit. Deoarece mulțimea $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ este majorată, din Teorema 1.1.1. rezultă că există $M = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Din Observația 1.1.2. rezultă că $x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel încât $M - \varepsilon < x_{n_{\varepsilon}}$. Deoarece șirul $\{x_n\}$ este monoton crescător, rezultă $x_n \geq x_{n_{\varepsilon}}$, $\forall n \geq n_{\varepsilon}$.

Prin urmare, pentru orice $n \geq n_{\varepsilon}$ avem:

$$M - \varepsilon < x_n \leq M \leq M + \varepsilon, \text{ adică } |x_n - M| < \varepsilon, \quad (1.13)$$

de unde rezultă că $\{x_n\}$ este convergent și are limita M .

Cel mai cunoscut exemplu de aplicație a Teoremei 1.2.2. este șirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Se știe din liceu că acest șir este monoton crescător și mărginit

($2 \leq a_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Limita sa se notează cu e . Deci $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Despre numărul e se poate arăta că este irațional și valoarea sa este aproximativ egală cu $e \approx 2,71828$.

În continuare prezentăm o altă aplicație interesantă a Teoremei 1.1.1.

Exemplu. Fie șirul cu termenul general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Vom arăta că acest șir este monoton descrescător și mărginit. Pentru aceasta folosim următoarea inegalitate cunoscută din liceu

$$\ln(1+x) < x, \quad \forall x > -1, x \neq 0. \quad (1.14)$$

Într-adevăr,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Așadar $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \geq 1$.

Pe de altă parte, deoarece $\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n}$, vom avea:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \dots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n = \\ &= \ln\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0 \Rightarrow a_n > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Rezultă că șirul $\{a_n\}$ este convergent. Limita sa se notează cu C și se numește constanta lui Euler și este aproximativ egală cu 0,5772156.

Dacă notăm cu $\varepsilon_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - C$, atunci $\{\varepsilon_n\}$ este un șir de numere pozitive, descrescător, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Rezultă următoarea identitate:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \quad (1.15)$$

care se dovedește utilă în aplicații și va fi folosită mai departe.

1.3. Dreapta încheiată. Limitele extreme ale unui șir

Reamintim că prin dreapta încheiată se înțelege mulțimea $\bar{\square} = \square \cup \{-\infty; \infty\}$.

Pe mulțimea $\bar{\square}$ se consideră relația de ordine obținută prin prelungirea relației de ordine de pe Y astfel:

$$-\infty < \infty, \quad -\infty < x \text{ și } x < \infty, \quad \forall x \in Y.$$

În felul acesta $\bar{\square}$ este o mulțime ordonată.

Dacă $A \subset Y$ este o mulțime nevidă care nu este majorată, definim $\sup A = +\infty$. În mod analog, dacă A nu este minorată definim $\inf A = -\infty$. Cu această convenție, orice mulțime de numere reale este mărginită în $\bar{\square}$. Operațiile algebrice de pe Y se extind pe $\bar{\square}$, fără însă să fie peste tot definite și anume:

$$\begin{aligned} \infty + x &= \infty, \quad \forall x \in \bar{\square}, \quad x \neq -\infty \\ -\infty + x &= -\infty, \quad \forall x \in \bar{\square}, \quad x \neq \infty \\ \infty x &= \begin{cases} \infty & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty & \text{dacă } x < 0 \end{cases}, \quad x \in \bar{\square}. \end{aligned}$$

Definiția 1.3.1. Un șir de numere reale $\{x_n\}$ are limita ∞ (respectiv $-\infty$) dacă $\forall \varepsilon \in Y, \exists n_\varepsilon \in \square$ astfel încât $x_n > \varepsilon$ (respectiv $x_n < \varepsilon$), $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Se folosesc notațiile: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (respectiv $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).

Propoziția 1.3.1. Orice șir monoton de numere reale are limită în $\bar{\square}$. Orice șir de numere reale conține un subșir care are limită în $\bar{\square}$.

Demonstrație

Fie $\{x_n\}$ un șir monoton crescător de numere reale. Dacă $\{x_n\}$ este mărginit superior, atunci $\{x_n\}$ este convergent, deci are limită finită. (Teorema 1.2.2.) Dacă $\{x_n\}$ nu este mărginit superior, atunci pentru $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Cum $\{x_n\}$ este crescător vom avea $x_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Dacă $\{x_n\}$ este descrescător se procedează în mod analog.

Fie acum $\{x_n\}$ un șir de numere reale oarecare. Dacă $\{x_n\}$ este mărginit, atunci din Lema Cesàro rezultă că există un subșir $\{x_{n_k}\}$ convergent. Să presupunem că $\{x_n\}$ nu este mărginit (de exemplu nu este mărginit superior). Vom arăta în acest caz că există un subșir care are limita $+\infty$. Într-adevăr, există o infinitate de termeni ai șirului mai mari ca 1. Fie $x_{k_1} > 1$. De asemenea, există o infinitate de termeni ai șirului mai mari ca 2. Atunci putem alege $k_2 > k_1$ astfel încât $x_{k_2} > 2$. Construim astfel prin inducție un șir strict crescător de numere naturale $\{k_n\}$ cu proprietatea $x_{k_n} > n$. Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \infty$.

Definiția 1.3.2. Fie $\{x_n\}$ un șir de numere reale și $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Spunem că a este punct limită pentru șirul $\{x_n\}$ dacă există un subșir $\{x_{k_n}\}$ astfel încât $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}$.

Observația 1.3.1. Dacă un șir are limită, atunci acest șir are un singur punct limită care coincide cu limita sa.

Exemple

- 1) Șirul $x_n = (-1)^n$ are două puncte limită -1 și 1 .
- 2) Șirul $x_n = n^{(-1)^n}$ are două puncte limită 0 și ∞ .
- 3) Șirul $x_n = n$ are un singur punct limită ∞ .
- 4) Șirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ are un singur punct limită 0 .

Teorema 1.3.1. Pentru orice șir de numere reale $\{x_n\}$ există un cel mai mic punct limită (finit sau nu) și un cel mai mare punct limită (finit sau nu).

Demonstrație

Dacă $\{x_n\}$ nu este majorat, atunci din Propoziția 1.3.1. rezultă că există un subșir care are limita $+\infty$. Așadar, $+\infty$ este punct limită și evident este cel mai mare.

Să presupunem acum că șirul $\{x_n\}$ este majorat și să notăm cu A mulțimea punctelor sale limită finite. Dacă A este vidă, atunci din Lema Cesàro rezultă că $\{x_n\}$ nu este mărginit inferior. În această situație $-\infty$ este singurul punct limită și deci și cel mai mare. Să presupunem acum $A \neq \emptyset$. Cum $\{x_n\}$ este majorat, rezultă că și A este majorată, deci există $\sup A \in \mathbb{Y}$ (Teorema 1.1.1.). Să observăm însă că $\alpha = \sup A \in A$. Într-adevăr, din definiția marginii superioare rezultă că $\forall p \in \mathbb{Q}^*$ există $a_p \in A$ astfel încât $\alpha - \frac{1}{p} < a_p \leq \alpha$.

Pe de altă parte, pentru a_p există un subșir al șirului $\{x_n\}$ convergent la a_p . Așadar, pentru a_1 există x_{k_1} astfel încât $|x_{k_1} - a_1| < 1$. Pentru a_2 există x_{k_2} , $k_2 > k_1$ astfel încât $|x_{k_2} - a_2| < \frac{1}{2}$.

Prin inducție construim un șir de numere naturale $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ cu proprietatea $|x_{k_p} - a_p| < \frac{1}{p}$. Din inegalitatea

$$|x_{k_p} - \alpha| \leq |x_{k_p} - a_p| + |a_p - \alpha| < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$$

rezultă $x_{k_p} \rightarrow \alpha$. Așadar, $\alpha = \sup A$ este punct limită al șirului $\{x_n\}$ și evident, este cel mai mare. Existența celui mai mic punct limită se dovedește în mod asemănător.

Definiția 1.3.3. Cel mai mic punct limită al unui șir se numește limita inferioară a șirului și se notează cu $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. Cel mai mare punct limită al șirului se numește limita superioară a șirului și se notează cu $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Observația 1.3.2. Din Teorema 1.3.1 rezultă că orice șir de numere reale are limită superioară și limită inferioară (deși poate să nu aibă limită). Fie $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$. Limita superioară L , când este finită, este caracterizată de proprietățile:

- a) Pentru orice $a < L$ există o infinitate de termeni ai șirului mai mari ca a .
- b) Pentru orice $b > L$ există un număr finit de termeni ai șirului mai mari ca b .

În mod analog, limita inferioară l , când este finită, este caracterizată de proprietățile:

a) Pentru orice $a < l$ există un număr finit de termeni ai șirului mai mici ca a .

b) Pentru orice $b > l$ există o infinitate de termeni ai șirului mai mici ca b .

Într-adevăr, să justificăm afirmația în cazul limitei superioare L . Din a) și b) rezultă că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ există o infinitate de termeni ai șirului în intervalul

$\left(L - \frac{1}{n}, L + \frac{1}{n}\right)$. Se poate construi prin inducție un șir strict crescător de numere

naturale $\{k_n\}$ astfel încât $x_{k_n} \in \left(L - \frac{1}{n}, L + \frac{1}{n}\right)$. Rezultă $|x_{k_n} - L| < \frac{2}{n}$ și deci

$x_{k_n} \rightarrow L$. Așadar, L este punct limită al șirului. Din proprietatea b) rezultă că L este cel mai mare punct limită al șirului.

Am făcut mai înainte observația că orice mulțime de numere reale este mărginită în $\bar{\mathbb{R}}$. În particular, orice șir de numere reale, este mărginit în $\bar{\mathbb{R}}$. Fie $m = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ și $M = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Următoarele inegalități sunt evidente:

$$-\infty \leq m \leq l \leq L \leq M \leq +\infty.$$

Exemplu. Fie șirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$. Observăm că

$$x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ \frac{1}{n} + 1 & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Așadar, șirul conține două subșiruri convergente care au limitele 0, respectiv 1. Rezultă că $l = 0$ și $L = 1$.

Subșirul $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ este crescător, deci -1 este cel mai mic termen al său, iar

subșirul $\left\{\frac{1}{n} + 1\right\}$ este descrescător, deci cel mai mare termen al său este 2. Rezultă

$m = -1, M = 2$.

Așadar, avem: $m = -1 < l = 0 < L = 1 < M = 2$.

Propoziția 1.3.2. *Condiția necesară și suficientă ca un șir să aibă limită (finită sau nu) este ca $L = \limsup a_n = \liminf a_n = l$.*

Demonstrație

Necesitatea. Dacă șirul are limită, atunci șirul are un singur punct limită, care coincide cu limita sa. Rezultă $L = l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Suficiența. Să presupunem că $L = l = a \in \mathbb{R}$. Din Observația 1.3.2. rezultă $\forall \varepsilon > 0$, în intervalul $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se află o infinitate de termeni ai șirului, iar în afara acestui interval, se află un număr finit de termeni ai șirului. Rezultă $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dacă $L = l = a = +\infty$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, iar dacă $L = l = a = -\infty$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

1.4. Serii numerice convergente și divergente

Fie $\{u_n\}$ un șir de numere reale. Asociem acestui șir următorul șir:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1 \\ s_2 &= u_1 + u_2 \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Definiția 1.4.1. Perechea $(\{u_n\}, \{s_n\})$ se numește serie definită de șirul $\{u_n\}$ și se notează cu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ sau } u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.16)$$

Elementele șirului $\{u_n\}$ se numesc termenii seriei, iar șirul $\{s_n\}$ se numește șirul sumelor parțiale. Seria (1.16) se numește convergentă dacă șirul sumelor parțiale $\{s_n\}$ este convergent; limita $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ se numește suma seriei și se obișnuiește să se scrie:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1.17)$$

Dacă șirul sumelor parțiale $\{s_n\}$ este divergent (nu are limită sau are limită infinită) spunem că seria (1.17) este divergentă.

Exemple

1. Seria geometrică

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

Suma parțială $s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}$ pentru $q \neq 1$.

Dacă $|q| < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ și deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q}$. Prin urmare,

dacă $|q| < 1$ seria geometrică este convergentă și suma sa este $s = \frac{a}{1-q}$.

Dacă $q = 1$, atunci $s_n = n \cdot a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$.

Dacă $q = -1$, atunci $s_n = \begin{cases} a & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 0 & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$

Șirul $\{s_n\}$ nu are limită în acest caz.

Dacă $q > 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$.

Dacă $q < -1$, atunci șirul $\{q^n\}$ nu are limită și deci șirul $\{s_n\}$ nu are limită.

În concluzie, pentru $|q| \geq 1$ seria geometrică este divergentă.

2. Seria armonică

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Suma parțială $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$ unde $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ (vezi subcap. 1.2, formula (1.15)). Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, deci seria armonică este divergentă.

Propoziția 1.4.1. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Demonstrație

Fie $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Deoarece $u_n = s_n - s_{n-1}$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = s - s = 0$.

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există serii divergente cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (de exemplu seria armonică).

Din Propoziția 1.4.1 rezultă următoarea observație utilă în aplicații:

Observația 1.4.1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Exemplu: Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(3+e^{2n})}$ este divergentă, deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{3n}(1+2e^{-3n})}{\ln e^{2n}(1+3e^{-2n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \ln(1+2e^{-3n})}{2n + \ln(1+3e^{-2n})} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Teorema 1.4.1. (Criteriul general de convergență al lui Cauchy)

Condiția necesară și suficientă ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ să fie convergentă este ca pentru $\forall \varepsilon > 0$ să existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$ să avem $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

Demonstrație

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale $\{s_n\}$ este convergent. Din Teorema 1.2.1 rezultă că $\{s_n\}$ este convergent dacă și numai dacă $\{s_n\}$ este fundamental, deci dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Observația 1.4.2. Natura unei serii nu se schimbă, dacă schimbăm valorile unui număr finit de termeni ai săi (în particular, dacă îi ștergăm).

Într-adevăr, dacă $\{s_n\}$ este șirul sumelor parțiale al seriei inițiale, atunci șirul sumelor parțiale ale noii serii, este de forma $\{s_n + c\}$ (începând de la un anumit rang), unde c este un număr constant.

1.5. Serii cu termeni pozitivi

Seriile cu termeni pozitivi sunt seriile în care toți termenii sunt strict pozitivi ($u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Locul special pe care îl ocupă aceste serii printre seriile numerice este pus în evidență de următoarea teoremă:

Teorema 1.5.1. *Condiția necesară și suficientă ca o serie de termeni pozitivi să fie convergentă este ca șirul sumelor parțiale să fie mărginit.*

Demonstrație

Dacă seria este convergentă, atunci șirul sumelor parțiale este convergent și deci mărginit.

Condiția este și suficientă, pentru că șirul sumelor parțiale al unei serii cu termeni pozitivi este monoton crescător și dacă este în plus și mărginit, rezultă că este convergent (Teorema 1.2.1.).

Teorema 1.5.2. (Criteriul I de comparație)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$u_n \leq v_n, \quad \forall n \geq k \quad (1.18)$$

Atunci: a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge.

Demonstrație

Din Observația 1.4.2 rezultă că, suprimând eventual primii $k - 1$ termeni din cele două serii, putem presupune că $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă notăm cu $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ și cu $\sigma_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, atunci din (1.18) rezultă $s_n \leq \sigma_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci $\{\sigma_n\}$ este mărginit deci și $\{s_n\}$ va fi

mărginit. Din Teorema 1.5.1 rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$.

Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.

Observația 1.5.1. În enunțul teoremei precedente inegalitatea (1.18) poate fi înlocuită cu inegalitatea

$$u_n \leq c \cdot v_n, \quad \forall n \geq k, \quad (1.18')$$

unde c este un număr constant strict pozitiv.

Într-adevăr, natura seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot v_n)$ este evident aceeași.

Teorema 1.5.3. (Criteriul de condensare al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că șirul $\{u_n\}$ este

descrescător. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ au aceeași natură.

Demonstrație

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $n < 2^k$.

Deoarece $\{u_n\}$ este un șir descrescător de numere pozitive avem:

$$\begin{aligned} s_n = u_1 + \dots + u_n &\leq u_1 + \dots + u_{2^k-1} = u_1 + (u_2 + u_3) + \dots + (u_{2^{k-1}} + \dots + u_{2^k-1}) \leq \\ &\leq u_1 + 2u_2 + \dots + 2^{k-1}u_{2^{k-1}} = u_1 + \sigma_{2^k-1} \end{aligned}$$

(cu σ_n notăm șirul sumelor parțiale al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$).

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ este convergentă și are suma σ , rezultă $s_n < u_1 + \sigma$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ și deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Pe de altă parte, dacă $n \geq 2^k$ vom avea:

$$\begin{aligned} s_n = u_1 + \dots + u_n &\geq u_1 + \dots + u_{2^k} = u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + \dots + (u_{2^{k-1}} + \dots + u_{2^k}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2}u_1 + u_2 + 2u_4 + \dots + 2^{k-1}u_{2^k} = \frac{1}{2}(u_1 + 2u_2 + 2^2u_{2^2} + \dots + 2^k u_{2^k}) = \\ &= \frac{1}{2}(u_1 + \sigma_{2^k}). \end{aligned}$$

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ diverge, rezultă $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{2^k} = \infty$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$.

Așadar, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Exemple

1. Seria armonică generalizată

Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, numită seria armonică generalizată.

Deoarece $\alpha > 0$, termenii seriei descresc și se poate aplica Teorema 1.5.3.

Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$, care este o serie geometrică, cu rația $q = 2^{1-\alpha}$.

Dacă $\alpha \leq 1$, atunci $q \geq 1$ și $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ diverge.

Dacă $\alpha > 1$, atunci $q < 1$ și $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ converge.

În particular, pentru $\alpha = 1$ obținem o nouă demonstrație a faptului că seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

2. Seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_a n)^\alpha}$, unde $a > 1$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ și

divergentă pentru $0 \leq \alpha \leq 1$.

Într-adevăr, din Teorema 1.5.3 rezultă că această serie are aceeași natură cu seria

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (\log_a 2^n)^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \cdot \log_a 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log_a 2)^\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Așadar, seria dată are aceeași natură cu seria armonică generalizată.

Teorema 1.5.4. (Criteriul II de comparație)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \quad \forall n \geq k. \quad (1.19)$$

Atunci: a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge, rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge.

Demonstrație

Din Observația 1.4.2 rezultă că putem presupune că inegalitatea (1.19) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Așadar avem $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și mai departe

$$\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{u_2}{v_2} \leq \frac{u_1}{v_1}, \text{ de unde rezultă } u_n \leq \frac{u_1}{v_1} \cdot v_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Afirmațiile din enunț rezultă acum din Teorema 1.5.2 (Observația 1.5.1).

Teorema 1.5.5. (Criteriul III de comparație)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ două serii cu termeni pozitivi cu proprietatea:

$$0 < \underline{\lim} \frac{u_n}{v_n} \leq \overline{\lim} \frac{u_n}{v_n} < +\infty. \quad (1.20)$$

Atunci cele două serii au aceeași natură.

Demonstrație

Fie $a, b \in \mathbb{Y}$ astfel încât

$$0 < a < \underline{\lim} \frac{u_n}{v_n} \leq \overline{\lim} \frac{u_n}{v_n} < b.$$

Din Observația 1.3.2 rezultă că numai un număr finit de termeni ai șirului $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$ sunt mai mici ca a sau mai mari ca b . Prin urmare există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$a < \frac{u_n}{v_n} < b, \text{ pentru orice } n \geq k. \quad (1.21)$$

Cum $v_n > 0$, mai departe avem:

$$av_n < u_n < bv_n.$$

Afirmația rezultă acum din Teorema 1.5.2.

Corolar. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ două serii cu termeni pozitivi cu proprietatea

că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ și

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty. \quad (1.22)$$

Atunci cele două serii au aceeași natură.

Demonstrație

Afirmația rezultă din Teorema 1.5.5 și Propoziția 1.3.2.

Exemplu. Să se afle natura seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$. Fie $u_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ și $v_n = \frac{1}{n}$.

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Cum seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă,

rezultă că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$ este divergentă.

Teorema 1.5.6. (Criteriul rădăcinii al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $0 < \alpha < 1$ și $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \leq \alpha, \quad \forall n \geq k, \quad (1.23)$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Dacă pentru o infinitate de termeni avem

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \quad (1.24)$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație

Din (1.23) rezultă $u_n \leq \alpha^n$, $\forall n \geq k$. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ este convergentă, fiind o serie geometrică cu rația $q = \alpha < 1$, din Teorema 1.5.2 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Din (1.24) rezultă $u_n \geq 1$ pentru o infinitate de termeni și deci că șirul $\{u_n\}$ nu converge la 0. Din Observația 1.4.1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 1. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi și fie $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n}$. Dacă $L < 1$ seria este convergentă, iar dacă $L > 1$ seria este divergentă.

Demonstrație

a) Fie $L < \alpha < 1$. Din definiția limitei superioare rezultă că există un număr finit de termeni ai șirului $\sqrt[n]{u_n}$ mai mari ca α . Așadar există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \leq \alpha$, $\forall n \geq k$. Afirmatia rezultă acum din Teorema 1.5.6.

b) Dacă $L > 1$, atunci există o infinitate de termeni ai șirului $\{\sqrt[n]{u_n}\}$ mai mari ca 1, deci seria este divergentă (vezi Teorema 1.5.6).

Corolarul 2. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$. Dacă $l < 1$ seria este convergentă, iar dacă $l > 1$ seria este divergentă.

Demonstrație

Afirmatia rezultă din Corolarul 1 și Propoziția 1.3.2.

Exemple

1. Să se afle natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} [2 + (-1)^n]^n \cdot a^n$, $a > 0$. Dacă notăm cu $u_n = [2 + (-1)^n]^n \cdot a^n$, atunci $\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim} [2 + (-1)^n]^n \cdot a = 3a$. Prin urmare,

din Corolarul 2 rezultă că dacă $a < \frac{1}{3}$ seria este convergentă, iar dacă $a > \frac{1}{3}$ seria este divergentă.

$$\text{Dacă } a = \frac{1}{3} \text{ atunci } u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 1 & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Seria este divergentă deoarece $u_n \not\rightarrow 0$.

2. Să se afle natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$ rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Din Corolarul 1 rezultă că seria este convergentă.

Teorema 1.5.7. (Criteriul raportului al lui D'Alembert)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $0 < \alpha < 1$ și $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha, \quad \forall n \geq k, \quad (1.25)$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \quad \forall n \geq k, \quad (1.26)$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație

Suprimând eventual un număr finit de termeni ai seriei, putem presupune că inegalitatea (1.25) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Așadar, avem:

$$u_{n+1} \leq \alpha \cdot u_n, \quad \forall n \geq 1 \quad (1.25')$$

Dând succesiv lui n valorile 1, 2, 3, ... din (1.25') rezultă

$$u_n \leq \alpha^{n-1} u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} u_1$ este convergentă, fiind o serie geometrică cu rația

$q = \alpha < 1$, din Teorema 1.5.2 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Din (1.26) rezultă $0 < u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \geq k$. Așadar, în acest caz, șirul $\{u_n\}$ este crescător (începând de la un anumit rang) și deci termenul său general nu converge la 0. Din Observația 1.4.1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 1. O serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă

$$\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ și divergentă dacă } \underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

Demonstrație

Fie $L = \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ și $L < \alpha < 1$. Din definiția limitei superioare rezultă că

numai un număr finit de termeni ai șirului $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$ sunt mai mari ca α . Așadar, există

$k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha < 1$, $\forall n \geq k$. Din Teorema 1.5.7 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Fie $l = \underline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Din definiția limitei inferioare rezultă că numai un număr

finit de termeni ai șirului $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$ sunt mai mici ca 1. Așadar, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel

încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, $\forall n \geq k$. Din Teorema 1.5.7 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 2. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Dacă $l < 1$ seria este convergentă, iar dacă $l > 1$ seria este divergentă.

Demonstrație

Afirmația rezultă din Corolarul 1 și Propoziția 1.3.2.

Exemplu. Să se afle natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$, rezultă că seria este convergentă, $\forall a > 0$.

Teorema 1.5.8. (Criteriul Raabe-Duhamel)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $\alpha > 1$ și $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq \alpha, \quad \forall n \geq k, \quad (1.27)$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

b) Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad \forall n \geq k, \quad (1.28)$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Demonstrație

a) Suprimând eventual un număr finit de termeni ai seriei, putem presupune că inegalitatea (1.27) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, așadar avem

$$nu_n - nu_{n+1} \geq \alpha u_{n+1}, \quad \forall n \geq 1 \quad (1.27')$$

Dând lui n succesiv valoarea 1, 2, 3, ... în (1.27') rezultă:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &\geq \alpha u_2 \\ 2u_2 - 2u_3 &\geq \alpha u_3 \\ 3u_3 - 3u_4 &\geq \alpha u_4 \\ &\dots\dots\dots \\ nu_n - nu_{n+1} &\geq \alpha u_{n+1} \end{aligned}$$

Notând cu $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ și adunând inegalitățile de mai sus obținem:

$$s_n \geq \alpha(s_n - u_1 + u_{n+1}) > \alpha(s_n - u_1)$$

și mai departe $s_n \leq \frac{\alpha u_1}{\alpha - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Așadar, șirul sumelor parțiale este mărginit. Din Teorema 1.5.1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Din inegalitatea (1.28) rezultă

$$nu_n \leq (n+1)u_{n+1} \text{ și mai departe } \frac{1}{\frac{n+1}{1/n}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \forall n \geq k.$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, din Teorema 1.5.4 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 1. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă $l = \underline{\lim} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Dacă $L = \overline{\lim} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergentă.

Demonstrație

a) Fie $l > \alpha > 1$. Din definiția limitei inferioare rezultă că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq \alpha, \quad \forall n \geq k$. Afirmția rezultă acum din Teorema 1.5.8.

b) Fie $L < 1$. Din definiția limitei superioare rezultă că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad \forall n \geq k$. Afirmția rezultă din Teorema 1.5.8.

Corolarul 2. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că există

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)$. Dacă $l > 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, iar dacă $l < 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Demonstrație

Afirmția rezultă din Corolarul 1 și Propoziția 1.3.2.

Exemplu: Să se afle natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Dacă notăm cu u_n termenul general al seriei, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1.$$

Din Corolarul 2 rezultă că seria este convergentă.

Teorema 1.5.9. (Criteriul logaritmă al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $\alpha > 1$ și $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \geq \alpha, \quad \forall n > k, \quad (1.29)$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \leq 1, \quad \forall n \geq k, \quad (1.30)$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație

a) Din (1.29) rezultă $\ln \frac{1}{u_n} \geq \alpha \ln n = \ln n^\alpha$. Deoarece funcția $f = \ln$ este

crescătoare, rezultă $\frac{1}{u_n} \geq n^\alpha$ și mai departe $u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}, \forall n \geq k$.

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$, din Teorema 1.5.2 rezultă

că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

b) Din (1.30) rezultă $u_n \geq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq k$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, din

Teorema 1.5.2 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Corolarul 1. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă $\underline{\lim} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge.

b) Dacă $\overline{\lim} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} < 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Demonstrația rezultă din Teorema 1.5.9 și este asemănătoare cu demonstrația de la Corolarul 1, Teorema 1.5.8.

Corolarul 2. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi pentru care există

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n}$. Dacă $l > 1$ seria este convergentă, iar dacă $l < 1$ seria este divergentă.

Demonstrația rezultă din Corolarul 1 și Propoziția 1.3.2.

Exemplu: Să se afle natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$, $a > 0$.

Dacă notăm cu $u_n = n^{\ln a}$, atunci

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = -\ln a.$$

Dacă $a < \frac{1}{e}$ rezultă $l > 1$, deci seria este convergentă.

Dacă $a > \frac{1}{e}$ seria este divergentă.

Dacă $a = \frac{1}{e}$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ coincide cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ și deci este divergentă.

1.6. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Vom considera acum serii de numere reale, în care termenii pot avea orice semn. Cazul interesant este acela al seriilor care au o infinitate de termeni pozitivi și o infinitate de termeni negativi (O serie care are numai un număr finit de termeni de același semn poate fi asimilată cu o serie cu termeni pozitivi).

Pentru astfel de serii avem deja un criteriu de convergență și anume, criteriul general de convergență al lui Cauchy (Teorema 1.4.1).

În continuare vom prezenta un criteriu care ne dă o condiție suficientă pentru convergența unei serii cu termeni oarecare.

Teorema 1.6.1. (Criteriul Abel-Dirichlet)

Fie $\{a_n\}$ un șir descrescător de numere pozitive convergent la 0 și fie seria

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cu proprietatea că șirul sumelor sale parțiale $\{s_n\}$ este mărginit. Atunci

seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ este convergentă.

Demonstrație

Demonstrația se bazează pe Teorema 1.4.1 (criteriul general de convergență al lui Cauchy).

Prin ipoteză, există $M > 0$, astfel încât

$$|s_n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Observăm că, deoarece șirul $\{a_n\}$ este descrescător, avem

$$|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă notăm cu $\{\sigma_n\}$ șirul numerelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$, atunci:

$$\begin{aligned} |\sigma_{n+p} - \sigma_n| &= |a_{n+1}v_{n+1} + a_{n+2}v_{n+2} + \dots + a_{n+p}v_{n+p}| = \\ &= |a_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + a_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \dots + a_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})| = \\ &= |-a_{n+1}s_n + (a_{n+1} - a_{n+2})s_{n+1} + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})s_{n+p-1} + a_{n+p}s_{n+p}| \leq \\ &\leq a_{n+1}|s_n| + (a_{n+1} - a_{n+2})|s_{n+1}| + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})|s_{n+p-1}| + a_{n+p}|s_{n+p}| \leq \\ &\leq M(a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \dots + a_{n+p-1} - a_{n+p} + a_{n+p}) = 2M a_{n+1}. \end{aligned}$$

Așadar, pentru orice n și $p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$|\sigma_{n+p} - \sigma_n| \leq 2M a_{n+1}. \quad (1.31)$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n < \frac{\varepsilon}{2M}$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Dacă în inegalitatea (1) considerăm $n \geq n_\varepsilon$ obținem

$$|\sigma_{n+p} - \sigma_n| \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Din Teorema 1.4.1 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ este convergentă.

Exemplu: Să se afle natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n}.$$

Deoarece

$$\sin n \cos n^2 = \frac{1}{2} [\sin n(n+1) - \sin n(n-1)],$$

seria dată se mai poate scrie sub forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} [\sin n(n+1) - \sin(n-1)n].$$

Fie $a_n = \frac{1}{2n}$ și $v_n = \sin n(n+1) - \sin(n-1)n$. Se observă imediat că

$$s_n = \sum_{k=1}^n v_k = \sin n(n+1) \text{ și deci } |s_n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din Teorema 1.6.1 rezultă că seria este convergentă.

Următorul criteriu de convergență se referă la serii alternate. Prin serie alternată se înțelege o serie în care termenii sunt alternativ strict pozitivi sau strict negativi. O serie alternată este deci de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 + \dots, \text{ unde } u_n > 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 1.6.2. (Criteriul lui Leibniz)

Orice serie alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ cu proprietatea că șirul $\{u_n\}$ este descrescător și convergent la 0 este convergentă.

Demonstrație

Demonstrația rezultă imediat din Teorema 1.6.1 dacă vom considera $a_n = u_n$ și $v_n = (-1)^{n-1}$.

Într-adevăr $a_n \geq 0$ și $s_n = \sum_{k=1}^n v_k = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ 0 & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$.

Exemplu. Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots,$$

este convergentă deoarece $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

1.7. Calculul aproximativ al sumei unor serii

Calculul exact al sumei unei serii convergente este posibil numai în cazuri foarte particulare (de exemplu pentru seria geometrică). În general, acest lucru nu este posibil și de aceea se aproximează suma s a seriei, cu suma parțială s_n . Eroarea absolută care se face este $|r_n| = |s - s_n|$.

1. Cazul seriilor cu termeni pozitivi

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este cu termeni pozitivi, atunci $u_n > 0$ și valoarea aproximativă s_n va fi mai mică decât valoarea exactă s .

a) Să presupunem că există $m \in \mathbb{N}^*$ și $0 < \alpha(m) < 1$ astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha(m), \quad \forall n \geq m. \quad (1.32)$$

Atunci avem

$$r_m \leq \frac{\alpha(m)}{1 - \alpha(m)} u_m. \quad (1.33)$$

Într-adevăr, din (1.32) rezultă:

$$r_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots \leq \left[\alpha(m) + \alpha^2(m) + \dots \right] u_m = \frac{\alpha(m)}{1 - \alpha(m)} u_m.$$

Exemplu: Să se calculeze cu trei zecimale exacte suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n}$.

Deoarece $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{m+1}$ pentru $n \geq m$, putem lua $\alpha(m) = \frac{1}{m+1}$

și vom pune condiția ca $\frac{\alpha(m)}{1-\alpha(m)} u_m = \frac{1}{m!m^2} < 10^{-3}$, de unde rezultă $m \geq 5$. Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{5!5} \approx 1,3176.$$

b) Presupunem că există $m \in \mathbb{N}^*$ și $0 < \alpha(m) < 1$ astfel încât

$$\sqrt[n]{u_n} \leq \alpha(m) < 1, \quad \forall n \geq m. \quad (1.34)$$

Atunci avem

$$r_m \leq \frac{\alpha^{m+1}(m)}{1-\alpha(m)}. \quad (1.35)$$

Într-adevăr, din (1.34) rezultă

$$r_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots \leq \alpha^{m+1}(m) + \alpha^{m+2}(m) + \dots = \frac{\alpha^{m+1}(m)}{1-\alpha(m)}.$$

Exemplu. Să se calculeze cu două zecimale exacte suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Deoarece $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$ pentru $n \geq m$, putem lua $\alpha = \alpha(m) = \frac{1}{m}$ și punem condiția

$$\frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} = \frac{1}{m^m(m-1)} < 10^{-2},$$

de unde rezultă $m \geq 4$. Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} \approx 1,290.$$

2. Cazul seriilor alternate

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ o serie alternată care îndeplinește condițiile din criteriul

lui Leibniz ($u_n \searrow 0$). Vom arăta că eroarea absolută $|r_n| = |s - s_n| < u_{n+1}$.

Într-adevăr, deoarece $\{u_n\}$ este descrescător, rezultă:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= s_{2n-2} + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq s_{2n-2} \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} - (u_{2n} - u_{2n+1}) \leq s_{2n-1}. \end{aligned}$$

Dacă notăm cu s suma seriei, atunci: $s_{2n} \square s$ iar $s_{2n-1} \square s$ și deci avem următoarea situație

$$s_2 < s_4 < \dots < s_{2n} < \dots < s < \dots < s_{2n+1} < \dots < s_3 < s_1,$$

de unde rezultă:

$$0 < s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1} \quad \text{și} \quad 0 < s_{2n+1} - s < s_{2n+1} - s_{2n+2} = u_{2n+2}.$$

Prin urmare, dacă aproximăm suma seriei cu o sumă parțială s_n , eroarea care se face este mai mică decât primul termen neglijat. Eroarea este prin lipsă dacă n este par și prin adaus dacă n este impar.

Exemplu: Să se calculeze cu patru zecimale exacte suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}.$$

Conform celor de mai sus vom pune condiția ca $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < 10^{-4}$,

de unde rezultă $n \geq 5$. Vom aproxima deci suma seriei cu

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \approx 0,78345.$$

1.8. Serii absolut convergente

Definiția 1.8.1. O serie cu termeni oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se numește **absolut**

convergentă, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă.

Teorema 1.8.1. Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Demonstrație

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie absolut convergentă. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă, din criteriul general de convergență al lui Cauchy rezultă că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă în virtutea aceluiași criteriu.

Observația 1.8.1. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente.

Exemplu. Seria armonică alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Definiția 1.8.2. O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește **semiconvergentă** (sau **condiționat convergentă**). Rezultă că seria armonică alternată este semiconvergentă.

Una din proprietățile cele mai importante ale unei sume finite de numere reale este proprietatea de comutativitate, care constă în faptul că suma nu se schimbă dacă schimbăm ordinea termenilor. Se pune în mod natural problema dacă proprietatea aceasta se păstrează și în cazul seriilor convergente. Răspunsul este în general negativ.

Exemplu: Fie seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots \quad (1.36)$$

Așa cum am văzut, suma acestei serii este $s = \ln 2$. Dacă notăm cu $\{s_n\}$ șirul sumelor sale parțiale rezultă $\ln 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Considerăm acum seria următoare:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \dots \quad (1.37)$$

(obținută din seria armonică alternată prin schimbarea ordinii termenilor). Dacă notăm $\{\sigma_n\}$ șirul sumelor parțiale ale acestei serii, rezultă:

$$\begin{aligned} \sigma_{3n} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} s_{2n}. \end{aligned}$$

Așadar avem: $\sigma_{3n} = \frac{1}{2} s_{2n}$. Evident, avem și relațiile:

$$\begin{aligned} \sigma_{3n-1} &= \frac{1}{2} s_{2n} + \frac{1}{4n} \\ \sigma_{3n-2} &= \sigma_{3n-1} + \frac{1}{4n-2}. \end{aligned}$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \ln 2$ rezultă că $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2} \ln 2$. Prin urmare seria (1.37), obținută din seria (1.36) printr-o schimbare a ordinii termenilor este convergentă și are suma $\frac{1}{2} \ln 2$.

Am arătat astfel că schimbând ordinea termenilor într-o serie semiconvergentă suma sa se schimbă. Prezentăm în continuare, fără demonstrație, următorul rezultat datorat lui B. Riemann.

Teorema 1.8.2. *Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât noua serie să aibă suma egală cu un număr dat dinainte sau astfel încât seria să devină divergentă.*

Din Teorema 1.8.2 rezultă că într-o serie semiconvergentă nu este permisă schimbarea ordinii termenilor.

Definiția 1.8.3. *O serie convergentă care are proprietatea de comutativitate (adică suma sa nu se schimbă dacă se schimbă ordinea termenilor) se numește **necondiționat convergentă**.*

Teorema 1.8.3. (Cauchy). *Orice serie absolut convergentă este necondiționat convergentă.*

Demonstrație

Considerăm seria absolut convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și notăm cu s suma sa.

Notăm cu σ suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Etapa I. Vom arăta că într-o serie absolut convergentă seriile formate cu termenii pozitivi, respectiv negativi sunt convergente și că suma seriei este egală cu diferența sumelor acestor serii.

Fie $\{s_n\}$ șirul numerelor parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și fie $\{\sigma_n\}$ șirul sumelor

parțiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Dacă notăm cu a_n suma termenilor pozitivi din s_n și cu $-b_n$ suma termenilor negativi din s_n rezultă: $s_n = a_n - b_n$, $\sigma_n = a_n + b_n$ și mai departe

$$a_n = \frac{1}{2}(\sigma_n + s_n), \quad b_n = \frac{1}{2}(\sigma_n - s_n).$$

Așadar, avem:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}(\sigma + s); \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}(\sigma - s) \quad \text{și} \quad s = a - b.$$

Etapa II. Vom arăta că o serie cu termeni pozitivi convergentă este necondiționat convergentă.

Presupunem deci că $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$ obținută din seria

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ prin schimbarea ordinii termenilor. Evident $\tilde{u}_n = u_{k_n}, k_n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece

$\tilde{s}_n = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \dots + \tilde{u}_n < s$ rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$ este convergentă și suma sa $\tilde{s} \leq s$.

Pe de altă parte, putem presupune că seria inițială $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este obținută din

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$ prin schimbarea ordinii termenilor, de unde rezultă $s \leq \tilde{s}$, deci $s = \tilde{s}$.

Etapa III. Vom arăta că orice serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absolut convergentă este

necondiționat convergentă. Dacă notăm cu $\{u'_n\}$ termenii negativi și cu $\{u''_n\}$ termenii negativi, atunci din prima parte a demonstrației rezultă:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} u''_n \quad \text{și} \quad s = a - b.$$

Orice schimbare a ordinii termenilor în seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ revine la schimbarea ordinii termenilor în seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$, respectiv $\sum_{n=1}^{\infty} u''_n$. Cum sumele acestor serii nu se schimbă dacă se schimbă ordinea termenilor (așa cum s-a demonstrat în etapa II) rezultă că $\tilde{s} = a - b = s$, și cu aceasta teorema este demonstrată.

1.9. Operații cu serii convergente

Teorema 1.9.1. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt convergente și au sumele U , respectiv V atunci $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Y}$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ este convergentă și are suma egală cu $\alpha U + \beta V$.

Demonstrație

Afirmația rezultă imediat din următoarea egalitate:

$$\sum_{k=1}^n (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=1}^n u_k + \beta \sum_{k=1}^n v_k.$$

Prin produsul a două serii $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ se înțelege orice serie de forma

$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ unde $w_n = u_k v_l$, $k, l \in \mathbb{N}^*$. Există deci o infinitate de posibilități pentru a înmulți două serii. Dintre acestea, două tipuri de serie produs sunt mai des utilizate și anume:

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots \quad (1.38)$$

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_n + \dots + u_n v_n + u_n v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots \quad (1.39)$$

Produsul a două serii convergente nu este în general o serie convergentă.

Teorema 1.9.2. Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt absolut convergente și au sumele U , respectiv V , atunci orice serie produs este absolut convergentă și are suma egală cu UV .

Demonstrație

Fie $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$ o serie produs oarecare. Deoarece

$$|u_{i_1} v_{j_1}| + |u_{i_2} v_{j_2}| + \dots + |u_{i_n} v_{j_n}| \leq (|u_1| + \dots + |u_m|)(|v_1| + \dots + |v_m|)$$

unde $m = \max\{i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n\}$ și seriile $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ sunt convergente,

rezultă că seria $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$ este absolut convergentă și deci convergentă.

Deoarece seriile absolut convergente sunt necondiționat convergente, rezultă că suma seriei $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$ este egală cu suma seriei produs de tipul (1.39).

Se observă însă imediat că suma parțială p_n a seriei produs de tipul (1.39) este egală cu:

$$p_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n)(v_1 + v_2 + \dots + v_n).$$

Rezultă că suma oricărei serii produs va fi egală cu $\lim p_n = UV$ și cu aceasta teorema este demonstrată.

2. || Şiruri și serii de funcții reale

2.1. Convergență simplă (punctuală) și convergență uniformă

Fie $E \subset Y$ și $\{f_n\}$ un șir de funcții definite pe E cu valori în Y . Fie de asemenea $f: E \rightarrow Y$.

Definiția 2.1.1. Spunem că șirul de funcții $\{f_n\}$ converge simplu (punctual) pe mulțimea E la funcția f , dacă $\forall x \in E$, șirul de numere reale $\{f_n(x)\}$ converge la $f(x)$. Folosim notația $f_n \xrightarrow[E]{} f$. Evident, când se schimbă x , se schimbă și șirul $\{f_n(x)\}$. Rezultă că $f_n \xrightarrow[E]{} f$ dacă $\forall x \in E$ și $\forall \varepsilon > 0$, \exists un rang $n(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n(x, \varepsilon).$$

Exemplul 1. Fie $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Dacă notăm cu

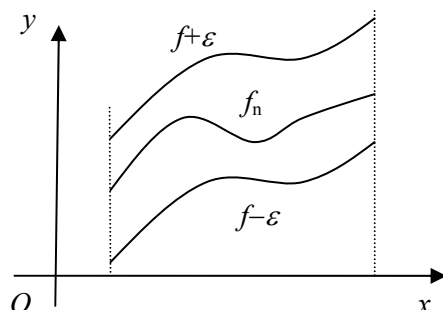
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{pentru } x = 1 \end{cases}, \quad \text{atunci } f_n \xrightarrow[0,1]{} f.$$

Definiția 2.1.2. Spunem că șirul de funcții $\{f_n\}$ converge uniform pe mulțimea E la funcția f , dacă $\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall x \in E. \quad (2.1)$$

Vom folosi notația $f_n \xrightarrow[E]{} f$.

Interpretarea geometrică a convergenței uniforme este următoarea: pentru $\forall \varepsilon > 0$, \exists un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$, graficul funcției f_n este cuprins între graficele funcțiilor $f - \varepsilon$ și $f + \varepsilon$.



Observația 2.1.1. În definiția convergenței uniforme este important faptul că rangul n_ε , începând de la care are loc inegalitatea (1), depinde numai de ε și nu depinde de x . Dacă presupunem că funcțiile f și f_n , $n \in \mathbb{N}^*$ sunt mărginite pe mulțimea E , atunci

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \text{ dacă și numai dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0,$$

unde $\rho_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in E\}$.

Într-adevăr, afirmația rezultă imediat dacă observăm că inegalitatea

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall x \in E$$

este echivalentă cu inegalitatea

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in E\} < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Observația 2.1.2. Este evident faptul că dacă un șir de funcții este uniform convergent pe o mulțime E , el este simplu convergent pe orice submulțime $A \subset E$. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată.

Într-adevăr, să considerăm din nou șirul de funcții $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ și funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Am văzut că $f_n \xrightarrow[0,1]{} f$.

Pe de altă parte se observă cu ușurință că

$$\rho_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in [0, 1]\} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că $\rho_n \rightarrow 1 \neq 0$, deci, în virtutea Observației 2.1.2, șirul de funcții $\{f_n\}$ nu converge uniform la f pe mulțimea $[0, 1]$.

Teorema 2.1.1. *Condiția necesară și suficientă ca un șir de funcții $\{f_n\}$ să convergă uniform pe mulțimea E la funcția f este ca pentru $\forall \varepsilon > 0$ să $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pentru $\forall x \in E, \forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstrație

Necesitatea. Dacă $f_n \xrightarrow[E]{u} f$, atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in E$. Dacă $p \in \mathbb{N}^*$, atunci cu atât mai mult rezultă:

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_\varepsilon \text{ și } \forall x \in E.$$

În continuare avem:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in E$.

Suficiența. Din ipoteză rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall x \in E, \quad (2.2)$$

Din (2.2) rezultă că pentru orice $x \in E$ fixat, șirul de numere reale $\{f_n(x)\}$ este fundamental și deci convergent, în virtutea criteriului general de convergență al lui Cauchy. Dacă notăm cu $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ și trecem la limită după p în inegalitatea (2.2) obținem:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall x \in E, \text{ deci } f_n \xrightarrow[E]{u} f.$$

Următoarea propoziție stabilește o condiție suficientă ca un șir de funcții să convergă uniform.

Propoziția 2.1.1. *Dacă există un șir de numere pozitive $\{a_n\}$ cu proprietatea $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ și un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât:*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \forall n \geq n_0 \text{ și } \forall x \in E, \quad (2.3)$$

atunci $f_n \xrightarrow[E]{u} f$.

Demonstrație

Din (3) rezultă $\rho_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|; x \in E\} \leq a_n, \forall n \geq n_0$.

Cum $a_n \rightarrow 0$ rezultă $\rho_n \rightarrow 0$, deci $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ în virtutea Observației 2.1.1.

Exemplu. Fie $f_n(x) = \frac{2n + \sin nx}{n}$, $x \in \Upsilon$ și fie $f(x) = 2$, $x \in \Upsilon$. Observăm că $\forall x \in \Upsilon$ avem:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Rezultă $f_n \xrightarrow[E]{u} f$.

În continuare, vom examina în ce condiții o anumită proprietate comună (continuitate, derivabilitate etc.) a termenilor unui șir de funcții se transmite și limitei acestui șir. Observăm că, de regulă, convergența simplă este insuficientă pentru realizarea acestui transfer.

Într-adevăr, reluând exemplul 1, constatăm că deși funcțiile f_n sunt continue pe $[0, 1]$, limita șirului nu este continuă în punctul $x = 1$.

Teorema 2.1.2. *Dacă șirul de funcții $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ și f_n este continuă pe E pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci f este continuă pe E .*

Demonstrație

Fie $a \in E$ oarecare fixat. Pentru $\forall x \in E$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \quad (2.4)$$

Deoarece $f_n \xrightarrow[E]{u} f$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall t \in E$. Pe de altă parte, deoarece f_n este continuă în $x = a$ rezultă că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, astfel încât $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall x \in E$ cu proprietatea $|x - a| < \delta_\varepsilon$.

Dacă în inegalitatea (2.4) presupunem $n \geq n_\varepsilon$ și $|x - a| < \delta_\varepsilon$, rezultă $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, deci f este continuă în $x = a$.

Observația 2.1.3. Dacă presupunem că $x = a$ este punct de acumulare al mulțimii E , atunci din Teorema 2.1.2 rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right].$$

Într-adevăr, continuitatea lui f (respectiv f_n) în punctul $x = a$ revine la:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, respectiv $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a)$.

Așadar avem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right].$$

Teorema 2.1.3. Dacă $f_n \xrightarrow[u]{[a,b]} f$ și f_n este continuă pe $[a, b]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$.

Demonstrație

Din Teorema 2.1.2 rezultă că f este continuă pe $[a, b]$, deci că f este integrabilă pe $[a, b]$. În continuare avem:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \rho_n \int_a^b dx = (b-a)\rho_n. \end{aligned}$$

Cum $\rho_n \rightarrow 0$, rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.5)$$

Teorema 2.1.4. Fie $\{f_n\}$ un șir de funcții derivabile pe intervalul (a, b) , cu proprietatea că șirul derivatelor $\{f'_n\}$ este uniform convergent pe (a, b) . Dacă șirul însuși $\{f_n\}$ converge cel puțin într-un punct $x_0 \in (a, b)$, atunci $\{f_n\}$ converge uniform pe (a, b) la o funcție f , care este derivabilă pe (a, b) și $\forall x \in (a, b)$ avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'(x).$$

Demonstrație

Pentru orice $x \in E$, $\forall n$ și $p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned} f_{n+p}(x) - f_n(x) &= f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_0) + f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) = \\ &= (f_{n+p} - f_n)(x) - (f_{n+p} - f_n)(x_0) + f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0). \end{aligned}$$

Din Teorema Lagrange rezultă că $\exists c$ între x_0 și x astfel încât:

$$(f_{n+p} - f_n)(x) - (f_{n+p} - f_n)(x_0) = (f'_{n+p} - f'_n)(c)(x - x_0).$$

Prin urmare avem:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f'_{n+p}(c) - f'_n(c)| |x - x_0| + |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)|. \quad (2.6)$$

Deoarece $\{f'_n\}$ este uniform convergent pe $[a, b]$ rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|f'_{n+p}(t) - f'_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \forall n \geq n'_\varepsilon, \forall t \in [a, b].$$

Pe de altă parte $\{f_n(x_0)\}$ este convergent, deci $\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n''_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$.

Dacă în inegalitatea (2.6) considerăm $n \geq n_\varepsilon$ și $p \in \mathbb{N}^*$ rezultă

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in (a, b).$$

Din Teorema 2.1.1 rezultă că șirul $\{f_n\}$ este uniform convergent pe (a, b) .

Fie $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ și $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$. Rămâne să arătăm că f este derivabilă în orice punct $x \in [a, b]$ și $f'(x) = g(x)$. Pentru aceasta să observăm că $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$ și $\forall h \in \mathbb{R}$ astfel încât $x+h \in (a, b)$ avem

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)}{h} - g(x) &= \frac{(f_{n+p} - f_n)(x+h) - (f_{n+p} - f_n)(x)}{h} + \\ &+ \left[\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right] + [f'_n(x) - g(x)]. \end{aligned}$$

Aplicând din nou Teorema Lagrange rezultă că $\exists c_1$ între x și $x+h$ astfel încât

$$(f_{n+p} - f_n)(x+h) - (f_{n+p} - f_n)(x) = (f'_{n+p} - f'_n)(c_1)h.$$

Așadar, $\forall x \in E$ și $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)}{h} - g(x) \right| &\leq |f'_{n+p}(c_1) - f'_n(c_1)| + \\ &+ \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right| + |f'_n(x) - g(x)|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Deoarece $f'_{n+p} \xrightarrow{(a,b)} g$, rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|f'_{n+p}(c_1) - f'_n(c_1)\right| + \left|f'_n(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq \tilde{n}_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \square^*.$$

Pe de altă parte, deoarece

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = f'_n(x),$$

rezultă că $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in E, \forall h \in Y \text{ cu } x+h \in E \text{ și } |h| < \delta_\varepsilon.$$

Dacă în inegalitatea (2.7) presupunem $n \geq \tilde{n}_\varepsilon$, $p \in \square^*$ și $|h| < \delta_\varepsilon$, rezultă:

$$\left|\frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)}{h} - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (2.8)$$

Trecând la limită după p în inegalitatea (2.8) obținem:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in E, \forall h \in Y \text{ cu } x+h \in E \text{ și } |h| < \delta_\varepsilon,$$

de unde rezultă că

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x)$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

Definiția 2.1.3. Fie $\{u_n\}_{n \geq 1}$ un șir de funcții reale definite pe mulțimea $E \subset Y$

și fie $\{u_n\}_{n \geq 1}$ șirul sumelor parțiale asociat $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Perechea $(\{u_n\}, \{s_n\})$ se

numește serie de funcții și se notează cu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Seria se numește simplu convergentă (uniform convergentă) pe mulțimea $E_0 \subset E$ dacă șirul sumelor parțiale $\{s_n\}_{n \geq 1}$ este simplu convergent (uniform convergent) pe E_0 .

Cea mai mare submulțime $A \subset E$ pe care seria este simplu convergentă se numește mulțimea de convergență a seriei. Deci

$$A = \left\{ x_0 \in E; \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ este convergentă} \right\}.$$

Funcția $s : A \rightarrow Y$ definită prin

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \forall x \in A$$

se numește suma seriei și se scrie

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \dots + u_n + \dots$$

Teorema 2.1.5. (Cauchy). *Condiția necesară și suficientă ca seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ să fie uniform convergentă pe mulțimea E este ca pentru $\forall \varepsilon > 0$ să $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât*

$$\left| u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall x \in E.$$

Demonstrație

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe E dacă și numai dacă $\{s_n\}$ este

uniform convergentă pe E , deci dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left| s_{n+p}(x) - s_n(x) \right| = \left| u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon,$$

$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in E$ (Vezi Teorema 2.1.1).

Definiția 2.1.4. *Un șir de funcții $\{f_n\}$ definite pe mulțimea $E \in \mathcal{Y}$ se numește **uniform mărginită** pe E dacă $\exists M > 0$ astfel încât $|f_n(x)| \leq M, \forall x \in E$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Teorema 2.1.6. (Abel-Dirichlet). *Fie $\{a_n\}_{n \geq 1}$ un șir de funcții pe E , monoton descrescător pentru orice $x \in E$ fixat și cu proprietatea $a_n \xrightarrow[E]{u} 0$.*

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ o serie de funcții pe E cu proprietatea că șirul sumelor parțiale $\{s_n\}$

este uniform mărginit pe E . Atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ este uniform convergentă pe E .

Demonstrația rezultă din Teorema 2.1.5 și practic coincide cu demonstrația Teoremei 1.6.1.

Exemplul 2. Să se studieze convergența uniformă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Fie $a_n(x) = \frac{1}{n+x}$ și $v_n(x) = (-1)^n, x \in (0, \infty)$.

Deoarece

$$0 < \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}, \forall x > 0 \text{ și } \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ rezultă } a_n \xrightarrow{(0, \infty)} 0.$$

Pe de altă parte este evident că $\{a_n(x)\}$ este descrescător pentru orice x fixat. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este o serie numerică în acest caz și are șirul sumelor parțiale

mărginit ($|s_n| \leq 1, \forall n$). Din Teorema 2.1.6 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ este uniform convergentă pe $(0, \infty)$.

Există și următoarea variantă a criteriului Abel-Dirichlet de convergență uniformă pentru serii.

Teorema 2.1.6'. Fie $\{a_n\}$ un șir de funcții pe E , monoton descrescător pentru orice x fixat și uniform mărginit pe E . Dacă seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este uniform convergentă pe E , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ este uniform convergentă pe E .

Demonstrație

Dacă notăm cu $\sigma_k = v_{n+1} + \dots + v_{n+k}$, atunci avem:

$$\begin{aligned} a_{n+1}v_{n+1} + \dots + a_{n+p}v_{n+p} &= a_{n+1}\sigma_1 + a_{n+2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \dots + a_{n+p}(\sigma_p - \sigma_{p-1}) = \\ &= (a_{n+1} - a_{n+2})\sigma_1 + (a_{n+2} - a_{n+3})\sigma_2 + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})\sigma_{p-1} + a_{n+p}\sigma_p = \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1})\sigma_k + a_{n+p}\sigma_p. \end{aligned}$$

Prin ipoteză $\exists M > 0$ astfel încât $|a_k(x)| \leq M, \forall x \in E$ și $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este uniform convergentă pe E , din Teorema 2.1.5 rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|\sigma_k(x)| < \varepsilon$, pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall k$ natural. Fie $n \geq n_\varepsilon$ și $p \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Atunci

$$\left| a_{n+1}(x)v_{n+1}(x) + \dots + a_{n+p}(x)v_{n+p}(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n [a_{n+k}(x) - a_{n+k+1}(x)]\sigma_k \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left| a_{n+p}(x) \sigma_p(x) \right| < \varepsilon \sum_{k=1}^n [a_{n+k}(x) - a_{n+k+1}(x)] + \varepsilon |a_{n+p}(x)| = \\
& = \varepsilon [a_{n+1}(x) - a_{n+p}(x)] + \varepsilon |a_{n+p}(x)| \leq 3\varepsilon M, \forall x \in E.
\end{aligned}$$

Aplicând din nou Teorema 2.1.5 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ este uniform convergentă pe E .

Teorema 2.1.7. (Weierstrass). *Dacă există o serie numerică cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergentă și un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|u_n(x)| \leq c_n, \forall x \in E$ și $\forall n \geq n_0$, atunci seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe E .*

Demonstrație

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă, rezultă că $\forall \varepsilon > 0 \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon, \forall n \geq n'_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Fie $n_\varepsilon = \max(n_0, n'_\varepsilon), n \geq n_\varepsilon$ și $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci avem

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \leq c_{n+1} + \dots + c_{n+p} < \varepsilon,$$

$\forall x \in E$. Afirmatia rezultă acum din Teorema 2.1.3.

Exemplul 3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2}$ este uniform convergentă pe Y deoarece avem:

$$\left| \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in Y, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Pentru un număr finit de funcții sunt cunoscute proprietățile: a) dacă funcțiile sunt continue, atunci și suma lor este continuă; b) integrala sumei este suma integralelor; c) derivata sumei este suma derivatelor. Teoremele care urmează stabilesc în ce condiții aceste proprietăți se păstrează pentru o infinitate de funcții.

Demonstrațiile lor decurg din rezultatele corespunzătoare pentru șirurile de funcții (Teoremele 2.1.2; 2.1.3; 2.1.4) și Definiția 2.1.3.

Teorema 2.1.8. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe E , având suma s și dacă funcțiile u_n sunt continue pe E , atunci și funcția s este continuă pe E .

Teorema 2.1.9. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe intervalul $[a, b]$, având suma s și dacă funcțiile u_n sunt continue pe E , atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \right] dx.$$

Teorema 2.1.9 stabilește că seriile uniform convergente pot fi integrate termen cu termen.

Teorema 2.1.10. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă cel puțin într-un punct $x_0 \in (a, b)$ și dacă funcțiile u_n sunt derivabile pe (a, b) , astfel încât seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ este uniform convergentă pe (a, b) , având suma t , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe (a, b) , suma sa s este derivabilă și $s'(x) = t(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

Teorema 2.1.10 stabilește condiții suficiente ca o serie de funcții să se poată deriva termen cu termen. Relația $s'(x) = t(x)$ se poate scrie mai sugestiv astfel:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Exemplu: Funcția $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, $x \in \mathbb{Y}$ este derivabilă pe \mathbb{Y} .

Într-adevăr, seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ este uniform convergentă pe \mathbb{Y} ,

deoarece $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ (Teorema 2.1.7).

Seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ este de asemenea uniform convergentă pe Y , deoarece $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Din Teorema 2.1.10 rezultă că f este derivabilă pe Y și $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

2.2. Formula Taylor

Formula Taylor este una din formulele de bază din analiza matematică, care are numeroase aplicații, legate în principal de aproximarea funcțiilor cu ajutorul polinoamelor.

Teorema 2.2.1. (Taylor). Fie $I \subset Y$ un interval, $a \in I$ un punct interior și $f: I \rightarrow Y$ o funcție de $n+1$ ori derivabilă pe I . Fie $x \in I$ și $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci există ξ între a și x astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \quad (2.9)$$

unde

$$R_n(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi). \quad (2.10)$$

Formula (2.9) se numește formula Taylor de ordinul n în $x = a$, iar funcția R_n se numește restul formulei Taylor de ordinul n . Forma restului dată în (2.10) se numește formula Schömlich-Roche.

Demonstrație

Notăm cu T_n polinomul Taylor de ordinul n , care se definește astfel:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in I. \quad (2.11)$$

Cu R_n notăm diferența:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \forall x \in I. \quad (2.12)$$

Din (2.12) rezultă

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad (2.13)$$

adică exact formula (2.9).

Prin urmare rămâne să arătăm că restul R_n are forma dată în (2.10).

Fie $x \in I$ oarecare fixat, $x > a$ și fie

$$Q(x) = \frac{R_n(x)}{(x-a)^p}. \quad (2.14)$$

Cu această notație formula (2.13) devine

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^p Q(x). \quad (2.15)$$

Pentru a determina funcția Q considerăm următoarea funcție auxiliară

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + (x-t)^p Q(x). \quad (2.16)$$

Observăm că funcția φ este continuă pe $[a, x]$, derivabilă pe (a, x) și $\varphi(a) = \varphi(x) = f(x)$. Din Teorema Rolle rezultă că $\exists \xi \in (a, x)$, astfel încât

$$\varphi'(\xi) = 0. \quad (2.17)$$

Derivând (2.16) obținem:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \\ &\quad - p(x-t)^{p-1} Q(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - p(x-t)^{p-1} Q(x). \end{aligned}$$

Ținând seama de (2.17) rezultă:

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^n}{(x-\xi)^{p-1}} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}. \quad (2.18)$$

În sfârșit, din (2.14) și (2.18) obținem:

$$R_n(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$$

și cu aceasta teorema este demonstrată.

Observația 2.2.1. Dacă f este un polinom de gradul n , atunci restul $R_n(x) = 0$, $\forall x \in I$ și formula Taylor devine:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n. \end{aligned}$$

Astfel, în cazul unui polinom, formula Taylor revine la reprezentarea acestuia ca polinom în puterile lui $x-a$.

Din forma generală (2.10) a restului Taylor dată de Schömling-Roche, se obțin două forme particulare importante prin particularizarea lui p .

Pentru $p = 1$, expresia (2.10) devine:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.19)$$

care se numește restul Taylor de ordinul n sub forma Cauchy.

Pentru $p = n + 1$, expresia (2.10) devine

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.20)$$

care se numește restul Taylor de ordinul n sub forma Lagrange.

Deoarece ξ se află între a și x , există $0 < \theta < 1$ astfel încât $\xi - a = \theta(x - a)$.

Dacă notăm cu $h = x - a$, rezultă $x = a + h$, $\xi = a + \theta h$, $x - \xi = (1 - \theta)h$ și formula Taylor se scrie:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \quad (2.21)$$

unde restul are una din formulele

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad (\text{Schömlich-Roche}) \quad (2.10')$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad (\text{Cauchy}) \quad (2.19')$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \quad (\text{Lagrange}) \quad (2.20')$$

Deoarece formulele Cauchy (2.19) și Lagrange (2.20) ale restului R_n corespund la valori diferite ale lui p și deoarece θ depinde în general de p , rezultă că valorile lui θ în (2.19') și (2.20') sunt în general diferite.

Dacă $a = 0 \in I$, formula (2.21) se numește formula Mac Laurin. Așadar, formula Mac Laurin cu restul Cauchy este:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad (2.22)$$

iar, formula Mac Laurin cu restul Lagrange este:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x). \quad (2.23)$$

Definiția 2.2.1. O funcție f definită pe o vecinătate a punctului $x = a$ se numește infinit mică în $x = a$ dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Fie f și g două funcții infinit mici

în $x = a$. Spunem că f este infinit mică de ordin mai mare ca g și notăm $f = o(g)$

dacă $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Din formula (2.20) rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) f^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

deci

$$R_n(x) = o\left[(x-a)^n\right]. \quad (2.24)$$

Ultima egalitate se numește restul formulei Taylor în forma lui Peano.

În continuare vom scrie formula Mac Laurin pentru câteva funcții uzuale:

1. Pentru funcția $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{Y}$, avem

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ și } f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ deci}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. Pentru funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{Y}$, avem:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \text{ deci}$$

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{dacă } n = 4k+1 \text{ sau } 4k+3. \end{cases}$$

Așadar avem:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

3. Pentru funcția $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{Y}$ avem

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ și } f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 2k+1 \\ (-1)^k & \text{dacă } n = 4k. \end{cases}$$

Formula Mac Laurin este în acest caz:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

4. Pentru funcția $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Formula Mac Laurin va fi:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

5. Pentru funcția $f(x) = (1+x)^\alpha$ avem:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad \text{și}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

Formula Mac Laurin este

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

În cazul particular când $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) = 0$ (pentru că $f^{(n+1)}(x) = 0$) și formula Mac Laurin coincide în acest caz cu formula binomului lui Newton.

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!}x^n = \\ &= 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \end{aligned}$$

Formula Taylor (Mac Laurin) este utilă în calculul unor limite de funcții.

Exemplu. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$. Aplicând formulele stabilite anterior obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^3 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

(unde $\alpha(x) = \frac{o(x^4)}{x^4} \rightarrow 0$ când $x \rightarrow 0$).

În continuare vom prezenta două aplicații interesante ale formulei Taylor în studiul funcțiilor reale.

Fie $I \subset \mathbb{Y}$ un interval deschis, $a \in I$ și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se știe că o condiție necesară ca punctul $x = a$ să fie punct de extrem pentru f este ca $f'(a) = 0$ (în ipoteza că f este derivabilă în $x = a$).

Următoarea teoremă stabilește condiții suficiente pentru existența punctelor de extrem.

Teorema 2.2.2. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că are derivate continue pe I până la ordinul n inclusiv și $a \in I$ un punct interior astfel încât:

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Dacă n este par, atunci $x = a$ este punct de extrem pentru f și anume, de maxim dacă $f^{(n)}(a) < 0$, respectiv de minim dacă $f^{(n)}(a) > 0$.

Dacă n este impar $x = a$ nu este punct de extrem.

Demonstrație

Din formula Taylor cu restul lui Lagrange rezultă

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \forall x \in I,$$

unde ξ se află între a și x .

Să presupunem n par și $f^{(n)}(a) < 0$. Deoarece $f^{(n)}$ este o funcție continuă în $x = a$, rezultă că există un interval deschis J astfel încât $a \in J \subset I$ și $f^{(n)}(t) < 0, \forall t \in J, x \in J$ avem:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \leq 0,$$

de unde rezultă că

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in J,$$

deci $x = a$ este punct de maxim local pentru f . Analog se arată că dacă $f^{(n)}(a) > 0$, atunci $x = a$ este punct de minim local pentru f .

Dacă n este impar, atunci diferența $f(x) - f(a)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a punctului $x = a$, deci $x = a$ nu este punct de extrem local pentru f .

Corolarul 2.2.1. Dacă $f'(a) = 0$ și $f''(a) \neq 0$, atunci $x = a$ este punct de minim dacă $f''(a) > 0$, respectiv punct de maxim dacă $f''(a) < 0$.

Dacă $f'(a) = f''(a) = 0$ și $f'''(a) \neq 0$, atunci $x = a$ nu este punct de extrem pentru f (este punct de inflexiune).

Definiția 2.2.2. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește de clasă C^p pe I , dacă f are derivate continue pe I până la ordinul p inclusiv. Se folosește notația $f \in C^p(I)$.

Definiția 2.2.3. O funcție $f \in C^2(I)$ se numește convexă (concavă) pe I , dacă $\forall a, x \in I$ avem

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad [f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)]$$

Din punct de vedere geometric funcția este convexă (concavă) dacă graficul său este situat deasupra (dedesubtul) tangentei în orice punct al său.

Propoziția 2.2.1. Dacă $f \in C^2(I)$ și $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) pentru orice $x \in I$, atunci f este convexă (concavă) pe intervalul I .

Demonstrație

Fie $a, x \in I$. Din formula Taylor pentru $n = 1$ rezultă:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,$$

unde ξ se află între a și x .

Dacă $f'' > 0$ pe I rezultă

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2 \geq 0, \quad \forall x \in I,$$

deci f este convexă pe intervalul I . Analog, dacă $f'' < 0$ pe I rezultă

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a), \quad \forall x \in I,$$

deci f este concavă pe I .

2.3. Serii Taylor și Mac Laurin

Definiția 2.3.1. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe I și $a \in I$ un punct interior. Seria de funcții

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (2.25)$$

se numește seria Taylor atașată funcției f în $x = a$. Dacă notăm cu A mulțimea de convergență a seriei (2.25) (Vezi Definiția 2.1.3.) atunci observăm că $a \in A$, deci $A \neq \emptyset$.

Spunem că funcția f se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului $x = a$ pe mulțimea $B \subset I \cap A$, dacă $\forall x \in B$ avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (2.26)$$

În cazul particular $a = 0 \in I$, seria (2.25) devine

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

și se numește seria Mac Laurin.

Observația 2.3.1. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe I și $a \in I$. În general nu este adevărat că funcția f se poate dezvolta în serie Taylor în jurul punctului $x = a$ pe mulțimea $A \cap I$ așa cum rezultă din următorul exemplu datorat lui Cauchy.

Exemplu.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Vom arăta că f este indefinit derivabilă pe Y și $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Într-adevăr, dacă $x \neq 0$, atunci $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Cum f este continuă în $x = 0$, avem:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{6}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{x^2}} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{x^2}} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{e^{x^2}}} = 0. \end{aligned}$$

În general avem: $f^{(n)}(0) = \frac{P(x)}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$ dacă $x \neq 0$, unde P este polinom. Aplicând de un număr suficient de mare regula L'Hospital rezultă:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = P(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = P(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^k}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = 0.$$

Seria Mac Laurin atașată lui f este convergentă pe Y și are suma $s(x) = 0, \forall x \in Y$.

Rezultă că $f(x) \neq s(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci f nu se dezvoltă în serie Mac Laurin pe nici o mulțime $B \subset Y, B \neq \{0\}$.

Teorema 2.3.1. *Condiția necesară și suficientă ca funcția f să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului $x = a$ pe mulțimea $B \subset I \cap A$ este ca*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in B.$$

Demonstrație

Observăm că polinomul Taylor de ordinul n atașat funcției f în punctul $x = a$ este exact suma parțială de ordinul n a seriei Taylor atașat lui f în $x = a$. Dacă notăm cu s suma seriei (2.26) atunci

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x), \quad \forall x \in A. \quad (2.27)$$

Pe de altă parte, din formula Taylor avem:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \forall x \in I. \quad (2.28)$$

Faptul că f se dezvoltă în serie Taylor pe mulțimea $B \subset A \cap I$ revine la a spune că $f(x) = s(x)$, $\forall x \in B$. Din (2.27) și (2.28) rezultă că $f(x) = s(x)$, $\forall x \in B$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in B$.

Corolarul 2.3.1. *Dacă există $M > 0$ astfel încât*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall x \in B \subset A \cap I,$$

atunci f se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului $x = a$ pe mulțimea B .

Demonstrație

Pentru orice $x \in B$ fixat, avem:

$$|R_n(x)| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = u_n. \quad (2.29)$$

Observăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, deoarece u_n este termenul general al unei serii cu termeni pozitivi convergente, așa cum rezultă imediat din criteriul raportului

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-a|}{n+2} = 0 < 1 \right).$$

Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in B$ și afirmația din Corolar rezultă acum din Teorema 2.3.1.

Exemple

1. Funcția $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{Y}$ se dezvoltă în serie Taylor pe \mathbb{Y} în jurul oricărui punct. Într-adevăr, pentru orice $r > 0$, avem:

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^r = M, \forall x \in [-r, r].$$

Din Corolarul 2.3.1 rezultă că funcția $f(x) = e^x$ se dezvoltă în serie Taylor pe intervalul $[-r, r]$ în jurul oricărui punct $a \in (-r, r)$. Cum $r > 0$ a fost arbitrar, rezultă că dezvoltarea are loc pe \mathbb{Y} . Dezvoltarea sa în serie Mac Laurin este:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{Y}.$$

2. Funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{Y}$ se dezvoltă în serie Taylor pe \mathbb{Y} în jurul oricărui punct.

Într-adevăr, $|f^{(n)}(x)| = \left| \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 1 = M, \forall x \in \mathbb{Y}$. Dezvoltarea în serie

Mac Laurin este:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{Y}.$$

3. Funcția $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{Y}$ se dezvoltă în serie Taylor pe \mathbb{Y} în jurul oricărui punct, deoarece

$$|f^{(n)}(x)| = \left| \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{Y}.$$

4. Funcția $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$ se dezvoltă în serie Taylor în serie Mac Laurin pe intervalul $(-1, 1]$.

Din Teorema 2.3.1 rezultă că trebuie să demonstrăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in (-1, 1]$. Prin inducție se demonstrează ușor că

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \forall x \in \square^*.$$

Pentru $x \in [0, 1]$ scriem restul Taylor sub forma Lagrange și obținem

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.30)$$

Rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ pentru $x \in [0, 1]$.

Pentru $x \in (-1, 0)$ folosim formula Cauchy a restului și obținem:

$$|R_n(x)| = \left| (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \right| < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x} \quad (2.31)$$

unde $\theta \in (-1, 0)$ și depinde în general de n .

Pentru a arăta că $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in (-1, 0)$ este suficient să arătăm că

$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in [-r, 0)$ unde $0 < x < 1$ este arbitrar.

Fie deci $-1 < -r \leq x < 0$. Cum $\theta \in (0, 1)$ rezultă $-\theta < -\theta r \leq \theta x$, deci $0 < 1 - \theta < 1 - \theta r \leq 1 + \theta x$. În continuare avem:

$$0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} < 1 \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{1 - r} > \frac{1}{1 - r\theta} \geq \frac{1}{1 + \theta x}. \quad (2.33)$$

Ținând seama de (2.32) și (2.33) în (2.34) obținem:

$$|R_n(x)| < \frac{r^{n+1}}{1 - r}, \forall x \in [-r, 0).$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ pentru $\forall x \in (-1, 0)$ și cu aceasta demonstrația este terminată.

Dezvoltarea în serie Mac Laurin este

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1].$$

În particular, pentru $x = 1$ obținem rezultatul cunoscut

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

5. Funcția $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \in (-1, \infty)$ se dezvoltă în serie Mac Laurin pe intervalul $(-1, 1)$.

Vom arăta că $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in (-1, 1)$. Pentru restul Taylor vom folosi forma Cauchy.

Deoarece $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, rezultă

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)x^{n+1}}{n!} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad (2.34)$$

unde $\theta \in (0, 1)$ și depinde în general de n .

Dacă notăm cu $u_n = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)x^{n+1}}{n!} \right|$ și presupunem $|x| < 1$, atunci

seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, așa cum rezultă imediat din criteriul raportului

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - n - 1|}{n+1} |x| = |x| < 1 \right).$$

Așadar avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (2.35)$$

Pe de altă parte, dacă $|x| < 1$ avem $0 < 1 - \theta < 1 + \theta x$ de unde rezultă

$$0 < \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n < 1. \quad (2.36)$$

În sfârșit, observăm că pentru $-1 < x < 1$ avem

$$1 - |x| \leq 1 - \theta|x| \leq |1 + \theta x| \leq 1 + \theta|x| \leq 1 + |x|,$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} |1 + \theta x|^{\alpha-1} \leq (1 + |x|)^{\alpha-1} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ |1 + \theta x|^{\alpha-1} \leq (1 - |x|)^{\alpha-1} & \text{dacă } \alpha < 1 \end{cases} \quad (2.37)$$

Trecând la modul în (10) obținem:

$$|R_n(x)| = u_n \left(\frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n (1 + \theta x)^{\alpha-1} < u_n (1 + \theta x)^{\alpha-1}.$$

Din (2.35) și (2.37) rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in (-1, 1)$ și cu aceasta demonstrația este terminată.

În particular, pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$ obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}x^n + \dots \quad \forall x \in (-1, 1).$$

2.4. Serii de puteri

O serie de puteri este o serie de funcții de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad x \in Y, \quad (2.38)$$

$\{a_n\}$ este un șir de numere reale.

Dacă notăm cu A mulțimea de convergență a seriei (1), atunci se observă că $0 \in A$, deci $A \neq \Phi$.

Lema 2.4.1. *Dacă seria (1) este convergentă în $x_0 \in Y$, atunci ea este absolut convergentă în orice punct $x \in Y$ cu proprietatea $|x| < |x_0|$.*

Demonstrație

Deoarece seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă, rezultă că șirul $\{a_n x_0^n\}$ este convergent și are limita 0. Cum orice șir convergent este mărginit, rezultă că $\exists M > 0$ astfel încât $|a_n x_0^n| < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte avem

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = v_n. \quad (239)$$

Dacă $|x| < |x_0|$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este o serie geometrică convergentă (deoarece rația $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$). Din criteriul I de comparație rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă și cu aceasta lema este demonstrată.

Observația 2.4.1. Lema 2.4.1 pune în evidență o proprietate importantă a mulțimii de convergență a unei serii de puteri și anume dacă $x_0 \in A$, atunci intervalul deschis $(-|x_0|, |x_0|) \subset A$.

Observația 2.4.2. Din Lema 2.4.1 rezultă că dacă $x_0 \notin A$ și $|x| > |x_0|$, atunci $x \notin A$.

Teorema 2.4.1. (Teorema I a lui Abel). *Pentru orice serie de puteri există un număr $0 \leq \rho \leq \infty$, cu proprietățile:*

- 1) *Seria este absolut convergentă pentru orice $x \in Y, |x| < \rho$.*
- 2) *Seria este divergentă pentru orice $x \in Y, |x| > \rho$.*
- 3) *Seria este absolut uniform convergentă pe intervalul $[-r, r], \forall 0 < r < \rho$.*

Numărul ρ se numește raza de convergență, iar intervalul $(-\rho, \rho)$ intervalul de convergență.

Demonstrație

Dacă mulțimea de convergență A se reduce la $\{0\}$, atunci $\rho = 0$ și teorema este demonstrată.

Presupunem $A \neq \{0\}$.

Cazul 1. Dacă A este nemărginită superior, atunci $A = Y$ și $\rho = +\infty$.

Într-adevăr, fie $x_1 \in \square$ oarecare. Dacă A este nemărginită, atunci există $x_0 \in A$ astfel încât $|x_0| > |x_1|$, deci seria este absolut convergentă în x_1 , conform Lemei 2.4.1. Cum $x_1 \in \square$ era arbitrar, rezultă că seria este absolut convergentă pe Y .

Cazul 2. Dacă A este mărginită superior, atunci $\rho = \sup A > 0$. Într-adevăr, din definiția marginii superioare rezultă că dacă $|x| < \rho$, atunci $\exists x_0 \in A$ astfel încât $|x| < |x_0| < \rho$; conform Lemei 2.4.1 seria este absolut convergentă în x . Fie $x \in Y$, astfel încât $|x| > \rho$. Evident $|x| > y > \rho$. Dacă presupunem prin absurd că seria este convergentă în x , din Lema 2.4.1 rezultă $y \in A$, ceea ce contrazice definiția $\rho = \sup A$.

În sfârșit, faptul că seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$, $\forall 0 < r < \rho$, rezultă din Teorema 2.1.7 (Weierstrass), observând că pentru $\forall x \in [-r, r]$ avem

$|a_n x^n| < |a_n r^n|$, iar seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ este convergentă. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă ne dă un procedeu practic de calcul al razei de convergență.

Teorema 2.4.2. (Cauchy-Hadamard). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri, ρ raza

sa de convergență și $\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci:

- 1) $\rho = \frac{1}{\omega}$ dacă $0 < \omega < \infty$.
- 2) $\rho = 0$ dacă $\omega = +\infty$.
- 3) $\rho = \infty$ dacă $\omega = 0$.

Demonstrație

Aplicând criteriul rădăcinii (Teorema 1.5.6, Corolarul 1) seriei $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

obținem

$$L = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \omega |x|.$$

- 1) Fie $0 < \omega < \infty$.

Dacă $|x| < \frac{1}{\omega}$, atunci $L < 1$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă.

Fie $|x| > \frac{1}{\omega}$. Evident există $|x| > y > \frac{1}{\omega}$. Dacă presupunem prin absurd că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă în punctul x , atunci din Lema 4.1 rezultă că ea este absolut convergentă în punctul y . Pe de altă parte, $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} y^n = \omega y > 1$, de unde rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$ este divergentă (Teorema 1.5.6, Corolarul 1). Am ajuns astfel la o contradicție. Deci $\rho = \frac{1}{\omega}$.

2) Fie $\omega = \infty$ și $x_0 \neq 0$ oarecare. Vom arăta că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este divergentă. Într-adevăr, fie $0 < y < |x_0|$. Dacă presupunem prin absurd că $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă, atunci din Lema 4.1 rezultă $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$ este convergentă. Pe de altă parte avem: $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} y^n = \omega y > 1$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| y^n$ este divergentă (contradicție). Cum $x_0 \neq 0$ a fost arbitrar, rezultă $A = \{0\}$, deci $\rho = 0$.

3) Dacă $\omega = 0$, atunci $L = 0 \cdot |x| = 0 < 1$, deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă. Rezultă $A = Y$, deci $\rho = +\infty$.

Observația 2.4.3. $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ dacă această limită există. Într-adevăr,

dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ (cu convențiile $\frac{1}{0} = \infty$ și $\frac{1}{\infty} = 0$). Dar

se știe că dacă $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$.

Exemple

1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ are raza de convergență $\rho = 1$. Într-adevăr, conform

Observației 2.4.3 avem:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Din Teorema 2.4.1 rezultă că seria este absolut convergentă pe intervalul $(-1, 1)$ și divergentă pe mulțimea $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Pentru $x = 1$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ care este convergentă, conform

criteriului Leibniz pentru serii alternate. Pentru $x = -1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) =$

$= (-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă. Rezultă că mulțimea de convergență este $A = (-1, 1]$.

2. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ are raza de convergență $\rho = 0$. Într-adevăr,

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Mulțimea sa de convergență este $A = \{0\}$.

3. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ are raza de convergență $\rho = +\infty$. Avem

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

Mulțimea de convergență este $A = \mathbb{C}$.

4. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$ are raza de convergență $\rho = \sqrt[3]{2}$. Într-adevăr,

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \neq 3k \\ 2^{-k} & \text{dacă } n = 3k. \end{cases}$$

Șirul $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ se compune din subșirurile constante $\{0\}$ și $\{\sqrt[3n]{2^{-n}}\}$, deci $\omega =$
 $= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \max \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Din Teorema 2.4.2 rezultă $\rho = \frac{1}{\omega} = \sqrt[3]{2}$.

Teorema 2.4.3. *Suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul de convergență al seriei.*

Demonstrație

Fie $x \in (-\rho, \rho)$ oarecare fixat. Evident, există r astfel încât $|x| < r < \rho$. Deoarece seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$ (Teorema 2.4.1 punctul 3) rezultă că suma sa s este continuă pe $[-r, r]$, deci și în punctul x . (Am aplicat aici Teorema 2.1.8).

Teorema 2.4.4. *O serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ poate fi integrată termen cu termen pe intervalul de convergență al seriei. Seria de puteri care rezultă are aceeași rază de convergență cu seria inițială.*

Demonstrație

Fie $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\forall x \in (-\rho, \rho)$.

Fie $|x| < \rho$ și r astfel încât $|x| < r < \rho$. Deoarece seria $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$ din Teorema 2.1.9 rezultă

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Pe de altă parte avem:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}} = \frac{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

de unde rezultă că seria are raza de convergență egală cu ρ .

Teorema 2.4.5. *O serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ poate fi derivată termen cu termen pe intervalul de convergență al seriei.*

Demonstrație

Seria derivatelor este:

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{na_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n},$$

rezultă că seria derivatelor are aceeași rază de convergență ca seria inițială.

Fie $r \in (-\rho, \rho)$ oarecare și $|x| < r < \rho$. Deoarece seria derivatelor este uniform convergentă pe $[-r, r]$, din Teorema 2.1.10

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

unde

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

Observația 2.4.4. O serie de puteri poate fi derivată termen cu termen sau integrată termen cu termen, pe intervalul de convergență ori de câte ori dorim. De fiecare dată, seria obținută are aceeași rază de convergență cu seria inițială.

Teorema 2.4.6. (Teorema a II-a lui Abel). Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$,

având raza de convergență $\rho < \infty$ și suma s . Dacă seria este convergentă în punctul $x = \rho$, atunci suma sa s este continuă pe intervalul $(-\rho, \rho]$.

Demonstrație

Din Teorema 2.4.3 rezultă continuitatea lui s pe $(-\rho, \rho)$. Rămâne să dovedim continuitatea în $x = \rho$. Observăm că:

$$a_nx^n = (a_n\rho^n) \cdot \left(\frac{x}{\rho}\right)^n.$$

Șirul de funcții $\left(\frac{x}{\rho}\right)^n$ este uniform mărginit pe intervalul $[0, \rho]$ și

descrescător pentru orice x fixat. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\rho^n$ este convergentă, din criteriul

Abel-Dirichlet de convergență uniformă în varianta a II-a (Teorema 2.1.6') rezultă

că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ este uniform convergentă pe $[0, \rho]$. Din Teorema 2.1.8 rezultă că

funcția s (suma seriei) este continuă pe $[0, \rho]$, deci și în punctul $x = \rho$.

Exemplu. Să se afle mulțimea de convergență și suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Avem $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, de unde rezultă $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$. Pentru $x = 1$, seria devine

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ și este convergentă (criteriul Leibniz). Pentru $x = -1$, seria

devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ și este divergentă.

Mulțimea de convergență este deci $A = (-1, 1]$. Fie

$$s(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \forall x \in A.$$

Din Teorema 2.4.5 rezultă

$$s'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Seria din dreapta este o serie geometrică, cu rația $q = -x^2$. Rezultă

$$s'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Integrând ultima relație obținem:

$$s(x) = \operatorname{arctg} x + C, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Deoarece $s(0) = 0$ rezultă $C = 0$, deci

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Pe de altă parte, deoarece $\rho = 1 \in A$, din Teorema a II-a a lui Abel rezultă:

$$s(1) = \lim_{x \nearrow 1} s(x) = \lim_{x \nearrow 1} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Așadar avem

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

În particular, pentru $x = 1$ obținem:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

3. Spații metrice. Spații normate. Spații Hilbert

Spațiile metrice au fost introduse la începutul secolului XX de matematicianul francez M. Fréchet și constituie cadrul natural de prezentare a principiului contracției, care stă la baza demonstrării unor teoreme fundamentale din matematică, cum ar fi: teorema funcțiilor implicite, teorema de existență și unicitate pentru ecuații și sisteme de ecuații diferențiale (integrale) etc. De asemenea, spațiile metrice oferă un cadru suficient de general, relativ simplu, pentru studiul limitelor de funcții (șiruri) și a continuității funcțiilor.

3.1. Spații metrice. Principiul contracției

Definiția 3.1.1. O mulțime nevidă X se numește spațiu metric dacă există o funcție $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ cu proprietățile:

- $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ și $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y \in X$.

Funcția d se numește funcția-distanță sau metrica spațiului. Evident, dacă (X, d) este un spațiu metric și $Y \subset X$, atunci (Y, d) este de asemenea spațiu metric.

Propoziția 3.1.1. Dacă (X, d) este spațiu metric, atunci:

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4), \quad \forall x_i \in X, i = \overline{1, 4}.$$

Demonstrație

Din proprietatea c) a distanței rezultă

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4) + d(x_4, x_2)$$

$$d(x_3, x_4) \leq d(x_3, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, x_4).$$

Ținând seama și de proprietatea b) obținem:

$$d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4) \quad (3.1)$$

$$d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \geq -[d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)] \quad (3.2)$$

Din (3.1) și (3.2) rezultă:

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

Exemple de spații metrice

1. Mulțimea \mathbb{Y} a numerelor reale este spațiu metric în raport cu distanța euclidiană.

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{Y}.$$

Facem observația că pe \mathbb{Y} se pot introduce și alte distanțe, de exemplu:

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|} \quad \text{sau} \quad d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

2. Mulțimea $\square^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \square, i = \overline{1, n}\}$ este un spațiu metric în raport cu distanța definită de

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad \text{unde } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ și } y = (y_1, \dots, y_n)$$

sunt elemente oarecare din \square^n . Verificarea proprietăților a)-c) este imediată.

3. Mulțimea numerelor complexe:

$$\square = \{z = x + iy; x, y \in \square\}$$

este un spațiu metric în raport cu distanța

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \square$$

(reamintim că dacă $z = x + iy$, atunci $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

4. Fie E o mulțime oarecare și fie $B(E)$ mulțimea funcțiilor reale și mărginite pe E , adică mulțimea funcțiilor $f: E \rightarrow \square$ cu proprietatea că există $M_f > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M_f, \forall x \in E$.

Mulțimea $B(E)$ este spațiu metric în raport cu distanța:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in E\}, \quad \forall f, g \in B(E) \quad (3.3)$$

Existența membrului drept din relația (3.1) rezultă din Teorema 1.1.1. Verificarea proprietăților a)-c) este imediată.

5. Orice mulțime X este spațiu metric în raport cu distanța trivială:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \neq y \\ 0 & \text{dacă } x = y. \end{cases}$$

Un astfel de spațiu metric nu prezintă interes decât din punct de vedere teoretic.

Definiția 3.1.2. Fie (X, d) un spațiu metric. Spunem că un șir de elemente $\{x_n\}$ din \square^n converge la $x \in \square^n$, dacă șirul de numere reale $\{d(x_n, x)\}$

converge la 0, deci dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.
Vom folosi notația $x_n \rightarrow x$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Exemple

1. Dacă $X = Y$ și $d(x, y) = |x - y|$, atunci $\{x_n\}$ converge la x dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } |x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Regăsim astfel definiția cunoscută a șirului de numere reale convergent.

2. Fie $X = \mathbb{R}^n$, și fie $\{x_k\}$ un șir de elemente (vectori) din \mathbb{R}^n . Fiecare element x_k va fi de forma $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$, $x_{ki} \in Y, \forall i = \overline{1, n}$. Dacă $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, atunci $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} x$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_k, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$. Ținând seama de definiția distanței \mathbb{R}^n aceasta revine la:

$$|x_{ki} - x_i| < \varepsilon, \forall k \geq n_\varepsilon, \forall i = \overline{1, n}.$$

Am obținut astfel următorul rezultat:

Teorema 3.1.1. Șirul de elemente $\{x_k\}$ converge în \mathbb{R}^n la elementul x , dacă și numai dacă x_{ki} converge în Y la $x_i, \forall i = \overline{1, n}$.

În concluzie, convergența unui șir de elemente (vectori) din \mathbb{R}^n , revine la convergența pe componente.

De exemplu, șirul $\left\{ \frac{n+1}{n}, \frac{1}{n} \right\} \rightarrow (1, 0)$ în \mathbb{R}^2 .

3. Fie $X = \mathbb{C}$ și $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Teorema 3.1.2. Un șir de numere complexe $\{z_n\}$, unde pentru $\forall n, z_n = x_n + iy_n$, converge în \mathbb{C} la $z = x + iy$, dacă și numai dacă $x_n \rightarrow x$ și $y_n \rightarrow y$ în Y .

Demonstrație

$z_n \rightarrow z$ în \mathbb{C} dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0.$$

Din inegalitățile evidente:

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

rezultă că $z_n \rightarrow z$ în \mathbb{C} dacă și numai dacă $x_n \rightarrow x$ și $y_n \rightarrow y$ în Y .

4. Fie $X = B(E)$ mulțimea funcțiilor reale și mărginite pe E . Un șir de funcții $\{f_n\}$ converge la f în $B(E)$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in E} \{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Această definiție este evident echivalentă cu următoarea: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall x \in E$. Sub această formă recunoaștem definiția șirului uniform convergent (Definiția 2.1.2). Facem observația că în Definiția 3.1.2, faptul că $E \subset Y$ este lipsit de importanță, deci definiția șirului de funcții uniform convergent are sens pe o mulțime E oarecare.

Din cele de mai sus rezultă:

Teorema 3.1.3. *Un șir de funcții $\{f_n\}$ converge la f în $B(E)$ dacă și numai dacă $f_n \xrightarrow[E]{u} f$.*

Definiția 3.1.3. *Un șir de elemente $\{x_n\}$ dintr-un spațiu metric X se numește fundamental (Cauchy) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq n_\varepsilon$.*

Dacă $X = Y$ și $d(x, y) = |x - y|$, reobținem definiția șirului fundamental de numere reale.

Definiția 3.1.4. *Un șir $\{x_n\}$ se numește mărginit dacă $\exists a \in X$ și $r > 0$ astfel încât $d(x_n, a) < r, \forall n \in \mathbb{N}$. Principalele proprietăți ale șirurilor de elemente dintr-un spațiu metric sunt concentrate în următoarea teoremă:*

Teorema 3.1.4. *Fie (X, d) un spațiu metric.*

i) *Dacă $x_n \rightarrow x$ și $y_n \rightarrow y$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.*

ii) *Orice șir convergent are limită unică.*

iii) *Orice șir convergent este fundamental.*

iv) *Orice șir fundamental este mărginit.*

v) *Orice subșir al unui șir convergent este convergent și are limita egală cu limita șirului inițial.*

Demonstrație

i) Din Propoziția 3.1.1 avem:

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y) = 0$, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

ii) Presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ și de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$. Din i) rezultă

$$d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_n) = 0, \text{ deci } x = y.$$

iii) Dacă $x_n \rightarrow x$, atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$,
 $\forall n \geq n_\varepsilon$. Pentru $\forall m \geq n_\varepsilon$ avem de asemenea, $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Din proprietatea c) a distanței rezultă:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

deci $\{x_n\}$ este fundamental.

iv) Fie $\{x_n\}$ un șir fundamental și $\varepsilon = 1$. Atunci, $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât
 $d(x_n, x_m) < 1, \forall n, m \geq n_1$. În particular, $d(x_{n_1}, x_m) < 1, m \geq n_1$. Fie

$$\alpha = \max \{d(x_{n_1}, x_m); m = 1, 2, \dots, n_1 - 1\}$$

și fie $r = \max\{1, \alpha\}$. Evident, $d(x_{n_1}, x_m) < r, \forall m \in \mathbb{N}^*$, deci $\{x_n\}$ este mărginit.

v) Fie $x_n \rightarrow x$. Orice subșir al șirului $\{x_n\}$ este la rândul său un șir de forma
 $\{x_{k_n}\}$, unde $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ este un șir strict crescător de numere naturale.

Pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$. Deoarece
 $k_n \geq n$, rezultă $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$, deci $x_{k_n} \rightarrow x$.

Am văzut că orice șir convergent este fundamental. Afirmatia reciprocă nu este
 în general adevărată. Există spații metrice care conțin șiruri fundamentale divergente.

Exemplu. Fie $X = \mathbb{R}$ și $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Considerăm șirul
 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Acest șir este fundamental în \mathbb{R} , deoarece este fundamental în \mathbb{Y} , dar
 nu este convergent în \mathbb{R} deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \notin \mathbb{R}$.

Definiția 3.1.5. Un spațiu metric (X, d) se numește complet, dacă orice șir
 fundamental de elemente din X este convergent către un element din X . Din
 criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru șiruri de numere reale
 rezultă că \mathbb{Y} este spațiu metric complet în raport cu distanța euclidiană $d(x, y) =$
 $= |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{Y}$.

Teorema 3.1.5. Spațiul \mathbb{R}^n este complet.

Demonstrație

Fie $\{x_k\}$ un șir de elemente din \mathbb{R}^n . Fiecare element x_k este de forma:

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}).$$

Din inegalitățile evidente:

$$|x_{ki} - x_{li}| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_{ki} - x_{li}| = d(x_k, x_l) \leq \sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_{li}|,$$

rezultă (ca în demonstrația Teoremei 3.1.1) că $\{x_k\}$ este fundamental în \square^n dacă și numai dacă $\{x_{ki}\}$ este fundamental în Υ , $\forall i = \overline{1, n}$. Afirmatia din teoremă rezultă acum din Criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru șiruri de numere reale și din Teorema 3.1.1. Într-adevăr, dacă $\{x_k\}$ este fundamental în \square^n , atunci $\{x_{ki}\}$ este fundamental în Υ , deci convergent pentru $\forall i = \overline{1, n}$. Din Teorema 3.1.1. rezultă $\{x_k\}$ convergent în \square^n .

Teorema 3.1.6. *Spațiul numerelor complexe \leq este complet.*

Demonstrație

Dacă $z_n = x_n + iy_n$, atunci conform Teoremei 3.1.2, $z_n \rightarrow z = x + iy$ dacă și numai dacă $x_n \rightarrow x$ și $y_n \rightarrow y$ în Υ . În mod analog se arată că $\{z_n\}$ este fundamental dacă și numai dacă $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sunt fundamentale în Υ . Afirmatia rezultă acum (ca în Teorema 3.1.5) din criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru șiruri de numere reale.

Teorema 3.1.7. *Spațiul $B(E)$ al funcțiilor reale și mărginite pe E este complet.*

Demonstrație

Din Teorema 3.1.3 rezultă că $\{f_n\}$ converge la f în $B(E)$ dacă și numai dacă $f_n \xrightarrow[E]{u} f$. Afirmatia din teoremă rezultă acum din Teorema 2.1.1, cu observația că în demonstrația Teoremei 3.1.1 nu a intervenit nicăieri faptul că $E \subset \square$.

Definiția 3.1.6. *Fie (X, d) un spațiu metric. Se numește contracție pe X , orice aplicație $T: X \rightarrow X$ cu proprietatea că există $0 \leq \alpha < 1$ astfel încât*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema 3.1.8. (Banach). *Dacă (X, d) este un spațiu metric complet și $T: X \rightarrow X$ este o contracție, atunci există $z \in X$, unic, astfel încât $T(z) = z$.*

Demonstrație

Alegem un punct oarecare $x_0 \in X$ și notăm cu

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), \dots, x_n = T(x_{n-1}), \dots$$

Vom arăta că șirul $\{x_n\}$ este fundamental. Într-adevăr,

$$d(x_1, x_2) = d(T(x_0), T(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1).$$

Prin inducție completă se arată că:

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

În continuare avem

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+p}) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \dots + d(x_{k+p-1}, x_{k+p}) \leq \\ &\leq (\alpha^k + \alpha^{k+1} + \dots + \alpha^{k+p-1}) d(x_0, x_1) = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \\ &< \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \quad \forall k, p \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

Deoarece $0 \leq \alpha < 1$, avem $\alpha^k \rightarrow 0$, deci $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\alpha^k < \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{d(x_0, x_1)}$, $\forall k \geq k_\varepsilon$. Rezultă $d(x_k, x_{k+p}) < \varepsilon$, $\forall k \geq k_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$, deci $\{x_k\}$ este șir fundamental. Cum X este complet rezultă că $\exists z \in X$ astfel încât $x_k \rightarrow z$. Mai departe avem:

$$\begin{aligned} d(z, T(z)) &\leq d(z, x_k) + d(x_k, T(z)) = d(z, x_k) + d(T(x_{k-1}), T(z)) \leq \\ &\leq d(z, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, z). \end{aligned}$$

Deoarece, conform Teoremei 3.1.4 punctul i), membrul drept tinde la 0, rezultă $d(z, T(z)) = 0$, deci $T(z) = z$. Pentru a demonstra unicitatea punctului fix z , să presupunem că $\exists z' \in X$ astfel încât $T(z') = z'$. Atunci avem:

$$d(z, z') = d(T(z), T(z')) \leq \alpha d(z, z').$$

Cum $0 \leq \alpha < 1$, această inegalitate nu poate avea loc decât dacă $d(z, z') = 0$, adică dacă $z = z'$ și cu aceasta teorema este demonstrată.

Șirul $\{x_k\}$, obținut pornind de la un punct arbitrar $x_0 \in X$, prin relația de recurență $x_k = T(x_{k-1})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, se numește șirul aproximațiilor succesive, iar metoda de obținere a punctului fix z ca limita acestui șir, poartă numele de metoda aproximațiilor succesive. E. Picard a utilizat metoda aproximațiilor succesive cu mult înainte ca Banach să fi stabilit rezultatul său foarte general (Teorema 3.1.8). Din această cauză, această metodă se mai numește și metoda Picard-Banach.

Pentru a evalua eroarea în metoda aproximațiilor succesive, trecem la limită după p în inegalitatea (3.4) și obținem:

$$d(x_k, x) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \quad (3.5)$$

Așadar, dacă aproximăm pe z cu x_k facem o eroare care este mai mică decât $\frac{\alpha^k}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$.

Teorema 3.1.8 are numeroase aplicații în matematică. Pentru exemplificare, vom arăta cum poate fi folosită metoda aproximațiilor succesive la rezolvarea ecuațiilor algebrice sau transcendente.

Fie ecuația

$$F(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (3.6)$$

Această ecuație se înlocuiește cu ecuația echivalentă:

$$x = f(x); \quad x \in [a, b] \quad (3.7)$$

Acest lucru se poate realiza de exemplu, dacă notăm $f(x) = x + F(x)$. Să presupunem că $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ este derivabilă și există $0 \leq \alpha < 1$ astfel încât

$$|f'(x)| \leq \alpha, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.8)$$

Din Teorema Lagrange rezultă că $\forall x, y \in [a, b], \exists \xi$ între x și y astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Ținând seama de (3.8) obținem:

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]. \quad (3.9)$$

Din (3.9) rezultă că f este o contracție pe $[a, b]$, iar din Teorema 3.1.8 rezultă că există o soluție unică z a ecuației (3.7) care se poate obține cu metoda aproximațiilor succesive. Din punct de vedere geometric, orice soluție a ecuației (3.7) este abscisa unui punct de intersecție dintre dreapta $y = x$ și graficul funcției $y = f(x)$.

Pe figura (1) se poate urmări șirul aproximațiilor succesive pentru $0 < f'(x) \leq \alpha < 1$, iar pe figura (2), pentru $-1 < -\alpha \leq f'(x) < 0$.

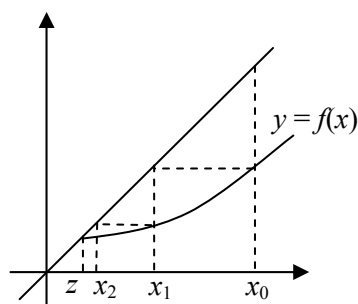


Fig. 1

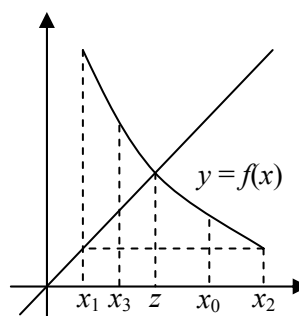


Fig. 2

Exemplu. Fie ecuația $x^5 - x - 0,2 = 0$, care admite o rădăcină în intervalul $[-0,3; -0,2]$. Ecuația echivalentă este $x = x^5 - 0,2$, deci $f(x) = x^5 - 0,2$. Se verifică imediat că $|f'(x)| < 0,05$, $\forall x \in [-0,3; -0,2]$, deci putem lua $\alpha = 0,05$. Drept primă aproximație se poate lua $x_0 = -0,2$.

Aflarea unei soluții aproximative se face cu ajutorul calculatorului.

3.2. Spații normate

În definiția spațiului metric nu s-a presupus că mulțimea X are vreo structură algebrică. Din această cauză, într-un spațiu metric oarecare nu se poate dezvolta o teorie a seriilor, deoarece nu are sens operația de adunare. Pentru a elimina această deficiență vom introduce noțiunea de spațiu normat, în care se presupune că mulțimea X este un spațiu vectorial.

Definiția 3.2.1. Fie X un spațiu vectorial peste corpul K (\mathbb{R} sau \mathbb{C}). Se numește normă pe X orice aplicație $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile.

(i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$ și $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0_X$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\forall \lambda \in K, \forall x \in X$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x \in X, \forall y \in X$.

Perechea $(X, \| \cdot \|)$ se numește spațiu normat.

Exemple:

1. Mulțimea \mathbb{R} este spațiu normat în raport cu norma: $\|x\| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Mulțimea \mathbb{R}^n este spațiu normat în raport cu norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}$, unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ este un vector oarecare.

3. Mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} este spațiu normat în raport cu norma

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

4. Mulțimea $B(E)$ a funcțiilor reale și mărginite pe E este spațiu normat în raport cu norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in E\}$$

Observația 3.2.1. Orice spațiu normat este spațiu metric în raport cu distanța

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x \in X, \forall y \in X.$$

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există spații metrice care nu sunt spații normate.

Exemplu. Fie A o mulțime oarecare și fie $X = \{f : A \rightarrow [0,1]\}$. Evident X este spațiu metric în raport cu distanța:

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in E\}.$$

Observăm însă că X nu este spațiu normat deoarece nu este spațiu vectorial. Într-adevăr, dacă $f, g \in X$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ în general nu aparține lui X .

Cum spațiile normate sunt cazuri particulare de spații metrice, rezultă că definițiile și rezultatele privind șirurile în spațiile metrice rămân valabile și în spațiile normate. Astfel, dacă X este un spațiu normat, atunci un șir $\{x_n\}$ de elemente din X converge la elementul $x \in X$, dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Definiția 3.2.2. Orice spațiu normat și complet se numește spațiu Banach.

Așa cum s-a arătat în §1, spațiile \square^n, \leq și $B(E)$ sunt complete, deci sunt spații Banach.

3.3. Spații Hilbert

Spațiul Hilbert este un caz particular de spațiu Banach, în care norma provine dintr-un produs scalar.

Definiția 3.3.1. Fie E un spațiu vectorial peste corpul \mathbb{K} . Se numește produs scalar o aplicație $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ cu proprietățile:

$$(i) \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}, \forall x, y \in E \text{ dacă } \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ și}$$

$$\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in E \text{ dacă } \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

$$(ii) \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E \text{ și } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

$$(iii) \langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E \text{ și } \langle x, x \rangle = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = 0_E.$$

Perechea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se numește spațiu prehilbert.

Observația 3.3.1. $\langle x, 0_E \rangle = 0, \forall x \in E$ (unde cu 0_E am notat elementul neutru la adunare din E și cu 0 numărul zero din \mathbb{K}).

$$\text{Într-adevăr, } \langle x, 0_E \rangle = \langle x, 0 \cdot 0_E \rangle = 0 \langle x, 0_E \rangle = 0.$$

Teorema 3.3.1. (inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz)

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \forall x, y \in E \quad (3.10)$$

Demonstrație

Dacă $y = 0_E$, atunci $\langle x, y \rangle = 0$, deci inegalitatea (1) este evident satisfăcută.

Fie $y \neq 0_E$. Pentru $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ avem:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle &= \langle x, x - \lambda y \rangle - \lambda \langle y, x - \lambda y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \lambda \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

În particular, pentru $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ avem

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot \overline{\langle x, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle \langle y, y \rangle} \cdot \langle y, y \rangle$$

Deoarece $\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} = |\langle x, y \rangle|^2$, mai departe obținem:

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}, \text{ deci } |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Corolar. Orice spațiu prehilbert este un spațiu normat.

Demonstrație

Pentru $\forall x \in E$ notăm cu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Evident,

$$\|x\| \geq 0 \text{ și } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ și } \forall x \in X.$$

Rămâne să dovedim și proprietatea (iii) din Definiția 3.2.1. Pentru $\forall x, y \in E$ avem

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Ținând seama de inegalitatea (1) obținem:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq \sqrt{\langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle} = \\ &= \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2} = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Rezultă $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Definiția 3.3.2. Un spațiu prehilbert complet se numește spațiu Hilbert.

Exemple

1. Spațiul \mathbb{R}^n este un spațiu Hilbert.

Într-adevăr, observăm pentru început că \square^n este un spațiu vectorial peste Υ în raport cu operațiile:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \square^n.$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \forall \lambda \in \Upsilon.$$

Elementul neutru la adunare este $0_E = (0, 0, \dots, 0)$. Dacă notăm cu

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3.11)$$

atunci formula (3.11) definește un produs scalar pe \square^n , iar formula

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \forall x \in \square^n \quad (3.12)$$

definește norma euclidiană pe \square^n . Așadar, \square^n este un spațiu prehilbertian. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz capătă următoarea formă:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \quad (3.13)$$

Pe spațiul \square^n s-a definit în subcap 3.2 și o altă normă, care nu provine dintr-un produs scalar și anume:

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_i|; 1 \leq i \leq n \}.$$

2. Fie $M_{m,n}(\square)$ spațiul vectorial al matricelor cu m linii și n coloane cu elemente din Υ .

Dacă $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$, $1 \leq i \leq m$ și $1 \leq j \leq n$, atunci formula

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

definește un produs scalar, deci $M_{m,n}(\square)$ este un spațiu prehilbertian.

Norma unei matrice este deci:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}, \quad \forall A \in M_{m,n}(\square).$$

Spațiul $M_{m,n}(\square)$ se poate identifica cu spațiul \square^{mn} prin următoarea aplicație

$$\varphi : M_{m,n}(\square) \rightarrow \square^{mn}, \quad \varphi(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{mn}),$$

pentru

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m,n}(\square).$$

Se observă imediat că aplicația φ are următoarele proprietăți: φ este bijectivă, $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ și $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$, $\forall A, B \in \mathbf{M}_{m,n}(\square)$ și $\forall \lambda \in \Upsilon$, de unde rezultă că spațiul $\mathbf{M}_{m,n}(\square)$ și \square^{mn} sunt izomorfe din punct de vedere algebric. Avem de asemenea:

$$\|\varphi(A)\| = \|A\|, \forall A \in \mathbf{M}_{m,n}(\square),$$

de unde rezultă că cele două spații sunt izomorfe și din punct de vedere topologic. Cum spațiul \square^{mn} este Hilbert, rezultă că și spațiul $\mathbf{M}_{m,n}(\square)$ este un spațiu Hilbert.

3. Fie $\mathbf{C}([a,b])$ spațiul vectorial al funcțiilor $f: [a,b] \subset \square \rightarrow \square$, continue pe $[a,b]$. Pentru $\forall f, g \in \mathbf{C}([a,b])$ notăm

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (3.14)$$

Se verifică imediat că sunt satisfăcute proprietățile (i) și (ii) din Definiția 3.3.1 a produsului scalar. Este de asemenea evident că $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$, $\forall f \in \mathbf{C}([a,b])$. Faptul că $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x)dx = 0$ dacă și numai dacă f este identic nulă pe $[a,b]$, rezultă din următorul rezultat cunoscut din liceu: dacă $g: [a,b] \rightarrow \Upsilon$ este continuă și pozitivă, neidentic nulă pe $[a,b]$, atunci $\int_a^b g(x)dx > 0$. Așadar, formula (3.14) definește un produs scalar pe $\mathbf{C}([a,b])$. Norma euclidiană va fi:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} = 0, \forall f \in \mathbf{C}([a,b]). \quad (3.15)$$

Pe spațiul $\mathbf{C}([a,b])$ se poate introduce și norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [a,b]\} \quad (3.16)$$

Deoarece orice funcție continuă pe $[a,b]$ este mărginită, rezultă

$$\mathbf{C}([a,b]) \subset B([a,b])$$

și evident norma (3.16) este restricția la $\mathbf{C}([a,b])$ a normei (3.12).

Spațiul $(\mathbf{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ este spațiu Banach. Remarcăm că spațiul $\mathbf{C}([a,b])$ nu este complet în raport cu norma (3.15), deci nu este spațiu Hilbert.

Într-adevăr, dacă considerăm șirul de funcții continue:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } -1 \leq x \leq 0 \\ nx & \text{dacă } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{dacă } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{atunci: } \|f_{n+p} - f_n\|_2^2 = \int_0^{\frac{1}{n+p}} p^2 x^2 dx + \int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 dx < \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{n} = \frac{5}{3n}, \forall p.$$

Rezultă că $\{f_n\}$ este fundamental în raport cu norma $\|\cdot\|_2$. Pe de altă parte observăm că $\{f_n\}$ nu converge în $C([-1,1])$ în raport cu această normă.

Într-adevăr, dacă $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci avem:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^0 f^2(x) dx + \int_0^{\frac{1}{n}} [nx - f(x)]^2 dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 [1 - f(x)]^2 dx$$

Dacă presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$, rezultă că

$\int_{-1}^0 f^2(x) dx + \int_0^1 [1 - f(x)]^2 dx = 0$ și mai departe că $f(x) = 0, \forall x \in [-1,0]$ și $f(x) = 1, \forall x \in (0,1]$ ceea ce contrazice faptul că f este continuă pe $[-1,1]$.

Rezultă $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$, dar $f \notin C([-1,1])$ deci $(C([-1,1]), \|\cdot\|_2)$ nu este complet.

3.4. Serii în spații normate

Definiția 3.4.1. Fie X un spațiu normat și $\{u_n\}_{n \geq 1}$ un șir de elemente din X .

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Perechea $(\{u_n\}_{n \geq 1}, \{s_n\}_{n \geq 1})$ se numește serie de elemente din spațiul

normat X și se notează $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se numește convergentă dacă șirul sumelor parțiale $\{s_n\}$ este convergent, deci dacă $\exists s \in X$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s\| = 0$. În acest caz s se numește suma seriei și notăm $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Teorema 3.4.1. Fie X un spațiu Banach și $\{u_n\}$ un șir de elemente din X .

Condiția necesară și suficientă ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ să fie convergentă este ca $\forall \varepsilon > 0$ să $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$ să avem $\|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\| < \varepsilon$.

Demonstrație

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \{s_n\}$ este convergent $\Leftrightarrow \{s_n\}$ este fundamental,

deci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\| < \varepsilon.$$

Definiția 3.4.2. O serie de elemente din spațiul normat X se numește absolut convergentă dacă seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$ este convergentă.

Teorema 3.4.2. Condiția necesară și suficientă ca un spațiu normat X să fie spațiu Banach, este ca orice serie absolut convergentă de elemente din X să fie convergentă.

Demonstrație

Necesitate. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie absolut convergentă. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\|u_{n+1}\| + \dots + \|u_{n+p}\| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ și $\forall p \in \mathbb{N}^*$. În continuare avem:

$$\|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\| \leq \|u_{n+1}\| + \dots + \|u_{n+p}\| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \text{ și } \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

deci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă conform Teoremei 3.4.1.

Suficiența. Fie $\{x_n\}$ un șir fundamental de elemente din X . Atunci există un subșir $\{x_{n_k}\}$ cu proprietatea:

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (3.17)$$

(vezi raționamentul din demonstrația Teoremei 1.2.1).

Deoarece seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ este convergentă, din (3.17) rezultă că seria

$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ este absolut convergentă, deci convergentă, conform ipotezei noastre. Observăm însă că șirul sumelor parțiale al acestei serii coincide cu subșirul $\{x_{n_k}\}$, deci $\exists x \in X$ astfel încât $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea:

$$\|x_{n_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq n'_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, șirul $\{x_n\}$ este fundamental, deci $\exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea:

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq n''_\varepsilon.$$

Fie $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, $n \geq n_\varepsilon$ și $k \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de unde rezultă $x_n \rightarrow x$.

Așadar, am arătat că orice șir fundamental este convergent, deci X este spațiu Banach.

Exemple

1. Fie $X = \mathbb{R}^n$ și $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ o serie de elemente din \mathbb{R}^n . Fiecare element x_k va

fi de forma: $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$.

Șirul sumelor parțiale $\{s_k\}$ este de forma

$$s_k = (s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn}) \text{ unde } s_{ki} = x_{1i} + x_{2i} + \dots + x_{ki}.$$

Din Teorema 3.1.1 rezultă că $\{s_k\}$ este convergent dacă și numai dacă șirul de numere reale $\{s_{ki}\}$ este convergent, $\forall i = \overline{1, n}$. Prin urmare, seria de vectori

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ este convergentă în \mathbb{R}^n , dacă și numai dacă seriile de numere reale $\sum_{k=1}^{\infty} x_{ki}$

sunt convergente în \mathbb{R} , $\forall i = \overline{1, n}$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}, \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$ este convergentă în \square^2 și are suma $s = (1, \ln 2) \in \square^2$,

deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

2. Fie $X = M_{m,n}(\square)$ spațiul Banach al matricelor cu m linii și n coloane cu elemente din Y . Așa cum am mai remarcat, acest spațiu se poate identifica cu spațiul

\square^{mn} . Rezultă că o serie de matrice $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, unde pentru $\forall k \in \square^*$,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{1n}^{(k)} \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

este convergentă, dacă și numai dacă seriile de numere reale $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ sunt convergente în Y pentru $\forall i = \overline{1, m}$ și $\forall j = \overline{1, n}$.

De exemplu, seria $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, unde

$$A_k = \frac{1}{k+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{1}{k+2} & (-1)^{k-1} \\ \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k} & (k+1) \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \right] \end{pmatrix}$$

este convergentă în $M_{23}(\square)$ și are suma

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 - \ln 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{11}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{22}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

În mod analog avem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{21}^{(k)} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_{12}^{(k)} = \frac{1}{2}.$$

În continuare observăm că

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{13}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = 1 - \ln 2.$$

În sfârșit, dacă notăm cu $a_{23}^{(k)}$ suma parțială de ordinul k a seriei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{23}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} \right],$$

atunci

$$s_{23}^{(k)} = \ln \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{k+1+(-1)^{k-1}}{k+1} = \begin{cases} \ln 1 & \text{dacă } k = 2p \\ \ln \frac{2p+1}{2p} & \text{dacă } k = 2p-1. \end{cases}$$

Rezultă că $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{23}^{(k)} = 0$, deci $\sum_{k=1}^{\infty} a_{23}^{(k)} = 0$.

Observația 3.4.1. Într-un spațiu Banach pot exista serii convergente care nu sunt absolut convergente. Într-adevăr, dacă vom considera din nou seria precedentă, despre care s-a arătat că este convergentă, observăm că

$$\|A_k\| = \frac{1}{k+1} \sqrt{\frac{2}{k^2} + \frac{2}{(k+2)^2} + 1 + (k+1)^2 \ln^2 \left[1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right]} \geq \frac{1}{k+1}.$$

Cum seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ este divergentă, rezultă că seria $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ este divergentă,

deci seria $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ nu este absolut convergentă.

3. Fie $X = \leq$ și $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ o serie de numere complexe, unde $z_n = x_n + i y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece șirul sumelor parțiale este

$$s_n = (x_1 + \dots + x_n) + i(y_1 + \dots + y_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

din Teorema 3.1.2 rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă în \leq dacă și numai dacă

seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sunt convergente în Υ .

4. Fie $X = B(E)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie de funcții din $B(E)$ și $s_n = u_1 + \dots + u_n$, $n \in \mathbb{N}$. Deoarece, așa cum am văzut, $\{s_n\}$ este convergent în $B(E)$ dacă și numai

dacă $\{s_n\}$ este uniform convergent pe E , rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă în $B(E)$ în raport cu norma $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|; x \in E\}$, $\forall f \in B(E)$, dacă și numai dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe E .

3.5. Funcții elementare. Formulele lui Euler

Observația 3.5.1. Demonstrația Teoremei 1.9.2 rămâne valabilă și pentru serii de numere complexe. Prin urmare, dacă seriile de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt absolut convergente și au sumele U , respectiv V , atunci orice serie produs a lor este absolut convergentă și are suma egală cu UV .

În continuare definim funcțiile de variabilă complexă e^z , $\cos z$ și $\sin z$ ca sumele următoarelor serii de numere complexe:

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (3.18)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (3.19)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (3.20)$$

Definițiile au sens, deoarece seriile din dreapta sunt absolut convergente pe \leq , așa cum rezultă imediat din criteriul raportului. Cum \leq este spațiu Banach, din Teorema 3.4.2 rezultă că aceste serii sunt convergente pr orice $z \in \leq$.

Teorema 3.5.1. $e^z \cdot e^u = e^{z+u}$, $\forall u, z \in \leq$.

Demonstrație

În conformitate cu definiția (3.18) a funcției exponențiale avem:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$$

În virtutea Observației 3.5.1, oricum am înmulți aceste serii, obținem o serie absolut convergentă, a cărei sumă este egală cu $e^z \cdot e^u$.

Folosind produsul de tipul I rezultă:

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^u &= 1 + \left(\frac{z}{1!} + \frac{u}{1!} \right) + \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{zu}{1!1!} + \frac{u^2}{2!} \right) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^{n-k}}{(n-k)!k!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} z^{n-k} \cdot u^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} \cdot u^k \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+u)^n}{n!} = e^{z+u}. \end{aligned}$$

Dacă în definiția (3.18) a funcției exponențiale înlocuim z cu iz obținem

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Așadar, au loc formulele

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (3.21)$$

Formulele (3.21) se pot pune sub forma echivalentă.

$$\begin{cases} \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-z}) \\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (3.22)$$

Formulele (3.22) se numesc formulele lui Euler. Din Teorema 3.5.1 și formulele lui Euler rezultă imediat:

$$\begin{cases} \sin(z+u) = \sin z \cos u + \cos z \sin u \\ \cos(z+u) = \cos z \cos u - \sin z \sin u \end{cases} \quad (3.23)$$

Dacă în definițiile (3.18), (3.19) și (3.20) luăm $z = x \in \mathbb{R}$, obținem:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (3.18')$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (3.19')$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.20')$$

Ținând seama de dezvoltările în serie Mac Laurin a funcțiilor elementare studiate în subcap. 2.3, constatăm că funcțiile de variabilă complexă e^z , $\cos z$ și

$\sin z$ definite în (3.18), (3.19) și (3.20) sunt generalizări ale funcțiilor de variabilă reală e^x , $\cos x$ și $\sin x$. Așadar, restricția la Y a funcției $z \rightarrow e^z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ coincide cu funcția exponențială reală $x \rightarrow e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cunoscută din liceu etc.

Din Teorema 3.5.1 și formulele (3.21) rezultă:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$$

În particular avem:

$$e^{i2k\pi} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

În sfârșit, funcția $z = \ln w$, $z \in \mathbb{C}$ se definește ca inversa funcției $w = e^z$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dacă $w \neq 0$ și $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, atunci din ecuația $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ rezultă $e^x = r = |w|$ și $y = \theta + 2k\pi = \arg w + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Prin urmare avem:

$$z = \ln w = \ln |w| + i \arg w + i \cdot 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Din punct de vedere al teoriei funcțiilor complexe, $\ln w$ are o infinitate de valori dacă $w \neq 0$. În particular, $\ln 1 = 2k\pi i$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, spre deosebire de analiza reală, unde $\ln 1 = 0$ (are o singură valoare).

3.6. Funcții de matrice

Fie $M_n(\mathbb{C})$ spațiul vectorial al matricelor pătrate de ordinul n cu elemente din \mathbb{C} . Așa cum am văzut în subcap. 3.4 acest spațiu se poate identifica cu spațiul \mathbb{C}^{n^2} ; $M_n(\mathbb{C})$ este un spațiu Banach (chiar Hilbert) în raport cu norma.

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Lema 3.6.1. Pentru orice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, avem:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad \text{și} \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (3.24)$$

Demonstrație

Dacă notăm cu $C = AB$, atunci elementele matricei C sunt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$c_{ij}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right). \quad (3.25)$$

Sumând în (3.25) după indicele j rezultă:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \|B\|^2. \quad (3.26)$$

Sumând acum după i obținem:

$$\|C\|^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \|B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2, \text{ deci } \|C\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Inegalitatea (3.26) rezultă imediat din (3.25) prin inducție completă.

Fie seria de puteri $\sum_{k=1}^n a_k x^k$, $a_k \in \Upsilon$ pentru $\forall k \in \mathbb{N}$ și fie f suma sa. Dacă notăm cu ρ raza sa de convergență, atunci avem:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k, \text{ dacă } \|x\| < \rho. \quad (3.27)$$

Pentru orice $A \in \mathbf{M}_n(\square)$ considerăm seria de matrice

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k + \dots \quad (3.28)$$

unde cu I_n am notat matricea unitate de ordinul n .

Teorema 3.6.1. *Seria (3.28) este convergentă pentru orice $A \in \mathbf{M}_n(\square)$ cu proprietatea $\|A\| < \rho$.*

Demonstrație

Deoarece $\mathbf{M}_n(\square)$ este un spațiu Banach, din Teorema 3.4.2 rezultă că este suficient să arătăm că seria (3.28) este absolut convergentă pentru $\|A\| < \rho$. Fie deci $A \in \mathbf{M}_n(\square)$ cu proprietatea $\|A\| < \rho$, și fie $\|A\| < r < \rho$. Din Lema 3.6.1 rezultă:

$$\|a_k A^k\| = |a_k| \|A^k\| \leq |a_k| \|A\|^k < |a_k| r^k.$$

Cum $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$ este convergentă, din Criteriul I de comparație rezultă că

seria $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k A^k\|$ este convergentă, deci seria (3.28) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ este convergentă (s-a folosit notația $A^0 = E$).

Definiția 3.6.1. *Se numește funcția de matrice definită de f și se notează cu $f(A)$, suma seriei (3.28). Așadar, avem:*

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k + \dots, \quad \forall A \in \mathbf{M}_n(\square), \|A\| < \rho.$$

Cea mai importantă funcție de matrice este funcția exponențială de matrice. Deoarece seria $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ are raza de convergență $\rho = \infty$, rezultă că avem:

$$e^A = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots, \quad \forall A \in \mathbf{M}_n(\square). \quad (3.29)$$

Teorema 3.6.2. *Funcția exponențială de matrice are următoarele proprietăți:*

- (i) $e^0 = I_n$
- (ii) $e^{\lambda I_n} = e^\lambda I_n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{Y}$
- (iii) Dacă $AB = BA$, atunci $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B}$
- (iv) Matricea e^A este nesingulară și $(e^A)^{-1} = e^{-A}, \quad \forall A \in \mathbf{M}_n(\square)$
- (v) Pentru orice matrice nesingulară $C \in \mathbf{M}_n(\square)$ avem

$$e^A = C \cdot e^{C^{-1}AC} \cdot C^{-1}, \quad \forall A \in \mathbf{M}_n(\square).$$

Demonstrație

Proprietățile (i) și (ii) sunt evidente din (3.29). Demonstrația proprietății (iii) este identică cu demonstrația Teoremei 3.5.1, cu observația suplimentară că dacă $AB = BA$, atunci formula binomului lui Newton funcționează și pentru matrice, deci are loc formula:

$$(A+B)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l A^{k-l} B^l.$$

Proprietatea (iv) rezultă din observația $e^A \cdot e^{-A} = e^0 = I_n$. Pentru a demonstra proprietatea (v) observăm pentru început că avem:

$$(C^{-1}AC)^k = C^{-1}A^kC, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.30)$$

Într-adevăr, identitatea (3.30) se demonstrează imediat prin inducție matematică. Ținând seama de (3.30) rezultă:

$$e^{C^{-1}AC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (C^{-1}AC)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C^{-1}A^kC = C^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) C = C^{-1}e^A C.$$

Așadar, avem $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$. Amplificând în această egalitate la stânga cu C și la dreapta cu C^{-1} obținem $C \cdot e^{C^{-1}AC} \cdot C^{-1} = e^A$, deci (v).

Exemple

1. Dacă matricea A are forma diagonală, adică dacă

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ atunci } A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze e^A .

În prima fază aducem matricea la forma diagonală. Ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, iar valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Vectorii proprii sunt $x_1 = (1, 3)$, $x_2 = (1, -1)$. În raport cu baza x_1, x_2 matricea A capătă forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Matricea de trecere este } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ iar } C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Așadar, avem $D = C^{-1}AC$. Din Teorema 3.9.2, (v) rezultă

$$e^A = Ce^D C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e + 3e^5 & e - e^5 \\ 3e - 3e^5 & 3e + 3e^5 \end{pmatrix}$$

3. Să se calculeze $\sin A$, dacă $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \sin A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (CDC^{-1})^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} CD^{2k+1}C^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 1 & 0 \\ 0 & \sin 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin 1 + 3 \sin 5 & \sin 1 - \sin 5 \\ 3 \sin 1 - 3 \sin 5 & 3 \sin 1 + \sin 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

În încheierea acestui paragraf menționăm că funcția exponențială de matrice este utilă în studiul sistemelor de ecuații diferențiale liniare.

3.7. Elemente de topologie în \square^n

Definiția 3.7.1. Fie $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \square^n$ și $r > 0$. Se numește bila deschisă (închisă) de centru a și rază r mulțimea

$$B(a, r) = \{x \in \square^n; \|x - a\| < r\}$$

$$\left[\check{B}(a, r) = \{x \in \square^n; \|x - a\| \leq r\} \right].$$

Cum pe mulțimea \square^n am introdus două norme ($\|\cdot\|_2$ și $\|\cdot\|_\infty$) rezultă că pe \square^n avem două tipuri de bile deschise (închise) și anume:

$$B_2(a, r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; \|x - a\|_2 < r\} =$$

$$= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2\}.$$

$$B_\infty(a, r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; \|x - a\|_\infty < r\} =$$

$$= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; |x_1 - a_1| < r, \dots, |x_n - a_n| < r\}.$$

(respectiv $\check{B}_2(a, r)$ și $\check{B}_\infty(a, r)$).

Exemple:

1. Fie $a \in \Upsilon$ și $r > 0$. Deoarece pe Υ avem $\|x\|_2 = \|x\|_\infty = |x|$, $\forall x \in \square$ rezultă că:

$$B_2(a, r) = B_\infty(a, r) = \{x \in \square; |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

Din punct de vedere geometric, pe Υ , bila deschisă cu centrul în a și de rază r reprezintă intervalul deschis $(a - r, a + r)$.

2. Fie $a = (a_1, a_2) \in \square^2$ și $r > 0$.

$$B_2(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \square^2; (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

și

$$B_\infty(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \square^2; |x_1 - a_1| < r \text{ și } |x_2 - a_2| < r\}.$$

Din punct de vedere geometric $B_2(a, r)$ reprezintă interiorul cercului cu centrul în $a = (a_1, a_2)$ și de rază r iar $B_\infty(a, r)$ este interiorul pătratului cu centrul în $a = (a_1, a_2)$ și de latură $2r$.

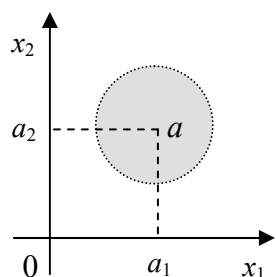


Fig. 1

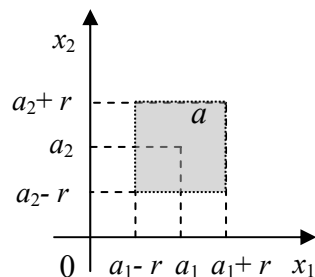


Fig. 2

3. În \square^3 , $B_2(a, r)$ reprezintă interiorul sferei cu centrul în $a = (a_1, a_2, a_3) \in \square^3$ și de rază r , iar $B_\infty(a, r)$ reprezintă interiorul cubului cu centrul în a , fețele paralele cu planele de coordonate și de muchie $2r$.

În general, în \square^n vom numi $B_2(a, r)$ sfera n-dimensională și $B_\infty(a, r)$ cubul n-dimensional.

Observația 3.7.1. Între cele două tipuri de bile din \square^n au loc incluziunile:

$$B_\infty\left(a, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subset B_2(a, r) \subset B_\infty(a, r).$$

Într-adevăr, dacă $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_\infty\left(a, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$, atunci $|x_i - a_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$,

$\forall i = \overline{1, n}$, de unde rezultă că:

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \cancel{r} \cdot \frac{r^2}{\cancel{r}} = r^2, \text{ deci } x \in B_2(a, r).$$

Pe de altă parte, dacă

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in B_2(a, r),$$

atunci $(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2$.

Cum $|x_i - a_i| \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < r, \forall i = \overline{1, n}$ rezultă că

$$x \in B_\infty(a, r).$$

În cazul particular $n = 2$, incluziunile din Observația 3.7.1. sunt reprezentate geometric în Fig. 3.

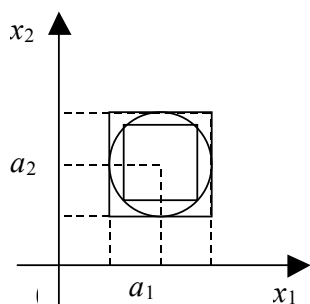


Fig. 3

Definiția 3.7.2. Se numește *vecinătate a punctului* $a \in \square^n$ orice mulțime $V \subset \square^n$ cu proprietatea că există $r > 0$ astfel încât $V \supset B(a, r)$.

Conform acestor definiții, pe Y , o vecinătate a punctului $a \in Y$, este orice mulțime $V \subset Y$ care conține un interval deschis $(a - r, a + r)$, unde $r > 0$. În particular orice interval deschis $(a - r, a + r)$ este

vecinătate a punctului $a \in Y$.

S-ar părea că în \square^n ($n \geq 2$) există două tipuri de vecinătăți pentru un punct și anume: vecinătăți ce conțin bile de tipul $B_2(a, r)$, respectiv vecinătăți ce conțin bile de tipul $B_\infty(a, r)$. Din Observația 3.7.1. rezultă că cele două tipuri de vecinătăți coincid. De aceea în continuare, prin vecinătate a punctului $a \in \square^n$, înțelegem orice mulțime din \square^n care conține fie o sferă n-dimensională deschisă, fie un cub n-dimensional deschis.

Mulțimea tuturor vecinătăților punctului $a \in \square^n$ o notăm cu $V(a)$.

Propoziția 3.7.1. Familia $V(a)$ are următoarele proprietăți:

- 1) $a \in V$ pentru orice $V \in V(a)$
- 2) Dacă $V \in V(a)$ și $U \supset V$, atunci $U \in V(a)$.
- 3) Dacă $a_1 \neq a_2$ atunci $\exists V_1 \in V(a_1)$ și $\exists V_2 \in V(a_2)$ astfel încât $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
- 4) Dacă $V_i \in V(a), i = \overline{1, m}$, atunci $\bigcap_{i=1}^m V_i \in V(a)$.

5) Pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists W \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $V \in \mathcal{V}(b)$ pentru orice $b \in W$.

Demonstrație

Proprietățile 1) și 2) sunt evidente. Dacă $a_1 \neq a_2$ atunci $\|a_1 - a_2\| = r > 0$. Se observă imediat că $B\left(a_1; \frac{r}{3}\right) \cap B\left(a_2; \frac{r}{3}\right) = \Phi$, deci am demonstrat 3).

Fie $V_i \in \mathcal{V}(a)$ și fie $r_i > 0$ astfel încât $V_i \supset B(a, r_i)$, $i = \overline{1, m}$. Dacă notăm cu $r = \min\{r_i; 1 \leq i \leq m\}$, atunci $\bigcap_{i=1}^m V_i \supset B(a; r)$, de unde rezultă că $\bigcap_{i=1}^m V_i \in \mathcal{V}(a)$.

În sfârșit, fie $V \in \mathcal{V}(a)$ și $r > 0$ astfel încât $V \supset B(a, r)$. Dacă notăm cu $W = B\left(a, \frac{r}{2}\right)$, atunci pentru $\forall b \in W$ și $\forall x \in B\left(b, \frac{r}{2}\right)$ avem $\|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, de unde rezultă că $B\left(b, \frac{r}{2}\right) \subset V$, deci $V \in \mathcal{V}(b)$.

Observația 3.7.2. Un șir $\{x_k\}$ de elemente din \square^n este convergent în \square^n și are limita $l \in \square^n$ dacă și numai dacă $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, \exists un rang $k_V \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_k \in V$ pentru orice $k \geq k_V$. (Cu alte cuvinte, în afara oricărei vecinătăți V a lui l se află un număr finit de termeni ai șirului).

Într-adevăr, fie $V \in \mathcal{V}(l)$, și fie $\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $V \supset B(l, \varepsilon)$. Dacă $x_k \xrightarrow{\square^n} l$, atunci $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\|x_k - l\| < \varepsilon$ pentru orice $k \geq k_\varepsilon$. Acest lucru revine la $x_k \in B(l, \varepsilon) \subset V$, $\forall k \geq k_\varepsilon$.

Reciproc, fie $\varepsilon > 0$ și fie $V = B(l, \varepsilon)$. Dacă $\exists k_V = k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_k \in V$ pentru orice $k \geq k_\varepsilon$, atunci $\|x_k - l\| < \varepsilon$ pentru orice $k \geq k_\varepsilon$, deci $x_k \xrightarrow{\square^n} l$.

Definiția 3.7.3. Un punct a se numește punct interior pentru mulțimea $A \subset \square^n$ dacă există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $V \subset A$. Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii A se numește interiorul mulțimii A și se notează cu $\overset{\circ}{A}$. Evident $\overset{\circ}{A} \subset A$. Mulțimea A se numește deschisă dacă $A = \overset{\circ}{A}$.

Observația 3.7.3. Pentru orice $a \in \square^n$ și orice $r > 0$ mulțimea $B(a, r)$ este deschisă. Într-adevăr, fie $b \in B(a, r)$ și fie $0 < \varepsilon < r - \|b - a\|$.

Dacă $x \in B(a, \varepsilon)$ atunci $\|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\| < \varepsilon + \|b - a\| < r$. Rezultă că $x \in B(a, r)$, deci $B(a, \varepsilon) \subset B(a, r)$. Așadar orice punct $b \in B(a, r)$ este punct interior al mulțimii $B(a, r)$, deci $B(a, r)$ este o mulțime deschisă.

Exemple

1. Dacă $X = Y$, atunci orice interval simetric $(a - r, a + r)$ este o mulțime deschisă.

Fie $(\alpha, \beta) \subset Y$ un interval deschis oarecare. Dacă notăm cu $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$ și cu $r = \frac{\beta - \alpha}{2}$, atunci $(\alpha, \beta) = (a - r, a + r)$. Rezultă că orice interval deschis din Y este o mulțime deschisă.

2. Dacă $X = \mathbb{R}^2$, atunci interiorul oricărui cerc (pătrat) este o mulțime deschisă.

3. Dacă $X = \mathbb{R}^3$, atunci interiorul oricărei sfere (cub) este o mulțime deschisă.

Proprietățile mulțimilor deschise sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

Propoziția 3.7.2.

(i) O reuniune oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

(ii) Orice intersecție finită de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

(iii) Mulțimea \mathbb{R}^n și mulțimea vidă \emptyset sunt mulțimi deschise.

Demonstrație

(i) Fie $\{D_i\}_{i \in I}$ o familie de mulțimi deschise și fie $D = \bigcup_{i \in I} D_i$. Dacă $a \in D$,

atunci există $i_0 \in I$ astfel încât $a \in D_{i_0}$. Cum D_{i_0} este deschisă, rezultă că există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $V \subset D_{i_0}$. Evident $V \subset D$, de unde rezultă că $x = a$ este un punct interior pentru D , deci D este deschisă.

(ii) Fie D_1, \dots, D_m mulțimi deschise și $A = \bigcap_{i=1}^m D_i$. Dacă $a \in A$, atunci $a \in D_i$

oricare ar fi $i \in I$. Cum D_i este deschisă rezultă că există $V_i \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$V \subset D_i$. Dacă notăm cu $V = \bigcap_{i=1}^m V_i$, atunci $V \in \mathcal{V}(a)$ și $V \subset A$. Rezultă că $x = a$ este

punct interior pentru A , deci A este deschisă. Proprietatea (iii) este evidentă.

Propoziția 3.7.2. ne permite să dăm exemple mai variate de mulțimi deschise. De exemplu în Y , orice reuniune de intervale deschise este o mulțime deschisă. În

\square^2 , diverse reuniuni și intersecții de interioare de cercuri sau pătrate sunt exemple de mulțimi deschise etc.

Definiția 3.7.4. Un punct $a \in \square^n$ se numește punct aderent pentru mulțimea $A \subset \square^n$ dacă oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(a)$ rezultă $V \cap A \neq \emptyset$. Mulțimea tuturor punctelor aderente ale mulțimii A se notează cu \bar{A} și se numește închiderea mulțimii A . Evident $A \subset \bar{A}$. Mulțimea A se numește închisă dacă $A = \bar{A}$.

Teorema 3.7.1. Condiția necesară și suficientă ca mulțimea $A \subset \square^n$ să fie închisă este ca mulțimea sa complementară $CA = \square^n \setminus A$ să fie deschisă.

Demonstrație

Necesitatea. Presupunem că mulțimea A este închisă și demonstrăm că mulțimea CA este deschisă.

Dacă $b \in CA$, atunci $b \notin A = \bar{A}$. Prin urmare, b nu este punct aderent pentru A . Rezultă că există $V \in \mathcal{V}(b)$, astfel încât $V \cap A = \emptyset$, deci $V \subset CA$. Așadar, b este punct interior pentru CA , deci CA este deschisă.

Suficiența. Presupunem că mulțimea CA este deschisă și demonstrăm că A este închisă. Aceasta revine la a arăta că $\bar{A} \subset A$, ceea ce este echivalent cu $CA \subset C\bar{A}$.

Fie deci $b \in CA$. Cum CA este deschisă, rezultă că există $V \in \mathcal{V}(b)$ astfel încât $V \subset CA$. Atunci $V \cap \bar{A} = \emptyset$, de unde rezultă că b nu este punct aderent pentru A , deci $b \in C\bar{A}$.

Observația 3.7.4. Bila închisă $\check{B}(a, r)$ este o mulțime închisă, $\forall a \in \square^n$ și $\forall r > 0$.

Din Teorema 3.7.1. rezultă că este suficient să arătăm că mulțimea $C\check{B}(a, r) = \{x \in \square^n; \|x - a\| > r\}$ este o mulțime deschisă.

Fie $b \in C\check{B}(a, r)$ și fie $0 < \varepsilon < \|b - a\| - r$. Dacă $x \in B(b, \varepsilon)$, atunci $\|x - b\| < \varepsilon$. În continuare avem:

$$\|b - a\| \leq \|b - x\| + \|x - a\| < \|b - a\| - r + \|x - a\|,$$

de unde rezultă că $\|x - a\| > r$, deci că $x \in \check{B}(a, r)$.

Așadar, $B(b, \varepsilon) \subset \check{B}(a, r)$, deci b este punct interior pentru $\check{B}(a, r)$. Cum b a fost arbitrar rezultă că $\check{B}(a, r)$ este deschisă.

Exemple

1. Dacă $X = \mathbb{Y}$, atunci $\check{B}(a, r) = [a - r, a + r]$. Rezultă că orice interval simetric închis este o mulțime închisă. Cum orice interval închis $[\alpha, \beta]$ se poate reprezenta ca un interval închis simetric, rezultă că orice interval închis din \mathbb{Y} este o mulțime închisă.

2. Fie $X = \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ și $r > 0$. Din punct de vedere geometric, mulțimea $\check{B}_2(a, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\}$ reprezintă discul închis (cercul inclusiv circumferința) cu centrul în a și de rază r , iar mulțimea $\check{B}_\infty(a, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| \leq r, |x_2 - a_2| \leq r\}$ reprezintă pătratul închis (inclusiv laturile) cu centrul în a și de latură $2r$.

3. Dacă $X = \mathbb{R}^3$, atunci $\check{B}_2(a, r)$ (sfera închisă cu centrul în a și de rază r) este o mulțime închisă.

De asemenea, mulțimea $\check{B}_\infty(a, r)$, care reprezintă cubul închis (inclusiv fețele) cu centrul în a și de muchie $2r$ este o mulțime închisă.

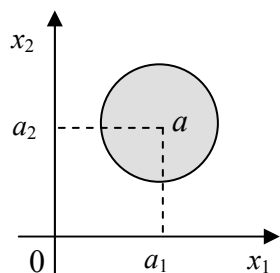


Fig. 4

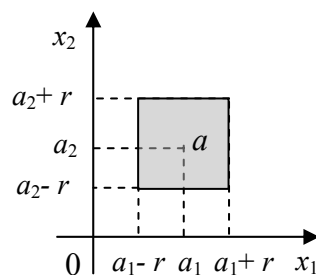


Fig. 5

Proprietățile mulțimilor închise sunt puse în evidență de următoarea propoziție.

Propoziția 3.7.3.

- (i) Orice reuniune finită de mulțimi închise este o mulțime închisă.
- (ii) O intersecție oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.
- (iii) Mulțimile \mathbb{R}^n și \emptyset sunt închise.

Demonstrație

Demonstrația rezultă din Teorema 3.7.1, Propoziția 3.7.2 și relațiile De Morgan. De exemplu.

- (i) Fie A_1, A_2, \dots, A_m mulțimi închise și fie $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$.

Din Teorema 3.7.1. rezultă că este suficient să demonstrăm că mulțimea CA este deschisă. Conform relațiilor De Morgan, $CA = \bigcap_{i=1}^m CA_i$. Cum CA_i este deschisă pentru orice $i = \overline{1, m}$, din Propoziția 3.7.2 rezultă că $\bigcap_{i=1}^m CA_i = CA$ este deschisă.

Definiția 3.7.5. Se numește frontiera mulțimii A și se notează cu $Fr A$, mulțimea:

$$Fr A = \overline{A} \cap \overline{CA}.$$

Lema 3.7.1. Pentru orice $A \subset \square^n$ avem:

$$C \overset{\circ}{A} = \overline{CA} \text{ și } \overline{CA} = \overset{\circ}{B} \text{ unde } B = CA.$$

Demonstrație

Dacă $b \in C \overset{\circ}{A}$, atunci $b \notin \overline{A}$, deci oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(b)$ avem $V \cap CA \neq \emptyset$. Rezultă că $b \in \overline{CA}$. Reciproc, dacă $b \in \overline{CA}$, atunci $V \cap CA \neq \emptyset$. Rezultă că $b \in \overset{\circ}{A}$, deci $\overline{CA} \subset C \overset{\circ}{A}$. În mod asemănător se demonstrează cealaltă egalitate.

Propoziția 3.7.4. Fie A o mulțime oarecare din \square^n . Atunci

- (i) $\overset{\circ}{A}$ este o mulțime deschisă.
- (ii) \overline{A} este o mulțime închisă.
- (iii) $Fr A$ este o mulțime închisă și $Fr A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Demonstrație

(i) Fie $a \in \overset{\circ}{A}$. Atunci există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$.

Dacă notăm cu $V = B(a, r)$, atunci conform Observației 3.7.3. V este o mulțime deschisă. Așadar, avem: $V = \overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{A}$, de unde rezultă că a este punct interior pentru $\overset{\circ}{A}$, deci $\overset{\circ}{A}$ este o mulțime deschisă.

(ii) Din Lema 3.7.1. rezultă că $\overline{CA} = \overset{\circ}{B}$ unde $B = CA$. Așadar, \overline{CA} este deschisă, de unde rezultă că mulțimea \overline{A} este închisă (Vezi Teorema 3.7.1.).

(iii) Din Lema 3.7.1. rezultă:

$$Fr A = \overline{A} \cap \overline{CA} = \overline{A} \cap C \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Faptul că $Fr A$ este închisă rezultă din (ii).

Teorema 3.7.2. Fie $A \subset \square^n$ o mulțime oarecare. Atunci:

(i) Un punct $b \in \square^n$ aparține închiderii \bar{A} a mulțimii A , dacă și numai dacă există un șir $\{a_n\}$ de puncte din A , $a_n \rightarrow b$.

(ii) Mulțimea A este închisă dacă și numai dacă limita oricărui șir convergent de elemente din A aparține lui A .

Demonstrație

(i) Dacă $b \in \bar{A}$, atunci $A \cap B(b, r) \neq \emptyset$, $\forall r > 0$. În particular, $B\left(b, \frac{1}{m}\right) \cap A \neq \emptyset$, $\forall m \in \square^*$. Fie $a_m \in B\left(b, \frac{1}{m}\right) \cap A$. Atunci $a_m \in A$ și $a_m \rightarrow b$ deoarece $\|a_m - b\| < \frac{1}{m}$ și $\frac{1}{m} \rightarrow 0$.

Reciproc, dacă $a_m \in A$, $\forall m \in \square^*$ și $a_m \rightarrow b$, atunci $\forall r > 0 \exists m_r \in \square^*$ astfel încât $\|a_m - b\| < r$, $\forall m \geq m_r$. Rezultă că $A \cap B(b, r) \neq \emptyset$, $\forall r > 0$, adică $b \in \bar{A}$.

(i) Fie A o mulțime închisă și fie $\{a_m\}$ un șir de elemente din A , $a_m \rightarrow b$. Din (i) rezultă că $b \in \bar{A}$. Cum A este închisă, rezultă că $b \in A$. Reciproc, dacă $b \in \bar{A}$, atunci din (i) rezultă că există un șir $\{a_m\}$ de elemente din A , $a_m \rightarrow b$. Conform ipotezei rezultă că $b \in A$, deci $\bar{A} \subset A$.

Definiția 3.7.6. Un punct $b \in \square^n$ se numește punct de acumulare pentru mulțimea $A \subset \square^n$, dacă oricare ar fi V vecinătate a lui b , există $a \in A \cap V$, $a \neq b$. Mulțimea punctelor de acumulare ale lui A se notează cu A' . (Incluziunea $A' \subset \bar{A}$ este evidentă).

Teorema 3.7.3. Fie $A \subset \square^n$ o mulțime oarecare. Atunci:

(i) Un punct $b \in A'$ dacă și numai dacă există un șir $\{a_k\}$ de elemente din A , $a_k \neq a_l$ dacă $k \neq l$, astfel încât $a_k \rightarrow b$.

(ii) A este închisă dacă și numai dacă $A' \subset A$.

Demonstrație

(i) Fie $b \in A'$. Atunci există $a_1 \in A \cap B(b, 1)$, $a_1 \neq b$. Fie $r_1 = \|a_1 - b\|$ și fie $a_2 \in A \cap B\left(b, \frac{r_1}{2}\right)$. Evident $a_2 \neq a_1$ și $\|a_2 - b\| < \frac{r_1}{2} < \frac{1}{2}$. Fie $r_2 = \|a_2 - b\|$ și fie $a_3 \in B\left(b, \frac{r_2}{2}\right) \cap A$, $a_3 \neq b$.

Evident $a_3 \neq a_2$, $a_3 \neq a_1$ și $\|a_3 - a\| < \frac{r_2}{2} < \frac{1}{2^2}$. Prin inducție completă se arată că există un șir $\{a_k\}$ de elemente din A , $a_k \neq a_l$ pentru $k \neq l$ și $\|a_k - b\| < \frac{1}{2^{k-1}}$, deci $a_k \rightarrow b$.

(ii) Dacă A este închisă, atunci $\bar{A} \subset A$. Cum $A' \subset \bar{A}$ rezultă că $A' \subset A$. Reciproc, fie $b \in \bar{A}$. Din Teorema 3.7.2. rezultă că există un șir $\{a_k\}$ de puncte din A , $a_k \rightarrow b$. Dacă $\{a_k\}$ are o infinitate de termeni distincți, din (i) rezultă că $b \in A'$. Cum $A' \subset A$, rezultă că $b \in A$. Dacă $\{a_k\}$ nu are o infinitate de termeni distincți, atunci începând de la un anumit rang $a_k = b$, deci $b \in A$. Am dovedit incluziunea $\bar{A} \subset A$, dacă A este închisă.

Observația 3.7.5. Din Teorema 3.7.3. rezultă că dacă b este punct de acumulare pentru mulțimea A , atunci în orice vecinătate a sa se află o infinitate de elemente din A , distincte. Rezultă că mulțimile finite nu au puncte de acumulare, deci sunt închise în virtutea Teoremei 3.7.3. Mulțimile care nu au puncte de acumulare se mai numesc și mulțimi discrete. Există și mulțimi infinite discrete. De exemplu, mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ este discretă, deoarece, $\forall b \in \mathbb{Z}$ și $\forall V \in \mathcal{V}(b)$ mulțimea $V \cap \mathbb{Z}$ este finită.

Definiția 3.7.7. O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește mărginită dacă există $M > 0$ astfel încât $\|x\| \leq M$, oricare ar fi $x \in A$.

Lema 3.7.2. (Cesàro). Orice șir mărginit de elemente din \mathbb{R}^n conține un subșir convergent.

Demonstrație

Prezentăm demonstrația pentru cazul particular $n = 2$.

Fie $z_k = (x_k, y_k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ un șir de elemente din \mathbb{R}^2 mărginit. Rezultă că $\exists M > 0$ astfel încât $\|z_k\|_\infty \leq M$, $\forall k$. În particular, rezultă că șirurile de numere reale $\{x_k\}$ și $\{y_k\}$ sunt mărginite. Din Lema Cesàro pentru șiruri de numere reale rezultă că există un subșir $\{x_{k_p}\}$ convergent. Fie $a = \lim_{p \rightarrow \infty} x_{k_p}$. Aplicând din nou Lema Cesàro subșirului $\{y_{k_p}\}$ rezultă că există un subșir $\{y_{k_{p_l}}\}$ convergent în \mathbb{R} la b . Din Teorema 3.1.1 rezultă că subșirul $z_{k_{p_l}} = (x_{k_{p_l}}, y_{k_{p_l}})$, $l \in \mathbb{N}^*$ este convergent în \mathbb{R}^2 și are limita $z = (a, b)$.

În teoria limitelor de funcții este important de știut când o mulțime are puncte de acumulare. Teorema care urmează ne dă o condiție suficientă ca o mulțime din \square^n să aibă puncte de acumulare.

Teorema 3.7.4. (Weierstrass-Bolzano). *Orice mulțime mărginită și infinită din \square^n are cel puțin un punct de acumulare.*

Demonstrație

Fie $A \subset \square^n$ o mulțime mărginită și infinită. Mulțimea fiind mărginită, conține un șir $\{x_k\}$ de elemente distincte. Deoarece A este mărginită, rezultă că $\{x_k\}$ este mărginit.

Din Lema 3.7.2. rezultă că există un subșir $\{x_{k_p}\}$, $x_{k_p} \rightarrow l \in \square^n$. Evident l este punct de acumulare pentru A .

Definiția 3.7.8. *O mulțime $K \subset \square^n$ se numește compactă dacă este închisă și mărginită.*

Din Propoziția 3.7.3. rezultă că o reuniune finită de mulțimi compacte este o mulțime compactă, și o intersecție oarecare de mulțimi compacte este o mulțime compactă. Este de asemenea clar (din Observația 3.7.5), că orice mulțime finită este compactă.

3.8. Limite de funcții

În cele ce urmează, prin funcție vectorială înțelegem orice funcție F definită pe o mulțime A din \square^n cu valori în \square^m . Așadar, pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subset \square^n$, imaginea $y = F(x) \in \square^m$, deci este de forma

$$F(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad y_i \in \square, \quad i = \overline{1, m}.$$

Dacă notăm cu $f_i(x) = y_i$, $\forall x \in A$, $\forall i = \overline{1, m}$, atunci obținem m funcții scalare $f_i: A \subset \square^n \rightarrow \square$, $i = \overline{1, m}$, pe care le numim componentele scalare ale funcției vectoriale F . Prin urmare avem:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \quad \forall x \in A \quad \text{sau}$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_m): A \subset \square^n \rightarrow \square^m.$$

Exemple

1. Funcția $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ este o funcție vectorială definită pe mulțimea $A = [0, 2\pi] \subset \square$ cu valori în \square^2 .

2. Funcția $r(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u)$, $u \in [0, \pi]$ și $v \in [0, 2\pi]$ este o funcție vectorială definită pe dreptunghiul $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ cu valori în \mathbb{R}^3 .

Definiția 3.8.1. Fie $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție vectorială, $a = (a_1, \dots, a_n)$ un punct de acumulare pentru A și $L \in \mathbb{R}^m$. Spunem că L este limita funcției vectoriale F în punctul a și notăm cu $L = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$, dacă pentru orice vecinătate U a lui L , există o vecinătate V a lui a , astfel încât $F(x) \in U$, oricare ar fi $x \in V \cap A$, $x \neq a$.

Teorema 3.8.1. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $L = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$.
- (ii) Pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in A$, $x \neq a$ cu proprietatea $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ rezultă $\|F(x) - L\| < \varepsilon$ (norma $\| \cdot \|$ este oricare din normele $\| \cdot \|_\infty$ sau $\| \cdot \|_2$).
- (iii) Pentru orice șir $\{a_k\}$ de elemente din A , $a_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} a$, $a_k \neq a$ pentru $\forall k \in \mathbb{N}^*$, rezultă $F(a_k) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} L$.

Demonstrație

(i) \Rightarrow (ii) Fie $\varepsilon > 0$ și fie $U = B(L, \varepsilon)$. Evident $U \in \mathcal{V}(L)$ și conform (i) $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ (depinzând în general de ε) astfel încât $F(x) \in U$, $\forall x \in V \cap A$, $x \neq a$.

Deoarece V este vecinătate pentru a rezultă că $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $V \supset B(a, \delta_\varepsilon)$. Fie $x \in A$, $x \neq a$ cu $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$. Atunci $x \in V \cap A$, $x \neq a$. Conform (i) $F(x) \in U$, deci $\|F(x) - L\| < \varepsilon$.

(ii) \Rightarrow (iii) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și fie $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietățile din (ii). Dacă $\{x_k\}$ este un șir de elemente din A , $x_k \neq a$, $\forall k$ și $x_k \rightarrow a$, atunci $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\|x_k - a\| < \delta_\varepsilon$ pentru orice $k \geq k_\varepsilon$. Din (ii) rezultă că $\|F(x_k) - L\| < \varepsilon$, $\forall k \geq k_\varepsilon$, deci $F(x_k) \rightarrow L$.

(iii) \Rightarrow (i). Presupunem prin absurd că (i) nu este adevărată, deci că $\exists U_0 \in \mathcal{V}(L)$ astfel încât oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists x_V \in V \cap A$, $x_V \neq a$ cu proprietatea că $F(x_V) \notin U_0$. În particular, pentru $V = B\left(a, \frac{1}{k}\right)$, rezultă că

$\exists x_k \in A \cap B\left(a, \frac{1}{k}\right)$, $x_k \neq a$ astfel încât $F(x_k) \notin U_0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right)$ rezultă că $\|x_k - a\| < \frac{1}{k}$, deci că $x_k \rightarrow a$. Din (iii) rezultă acum că $F(x_k) \rightarrow L$. Acest lucru contrazice faptul că $F(x_k) \notin U_0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ și cu aceasta demonstrația este terminată.

Observația 3.8.1. Fie $f: A \subset Y \rightarrow Y$, a un punct de acumulare pentru A și $l \in Y$. Din Teorema 3.8.1. rezultă că $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in A, x \neq a$ cu proprietatea $|x - a| < \delta_\varepsilon$ rezultă că $|f(x) - l| < \varepsilon$ (deoarece pe Y , $\|x\|_2 = \|x\|_\infty = |x|$).

Am reobținut astfel definiția limitei unei funcții învățate în liceu.

Teorema 3.8.2. Fie $F = (f_1, f_2, \dots, f_m): A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, a un punct de acumulare pentru A și $L = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$. Atunci, $L = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$ dacă și numai dacă $l_i = \lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$, oricare ar fi $i = \overline{1, m}$.

Demonstrație

Fie $\{x_k\}$ un șir de elemente din A , $x_k \neq a$ pentru orice k , $x_k \rightarrow a$. Din Teorema 3.8.1. rezultă că $F(x_k) = (f_1(x_k), \dots, f_m(x_k)) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} L = (l_1, \dots, l_m)$, ceea ce este echivalent cu faptul că $f_i(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} l_i, \forall i = \overline{1, m}$, deci că $l_i = \lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$, $i = \overline{1, m}$.

Reciproc, dacă $l_i = \lim_{x \rightarrow a} f_i(x), \forall i = \overline{1, m}$, atunci $f_i(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} l_i, \forall i = \overline{1, m}$.

Din Teorema 3.1.1 rezultă că

$$F(x_k) = (f_1(x_k), \dots, f_m(x_k)) \xrightarrow{\mathbb{R}^m} L = (l_1, \dots, l_m),$$

deci că $L = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$.

Observația 3.8.2. Din Teorema 3.8.2. rezultă că studiul limitei unei funcții vectoriale revine la studiul limitelor componentelor sale scalare. Din această cauză este suficient să studiem în continuare numai limite de funcții scalare, adică funcții de forma $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Fie $a = (a_1, \dots, a_n)$ un punct de acumulare al mulțimii A și fie $l \in Y$. Dacă folosim norma $\| \cdot \|_\infty$, atunci $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall a \in A$, cu proprietatea $|x_1 - a_1| < \delta_\varepsilon, \dots, |x_n - a_n| < \delta_\varepsilon$ rezultă că $|f(x_1, \dots, x_n) - l| < \varepsilon$.

Să considerăm acum cazul și mai simplu când $n = 2$.

Fie deci $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și $l \in Y$. Vom folosi notațiile (x, y) în loc de (x_1, x_2) și (a, b) în loc de (a_1, a_2) .

Din cele de mai sus rezultă că $l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel

încât, $\forall (x, y) \in A$ cu proprietatea $|x - a| < \delta_\varepsilon, |y - b| < \delta_\varepsilon$ rezultă $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.

Din Teorema 3.8.1. rezultă că această definiție este echivalentă cu următoarea: $l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ dacă și numai dacă pentru orice șir (x_n, y_n) de elemente din A ,

$(x_n, y_n) \neq (a, b)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (a, b)$ rezultă că șirul $f(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} l$.

Exemple

1. Fie $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Observăm că există $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = 0$.

Într-adevăr, deoarece $|x^3| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$ și $|y^3| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$ rezultă că

$$|f(x, y)| \leq \frac{2(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (0, 0)$ atunci $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow 0$ și deci $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$.

Am arătat deci că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

2. Fie funcția $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Vom arăta că nu

există $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$.

Într-adevăr, considerăm șirurile $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ respectiv $\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Ambele șiruri converg în \square^2 la $(0,0)$. Pe de altă parte $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ și $f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{3}{5}$, de unde rezultă că nu există $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Teorema 3.8.3. (Cauchy-Bolzano). Fie $f: A \subset \square^n \rightarrow Y$, și $a \in \square^n$ un punct de acumulare pentru A . Condiția necesară și suficientă să existe $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \square$ este că pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, $\forall x', x'' \in V \cap A$, $x' \neq a$, $x'' \neq a$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Demonstrație

Necesitatea. Fie $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \square$. Atunci, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$\forall x \in V \cap A$, $x \neq a$ avem $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dacă $x', x'' \in V \cap A$, $x' \neq a$, $x'' \neq a$,

atunci $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - l| + |l - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Suficiența. Fie $\varepsilon > 0$ și $V \in \mathcal{V}(a)$ cu proprietățile din enunțul teoremei și fie $\{x_k\}$ un șir de elemente din A , $x_k \neq a$ pentru orice $k \in \square^*$, $x_k \rightarrow a$. Atunci există un rang $k_\varepsilon \in \square^*$ (acest rang depinde de V care la rândul său depinde de ε) astfel încât $x_k \in V$, $\forall k \geq k_\varepsilon$. Rezultă că $|f(x_k) - f(x_l)| < \varepsilon$ pentru orice k și $l \geq k_\varepsilon$, deci că $\{f(x_k)\}$ este un șir fundamental în Y . Din criteriul general de convergență al lui Cauchy rezultă că $\{f(x_k)\}$ este convergent. Din Teorema 3.8.1, punctul (iii), rezultă că există $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Pentru o funcție $f: A \subset \square^n \rightarrow Y$ se pot considera pe lângă limita definită anterior, în care variabilele x_1, x_2, \dots, x_n tind simultan la a_1, a_2, \dots, a_n și limite iterate, în care variabilele x_1, \dots, x_n tind pe rând la a_1, \dots, a_n .

Pentru a lămuri această problemă considerăm cazul unei funcții de două variabile. Fie dreptunghiul $D = \{(x, y) \in \square^2 \mid |x - a| < h, |y - b| < k\}$ și $f: A \rightarrow Y$.

Presupunem că pentru orice $x \in (a - h, a + h)$ există $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$. Evident, această limită depinde de x și definește o funcție $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$,

$x \in (a-h, a+h)$. Dacă presupunem în plus că există $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$, atunci această limită se notează cu $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ și se numește limita iterată după y și x a funcției f în punctul (a, b) . În mod analog se definește $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$.

Limitele iterate nu sunt în general egale. De exemplu, dacă $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ atunci se constată imediat că $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$ și $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$. Remarcăm faptul că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ nu există în acest caz.

(Vezi Exemplul 2).

Pentru funcția $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$, $y \neq 0$, avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, deoarece

$\left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x|$. Observăm de asemenea că $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ în timp ce cealaltă limită iterată $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ nu există.

Legătura dintre limitele iterate și limita în raport cu ansamblul variabilelor $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ este pusă în evidență de următoarea propoziție.

Propoziția 3.8.1. Dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = l$ și dacă pentru orice

$x \in (a-h, a+h)$ există $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, atunci există $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = l$.

Demonstrație

Pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x, y) \in D$ cu proprietatea $|x-a| < \delta_\varepsilon, |y-b| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x, y) - l| < \varepsilon$. Trecând la limită după y obținem: $|\varphi(x) - l| \leq \varepsilon$ pentru orice $x \in (a-h, a+h)$ cu proprietatea $|x-a| < \delta_\varepsilon$. Rezultă că există $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = l$, deci că există $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = l$.

Corolar. Dacă există limitele iterate și sunt diferite, atunci nu există

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y).$$

3.9. Funcții continue

Fie $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pentru orice submulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ notăm cu $F(A) = \{F(x) \mid x \in A\}$. Evident $F(A) \subset \mathbb{R}^m$ și se numește imaginea directă a mulțimii A prin F . Pentru orice submulțime $B \subset \mathbb{R}^m$ notăm cu $F^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \in B\}$. Mulțimea $F^{-1}(B)$ se numește preimaginea mulțimii B prin F .

Definiția 3.9.1. Fie $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ și $a \in A$. Spunem că F este continuă în punctul a dacă $\forall U \in \mathcal{V}[F(a)], \exists V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $F(V \cap A) \subset U$. Dacă F este continuă în fiecare punct din A , atunci F este continuă pe A .

Observația 3.9.1. Dacă $a \in A$ este punct de acumulare pentru A , atunci F este continuă în $x = a$ dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$. Dacă $a \in A$ nu este punct de acumulare pentru A (un astfel de punct se numește punct izolat), atunci există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $V \cap A = \{a\}$ și evident $F(V \cap A) \subset U, \forall U \in \mathcal{V}[F(a)]$. Rezultă că orice funcție este continuă într-un punct izolat din domeniul său de definiție.

Teorema 3.9.1. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) F este continuă în $a \in A$
- (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in A$ cu proprietatea $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ rezultă că $\|F(x) - F(a)\| < \varepsilon$
- (iii) Pentru orice șir $\{x_k\}$ de elemente din A , $x_k \rightarrow a$, rezultă $F(x_k) \rightarrow F(a)$.

Demonstrația rezultă din Teorema 3.8.1 și Observația 3.9.1, cu mențiunea că dacă $a \in A$ este un punct izolat, atunci oricare din afirmațiile (i)-(iii) este evidentă.

Teorema 3.9.2. *O funcție vectorială $F = (f_1, \dots, f_n): A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă și numai dacă fiecare componentă a sa $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în a .*

Demonstrația rezultă din Teorema 3.8.2 și Observația 3.9.1.

Din Teorema 3.9.2. rezultă că este suficient să studiem continuitatea funcțiilor scalare.

Fie $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ și $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Dacă folosim norma $\| \cdot \|_\infty$, atunci f este continuă în a dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ cu proprietatea $|x_1 - a_1| < \delta_\varepsilon, \dots, |x_n - a_n| < \delta_\varepsilon$ rezultă

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon.$$

În continuare vom considera cazul funcțiilor de 2 variabile și vom folosi notația (x, y) în loc de (x_1, x_2) și (a, b) în loc de (a_1, a_2) .

Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ și $(a, b) \in A$, atunci f este continuă în (a, b) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x, y) \in A$ cu $|x - a| < \delta_\varepsilon, |y - b| < \delta_\varepsilon$ rezultă $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$. Această definiție este echivalentă cu următoarea: pentru orice șir $\{(x_n, y_n)\}$ de puncte din A , $(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} (a, b)$ rezultă că $f(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} f(a, b)$.

Exemple

1. Funcția $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 5$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ este continuă pe \mathbb{R}^2 , deoarece $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ și $\forall (x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$ rezultă că $f(x_n, y_n) \rightarrow f(a, b)$.

$$2. \text{Funcția } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă pe \mathbb{R}^2 .

Într-adevăr, dacă $(a, b) \neq (0, 0)$ afirmația rezultă din definiția cu șiruri. Continuitatea în origine rezultă din faptul că, așa cum s-a arătat în subcap. 3.8,

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$3. \text{ Funcția } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nu este continuă în origine, deoarece, așa cum s-a arătat în subcap. 3.8, această funcție nu are limită în acest punct.

Definiția 3.9.2. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ și $A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in A\}$, $i = \overline{1, n}$. Spunem că f este continuă în raport cu variabila x_i în punctul a dacă funcția de o variabilă:

$$t \rightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n): A_i \rightarrow \mathbb{R} \text{ !}$$

este continuă în punctul $t = a_i$.

Observația 3.9.2. Dacă $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $a \in A$, atunci f este continuă în a în raport cu orice variabilă x_i , $i = \overline{1, n}$.

Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. Există funcții continue într-un punct în raport cu fiecare variabilă dar care nu sunt continue în acel punct.

$$\text{Exemplu. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Observăm că f nu este continuă în origine, în raport cu ansamblul variabilelor, deoarece nu are limită în origine.

Într-adevăr, șirurile $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ și $\left\{\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ converg în \mathbb{R}^2 la $(0, 0)$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{5}.$$

Pe de altă parte, $f(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că funcția $x \rightarrow f(x, 0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în $x = 0$, deci f este continuă în $(0, 0)$ în raport cu x . Analog, f este continuă în $(0, 0)$ în raport cu y .

Teorema 3.9.3. Fie $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$ și $G: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Dacă F este continuă în $a \in A$ și G este continuă în $b = F(a) \in B$, atunci funcția compusă $H = G \circ F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ este continuă în punctul a .

Demonstrație

Demonstrația rezultă din Teorema 3.9.1 punctul (iii). Într-adevăr, dacă $\{x_k\}$ este un șir oarecare de elemente din A , $x_k \rightarrow a$, atunci $F(x_k) \rightarrow F(a) = b$ și $G[F(x_k)] \rightarrow G[F(a)]$. Așadar, $H(x_k) \rightarrow H(a)$, deci H este continuă în a .

Teorema 3.9.4. *Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ este continuă în punctul $a \in A$ și $f(a) > 0$ [$f(a) < 0$], atunci există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) > 0$ [$f(x) < 0$] oricare ar fi $x \in V \cap A$.*

Demonstrație

Presupunem $f(a) > 0$ și notăm cu $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$. Deoarece f este continuă în $x = a$ rezultă că există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Dacă notăm cu $V = B(a, \delta_\varepsilon)$, atunci $V \in \mathcal{V}(a)$ și pentru orice $x \in V \cap A$ avem:

$$\frac{1}{2}f(a) = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon = \frac{3}{2}f(a), \text{ deci } f(x) > 0.$$

Teorema 3.9.5. *Fie $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dacă f și g sunt continue în $a \in A$, atunci funcțiile $\alpha f + \beta g$ și fg sunt continue în a . Dacă $g(a) \neq 0$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este continuă în a .*

Demonstrație

Fie $\{x_k\}$ un șir de elemente din A , $x_k \rightarrow a$. Din ipoteză rezultă că $f(x_k) \rightarrow f(a)$ și $g(x_k) \rightarrow g(a)$. Ținând seama de proprietățile șirurilor convergente de numere reale rezultă că:

$$(\alpha f + \beta g)(x_k) = \alpha f(x_k) + \beta g(x_k) \rightarrow \alpha f(a) + \beta g(a) = (\alpha f + \beta g)(a)$$

$$(fg)(x_k) = f(x_k)g(x_k) \rightarrow f(a)g(a) = (fg)(a),$$

de unde rezultă că $\alpha f + \beta g$ și fg sunt continue în a .

Dacă $g(a) \neq 0$, atunci din Teorema 3.9.4, rezultă că există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V \cap A$. Renunțând, eventual la un număr finit de termeni ai șirului $\{x_k\}$ și renotând termenii acestui șir, putem presupune că $x_k \in V \cap A$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{ deci că } g(x_k) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}^*. \text{ Atunci } \left(\frac{f}{g}\right)(x_k) = \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a), \text{ de unde rezultă că } \frac{f}{g} \text{ este continuă în punctul } a.$$

Teorema 3.9.6. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă pe \mathbb{R}^n
(ii) $F^{-1}(D)$ este deschisă, oricare ar fi $D \subset \mathbb{R}^m$ deschisă.
(iii) $F^{-1}(B)$ este închisă, oricare ar fi $B \subset \mathbb{R}^m$ închisă.

Demonstrație

(i) \Rightarrow (ii). Fie $D \subset \mathbb{R}^m$ deschisă și fie $a \in F^{-1}(D)$ oarecare. Atunci $b = F(a) \in D$ și deoarece D este deschisă, există $U \in \mathcal{V}(b)$ astfel încât $U \subset D$. Cum F este continuă în a , rezultă că $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ cu proprietatea că $F(V) \subset U \subset D$, deci $V \subset F^{-1}(U) \subset F^{-1}(D)$. Așadar, a este punct interior pentru $F^{-1}(D)$, deci $F^{-1}(D)$ este deschisă.

(ii) \Rightarrow (i) Fie $a \in \mathbb{R}^n$ oarecare și fie $b = F(a)$.

Dacă $U \in \mathcal{V}(b)$, atunci există $r > 0$ astfel încât $U \supset B(b, r)$. Cum $B(b, r)$ este deschisă, din (ii) rezultă că $V = F^{-1}(B(b, r))$ este deschisă. Evident $V \in \mathcal{V}(a)$ și $F(V) \subset U$, deci F este continuă în a .

Echivalența (ii) \Leftrightarrow (iii) rezultă din Teorema 3.7.1. și din observația imediată $CF^{-1}(B) = F^{-1}(CB)$, oricare ar fi $B \subset \mathbb{R}^m$.

3.10. Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte și conexe

Reamintim că prin mulțime compactă în \mathbb{R}^n se înțelege o mulțime închisă și mărginită.

Teorema 3.10.1. Fie $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție continuă. Dacă mulțimea $K \subset \mathbb{R}^n$ este compactă, atunci mulțimea $F(K)$ – imaginea sa directă prin F , este de asemenea compactă.

Demonstrație

Vom arăta că $F(K) = \{F(x); x \in K\}$ este închisă și mărginită. Presupunem pentru început că $F(K)$ nu este mărginită. Atunci $\forall M > 0, \exists x_M \in K$ astfel încât $\|F(x_M)\| > M$.

În particular, pentru $M = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{Q}^*$ există $x_p \in K$ astfel încât

$$\|F(x_p)\| > p. \quad (3.31)$$

Deoarece mulțimea K este mărginită, rezultă că șirul $\{x_p\}$ este mărginit, deci conține un subșir $\{x_{p_l}\}$ convergent (conform lemei Cesàro). Fie $a = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{p_l}$. Cum K este închisă, rezultă că $a \in K$ (vezi Teorema 3.7.2).

În sfârșit, ținând seama de faptul că F este continuă, rezultă că $F(a) = \lim_{l \rightarrow \infty} F(x_{p_l})$. Pe de altă parte, din (3.31) avem $\|F(x_{p_l})\| > p_l$, de unde rezultă că $\lim_{p \rightarrow \infty} \|F(x_{p_l})\| = \|F(a)\| = +\infty$. Am ajuns astfel la o contradicție, deoarece $\|F(a)\|$ este finită.

Vom arăta acum că $F(K)$ este închisă. Fie $b \in \overline{F(K)}$ oarecare. Din Teorema 3.7.2 rezultă că există un șir $\{y_p\}$ de elemente din $F(K)$ astfel încât $y_p \rightarrow b$.

Fie $x_p \in K$ cu proprietatea că $y_p = F(x_p)$. Așa cum am arătat în prima parte a demonstrației există un subșir $x_{p_l} \rightarrow a$, $a \in K$ și $y_{p_l} = F(x_{p_l}) \rightarrow F(a)$. Pe de altă parte $y_{p_l} \rightarrow b$, de unde rezultă că $b = F(a) \in F(K)$.

Am demonstrat că $\overline{F(K)} \subset F(K)$, deci că $F(K)$ este închisă.

Definiția 3.10.1. Fie $f: A \subset \square^n \rightarrow Y$ mărginită. Spunem că f își atinge marginile pe mulțimea A dacă $\exists x_M \in A$ și $x_m \in A$ astfel încât

$$f(x_M) = M = \sup f(A) \text{ și } f(x_m) = m = \inf f(A).$$

Teorema 3.10.2. Fie $f: K \subset \square^n \rightarrow Y$ o funcție continuă. Dacă mulțimea K este compactă atunci f este mărginită pe K și își atinge marginile pe K .

Demonstrație

Faptul că f este mărginită pe K rezultă din Teorema 3.10.1. Fie $M = \sup f(K)$ și $m = \inf f(K)$. Observăm că $M, m \in \overline{f(K)}$. Într-adevăr, dacă V este o vecinătate pentru M , atunci $\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $V \supset (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. Din definiția marginii superioare, rezultă că există $x_\varepsilon \in K$ astfel încât $M - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$. Așadar, $V \cap f(K) \neq \emptyset$. Cum V a fost arbitrar, rezultă că M este punct aderent pentru $f(K)$. Analog se arată că $m \in \overline{f(K)}$. Pe de altă parte $f(K)$ este închisă, deci $M, m \in f(K)$. Așadar, există $x_M \in K$ și $x_m \in K$ astfel încât $M = f(x_M)$ și $m = f(x_m)$.

Definiția 3.10.2. O funcție $F: A \subset \square^n \rightarrow \square^m$ se numește uniform continuă pe A , dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x', x'' \in A$ cu proprietatea $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$ rezultă $\|F(x') - F(x'')\| < \varepsilon$.

Reamintim că F este continuă pe A dacă este continuă în fiecare punct din A , deci dacă $\forall x \in A$ și $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_{x,\varepsilon} > 0$ astfel încât $\forall x' \in A$ cu proprietatea $\|x' - x\| < \delta_{x,\varepsilon}$, rezultă că $\|F(x') - F(x)\| < \varepsilon$.

Prin urmare, deosebirea între continuitatea uniformă și continuitatea pe A , constă în faptul că în cazul continuității uniforme, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$, același pentru toate punctele $x \in A$, astfel încât $\|F(x') - F(x'')\| < \varepsilon$ pentru orice $x', x'' \in A$ care satisfac condiția $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$. Evident, orice funcție uniform continuă pe A este continuă pe A . Afirmația reciprocă nu este în general adevărată.

Exemplu. Funcția $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{Y}$ este continuă pe \mathbb{Y} , dar nu este uniform continuă pe \mathbb{Y} .

Pentru a arăta că f nu este uniform continuă pe \mathbb{Y} , va trebui să arătăm că $\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall \delta > 0$, $\exists x'_\delta, x''_\delta \in \mathbb{Y}$ cu proprietățile:

$$|x'_\delta - x''_\delta| < \delta \text{ și } |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Fie $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ și $\delta > 0$ oarecare. Observăm că dacă $x' = \sqrt{n+1}$ și $x'' = \sqrt{n}$, atunci $|f(x') - f(x'')| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte $x' - x'' = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$. Rezultă că \exists un rang $n_\delta \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \delta$, $\forall n \geq n_\delta$. Dacă alegem $x'_\delta = \sqrt{n_\delta + 1}$ și $x''_\delta = \sqrt{n_\delta}$, atunci $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ și $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = 1 > \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

Așadar f nu este uniform continuă pe \mathbb{Y} .

Propoziția 3.10.1. Dacă $f : I \subset \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ este derivabilă și are derivata mărginită pe intervalul I , atunci f este uniform continuă pe I .

Demonstrație

Fie $M > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in I$. Din Teorema creșterilor finite a lui Lagrange, rezultă că oricare ar fi $x, y \in I$, există ξ între x și y , astfel încât $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Așadar, avem:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \leq M |x - y|, \forall x, y \in I.$$

Fie $\varepsilon > 0$ și fie $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$. Dacă $|x - y| < \delta_\varepsilon$ atunci $|f(x) - f(y)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, deci f este uniform continuă pe I .

Exemplu

Funcția $f(x) = 2x + \sin^2 x$, $x \in Y$ este uniform continuă pe Y . Într-adevăr, $|f'(x)| = |2 + \sin 2x| \leq 3$, $\forall x \in \square$. Din Propoziția 3.10.1 rezultă că f este uniform continuă pe Y .

Teorema următoare ne arată că pe mulțimi compacte noțiunile de continuitate și continuitate uniformă sunt echivalente.

Teorema 3.10.3. Fie $F : K \subset \square^n \rightarrow \square^m$ continuă. Dacă mulțimea K este compactă, atunci F este uniform continuă pe K .

Demonstrație

Presupunem prin absurd că F nu este uniform continuă pe K . Atunci $\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall \delta > 0$, $\exists x'_\delta, x''_\delta \in K$ cu proprietățile $\|x'_\delta - x''_\delta\| < \delta$ și $\|F(x'_\delta) - F(x''_\delta)\| \geq \varepsilon_0$.

În particular, pentru $\delta = \frac{1}{p}$, $p \in \square^*$ rezultă că există $x'_p, x''_p \in K$ cu proprietățile:

$$\|x'_p - x''_p\| < \frac{1}{p} \quad (3.32)$$

$$\|F(x'_p) - F(x''_p)\| \geq \varepsilon_0. \quad (3.33)$$

Deoarece K este mărginită, șirul $\{x'_p\}$ este mărginit, deci există un subșir $x'_{p_l} \rightarrow a$. Cum K este închisă rezultă că $a \in K$ (Teorema 3.7.2). Pe de altă parte, din (3.32) rezultă că $x''_{p_l} \rightarrow a$.

Ținând seama că F este continuă avem:

$$F(x'_{p_l}) \rightarrow F(a) \text{ și } F(x''_{p_l}) \rightarrow F(a).$$

$$\text{Așadar, } F(x'_{p_l}) - F(x''_{p_l}) \rightarrow F(a) - F(a) = 0.$$

Am ajuns astfel la o contradicție, deoarece conform (3.33) $\|F(x'_{p_l}) - F(x''_{p_l})\| \geq \varepsilon_0$, $\forall l \in \square^*$.

Definiția 3.10.3. O mulțime $A \subset \square^n$ se numește **conexă** dacă nu există două mulțimi deschise D_1 și D_2 cu proprietățile:

$$A \subset D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset, D_1 \cap A \neq \emptyset, D_2 \cap A \neq \emptyset.$$

Teorema 3.10.4. O submulțime nevidă $A \subset \square$ este conexă dacă și numai dacă este un interval (adică $\forall x, y \in A$ și $\forall x < z < y$ rezultă $z \in A$).

Demonstrație

Necesitatea. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime conexă. Presupunem prin absurd că A nu este interval. Atunci $\exists a, b \in A$ și $a < c < b$ astfel încât $c \notin A$.

Fie $D_1 = (-\infty, c)$ și $D_2 = (c, \infty)$. Evident D_1 și D_2 sunt mulțimi deschise în \mathbb{R} . Cum $a \in A \cap D_1$ și $b \in A \cap D_2$, rezultă $A \cap D_1 \neq \emptyset$ și $A \cap D_2 \neq \emptyset$. Pe de altă parte $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, de unde rezultă $D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$. În sfârșit $\forall x \in A$ avem $x \neq c$, deci sau $x < c$ sau $x > c$, de unde rezultă $A \subset D_1 \cup D_2$. Așadar, A nu e conexă, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Suficiență. Fie $A \subset \mathbb{R}$ un interval. Presupunem prin absurd că A nu este o mulțime conexă, deci există două mulțimi deschise D_1 și D_2 cu proprietățile din Definiția 3.10.3.

Fie $a_1 \in A \cap D_1$ și $a_2 \in A \cap D_2$. Cum $A \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset$, rezultă $a_1 \neq a_2$, deci putem presupune $a_1 < a_2$ și deoarece A este interval, avem $[a_1, a_2] \subset A$.

Fie $E = A \cap D_1 \cap (-\infty, a_2)$ și fie $c = \sup E$. Evident $a_1 \leq c \leq a_2$, deci $c \in A$. Pe de altă parte, observăm că $c < a_2$. Într-adevăr, dacă $c = a_2$, atunci $c \in D_2$ și cum D_2 este deschisă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset D_2$. Cum $c = \sup E$, rezultă că $\exists x_\varepsilon \in E$ astfel încât $c - \varepsilon < x_\varepsilon \leq c$. Atunci $x_\varepsilon \in E \cap D_2$, deci $A \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, ceea ce nu este posibil. Așadar, $c < a_2$. În continuare vom arăta că $c \notin D_1 \cup D_2$, de unde va rezulta contradicția $A \not\subset D_1 \cup D_2$. Într-adevăr, dacă $c \in D_1$, atunci $\exists r > 0$ astfel încât $(c - r, c + r) \subset D_1$. Fie $b \in (c, c + r) \cap (-\infty, a_2)$. Cum $a_1 \leq c < b < a_2$, rezultă $b \in A$, deci $b \in A \cap D_1 \cap (-\infty, a_2) = E$. Deoarece $c = \sup E$ avem $b \leq c$, ceea ce contrazice alegerea lui $b \in (c, c + r)$. Analog se arată că $b \notin D_2$.

Teorema 3.10.5. Fie $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuă. Dacă $A \subset \mathbb{R}^n$ este conexă, atunci $F(A) \subset \mathbb{R}^m$ este conexă.

Demonstrație

Dacă $f(A)$ nu este conexă, atunci \exists două mulțimi deschise D_1, D_2 în \mathbb{R}^m astfel încât

$$F(A) \subset D_1 \cup D_2; F(A) \cap D_1 \cap D_2 = \emptyset; F(A) \cap D_1 \neq \emptyset; F(A) \cap D_2 \neq \emptyset.$$

Deoarece F este continuă, din Teorema 3.9.6 rezultă că mulțimile $F^{-1}(D_1)$ și $F^{-1}(D_2)$ sunt deschise în \mathbb{R}^n . Pe de altă parte avem:

$$A \subset F^{-1}(D_1) \cup F^{-1}(D_2); A \cap F^{-1}(D_1) \cap F^{-1}(D_2) = \emptyset;$$

$$A \cap F^{-1}(D_1) \neq \emptyset \text{ și } A \cap F^{-1}(D_2) \neq \emptyset.$$

Rezultă că A nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza.

Definiția 3.10.4. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Se spune că o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea Darboux pe I dacă imaginea $f(J)$ a oricărui interval $J \subset I$ este tot un interval.

Corolarul 3.10.1. Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe I , atunci f are proprietatea Darboux pe I .

Demonstrație

Dacă $J \subset I$ este un interval, atunci din Teorema 3.10.4 rezultă că J este o mulțime conexă, iar din Teorema 3.10.5 că $f(J)$ este o mulțime conexă în \mathbb{R} . Aplicând din nou Teorema 3.10.4 rezultă $f(J)$ interval, deci f are proprietatea Darboux pe I .

Corolarul 3.10.2. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și $f(a)f(b) < 0$, atunci $\exists a < c < b$ astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstrație

Din Corolarul 3.10.1 rezultă că mulțimea $J = f([a, b])$ este un interval în \mathbb{R} . deoarece prin ipoteză funcția f ia valori de semne contrare în a și b , putem presupune $f(a) < 0 < f(b)$. Cum J este interval rezultă $0 \in J$, deci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.

Corolarul 3.10.2 este util la rezolvarea ecuațiilor. Să presupunem că ecuația $f(x) = 0$ admite o singură rădăcină în intervalul (a, b) . Cea mai simplă metodă pentru aproximarea acestei rădăcini este metoda înjumătățirii (sau a bipartiției), care constă în următoarele: împărțim segmentul $[a, b]$ în două părți egale prin punctul $c = \frac{a+b}{2}$. Dacă $f(c) = 0$, atunci $x = c$ este rădăcina căutată.

Dacă $f(c) \neq 0$, alegem acel interval $[a, c]$ sau $[c, b]$ care are proprietatea că funcția ia valori de semne contrare în capete. Știm că rădăcina se află în acest interval.

Procedăm cu acest interval așa cum am procedat cu intervalul inițial $[a, b]$. Algoritmul se încheie, fie când lungimea intervalului ajunge să fie mai mică decât eroarea dată (atunci putem lua rădăcina aproximativă egală cu mijlocul intervalului), fie când rădăcina exactă coincide cu mijlocul unui subinterval.

4.

Calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile

4.1. Derivate parțiale. Diferențiabilitate

Definiția 4.1.1. Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, unde A este o mulțime deschisă din \mathbb{R}^2 . Spunem că f este derivabilă parțial în raport cu x în punctul $(a, b) \in A$, dacă există și e finită următoarea limită:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Această limită se numește derivata parțială a funcției f în raport cu x în punctul (a, b) și se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ sau cu $f'_x(a, b)$. Dacă există $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ în oricare punct $(a, b) \in A$, atunci funcția $(a, b) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) : A \rightarrow \mathbb{R}$ o notăm cu $\frac{\partial f}{\partial x}$.

În mod analog se definește derivata parțială a funcției f în raport cu y în punctul (a, b) și anume:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f'_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Observăm că derivata parțială a lui f în raport cu x în punctul (a, b) , este de fapt derivata obișnuită în punctul $t = a$, a funcției de o variabilă $t \rightarrow f(t, b)$.

Rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x}$ (respectiv $\frac{\partial f}{\partial y}$) se calculează derivând funcția f în raport cu x și considerând variabila y constantă (respectiv derivând în raport cu y și considerând variabila x constantă).

Exemplu. Fie $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ și fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definită astfel: $f(x, y) = x^3 y^2 + 2x \ln y + x^y$. Atunci,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + 2 \ln y + yx^{y-1} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y + 2 \cdot \frac{x}{y} + x^y \ln x.$$

Pentru funcții de n variabile avem următoarea definiție.

Definiția 4.1.2. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă a $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este derivabilă (parțial) în raport cu variabila x_i în punctul $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$, dacă există și e finită următoarea limită:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}.$$

Această limită se numește derivata parțială a funcției f în punctul $a \in A$ și se notează cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau cu $f'_{x_i}(a)$.

În continuare vom prezenta noțiunea de funcție derivabilă cunoscută din liceu sub o formă echivalentă care va permite generalizarea acestor noțiuni pentru funcții vectoriale.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Reamintim că f este derivabilă în punctul a deci există și e finită

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Propoziția 4.1.1. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in I$ un punct interior al intervalului I . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este derivabilă (diferențiabilă) în punctul a
- (ii) Există o aplicație liniară $T = T_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = 0.$$

Demonstrație

Necesitatea. Prin ipoteză f este derivabilă în a , deci există $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ și e finită.

Dacă notăm cu $T(h) = f'(a)h$, pentru orice $h \in I$, atunci T este o aplicație liniară (evident continuă) pe \mathbb{R} . Mai departe avem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0.$$

Suficiența. Prin ipoteză există $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liniară astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = 0. \quad (4.1)$$

Pe de altă parte se știe că $T : Y \rightarrow Y$ este liniară dacă și numai dacă există $\lambda \in Y$ astfel încât $T(h) = \lambda h, \forall h \in \square$. Ținând seama de această observație în (4.1)

obținem $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lambda$. Așadar, f este derivabilă în a și $f'(a) = \lambda$.

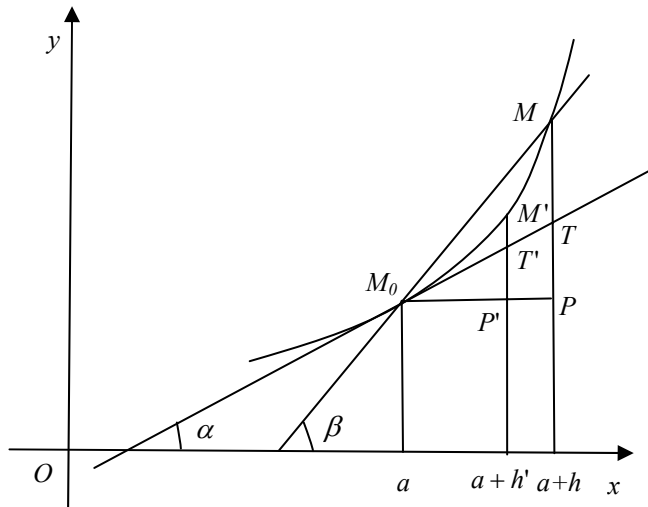
Din demonstrație rezultă că dacă f este derivabilă în $x = a$, atunci există o singură aplicație liniară $T : Y \rightarrow Y$ pentru care are loc (4.1) și anume:

$$T(h) = f'(a)h, \quad h \in \square.$$

Această aplicație se numește diferențiala lui f în punctul a și se notează cu $df(a)$.

Definiția 1.3. Fie $f : I \rightarrow \square$ și $a \in I$ un punct interior. Se numește diferențiala lui f în punctul a , următoarea aplicație liniară pe Y :

$$df(a)(h) = f'(a)h, \text{ oricare ar fi } h \in \square.$$



Fie C graficul funcției f și fie M_0 punctul de pe grafic de abscisă a . De la interpretarea geometrică a derivatei știm că $f'(a)$ reprezintă panta tangentei în M_0 la grafic ($f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$). Pe de altă parte, în triunghiul M_0PT avem

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{PT}{M_0P} = \frac{PT}{h},$$

de unde rezultă că

$$PT = f'(a)h = df(a)(h).$$

Așadar, diferențiala lui f în punctul a este aplicația liniară $df(a): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei valoare în punctul h este egală cu lungimea segmentului PT , unde T este punctul de abscisă $a + h$ de pe tangenta în M_0 la graficul funcției f .

Pe de altă parte, lungimea segmentului PM este $f(a+h) - f(a)$ și reprezintă variația funcției f când se trece de la punctul de abscisă a la punctul de abscisă $a + h$. Fie h' o valoare mai mică pentru h și fie M', T' și P' punctele corespunzătoare abscisei $a + h'$. Avem $f(a+h') - f(a) = P'M' = P'T' + T'M'$. Din figură se vede că lungimea segmentului $M'T'$ este mică în raport cu lungimea segmentului $P'T'$, deci $M'P' \approx P'T' = df(a)(h)$.

Așadar, pentru valori mici ale lui h , avem:

$$f(a+h) - f(a) \cong df(a)(h) = f'(a)h.$$

Exemplu. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

$$df(2)(h) = f'(2)h = 4h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Pentru $h = 0,001$ avem $df(2)(0,001) = 0,004$.

Pe de altă parte $f(2,001) - f(2) = 0,004001 \cong df(2)(0,001)$.

În continuare, pentru orice funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă în punctul interior $a \in I$, notăm cu:

$$\omega(h) = \omega_a(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), & h \neq 0, \quad a+h \in I \\ 0, & h = 0. \end{cases}$$

Evident $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = \omega(0) = 0$, deci ω este continuă în 0. Pe de altă parte avem:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \omega(h)h, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

sau

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \varphi(h)$$

unde am notat cu $\varphi(h) = \omega(h)h$, $\forall h \in \mathbb{R}$. Observăm că $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ și

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$, deci funcția φ este „de două ori mică” în 0. O asemenea funcție se

numește și infinit mic și se notează cu $o(h)$. Din punct de vedere geometric $\varphi(h)$ este lungimea segmentului TM . Acum înțelegem mai bine de ce pentru valori mici ale lui h putem aproxima variația funcției $f(a+h) - f(a)$ cu $df(a)(h)$, deoarece pentru astfel de valori, termenul $\varphi(h)$ este foarte mic în raport cu termenul $df(a)(h)$.

Așadar, are loc următoarea propoziție:

Propoziția 4.1.2. Fie $f: I \rightarrow \square$, $a \in I$ un punct interior și fie $J = \{h \in \square; a+h \in I\}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) f este derivabilă în punctul a .

(2) Există o aplicație liniară $T = T_a: \square \rightarrow \square$ și o funcție $\varphi = \varphi_a: J \rightarrow \square$

continuă în 0, cu proprietățile: $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ și $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$, astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + \varphi(h), \quad \forall h \in \square \quad (4.2)$$

(Precizăm că $T(h) = df(a)(h) = f'(a)h$ și $\varphi(h) = \omega(h)h$).

În vederea generalizării noțiunii de funcție diferențiabilă pentru funcții de mai multe variabile reamintim următorul rezultat din algebra liniară.

Propoziția 4.1.3.

(i) O aplicație $T: \square^n \rightarrow \square$ este liniară dacă și numai dacă există $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \square$ astfel încât

$$T(h) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \dots + \lambda_n h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \square^n.$$

(ii) O aplicație $T: \square^n \rightarrow \square^m$ este liniară dacă și numai dacă există o matrice $A = (\lambda_{ij}) \in M_{m,n}(\square)$ astfel încât

$$T(h) = (\lambda_{11}h_1 + \dots + \lambda_{1n}h_n, \dots, \lambda_{m1}h_1 + \dots + \lambda_{mn}h_n), \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \square^n.$$

(Matricea A_T este matricea asociată aplicației liniare T în raport cu bazele canonice din \square^n , respectiv \square^m).

Propoziția 4.1.4. Orice aplicație liniară $T: \square^n \rightarrow \square^m$ este continuă pe \square^n și $\|T(x)\|_2 \leq \|A_T\| \|x\|_2, \quad \forall x \in \square^n$.

Demonstrație

Fie $A_T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$. Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski rezultă

$$\|T(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m (\lambda_{i1}x_1 + \dots + \lambda_{in}x_n)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) = \|x\|_2^2 \|A_T\|^2,$$

deci

$$\|T(x)\|_2 \leq \|A_T\| \|x\|_2.$$

Fie $a \in \square^n$ și fie $\{x_k\} \subset \square^n$, $x_k \rightarrow a$, $x_k \neq a$, $\forall x \in \square^*$. Deoarece T este liniară avem:

$$\|T(x_k) - T(a)\|_2 = \|T(x_k - a)\|_2 \leq \|A_T\| \|x_k - a\|_2 \rightarrow 0.$$

Rezultă că $T(x_k) \rightarrow T(a)$, deci T este continuă în punctul a .

Definiția 4.1.4. Fie $A \subset \square^n$ o mulțime deschisă și $a \in A$. Spunem că funcția $f: A \rightarrow \square$ este diferențiabilă (derivabilă) în punctul a , dacă există o aplicație liniară $T = T_a: \square^n \rightarrow \square$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - T(h)|}{\|h\|} = 0. \quad (4.3)$$

Teorema 4.1.1. Fie $f: A \subset \square^n \rightarrow \square$ și $a \in A$ un punct interior. Dacă f este diferențiabilă în punctul a , atunci există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\forall i = \overline{1, n}$. Mai mult, aplicația

liniară $T: \square^n \rightarrow \square$ este unică și este definită astfel:

$$T(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \square^n.$$

În continuare vom numi această aplicație **diferențiala de ordinul întâi a funcției f în punctul a** și o notăm cu $df(a)$. Așadar $df(a): \square^n \rightarrow \square$ este aplicația liniară definită astfel:

$$df(a)(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall (h_1, \dots, h_n) \in \square^n.$$

Demonstrație

Prin ipoteză, există $T: \square^n \rightarrow \square$ liniară astfel încât are loc (4.3).

Pe de altă parte, conform Propoziției 4.1.3, există $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \square$ astfel încât

$$T(h) = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_n h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \square^n.$$

Pentru $h = (0, \dots, h_i, \dots, 0)$ din (4.3) rezultă

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{|f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) - \lambda_i h_i|}{\|h_i\|} = 0$$

și mai departe

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \left| \frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h_i} - \lambda_i \right| = 0,$$

relație echivalentă cu faptul că există

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lambda_i, \forall i = \overline{1, n}.$$

Așadar, T este unic determinată și

$$T(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \forall (h_1, \dots, h_n) \in \square^n.$$

Teorema 4.1.2. Fie $f: A \subset \square^n \rightarrow \square$ și $a \in A$ un punct interior. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este diferențiabilă în punctul a .

(ii) Există o aplicație liniară $T: \square^n \rightarrow \square$, o vecinătate V a originii și o

funcție $\varphi = \varphi_a: V \rightarrow \square$ cu proprietățile: $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \varphi(0) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} = 0$,

astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + \varphi(h), \forall h \in V. \quad (4.4)$$

Demonstrație

(i) \Rightarrow (ii). Notăm cu $V = \{h \in \square^n; a+h \in A\}$ și definim $\omega: V \rightarrow \square$ astfel:

$$\omega(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|}, & h \in V, h \neq 0 \\ 0, & h = 0. \end{cases}$$

Evident, avem:

$$f(a+h) - f(a) = T(h) + \omega(h)\|h\|, \forall h \in V.$$

Dacă notăm cu $\varphi(h) = \omega(h)\|h\|$, $h \in V$, atunci

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = \varphi(0) = 0 \text{ și } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} = 0 \text{ și } f(a+h) - f(a) = T(h) + \varphi(h).$$

Implicația (ii) \Rightarrow (i) este evidentă.

Din Teorema 4.1.1 și 4.1.2 rezultă.

Observația 4.1.1. f este diferențiabilă în punctul $a \in \overset{\circ}{A}$, dacă există $V \in \mathcal{V}(0)$ și o funcție $\varphi: V \rightarrow \square$ care este un infinit mic ($\varphi = o(h)$) astfel încât

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \varphi(h), h \in V.$$

Corolarul 4.1.1. Dacă f este diferențiabilă în punctul $a \in A$, atunci f este continuă în acest punct.

Într-adevăr, dacă trecem la limită în (4.4) obținem

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} T(h) + \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0.$$

Așadar, există $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, deci f este continuă în punctul a .

Acum suntem în măsură să arătăm că afirmația reciprocă din Teorema 4.1.1 nu este în general adevărată.

Existența derivatelor parțiale într-un punct nu atrage după sine diferențiabilitatea funcției în acel punct.

Exemplu. Fie funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Deoarece, $f(x, 0) = f(0, y) = 0$, rezultă că există $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.

Pe de altă parte, f nu este diferențiabilă în $(0, 0)$ deoarece nu este continuă în acest punct (Vezi Corolarul 4.1.1).

În continuare vom prezenta condiții suficiente ca o funcție să fie diferențiabilă. Pentru început dăm următoarea definiție.

Definiția 4.1.4. O funcție $f: A \subset \square^n \rightarrow \square$, unde A este o mulțime deschisă, este de clasă C^1 pe A și notăm $f \in C^1(A)$, dacă există $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ și sunt continue pe A , $\forall i = \overline{1, n}$.

Teorema 4.1.3. Fie $A \subset \square^n$ o mulțime deschisă și $f: A \rightarrow \square$. Dacă $f \in C^1(A)$, atunci f este diferențiabilă pe A .

Demonstrație

Pentru simplificarea scrierii dăm demonstrația în cazul particular $n = 2$. Fie $a = (a_1, a_2) \in A$ și fie $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$. Pentru orice $h = (h_1, h_2) \in \square^2$ pentru care $a+h \in A$ avem

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2).$$

Din Teorema Lagrange rezultă că există $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$ astfel încât:

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) h_2. \quad (4.5)$$

Dacă notăm cu

$$\omega_1(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)$$

și

$$\omega_2(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2),$$

atunci din (4.5) rezultă

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \omega_1(h)h_1 + \omega_2(h)h_2.$$

În sfârșit, dacă notăm cu $\varphi(h) = \omega_1(h)h_1 + \omega_2(h)h_2$, atunci

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + \varphi(h). \quad (4.6)$$

Dacă vom arăta că φ este un infinit mic va rezulta că f este diferențiabilă în punctul a .

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt continue rezultă că $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_i(h) = 0$, $i = 1, 2$.

Pe de altă parte avem:

$$\frac{|\varphi(h)|}{\|h\|} = |\omega_1(h)| \frac{|h_1|}{\|h\|} + |\omega_2(h)| \frac{|h_2|}{\|h\|} \leq |\omega_1(h)| + |\omega_2(h)|,$$

de unde rezultă că $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$ și cu aceasta teorema este demonstrată.

Observația 4.1.2. Din Teorema 4.1.3 rezultă că funcțiile elementare sunt diferențiabile pe orice submulțime deschisă din domeniul lor de definiție.

4.2. Diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale. Matrice iacobiene

Definiția 4.2.1. Fie $F = (f_1, \dots, f_m): A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție vectorială și fie $a \in A$ un punct interior.

Spunem că F este diferențiabilă în punctul a dacă există o aplicație liniară $T = T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - T(a)\|}{\|h\|} = 0.$$

($\| \cdot \|$ este oricare din normele $\| \cdot \|_\infty$ sau $\| \cdot \|_2$).

Teorema 4.2.1. *Funcția vectorială $F = (f_1, \dots, f_m): A \subset \square^n \rightarrow \square^m$ este diferențiabilă în punctul interior $a \in A$ dacă și numai dacă fiecare componentă scalară a sa $f_j: A \subset \square^n \rightarrow \square$, $j = \overline{1, m}$ este diferențiabilă în punctul a .*

Demonstrație

Dacă F este diferențiabilă în punctul a , atunci există o aplicație liniară $T = T_a: \square^n \rightarrow \square^m$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - T(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0. \quad (4.7)$$

Pe de altă parte, din Propoziția 4.1.3 rezultă că există o matrice $A = (\lambda_{ij}) \in M_{m,n}(\square)$ astfel încât

$$T(h) = (\lambda_{11}h_1 + \dots + \lambda_{1n}h_n, \dots, \lambda_{m1}h_1 + \dots + \lambda_{mn}h_n),$$

oricare ar fi $h = (h_1, \dots, h_n) \in \square^n$.

Dacă notăm cu $t_j(h) = a_{j1}h_1 + \dots + a_{jn}h_n$, $\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \square^n$, atunci $t_j: \square^n \rightarrow \square$ este liniară și $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$.

Deoarece $|f_j(a+h) - f_j(a) - t_j(h)| \leq \|F(a+h) - F(a) - T(h)\|_\infty$, din (4.7) rezultă că

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_j(a+h) - f_j(a) - t_j(h)|}{\|h\|} = 0, \quad \forall j = \overline{1, m}. \quad (4.8)$$

Am arătat deci că f_j este diferențiabilă în punctul a , oricare ar fi $j = \overline{1, m}$.

Reciproc, dacă fiecare componentă scalară f_j a funcției vectoriale F este diferențiabilă în punctul a , atunci relația (4.8) este adevărată pentru orice $j = \overline{1, m}$.

Cum $\|F(a+h) - F(a) - T(h)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(a+h) - f_j(a) - t_j(h)|$, rezultă că $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - T(h)\|_\infty}{\|h\|} = 0$, deci că F este diferențiabilă în punctul a .

Observația 4.2.1. Din Teorema 4.1.1 rezultă că t_j este diferențiala funcției f_j în punctul a , deci că:

$$t_j(h) = df_j(a)(h) = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \square^n, \quad j = \overline{1, m}.$$

Așadar, dacă $F = (f_1, \dots, f_n)$ este diferențiabilă în punctul a , atunci aplicația liniară T este unic determinată și anume:

$$T(h) = (df_1(a)(h), \dots, df_m(a)(h)), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Vom numi această aplicație liniară **diferențiala de ordinul întâi a funcției F în punctul a** și o vom nota cu $dF(a)$. Rezultă că $dF(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este următoarea aplicație liniară:

$$\begin{aligned} dF(a)(h) &= (df_1(a)(h), \dots, df_m(a)(h)) = \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)h_n, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)h_n \right), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Definiția 4.2.2. Matricea asociată aplicației liniare $dF(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ în raport cu bazele canonice din \mathbb{R}^n și \mathbb{R}^m se notează cu:

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \hline \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

și se numește **matrice iacobiană atașată funcției vectoriale F în punctul a** .

Observăm că avem

$$dF(a)(h) = (J_F(a)h^{tr})^{tr},$$

unde cu B^{tr} am notat transpusa unei matrice oarecare B .

Observația 4.2.2. Din Teorema 4.2.1 rezultă că studiul diferențiabilității unei funcții vectoriale revine la studiul diferențiabilității componentelor sale scalare. Este suficient deci să studiem funcții de forma $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

4.3. Diferențiabilitatea funcțiilor compuse

Teorema 3.1. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ și $B \subset \mathbb{R}^m$ două mulțimi deschise. Dacă $F: A \rightarrow B$ este diferențiabilă în punctul $a \in A$ și $G: B \rightarrow \mathbb{R}^P$ este diferențiabilă în punctul $b = F(a) \in B$, atunci funcția compusă $H = G \circ F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^P$ este diferențiabilă în punctul $a \in A$ și $dH(a) = dG(b) \circ dF(a)$. Mai mult, avem: $J_H(a) = J_G(b) \cdot J_F(a)$.

Demonstrație

Din ipoteze rezultă că:

$$F(a+h) - F(a) = dF(a)(h) + \varphi(h), \text{ unde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (4.9)$$

și

$$G(b+k) - G(b) = dG(b)(k) + \psi(k), \text{ unde } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|\psi(k)\|}{\|k\|} = 0. \quad (4.10)$$

Din (4.9) rezultă că:

$$\begin{aligned} H(a+h) - H(a) &= G[F(a+h)] - G[F(a)] = \\ &= G[F(a) + dF(a)(h) + \varphi(h)] - G(b). \end{aligned}$$

Dacă notăm cu $k(h) = dF(a)(h) + \varphi(h)$, atunci din (4.10) rezultă:

$$H(a+h) - H(a) = G(b+k(h)) - G(b) = dG(b)[k(h)] + \psi[k(h)].$$

Cum $dG(b)$ este liniară, mai departe avem:

$$\begin{aligned} H(a+h) - H(a) &= dG(b)[dF(a)(h)] + dG(b)[\varphi(h)] + \psi[k(h)] = \\ &= [dG(b) \circ dF(a)](h) + \chi(h) \end{aligned}$$

unde am notat cu

$$\chi(h) = dG(b)[\varphi(h)] + \psi[k(h)].$$

Ținând seama că $dG(b) \circ dF(a) : \square^n \rightarrow \square^P$ este liniară (fiind o compunere de aplicații liniare) rezultă că este suficient să arătăm că χ este un infinit mic, adică

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Reamintim că dacă A este matricea asociată aplicației liniare $T : \square^n \rightarrow \square^m$, atunci

$$\|T(x)\| \leq \|A\| \|x\|, \quad \forall x \in \square^n.$$

Ținând seama că $J_G(b)$ este matricea asociată aplicației liniare $dG(b) : \square^n \rightarrow \square^m$, iar $J_F(a)$ este matricea asociată aplicației liniare $dF(a) : \square^m \rightarrow \square^P$, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|} &\leq \|J_G(b)\| \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\psi[k(h)]\|}{\|k(h)\|} \cdot \frac{\|k(h)\|}{\|h\|} \leq \\ &\leq \|J_G(b)\| \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\psi[k(h)]\|}{\|k(h)\|} \cdot \left(\|J_F(a)\| + \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \right). \end{aligned}$$

Cum $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} k(h) = 0$ și $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\|\psi(k)\|}{\|k\|} = 0$ rezultă că $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\chi(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Așadar, am demonstrat că

$$H(a+h) - H(a) = [dG(b) \circ dF(a)](h) + \chi(h)$$

și χ este un infinit mic (un $o(h)$ pentru $h \rightarrow 0$).

Rezultă că H este diferențiabilă în punctul a și $dH(a) = dG(b) \circ dF(a)$.

Cum la operația de compunere a aplicațiilor liniare corespunde operația de înmulțire a matricelor lor asociate rezultă că $J_H(a) = J_G(b) \cdot J_F(a)$.

Corolarul 4.3.1. Fie $A, B \subset \mathbb{R}^2$ două mulțimi deschise, $F = (u, v): A \rightarrow B$ o funcție vectorială de clasă C^1 pe A și $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție scalară de clasă C^1 pe B . Atunci, funcția compusă $h: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$h(x, y) = (f \circ F)(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)], \quad (x, y) \in A,$$

este de clasă C^1 pe A și au loc formulele:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Demonstrație

Prin ipoteză u, v și f sunt de clasă C^1 pe mulțimile lor de definiție, deci sunt diferențiabile (conform Teoremei 4.1.3). Din Teorema 4.2.1 rezultă că F este diferențiabilă pe A , iar din Teorema 4.3.1 rezultă că funcția compusă $h = f \circ F$ este diferențiabilă pe A .

Fie $(a, b) \in A$ oarecare. Notăm cu $c = u(a, b)$ și cu $d = v(a, b)$. Evident punctul $(c, d) \in B$.

Din Teorema 4.3.1 rezultă că $J_h(a, b) = J_f(c, d) \cdot J_F(a, b)$, adică

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(c, d) & \frac{\partial f}{\partial v}(c, d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Efectuând calculele obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial u}(c, d) \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial v}(c, d) \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial u}(c, d) \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial v}(c, d) \frac{\partial v}{\partial y}(a, b). \end{aligned}$$

Exemplu. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 și fie $h(x, y) = f\left(x^2 + 2y, \frac{x}{y}\right)$, $y \neq 0$. Dacă notăm cu $u(x, y) = x^2 + 2y$ și cu $v(x, y) = \frac{x}{y}$, atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).\end{aligned}$$

Observația 4.3.1. Formulele (4.11) generalizează cunoscuta formulă de derivare a funcțiilor compuse de o variabilă.

Dacă $h(x) = f[u(x)]$, atunci $h'(x) = f'[u(x)] \cdot u'(x)$.

Observația 4.3.2. Formulele (4.11) admit următoarea generalizare evidentă.

Dacă $h(x_1, \dots, x_n) = f[u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)]$, atunci

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{cases} \quad (4.12)$$

Definiția 4.3.1. Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime cu proprietatea că $\forall x \in K$ și $\forall t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ rezultă că $tx \in K$. O funcție $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ se numește omogenă de gradul p dacă

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple.

1. Funcția $f(x, y) = 3x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, este omogenă de gradul 2 pe \mathbb{R}^2 .

2. Funcția $f(x, y, z) = \frac{x^2 + 2xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ este omogenă de gradul 0.

Teorema 4.3.2. (Euler). Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă cu proprietatea că $tx \in K$ pentru orice $x \in K$ și orice $t \in \mathbb{R}^*$ și fie $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe K și omogenă de gradul p . Atunci avem:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in K.$$

Demonstrație

Prin ipoteză avem

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n), \quad t \in \mathbb{R}^* \text{ și } x \in K. \quad (4.3)$$

Observăm că membrul stâng poate fi privit ca o funcție compusă, dacă notăm cu $u_1(t) = tx_1, \dots, u_n(t) = tx_n$ și $h(t) = f[u_1(t), \dots, u_n(t)]$.

Ținând seama de regulile de derivare (4.12) rezultă

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) \cdot u_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) \cdot u_n'(t) = pt^{p-1} f(x)$$

și mai departe

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) = pt^{p-1} f(x).$$

În particular, pentru $t = 1$ rezultă

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x), \quad \forall x \in K.$$

Exemplu. Fie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, y \neq 0\}$ și fie

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (x, y) \in K.$$

Se observă că funcția f este omogenă de gradul 1, deci trebuie să satisfacă relația

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

Într-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

4.4. Diferențiala de ordinul întâi și invarianța formei sale

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe A . Diferențiala de ordinul întâi a funcției f în punctul $a \in A$ este funcția liniară $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definită astfel:

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Considerăm funcțiile proiecție $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, definită astfel:

$$p_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Deoarece

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } j = i \\ 0 & \text{dacă } j \neq i. \end{cases}$$

rezultă că $dp_i(a)(h) = h_i$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Așadar, diferențialele de ordinul întâi ale funcției p_i nu depind de punctul a . Prin urmare avem

$$dp_i(h) = dx_i(h) = h_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Cu aceste precizări, diferențiala de ordinul întâi a funcției f în punctul a se scrie

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(h). \quad (4.14)$$

Dacă scriem relația (1) ca o egalitate de funcții obținem

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n,$$

unde prin dx_i înțelegem diferențiala de ordinul întâi a funcției p_i .

Exemplu. Fie $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \ln \frac{y}{x}$, $x > 0$, $y > 0$.

Avem:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ln \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ln \frac{y}{x} + \frac{1}{y} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\sqrt{2} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \sqrt{2}.$$

$$df(1,1) = -\sqrt{2} dx + \sqrt{2} dy.$$

Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mulțimi deschise, $F = (u_1, \dots, u_n): A \rightarrow B$ o funcție vectorială diferentiabilă pe A și $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție scalară diferentiabilă pe B . Considerăm funcția compusă $h = f \circ F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definită astfel

$$h(x_1, \dots, x_n) = f[u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)], \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in A.$$

Deoarece $f = f(u_1, \dots, u_n)$, $(u_1, \dots, u_n) \in B$ rezultă

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n \quad (4.15)$$

Pe de altă parte avem

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n} dx_n.$$

Ținând cont de formulele de derivare ale funcțiilor compuse avem:

$$\begin{aligned} dh &= \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) dx_n = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} dx_n \right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} dx_n \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n. \end{aligned}$$

Așadar, avem:

$$dh = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n. \quad (4.16)$$

Formula (4.15) reprezintă expresia diferențialei de ordinul întâi a funcției f privită ca funcție ce depinde de variabilele u_1, \dots, u_n . Formula (4.16) reprezintă expresia diferențialei de ordinul întâi a funcției f privită ca funcția ce depinde de variabilele dependente $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$.

Această egalitate formală $dh = df$ poartă numele de proprietatea de invarianță a diferențialei de ordinul întâi la o schimbare de variabile independente.

4.5. Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale de ordin superior

Definiția 4.5.1. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Presupunem că există $\frac{\partial f}{\partial x_i}: A \rightarrow \mathbb{R}$. Evident aceasta este de asemenea o funcție de n variabile. Dacă există $\frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, aceasta se notează cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sau $f''_{x_j x_i}$ și se numește derivata parțială de ordinul doi a funcției f în raport cu variabilele x_i și x_j . Dacă $i = j$ se folosește notația $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ în loc de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

O funcție de n variabile poate avea n^2 derivate parțiale de ordinul doi.

În cazul $n = 2$, al funcțiilor de două variabile, pot exista 4 (patru) derivate parțiale de ordinul 2 și anume:

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{și} \quad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Următorul exemplu ne arată că derivatele mixte în general nu sunt egale.

(Prin derivată mixtă înțelegem o derivată de forma $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ cu $i \neq j$).

Exemplu.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

După calcule ușor de urmărit obținem:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f'_x(0, y) = -y, \quad f''_{yx}(0, 0) = -1.$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f'_y(x, 0) = x, \quad f''_{xy}(0, 0) = 1.$$

Așadar, în acest caz avem $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

O condiție suficientă pentru ca derivatele mixte de ordinul doi să fie egale este dată de următoarea teoremă, cunoscută sub numele de criteriul lui Schwarz.

Teorema 4.5.1. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ și $(a, b) \in A$. Dacă există f''_{xy} și f''_{yx} pe o vecinătate V a punctului (a, b) , $V \subset A$ și sunt continue în punctul (a, b) , atunci $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$.

Demonstrație

Fie $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\} \subset A$ și fie

$$R(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b), \quad (x, y) \in V.$$

Fie $(x, y) \in V$ fixat și fie I (respectiv J) intervalul închis de capete a și x (respectiv b și y).

Dacă notăm cu $g(t) = f(t, y) - f(t, b)$, $t \in I$, atunci $R(x, y) = g(x) - g(a)$.

Din Teorema Lagrange rezultă că există ξ între a și x astfel încât

$$R(x, y) = g'(\xi)(x-a) = [f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)](x-a).$$

Aplicând din nou teorema Lagrange rezultă că există η între y și b astfel încât

$$R(x, y) = f''_{yx}(\xi, \eta)(x-a)(y-b). \quad (4.17)$$

În mod analog, dacă notăm cu

$$h(t) = f(x, t) - f(a, t), \quad t \in J$$

atunci

$$R(x, y) = h(y) - h(b).$$

Aplicând de două ori teorema Lagrange, rezultă

$$R(x, y) = f''_{xy}(\xi', \eta')(x-a)(y-b). \quad (4.18)$$

Așadar avem

$$f''_{yx}(\xi, \eta) = f''_{xy}(\xi', \eta'). \quad (4.19)$$

Deoarece f''_{yx} și f''_{xy} sunt continue în (a, b) , trecând la limită în (4.19) rezultă:

$$f''_{yx}(a, b) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f''_{yx}(\xi, \eta) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f''_{xy}(\xi', \eta') = f''_{xy}(a, b).$$

Observația 4.5.1. Teorema 4.5.1 se poate generaliza pentru funcția de n variabile și anume: dacă $f: A \subset \square^n \rightarrow \square$, A deschisă și există $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe o vecinătate V a punctului $a \in A$, $V \subset A$ și sunt continue în a , atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Definirea derivatelor parțiale de ordin mai mare ca 2 este evidentă. De exemplu, dacă există $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)$, aceasta se notează cu $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$.

Definiția 4.5.2. Orice element $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \square^n$ se numește multiindice.

Notăm cu $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ și cu $D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, unde $f: A \subset \square^n \rightarrow \square$.

Funcția f se numește de clasă C^p pe mulțimea deschisă $A \subset \square^n$ dacă există $D^k f$ și e continuă pe A pentru orice multi-indice k cu $|k| \leq p$.

Exemplu. Fie $k = (2, 1, 0, 3)$. Atunci $|k| = 6$ și $D^k f = \frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_4^3}$.

Funcția f este de clasă C^5 pe mulțimea deschisă $A \subset \square^4$, dacă există $D^k f$ și e continuă pe A , pentru orice multi-indice $k \in \square^4$ cu $|k| \leq 5$.

Pentru derivate mixte de ordin mai mare ca 2, posibilitatea permutării ordinii de derivare se demonstrează aplicând de mai multe ori Teorema 4.5.1.

Exemplu. Fie $A \subset \square^3$ o mulțime deschisă și $f \in C^4(A)$. Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}. \end{aligned}$$

Definiția 4.5.3. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci se numește diferențiala de ordinul doi a funcției f în punctul a și se notează cu $d^2 f(a)$ următoarea formă pătratică pe \mathbb{R}^n :

$$d^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j, \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Se folosește și notația

$$d^2 f(a) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j.$$

Matricea simetrică $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ se numește matricea hessiană

asociată funcției f în punctul a . În cazul funcțiilor de două variabile avem

$$d^2 f(a, b)(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) k^2, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2,$$

sau

$$d^2 f(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) dy^2.$$

Exemplu. Fie $f(x, y) = x^3 y - 2xy^2$.

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y - 2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 4xy.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 4y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x$$

$$d^2 f(1, 2) = 12dx^2 - 10dx dy - 4dy^2.$$

Pentru o funcție de trei variabile, diferențiala de ordinul doi arată astfel:

$$d^2 f(a, b, c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c) dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c) dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a, b, c) dz^2 +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b, c) dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a, b, c) dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a, b, c) dy dz.$$

Revenind la cazul general al funcțiilor de n variabile, constatăm că diferențiala de ordinul doi este o formă pătratică. Dacă notăm cu $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$,

atunci $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i$ și j și $d^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j$.

Reamintim următoarele definiții și rezultatele de algebră liniară.

Diferențiala de ordinul 2, $d^2 f(a)$ este pozitiv (negativ) definită dacă $d^2 f(a)(h) > 0$ [$d^2 f(a)(h) < 0$] pentru orice $h \neq 0$.

Dacă există $h_i \neq 0$, $i=1,2$, astfel încât $d^2 f(a)(h_1) < 0$ și $d^2 f(a)(h_2) > 0$, spunem că $d^2 f(a)$ este alternantă.

Introducem notațiile:

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = \det A.$$

Teorema 4.5.2. (Sylvester)

Condiția necesară și suficientă ca $d^2 f(a)$ să fie pozitiv (negativ) definită este ca $\Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$ (respectiv $(-1)^i \Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1, n}$).

În continuare, vom introduce următoarea convenție de notație:

$$\begin{aligned} \text{Vom nota cu } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \text{ în loc de } \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right)^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \text{ în loc de } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) & \text{ în loc de } \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)^2 \end{aligned}$$

Cu această convenție, pentru funcții de două variabile avem:

$$\begin{aligned} d^2 f(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) dy^2 = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) dy \right)^{(2)}. \end{aligned}$$

Pentru a defini diferențiala de ordinul m , vom extinde convenția precedentă în mod firesc și anume: vom nota

cu $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}(a, b)$ în loc de $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right)^m$,

cu $\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}}(a, b)$ în loc de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, b) \cdot \frac{\partial^{m-k} f}{\partial y^{m-k}}(a, b)$ etc.

Definiția 4.5.4. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A deschisă și $(a, b) \in A$. Dacă $f \in C^m(A)$, atunci diferențiala de ordinul m a funcției f în punctul (a, b) se definește astfel:

$$\begin{aligned} d^m f(a, b) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) dy \right)^{(m)} = \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k}(a, b) dx^{m-k} dy^k = \\ &= C_m^0 \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(a, b) dx^m + C_m^1 \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y}(a, b) dx^{m-1} dy + \dots + C_m^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(a, b) dy^m. \end{aligned}$$

Prin inducție matematică se poate demonstra următoarea formulă care generalizează binomul lui Newton:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_i \in \mathbb{N}}} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}.$$

Folosind această formulă și convențiile anterioare, putem defini diferențiala de ordinul m a unei funcții

Definiția 4.5.5. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^m(A)$ atunci

$$\begin{aligned} d^m f(a) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) dx_n \right)^{(m)} = \\ &= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_i \in \mathbb{N}}} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(a) dx_1^{k_1} \dots dx_n^{k_n}. \end{aligned}$$

4.6. Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcțiilor compuse de două variabile

Teorema 4.6.1. Fie A și B două mulțimi deschise din \square^2 , $F = (u, v) : A \rightarrow B$, $f : B \rightarrow \square$ și $h = f \circ F : A \rightarrow \square$, $h(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$, $\forall (x, y) \in A$.

Dacă $F \in C^2(A)$ și $f \in C^2(B)$, atunci $h \in C^2(A)$ și avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Demonstrație

În condițiile date, derivatele de ordinul întâi există și conform formulelor (4.9) din subcap. 4.3 avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Vom examina existența derivatei $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ și modul ei de calcul.

Din Teorema 4.3.1 rezultă că funcția $(x, y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} [u(x, y), v(x, y)] : A \rightarrow \square$

admite derivate parțiale de ordinul întâi și anume:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.21)$$

În mod analog avem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.22)$$

Din (4.20), (4.21) și (4.22) rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Deoarece, în condițiile noastre $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$, în final obținem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

În mod analog se demonstrează și celelalte două formule din enunțul teoremei.

Exemplu. Fie $f \in C^2(\square^2)$ și $h(x, y) = f(x^2 + y^2, xy)$. Dacă notăm cu $u(x, y) = x^2 + y^2$ și cu $v(x, y) = xy$, atunci avem:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot y^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4xy + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (2x^2 + 2y^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot yx + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot 2xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot x^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2$$

Dacă facem convenția să notăm formal

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \text{ în loc de } \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \text{ în loc de } \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \text{ și}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \text{ în loc de } \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2,$$

atunci expresiile derivatelor de ordinul doi ale funcțiilor compuse se rețin mai ușor sub forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\end{aligned}$$

unde prin ridicarea formală la pătrat a lui $\frac{\partial h}{\partial x}$ înțelegem

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)^{(2)} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \text{ etc.}\end{aligned}$$

De pildă în exemplul de mai sus

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{(2)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot 4x^2 + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot y^2 \text{ etc.}$$

4.7. Formula Taylor. Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Pentru orice două puncte $a, b \in \square^n$, notăm cu $[a, b] = \{(1-t)a + tb; t \in [0, 1]\}$. Mulțimea $[a, b]$ se numește segmentul închis de capete a și b . Segmentul deschis se notează cu $(a, b) = \{(1-t)a + tb; t \in (0, 1)\}$.

Definiția 4.7.1. O mulțime $C \subset \square^n$ se numește convexă dacă $\forall a, b \in C$ rezultă că $[a, b] \subset C$.

Observația 4.7.1. Orice bilă deschisă (închisă) din \square^n este o mulțime convexă.

Într-adevăr, fie $x, y \in B(a, r) = \{x \in \square^n; \|x - a\| < r\}$. Atunci $\|x - a\| < r$ și $\|y - a\| < r$. Pentru orice $t \in [0, 1]$ avem

$$\begin{aligned} \|(1-t)x + ty - a\| &= \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \leq \\ &\leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| < (1-t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Din Observația 4.7.1 rezultă orice interval din \mathbb{Y} , orice disc (pătrat) din \square^2 , orice sferă (cub) din \square^3 este o mulțime convexă.

Teorema 4.7.1 (Taylor). Fie $f : A \subset \square^n \rightarrow \square$, $a \in A$ un punct interior și $r > 0$ astfel încât $V = B(a, r) \subset A$.

Dacă $f \in C^{m+1}(V)$, atunci, pentru orice $x \in V$, există $\xi \in (a, x)$ astfel încât

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(h) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(a)(h) + \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\xi)(h), \text{ unde } h = x - a. \end{aligned}$$

Demonstrație

Pentru simplificarea scrierii facem demonstrația în cazul particular $n = 2$.

Fie $a = (a_1, a_2) \in A$, $x = (x_1, x_2) \in V$ fixat și $h = (h_1, h_2) = x - a$. Pentru orice $t \in [0, 1]$ notăm cu

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_1 + th_1 = a_1 + t(x_1 - a_1) \\ u_2(t) &= a_2 + th_2 = a_2 + t(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

și considerăm funcția compusă

$$g(t) = f[u_1(t), u_2(t)], \quad t \in [0, 1].$$

Evident, g este o funcție de clasă C^{m+1} pe $[0, 1]$ și conform formulei MacLaurin, există $0 < \theta < 1$ astfel încât

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{1!} g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + \dots + \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} g^{(m+1)}(\theta). \quad (4.23)$$

Observăm că

$$g(1) = f(x) = f(a+h) \text{ și } g(0) = f(a) \quad (4.24)$$

Pe de altă parte avem:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}[u_1(t), u_2(t)] \cdot u_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}[u_1(t), u_2(t)] \cdot u_2'(t)$$

sau
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}[u_1(t), u_2(t)] \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}[u_1(t), u_2(t)] \cdot h_2,$$

deci
$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 = df(a)(h). \quad (4.25)$$

De asemenea, din Teorema 4.6.1 rezultă

$$\begin{aligned}
g''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} [u_1(t), u_2(t)] \cdot (u_1'(t))^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} [u_1(t), u_2(t)] \cdot u_1'(t) u_2'(t) + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} [u_1(t), u_2(t)] \cdot (u_2'(t))^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1} [u_1(t), u_2(t)] \cdot u_1''(t) + \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_2} [u_1(t), u_2(t)] \cdot u_2''(t)
\end{aligned}$$

Deoarece $u_1''(t) = u_2''(t) = 0$ rezultă:

$$g''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) h_2^2 = d^2 f(a)(h) \quad (4.26)$$

Se poate arăta că

$$g^{(k)}(0) = d^k f(a)(h), \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (4.27)$$

Dacă notăm cu $\xi = a + \theta h$ și ținem seama de (4.24)-(4.27) în (4.23) obținem:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{1}{1!} df(a)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(h) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(a)(h) + \\
&+ \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\xi)(h),
\end{aligned}$$

unde $\xi \in (a, x)$, adică formula din enunțul teoremei.

Teorema 4.7.2 (Lagrange). Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ un punct interior și V o vecinătate convexă și deschisă a punctului a , $V \subset A$. Dacă $f \in C^1(V)$, atunci pentru orice $x \in V$, există $\xi \in (a, x)$ astfel încât

$$f(x) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)(x_n - a_n).$$

Demonstrația rezultă imediat din formula Taylor, pentru cazul particular $m = 0$. În cazul $n = 2$ obținem:

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \xi_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_1, \xi_2)(x_2 - a_2).$$

Definiția 4.7.2. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$. Spunem că punctul a este un punct de maxim (minim) local pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(x) \leq f(a)$ [respectiv $f(x) \geq f(a)$], oricare ar fi $x \in V$.

Ca și la funcțiile de o variabilă, un punct de maxim (minim) local se numește punct de extrem local.

Definiția 4.7.3. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$ un punct interior. Dacă f este diferențiabilă în punctul a și $df(a) = 0$, atunci $x = a$ se numește punct critic pentru f .

Teorema 4.7.3. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A$ un punct interior. Dacă a este punct de extrem local pentru f și dacă f este diferențiabilă în punctul a , atunci a este punct critic pentru f .

Demonstrație

Fie $A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in A\}$ și fie funcția de o variabilă $\varphi_i: A_i \rightarrow \mathbb{R}$, definită astfel $\varphi_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$, $t \in A_i$.

Evident, φ_i este derivabilă în punctul $t = a_i$ și acest punct este punct de extrem local pentru φ_i . Din Teorema Fermat rezultă că $\varphi_i'(a_i) = 0$, deci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, pentru orice $i = \overline{1, n}$. Așadar, $df(a) = 0$, deci $x = a$ este punct critic pentru f .

Ca și în cazul funcțiilor de o variabilă, nu orice punct critic este punct de extrem local. Următoarea teoremă stabilește condiții suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem local.

Teorema 4.7.4. Fie $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ un punct interior $r > 0$ și $V = B(a, r) \subset A$. Mai presupunem că $f \in C^2(V)$ și că punctul $x = a$ este punct critic pentru f . Atunci

(i) Dacă $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, punctul a este punct de minim local pentru f .

(ii) Dacă $d^2 f(a)$ este negativ definită, punctul a este punct de maxim local pentru f .

(iii) Dacă $d^2 f(a)$ este alternantă în orice vecinătate a punctului a , punctul a nu este punct de extrem local pentru f .

Demonstrație

Fie $x \in V$ oarecare fixat și $h = x - a$. Din formula Taylor rezultă că există $\xi \in (a, x)$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(\xi)(h).$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(\xi)(h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) h_i h_j.$$

În continuare dacă notăm cu $\alpha_i = \frac{h_i}{\|h\|_2}$, atunci $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ și

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \alpha_i \alpha_j. \quad (4.28)$$

Dacă notăm cu $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \alpha_i \alpha_j$ și ținem seamă

că $f \in C^2(V)$, rezultă că $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0$ și formula (4.28) devine

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \left[d^2 f(a)(\alpha) + \omega(x) \right].$$

Fie $S = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \square^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$. Evident S este o mulțime închisă

și mărginită, deci compactă. Aplicația $\alpha \rightarrow d^2 f(a)(\alpha): S \rightarrow \square$ este continuă (fiind o funcție polinomială), deci este mărginită și își atinge marginile pe S . Presupunem că $d^2 f(a)$ este pozitiv definită.

Fie $\alpha_0 \in S$ astfel încât $m = \inf_{\alpha \in S} d^2 f(a)(\alpha) = d^2 f(a)(\alpha_0) > 0$. Cum

$\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = 0$, rezultă că există o vecinătate V_1 a punctului a , $V_1 \subset V$ astfel încât

$|\omega(x)| < \frac{m}{2}$, $\forall x \in V_1$. Așadar, pentru orice $x \in V_1$ avem:

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} \left[d^2 f(a)(\alpha) + \omega(x) \right] > \frac{\|h\|^2}{2} \left(m - \frac{m}{2} \right) \geq 0.$$

Rezultă că $f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in V_1$, deci a este punct de minim local pentru f .

Dacă $d^2 f(a)$ este negativ definită, se demonstrează la fel că există o vecinătate V_2 a punctului a , $V_2 \subset V$ astfel încât $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V_2$, deci a este punct de maxim local pentru f . În cazul (iii) diferența $f(x) - f(a)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a punctului a , deci punctul a nu este punct de extrem local pentru f .

Example. Să se afle punctele de extrem local ale funcțiilor

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z$

Punctele critice se află rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

Rezultă un singur punct critic $a = (-1, -2, 2)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$

$$d^2 f(a) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$\Delta_1 = 2 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Rezultă că $d^2 f(a)$ este pozitiv definită, deci punctul $a = (-1, -2, 2)$ este un punct de minim local.

$$2. \quad f(x, y) = x^3 + y^3 + 21xy + 36x + 36y.$$

Punctele critice sunt $M_1(-4, -4)$ și $M_2(-3, -3)$.

$$d^2 f(x, y) = 6x dx^2 + 42 dx dy + 6y dy^2$$

$$d^2 f(-4, -4) = -24 dx^2 + 42 dx dy + 24 dy^2$$

$$\Delta_1 = -24 < 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -24 & 21 \\ 21 & -24 \end{vmatrix} > 0.$$

Rezultă că $d^2 f(-4, -4)$ este negativ definit, deci punctul $M_1(-4, -4)$ este punct de maxim local.

$$d^2 f(-3, -3) = -18 dx^2 + 42 dx dy - 18 dy^2$$

$$\Delta_1 = -18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -18 & 21 \\ 21 & -18 \end{vmatrix} < 0.$$

$d^2 f(-3, -3)$ este alternantă, deci punctul $(-3, -3)$ nu este punct de extrem local.

$$3. \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y.$$

Punctele critice sunt $M_1(\sqrt{2}, -2)$, $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_3(0, 0)$.

$$d^2 f(M_1) = 20dx^2 + 8dxdy + 20dy^2; \quad \Delta_1 = 20 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0.$$

$M_1(\sqrt{2}, -2)$ este punct de minim local.

$d^2 f(M_2) = d^2 f(M_1)$, deci $M_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ este de asemenea punct de minim local.

$$d^2 f(0, 0) = -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2$$

$$\Delta_1 = -4 < 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Deoarece $\Delta_2 = 0$, nu putem aplica Teorema 4.7.4. Ne putem da seama dacă punctul $M_3(0, 0)$ este sau nu punct de extrem plecând de la definiție.

Într-adevăr, observăm că $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) = x^2(x^2 - 2)$ și $f(x, x) = 2x^4$. Rezultă că în orice vecinătate a punctului $(0, 0)$ există puncte în care $f > 0$ și puncte în care $f < 0$, în timp ce $f(0, 0) = 0$. Așadar, $(0, 0)$ nu este punct de extrem local pentru f .

4.8. Teorema de inversiune locală

Definiția 4.8.1. Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ două mulțimi deschise. O funcție $F : A \rightarrow B$ se numește difeomorfism dacă

a) F este bijectivă

b) $F \in C^1(A)$

c) $F^{-1} \in C^1(B)$

O astfel de definiție este necesară deoarece există funcții care îndeplinesc condițiile a) și b) dar nu îndeplinesc condiția c).

Într-adevăr, fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Evident f este bijectivă și $F \in C^1(\mathbb{R})$. Inversa sa f^{-1} nu este difeomorfism, deoarece nu este diferențiabilă în $y = 0$, deci $f^{-1} \notin C^1(\mathbb{R})$.

Observația 4.8.1. Fie A, B și D mulțimi deschise din \mathbb{R}^n și $F: A \rightarrow B$, $G: B \rightarrow D$ difeomorfism. Atunci $H = G \circ F: A \rightarrow D$ este difeomorfism.

Afirmația rezultă din faptul că o compunere de funcții de clasă C^1 este de asemenea o funcție de clasă C^1 și din observația că $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Cel mai simplu exemplu de difeomorfism este operatorul de translație. Fie $y \in \mathbb{R}^n$ oarecare fixat și fie $\tau_y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definit prin $\tau_y(x) = x + y$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Evident $\tau_y \in C^1(\mathbb{R}^n)$, τ_y este bijectivă și $\tau_y^{-1} = \tau_{-y} \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Următorul rezultat este cunoscut sub numele de teorema de inversiune locală pentru funcții de o variabilă.

Teorema 4.8.1. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^1(A)$ și $f'(a) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă U a punctului a cu proprietățile: $U \subset A$, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in U$ și $f: U \rightarrow V = f(U)$ este difeomorfism.

Demonstrație

Presupunem că $f'(a) > 0$. Cum f' este continuă în a , rezultă că există un interval deschis U care conține punctul a și $f'(x) > 0$, $\forall x \in U$.

Dacă notăm cu $V = f(U)$, atunci V este un interval deschis și $f: U \rightarrow V$ este bijectivă (fiind strict crescătoare). Se știe de la liceu că dacă $f' \neq 0$ pe U , atunci $f^{-1}: V \rightarrow U$ este derivabilă pe V și $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, $\forall y \in V$, $y = f(x)$. Evident, $f^{-1} \in C^1(V)$, deci f este difeomorfism.

În continuare prezentăm teorema de inversiune locală pentru funcții vectoriale.

Teorema 4.8.2. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $a \in A$ și $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dacă $F \in C^1(A)$ și $\det J_F(a) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă U a punctului a cu proprietățile: $U \subset A$, $\det J_F(x) \neq 0$, $\forall x \in U$, $F: U \rightarrow V = F(U)$ este difeomorfism și

$$\det J_{F^{-1}}(y) = \frac{1}{\det J_F(x)}, \quad \forall y \in V, y = F(x).$$

Demonstrație

Pentru început facem observația că putem presupune că $a = 0$ și că $F(0) = 0$. Într-adevăr, fie $A_1 = \{x - a; x \in A\}$ și fie $F_1: A_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F_1(t) =$

$= F(t+a) - b$, $t \in A_1$, unde $b = F(a)$. Avem $F_1(0) = 0$ și $F = \tau_b \circ F_1 \circ \tau_{-a}$. Dacă vom arăta că F_1 este difeomorfism va rezulta că și F este difeomorfism, deoarece translațiile sunt difeomorfisme.

Observăm de asemenea că putem presupune că $dF(0) = I$ (operatorul identitate pe \square^n).

Într-adevăr, fie $T = dF(0)$ și fie $F_2 = T^{-1} \circ F$. Deoarece diferențiala de ordinul întâi a oricărei aplicații liniare este cea aplicație liniară însăși, rezultă că

$$dF_2(0) = T^{-1} \circ dF(0) = I.$$

Așadar $F = T \circ F_2$ și $dF_2(0) = I$.

Cum $\det J_{F_2}(0) \neq 0$ prin ipoteză, rezultă că $T = dF(0): \square^n \rightarrow \square^n$ este difeomorfism. Prin urmare, dacă F_2 este difeomorfism, atunci și F este difeomorfism.

Fie deci $F: A \subset \square^n \rightarrow \square^n$, $0 \in A$, $F(0) = 0$ și $dF(0) = I$.

Dacă notăm cu $H(x) = F(x) - x$, $\forall x \in A$, atunci $H \in C^1(A)$, $H(0) = 0$ și $dH(0) = 0$. Cum componentele scalare h_1, \dots, h_n ale funcției vectoriale H sunt de clasă C^1 pe A și $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0) = 0$, rezultă că există $\delta_1 > 0$ astfel încât

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(t) \right| < \frac{1}{2n\sqrt{n}}, \quad \forall t \in B(0, \delta_1) \subset A, \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Conform teoremei Lagrange, pentru orice $x, y \in B(0, \delta_1)$ există un punct ξ_i pe segmentul deschis de capete x și y astfel încât

$$\begin{aligned} |h_i(x) - h_i(y)| &= \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(\xi_i)(x_1 - y_1) + \dots + \frac{\partial h_i}{\partial x_n}(\xi_i)(x_n - y_n) \right| \leq \\ &\leq \left(\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_1}(\xi_i) \right| + \dots + \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_n}(\xi_i) \right| \right) \|x - y\| < \frac{1}{2\sqrt{n}} \|x - y\|. \end{aligned}$$

(Norma folosită în această demonstrație este $\| \cdot \|_2$).

Așadar avem: $\|H(x) - H(y)\| < \frac{1}{2} \|x - y\|$.

Fie $0 < \delta < \delta_1$ astfel încât $K = \overline{B(0, \delta)} \subset B(0, \delta_1) \subset A$. Rezultă că:

$$\|H(x) - H(y)\| < \frac{1}{2} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in K. \quad (4.29)$$

În particular, pentru $y = 0$ avem

$$\|H(x)\| < \frac{1}{2} \|x\| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \forall x \in K. \quad (4.30)$$

Fie $V_1 = B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ și $U_1 = B(0, \delta) \cap F^{-1}(V_1)$. Observăm că V_1 și U_1 sunt mulțimi deschise, $0 \in U_1$ și $F(U_1) \subset V_1$. Vom arăta că $F: U_1 \rightarrow V_1$ este bijectivă.

Într-adevăr, dacă $F(x) = F(y)$, unde $x, y \in U_1$ atunci $H(x) + x = H(y) + y$ și ținând seama de (4.29) rezultă $\|x - y\| = \|H(x) - H(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$, inegalitate care nu poate avea loc decât dacă $\|x - y\| = 0$, adică $x = y$.

Așadar, am dovedit că $F: U_1 \rightarrow V_1$ este injectivă.

Pentru a arăta că este și surjectivă folosim teorema de punct fix a lui Banach. Pentru orice $y \in V_1$ considerăm funcția $\phi_y: K \rightarrow K^n$, definită astfel: $\phi_y(x) = y - H(x)$, $\forall x \in K$.

Din (4.29) rezultă că

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in K.$$

Pe de altă parte, din (4.30) avem:

$$\|\phi_y(x)\| \leq \|y\| + \|H(x)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \quad \forall x \in K.$$

Așadar, $\phi_y: K \rightarrow K$ este o contracție. Din Teorema de punct fix a lui Banach, rezultă că există $z \in K$ unic astfel încât $z = \phi_y(z)$.

Evident, z depinde de y și de aceea vom nota $z = G(y)$. Ținând seama de definițiile funcțiilor ϕ_y și H avem

$$G(y) = y - H[G(y)], \quad \forall y \in V_1 \quad (4.31)$$

$$\text{și} \quad F[G(y)] = y, \quad \forall y \in V_1 \quad (4.32)$$

Pe de altă parte din (4.30) și (4.31) rezultă

$$\|G(y)\| \leq \|y\| + \|H[G(y)]\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \quad (4.33)$$

Din (4.32) și (4.33) deducem că $G(y) \in B(0, \delta) \cap F^{-1}(V_1) = U_1$, deci $G: V_1 \rightarrow U_1$ și $F \circ G = I$. Prin urmare am arătat că $F: U_1 \rightarrow V_1$ este surjectivă, deci bijectivă și $F^{-1} = G$. Din (4.29) și (4.31) rezultă

$$\begin{aligned} \|G(y_1) - G(y_2)\| &\leq \|y_1 - y_2\| + \|H[G(y_1)] - H[G(y_2)]\| < \\ &< \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|G(y_1) - G(y_2)\| \end{aligned}$$

$$\text{sau} \quad \|G(y_1) - G(y_2)\| < 2\|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in V_1. \quad (4.34)$$

Din (4.34) deducem că G este uniform continuă pe V_1 , deci continuă pe V_1 .

Cum $\det J_F(0) > 0$ și $F \in C^1(A)$ rezultă că există o vecinătate U a originii, $U \subset U_1 \subset A$ astfel încât $\det J_F(x) > 0$, $\forall x \in U$. Dacă notăm cu $V = G^{-1}(U)$, atunci $V \subset V_1$, V este deschisă pentru că G este continuă și $V = F(U)$.

Pentru a arăta că $F: U \rightarrow V$ este difeomorfism rămâne să arătăm că $G \in C^1(V)$.

Fie $b \in V$ oarecare fixat. Vom arăta că G este diferențiabilă în b . Pentru aceasta fie $y \in V$ și $x, c \in U$ astfel încât $y = F(x)$, $b = F(c)$. Deoarece F este diferențiabilă în c avem:

$$y - b = F(x) - F(c) = dF(c)(x - c) + \varphi(x - c),$$

unde
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\varphi(x - c)}{\|x - c\|} = 0. \quad (4.35)$$

Cum $\det J_F(c) \neq 0$, rezultă că $\text{rang } J_F(c) = n$ și deci că $dF(c): \square^n \rightarrow \square^n$ este un izomorfism liniar. Dacă notăm cu $S = [dF(c)]^{-1}: \square^n \rightarrow \square^n$, atunci avem

$$S(y - b) = x - c + S[\varphi(x - c)].$$

Cum $x = G(y)$ și $c = G(b)$, mai departe avem:

$$\begin{aligned} \frac{\|G(y) - G(b) - S(y - b)\|}{\|y - b\|} &= \frac{\|S[\varphi(x - c)]\|}{\|y - b\|} \leq \frac{\|J_S(b)\| \|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} \cdot \frac{\|x - c\|}{\|y - b\|} = \\ &= \|J_S(b)\| \cdot \frac{\|G(y) - G(b)\|}{\|y - b\|} \cdot \frac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} \leq 2\|J_S(b)\| \cdot \frac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|}. \end{aligned}$$

(Pentru ultima inegalitate am folosit (4.34)).

Cum $\lim_{x \rightarrow c} \frac{\|\varphi(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0$, rezultă că G este diferențiabilă în punctul b și că

$$dG(b) = S.$$

Pe de altă parte avem $G \circ F = I = \mathbf{1}_{\square^n}$. Rezultă că $J_G(b) \cdot J_F(c) = I_n$ (matricea unitate), $\forall c \in U$, $b \in V$, $b = F(c)$. Cum $\det J_F(c) \neq 0$, deducem că

$$J_{F^{-1}}(b) = J_G(b) = [J_F(c)]^{-1}, \text{ deci } G = F^{-1} \in C^1(V).$$

4.9. Transformări regulate

Definiția 4.9.1. Fie $A \subset \square^n$ o mulțime deschisă și fie $F: A \rightarrow \square^n$. Spunem că F este o transformare regulată în punctul $a \in A$, dacă $\det J_F(a) \neq 0$ și există o

vecinătate deschisă U a lui a , $U \subset A$ astfel încât $F \in C^1(U)$. Spunem că F este o transformare regulată pe mulțimea A , dacă F este regulată în fiecare punct din A .

Propoziția 4.9.1. Dacă $F: A \subset \square^n \rightarrow \square^n$ este o transformare regulată în punctul $a \in A$, atunci F este continuă în punctul a .

Demonstrație

Dacă F este o transformare regulată în punctul a , atunci conform Teoremei 4.1.3, F este diferențiabilă în a , deci continuă în a .

Definiția 4.9.2. Fie $A \subset \square^n$ o mulțime deschisă și fie $F = (f_1, \dots, f_n): A \rightarrow \square^n$ o funcție de clasă C^1 .

Determinantul matricei iacobiene $J_F(a)$ se numește iacobianul funcției F în punctul a și se notează cu $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$. Așadar avem:

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}}, \quad a \in A.$$

Propoziția 4.9.2. Fie $A, B \subset \square^n$ mulțimi deschise. Dacă $F: A \rightarrow B$ este transformare regulată în punctul $a \in A$ și $G: B \rightarrow \square^n$ este transformare regulată în punctul $b = F(a) \in B$, atunci funcția compusă $H = G \circ F$ este transformare regulată în punctul $a \in A$.

Demonstrație

Prin ipoteză $\det J_F(a) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0$ și există o vecinătate U a punctului a , $U \subset A$ astfel încât $F \in C^1(U)$. De asemenea, există o vecinătate deschisă V a punctului $b = F(a) \in B$, $V \subset B$ astfel încât $G \in C^1(V)$ și $\det J_G(b) = \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(b) \neq 0$.

Deoarece F este continuă în punctul a , rezultă că există o vecinătate deschisă U_1 a lui a , $U_1 \subset U$ astfel încât $F(U_1) \subset V$. Evident $H = G \circ F$ este de clasă C^1 pe U_1 . Pe de altă parte avem $\det J_H(a) = \det J_G(b) \det J_F(a) \neq 0$, deci H este transformare regulată în punctul $a \in A$.

Dacă notăm cu h_1, \dots, h_n componentele scalare ale lui H obținem egalitatea:

$$\frac{D(h_1, \dots, h_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) = \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(b) \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Teorema următoare pune în evidență o proprietate remarcabilă a transformărilor regulate și anume faptul că imaginea directă a unei mulțimi deschise, printr-o transformare regulată este de asemenea o mulțime deschisă.

Teorema 4.9.1. Fie $F: \square^n \rightarrow \square^n$ o transformare regulată pe \square^n . Dacă $A \subset \square^n$ este deschisă, atunci $F(A)$ este de asemenea o mulțime deschisă.

Demonstrație

Fie $b \in F(A)$ și $a \in A$ astfel încât $b = F(a)$. Din Teorema de inversiune locală rezultă că există o vecinătate deschisă U a punctului a , $U \subset A$ și o vecinătate deschisă $V = F(U)$ a punctului b , astfel încât $F: U \rightarrow V$ este difeomorfism.

Evident, $V \subset F(A)$, deci b este punct interior pentru mulțimea $F(A)$. Cum b a fost arbitrar, rezultă că $F(A)$ este deschisă.

Definiția 4.9.3. O mulțime din \square^n , deschisă și conexă se numește **domeniu**.

Propoziția 4.9.3. Fie $F: \square^n \rightarrow \square^n$ o transformare regulată pe \square^n . Dacă $D \subset \square^n$ este un domeniu, atunci $F(D)$ este de asemenea un domeniu și iacobianul $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$ păstrează semn constant pe D .

Demonstrație

Faptul că $F(D)$ este deschisă rezultă din Teorema 4.9.1. Pe de altă parte, din Propoziția 4.9.1 rezultă că F este continuă pe \square^n . Cum o funcție continuă duce o mulțime conexă într-o mulțime conexă, rezultă că $F(D)$ este conexă, deci $F(D)$ este un domeniu.

Deoarece funcția $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}: \square^n \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și D este o mulțime conexă, rezultă că $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(D)$ este o mulțime conexă din \mathbb{R} , deci

un interval. Dacă presupune, că există $u, v \in D$ astfel încât $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(u) < 0$ și

$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(v) > 0$, atunci rezultă că există $w \in D$ astfel încât $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(w) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza că F este regulată.

4.10. Funcții implicite

Fie dreptunghiul $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ și ecuația

$$F(x, y) = 0, (x, y) \in D \quad (4.36)$$

Ne punem întrebarea dacă pentru orice $x \in [a, b]$, există o singură valoare $y \in [c, d]$, astfel încât perechea (x, y) să verifice ecuația (4.36). În cazul când acest lucru are loc, vom nota valoarea y corespunzătoare lui x cu $y(x)$. Funcția $x \rightarrow y(x): [a, b] \rightarrow [c, d]$ se spune că este definită implicit de ecuația (4.36). Evident avem

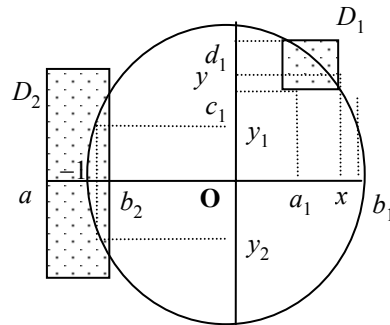
$$F[x, y(x)] = 0, \forall x \in [a, b]. \quad (4.37)$$

Exemplu. Fie ecuația

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (4.38)$$

Mulțimea punctelor din plan care verifică ecuația (4.38) reprezintă din punct de vedere geometric cercul $\mathbf{C}(0;1)$ (cu centrul în origine și de rază 1).

Fie $D_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$. Se observă că $\forall x \in [a_1, b_1]$ există o singură valoare $y = y(x) \in [c_1, d_1]$ astfel încât perechea (x, y) verifică ecuația (4.38), adică punctul (x, y) aparține cercului $\mathbf{C}(0;1)$ și anume $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Rezultă că pe dreptunghiul D_1 ecuația (4.38) definește o funcție implicită.



Pe de altă parte, observăm că pe dreptunghiul D_2 , ecuația (4.38) nu definește nici o funcție implicită de forma $y = y(x)$, deoarece pentru $x \in [a_2, -1]$ nu există nici o valoare y astfel încât perechea $(x, y) \in \mathbf{C}(0,1)$, iar pentru $\forall x \in [-1, b_2]$

există două valori $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$ și $y_2 = \sqrt{1-x^2}$ astfel încât punctele (x, y_1) și (x, y_2) aparțin cercului $\mathbf{C}(0,1)$.

Următoarea teoremă stabilește condiții suficiente pentru existența funcțiilor implicite.

Teorema 4.10.1 Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, $(a,b) \in A$ și $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- a) $F \in C^1(A)$
- b) $F(a,b) = 0$
- c) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă U a punctului a , o vecinătate deschisă V a punctului b , astfel încât $U \times V \subset A$ și o funcție unică $f : U \rightarrow V$ cu proprietățile:

- a) $F[x, f(x)] = 0, \forall x \in U$
- b) $F(a) = b$

$$c) F \in C^1(U) \text{ și } f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}[x, f(x)]}{\frac{\partial F}{\partial y}[x, f(x)]}, \forall x \in U.$$

Dacă $F \in C^p(A)$, atunci $f \in C^p(U)$.

Demonstrație

Considerăm funcția vectorială $\phi = (\phi_1, \phi_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită astfel:

$$\phi(x, y) = (x, F(x, y)), \forall (x, y) \in A.$$

Evident avem

$$\phi_1(x, y) = x \text{ și } \phi_2(x, y) = F(x, y), \forall (x, y) \in A \text{ și}$$

$$J_\phi(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$\det J_\phi(a, b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

matricea $J_\phi(a, b)$ este inversabilă. Din condiția b) rezultă $\phi(a, b) = (a, 0)$.

Conform Teoremei 4.8.2 (de inversiune locală) există o vecinătate deschisă $U \times V$ a punctului (a, b) și o vecinătate deschisă $U \times W$ a punctului $(a, 0)$ astfel încât $\phi: U \times V \rightarrow U \times W$ este difeomorfism. Mai mult,

$$\det J_\phi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in U \times V.$$

Fie $\psi = (\psi_1, \psi_2) = \phi^{-1}: U \times W \rightarrow U \times V$. Atunci ψ este de clasă C^1 pe $U \times W$.

Definim $f(x) = \psi_2(x, 0)$, $\forall x \in U$. Evident $f: U \rightarrow V$, $f \in C^1(U)$ și $f(a) = \psi_2(a, 0) = b$. În continuare, pentru $\forall x \in U$ avem:

$$(x, 0) = \phi[\psi(x, 0)] = \phi[\psi_1(x, 0), \psi_2(x, 0)] = \phi[x, f(x)] = (x, F(x, f(x))),$$

de unde rezultă

$$F[x, f(x)] = 0, \forall x \in U. \quad (4.39)$$

Derivând relația (4.39) obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}[x, f(x)] + \frac{\partial F}{\partial y}[x, f(x)]f'(x) = 0,$$

de unde rezultă

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}x, f(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}x, f(x)}, \forall x \in U.$$

În continuare prezentăm fără demonstrații două generalizări importante ale Teoremei 4.10.1 (Teorema 4.10.1 și Teorema 4.10.3).

Teorema 4.10.2. Fie $A \subset \square^{n+1}$ o mulțime deschisă, $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b) \in A$ și $F = (x_1, \dots, x_n, y): A \rightarrow \square$ cu proprietățile:

- 1) $F \in C^1(A)$
- 2) $F(a_1, \dots, a_n, b) = 0$
- 3) $\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă U a punctului (a_1, \dots, a_n) și o vecinătate deschisă V a punctului b , astfel încât $U \times V \subset A$ și o funcție unică $f: U \rightarrow V$ cu proprietățile:

- 1') $F[x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)] = 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in U$

$$3) \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(a, b) \neq 0.$$

Atunci \exists o vecinătate deschisă a punctului $a = (a_1, \dots, a_n)$ și o vecinătate deschisă $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m$ a punctului $b = (b_1, \dots, b_m)$, astfel încât $U \times V \subset A$ și m funcții unic determinate $f_i: U \rightarrow V_i$, $i = \overline{1, m}$ cu proprietățile:

$$1') \begin{cases} F_1[x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)] = 0 \\ \dots \\ F_m[x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)] = 0 \end{cases}$$

pentru $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

$$2') f_1(a) = b_1, \dots, f_m(a) = b_m$$

$$3') f_i \in C^1(U), \forall i = \overline{1, m} \text{ și } \forall i = \overline{1, n} \text{ și } \forall x = (x_1, \dots, x_m) \in U \text{ avem}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_j, \dots, y_m)}[x, f_1(x), \dots, f_m(x)]}{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}[x, f_1(x), \dots, f_m(x)]}$$

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, x_j)}[x, f_1(x), \dots, f_m(x)]}{\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}[x, f_1(x), \dots, f_m(x)]}$$

Exemplu. Să se arate că sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + 3y^2 - z^2 + x - y - 8 = 0 \\ 2x^2 - 4y - 6z - 6 = 0 \end{cases}$$

definește într-o vecinătate a punctului $(1, 2, -2)$ două funcții $y = f(x)$ și $z = g(x)$ și să se calculeze $f'(1)$, $g'(1)$. Avem:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 - z^2 + x - y - 8 \\ G(x, y, z) = 2x^2 - 4y - 6z - 6 \end{cases}$$

$$F, G \in C^1(\square^3), F(1, 2, -2) = 0, G(1, 2, -2) = 0$$

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(1,2,-2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} (1,2,-2) = -50 \neq 0.$$

Așadar, sunt îndeplinite condițiile Teoremei 4.7.3, de unde rezultă că există o vecinătate $U \in V(1)$, o vecinătate $V \times W$ a punctului $(2,-2)$ și două funcții

$$y = f(x) : U \rightarrow V \text{ și } z = g(x) : U \rightarrow W$$

cu proprietățile 1'), 2') și 3').

În continuare avem:

$$\frac{D(F,G)}{D(x,z)}(1,2,-2) = -40 \text{ și } \frac{D(F,G)}{D(y,x)} = 60$$

de unde rezultă $f'(1) = -\frac{4}{5}$ și $g'(1) = \frac{6}{5}$.

4.11. Funcții dependente și independente

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și m funcții $f_1, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe A , $m \leq n$.

Definiția 4.11.1. Spunem că funcțiile f_1, \dots, f_m sunt dependente pe mulțimea A , dacă cel puțin una dintre aceste funcții, de exemplu f_m depinde de celelalte pe mulțimea A , adică există $\phi \in C^1(\mathbb{R}^m)$ astfel încât $f_m(x) = \phi[f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)]$, $\forall x \in A$.

Exemplu. Fie funcțiile $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$ definite astfel:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Se observă imediat că

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \phi[f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)],$$

unde

$$\phi(u, v) = u^2 - v, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Rezultă că funcțiile f_1, f_2, f_3 sunt dependente pe \mathbb{R}^4 .

Observația 4.11.1. La cursul de algebră se studiază noțiunea de funcții liniar dependente.

Reamintim că f_1, \dots, f_m sunt linear dependente pe A , dacă $\exists m$ numere $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât:

$$\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) = 0, \quad \forall x \in A.$$

Dacă presupunem de exemplu că $\lambda_m \neq 0$, rezultă

$$f_m(x) = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_m} \right) f_1(x) + \dots + \left(-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right) f_{m-1}(x), \quad \forall x \in A.$$

Așadar, noțiunea de funcții linear dependente pe A , este un caz particular al Definiției 4.11.1 și anume, cazul când funcția ϕ este liniară.

Teorema 4.11.1. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $m \leq n$ și $F = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$, de clasă C^1 pe A . Dacă f_1, \dots, f_m sunt dependente pe A , atunci

$$\text{rang } J_F(x) < m, \quad \forall x \in A.$$

Demonstrație

Fie $\phi \in C^1(\mathbb{R}^m)$ astfel încât

$$f_m(x_1, \dots, x_m) = \phi[f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{m-1}(x_1, \dots, x_n)], \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in A. \quad (4.40)$$

Derivând relația (4.40) obținem:

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.41)$$

Cum matricea iacobiană este

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

din (4.41) rezultă că ultima linie a matricei $J_F(x)$ este combinație lineară de celelalte linii, deci orice minor de ordinul m al matricei $J_F(x)$ este nul.

Definiția 4.11.2. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschisă. Spunem că funcțiile f_1, \dots, f_m sunt independente în punctul $a \in A$, dacă nu sunt dependente pe nici o vecinătate a punctului a . Spunem că f_1, \dots, f_m sunt independente pe A , dacă sunt independente în fiecare punct din A .

Cu această definiție, din Teorema 4.11.1 rezultă

$$\frac{D(F_1, \dots, F_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(a', a'', b) = \frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(a) \neq 0.$$

Din Teorema 4.10.3 rezultă că din sistemul (4.42) putem explicita variabilele x_1, \dots, x_s în funcție de $x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s$. Mai precis există U' o vecinătate deschisă a punctului a' , $U'' \times V$ o vecinătate a punctului (a'', b) și o funcție unică $G = (g_1, \dots, g_s): U'' \times V \rightarrow U'$ cu proprietățile:

$$g_i(a_{s+1}, \dots, a_n, b_1, \dots, b_s) = a_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (4.43)$$

$$\begin{cases} f_1 [g_1(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \dots, g_s(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), x_{s+1}, \dots, \\ \dots, x_n, y_1, \dots, y_s] = y_1 \\ \dots \\ f_s [g_1(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \dots, g_s(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), x_{s+1}, \dots, \\ \dots, x_n, y_1, \dots, y_s] = y_s \end{cases} \quad (4.44)$$

pentru $\forall (x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) \in U'' \times V$. Fie $U'_1 \subset U'$ o vecinătate deschisă a lui a' și $U''_1 \subset U''$ o vecinătate deschisă a lui a'' astfel încât $U'_1 \times U''_1 \subset U_1$. Deoarece $U'_1 \in V(a')$ și $G: U'' \times V \rightarrow U'$ este continuă în (a'', b) există $U''_2 \times V_1 \subset U''_1 \times V$ vecinătate deschisă a punctului (a'', b) astfel încât $G(U''_2 \times V_1) \subset U'_1$.

Fie $s < r \leq n$ și

$$\begin{aligned} & \phi_r(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) = \\ & = f_r [g_1(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \dots, g_s(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), x_{s+1}, \dots, x_n], \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\forall (x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) \in U''_2 \times V_1.$$

Vom arăta că ϕ_r nu depinde de variabilele x_{s+1}, \dots, x_n . Fie $s < k \leq n$. Derivând relațiile (4.44) și (4.45) obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \frac{\partial g_s}{\partial x_k} + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \frac{\partial g_s}{\partial x_k} + \frac{\partial f_s}{\partial x_k} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \frac{\partial g_s}{\partial x_k} + \frac{\partial f_r}{\partial x_k} = \frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} \end{cases} \quad (4.46)$$

Derivatele $\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$ sunt calculate într-un punct oarecare $(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s) \in U_2'' \times V$, iar $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sunt calculate în punctul corespunzător $(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n)$

unde

$$x_i = g_i(x_{s+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s), \quad i = \overline{1, s}.$$

Din cele de mai sus rezultă că punctul

$$(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n) \in U_1' \times U_2'' \subset U_1,$$

deci

$$\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Pentru ca sistemul (4.46) să fie compatibil, trebuie ca determinantul caracteristic să fie nul, deci avem:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_s} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} - \frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} = 0.$$

și mai departe

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_s} & \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \end{vmatrix} - \frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} = 0. \quad (4.47)$$

Deoarece $\text{rang } J_F(x) = s$, rezultă că primul determinat din relația (4.47) este nul. Cum

$$\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} \neq 0$$

în final rezultă

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial x_k} = 0, \forall s < r \leq n \text{ și } \forall s < k \leq n \quad (4.48)$$

Așadar ϕ_r nu depinde de x_{s+1}, \dots, x_n . Atunci, pentru $(y_1, \dots, y_n) \in V_1$ din (4.45) rezultă

$$\phi_r(y_1, \dots, y_s) = f_r[x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n] = f_r(x), \forall x \in U_1' \times U_2''.$$

Ținând seama și de (4.44) avem:

$$f_r(x) = \phi_r[f_1(x), \dots, f_s(x)], \forall x \in U_1' \times U_2''.$$

Notând cu $U = U_1' \times U_2''$, rezultă f_1, \dots, f_s, f_r sunt dependente pe U și cu aceasta teorema este demonstrată. Dacă ne întoarcem la exemplul dat constatăm că

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 2(x_2 + x_3 + x_4) & 2(x_1 + x_3 + x_4) & 2(x_1 + x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix}.$$

Este ușor de verificat că toți minorii de ordinul 3 sunt nuli. Fie

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \square^4; x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} \text{ și } A = \square^4 \setminus M.$$

Dacă $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in A$, atunci cel puțin unul din minorii

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

este $\neq 0$. Rezultă că f_1, f_2 sunt independente pe A , în timp ce f_3 depinde de f_1 și f_2 pe A .

4.12. Extreme cu legături

În aplicații, intervine adesea problema determinării valorilor extreme ale unei funcții de mai multe variabile în situații în care variabilele sunt supuse la anumite restricții (satisfac anumite relații de legătură).

Exemplu. Să se găsească valorile extreme ale funcției $f(x, y) = x^2 + y^2$ cu legătura $x + y - 1 = 0$. Cazul fiind foarte simplu, problema se reduce imediat la o problemă de extrem liber.

Într-adevăr, înlocuind $y = 1 - x$ în expresia funcției f , obținem $g(x) = x^2 - 2x + 1, x \in Y$.

Amplificând succesiv ecuațiile sistemului (4.53) cu $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ și adunând ecuația (4.55) obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \dots + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_m} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \right) \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = 0. \end{aligned} \quad (4.55')$$

Precizăm că $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ și $\frac{\partial F_1}{\partial x_j}$ sunt calculate în punctul a .

Punem condițiile:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(a) + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_m}(a) = 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

Deoarece $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}(a) \neq 0$, sistemul (4.56) are soluție unică.

Fie $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ soluția sistemului (4.56).

Ținând seama de (4.56) și (4.55') rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \lambda_1^0 \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(a) + \dots + \lambda_m^0 \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(a) = 0, \quad k = m+1, \dots, n \quad (4.57)$$

Din (4.56) și (4.57) deducem:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \lambda_1^0 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) + \dots + \lambda_m^0 \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) + \lambda_1^0 \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) + \dots + \lambda_m^0 \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

Fie funcția auxiliară $\phi: A \times \square^n \rightarrow \square$ definită astfel:

$$\phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m F_m(x_1, \dots, x_n) \quad (4.59)$$

și fie sistemul

Exemplu. Să se afle punctele de extrem ale funcției $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ cu legătura $xyz = 1$. Se formează funcția auxiliară

$$\phi(x, y, z) = xy + yz + zx + \lambda(xyz - 1).$$

Punctele critice ale funcției se obțin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y + z + \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x + z + \lambda xz = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = y + x + \lambda xy = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = xyz - 1 = 0 \end{cases} \quad (4.63)$$

Sistemul (4.63) are o singură soluție și anume $x = y = z = 1$, $\lambda = -2$. Fie $\phi_0(x, y, z) = xy + yz + zx - 2(xyz - 1)$.

$$d^2\phi_0(x, y, z) = 2[(1 - 2z)dx dy + (1 - 2y)dx dz + (1 - 2x)dy dz]$$

$$d^2\phi_0(1, 1, 1) = -2(dx dy + dx dz + dy dz).$$

Diferențind legătura, obținem $dF(x, y, z) = 0$, deci

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz = 0.$$

Pentru $x = z = 1$ avem $dx + dy + dz = 0$, de unde rezultă $dz = -(dx + dy)$. Înlocuind în $d^2\phi_0(1, 1, 1)$ obținem:

$$d^2\phi(1, 1, 1) = 2(dx^2 - dx dy + dy^2),$$

care este pozitiv definită, deoarece

$$\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0 \quad \text{și} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0.$$

Așadar, punctul $(1, 1, 1)$ este punct de minim pentru funcția $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ condiționat de legătura $xyz = 1$.

4.13. Schimbări de variabile

Fie expresia

$$H\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots\right) \quad (4.64)$$

unde x și y sunt variabile independente și $z = z(x, y)$.

Fie $A, B \subset \square^3$ două mulțimi deschise și $F = (\varphi, \psi, \chi): A \rightarrow B$ un difeomorfism de clasă C^k . Fiecărui punct $(x, y, z) \in A$ îi corespunde prin funcția vectorială F un punct $(u, v, w) \in B$ și anume

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, z) \\ v = \psi(x, y, z) \\ w = \chi(x, y, z) \end{cases} \quad (4.65)$$

Deoarece F este bijectivă, sistemul (4.65) se poate rezolva în raport cu x, y, z . De asemenea, vom presupune că din primele două ecuații din (4.65) se pot rezolva x și y în raport cu u, v și z .

Problema schimbării de variabile constă în întrebarea ce devine expresia (4.64) în urma schimbării de variabile (4.65)? Este evident că pentru a rezolva această problemă este suficient să exprimăm derivatele $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ etc., în funcție de

$$u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \text{ etc.}$$

Ținând seama că $z = z(x, y)$ și $w = w(u, v)$:

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \quad (4.66)$$

$$dv = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \quad (4.67)$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \quad (4.68)$$

Înlocuind în (4.68) expresiile diferențialelor du și dv date de (4.66) și (4.67) și egalând coeficienții în dx și dy obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial u} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] + \frac{\partial w}{\partial v} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right] = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial u} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] + \frac{\partial w}{\partial v} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right] = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases} \quad (4.69)$$

Rezolvând sistemul (4.69) rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}} \end{array} \right. \quad (4.70)$$

Pentru calculul derivatelor de ordinul doi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ se calculează diferențialele de ordinul doi d^2u , d^2v , d^2w .

Exemplu. Ce devine expresia $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ în coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) = \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta.$$

Egalând coeficienții termenilor $d\theta$ și $d\rho$ obținem:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ -\frac{\partial z}{\partial x} \rho \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \rho \cos \theta = \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem rezultă:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$$

Se obțin astfel operatorii de derivare:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Mai departe avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos\theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin\theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = \\ &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\cos\theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin\theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\rho} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos\theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin\theta \frac{\partial z}{\partial \theta} \right).\end{aligned}$$

După calcule ușor de urmărit obținem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \cos^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho} \sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \sin^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \sin^2\theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2} \sin\theta \cos\theta \frac{\partial z}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

În mod analog avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \sin^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \sin\theta \cos\theta \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \cos^2\theta \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \cos^2\theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} \sin\theta \cos\theta \frac{\partial z}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Astfel, în coordonate polare, expresia laplacianului este

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho}.$$

4.14. Elemente de teoria câmpurilor

Fie $A \subset \square^3$ o mulțime deschisă, $a = (a_1, a_2, a_3) \in A$ un punct fixat și $l = (l_1, l_2, l_3) \in \square^3$ un versor, deci $\|l\| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} = 1$. Deoarece $a \in A$ este punct interior, rezultă că $\exists r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$. Pentru $\forall t \in (-r, r)$, punctul $x = a + tl \in B(a, r) \subset A$.

Definiția 4.14.1. Spunem că funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul a , după direcția l , dacă următoarea limită există și e finită.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{|t|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x=a+tl}} \frac{f(x) - f(a)}{d(a,x)}.$$

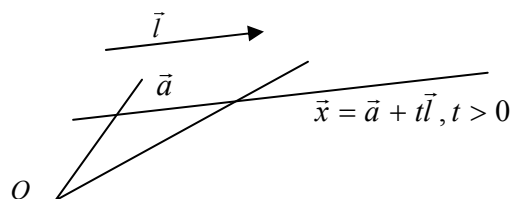
Această limită se notează cu $\frac{df}{dl}(a)$ și se numește derivata funcției f în punctul a , după direcția l .

Din punct de vedere geometric, mulțimea punctelor $x = a + tl$, $t \in \mathbb{R}$, reprezintă dreapta care trece prin a și are parametrii directori l_1, l_2, l_3 .

Semiaxa pozitivă a acestei drepte corespunde valorilor parametrilor $t > 0$, iar semiaxa negativă corespunde valorilor $t < 0$. Convenim să notăm cu l^+ sensul pozitiv pe această dreaptă și cu l^- sensul negativ.

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial l^-}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{-t} = -\frac{\partial f}{\partial l^+}(a).$$



Teorema 4.14.1. Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este o diferențabilă în punctul $a \in A$, atunci f este derivabilă în punctul a după direcția l și avem:

$$\frac{\partial f}{\partial l^+}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)l_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)l_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a)l_3.$$

Demonstrație

Fie $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$. Dacă $t \in (0, r)$, atunci $a + tl \in A$ și deoarece f este diferențabilă în punctul a vom avea:

$$f(a+tl) - f(a) = f'(a)(tl) + \varphi(tl),$$

unde φ este $o(tl)$ pentru $h \rightarrow 0$. Ținând seama că $\|tl\| = t$ și $f'(a)(tl) = tf'(a)(l)$, în continuare avem:

$$\frac{f(a+tl) - f(a)}{t} = f'(a)(l) + \frac{\varphi(tl)}{\|tl\|}.$$

Cum $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(tl)}{\|tl\|} = 0$, rezultă:

$$\begin{aligned} \exists \frac{\partial f}{\partial l^+}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tl) - f(a)}{t} = f'(a)(l) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)l_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)l_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(a)l_3. \end{aligned}$$

Exemplu. Fie $f(x, y, z) = xyz$, $a = (1, -1, 1)$ și $l = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, 0\right)$. Avem

$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 1$ și $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = -1$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - 1 \cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Definiția 4.14.2. Fie $D \subset \square^3$ o mulțime deschisă. Prin câmp scalar pe D se înțelege orice funcție $u: D \rightarrow \square$. Dacă în plus $u \in C^k(D)$, spunem că u este un câmp scalar de clasă C^k pe D . Prin câmp vectorial pe D se înțelege orice funcție vectorială, $\vec{v} = (P, Q, R): D \rightarrow \square^3$. Dacă $P, Q, R \in C^k(D)$, spunem că \vec{v} este un câmp vectorial de clasă C^k pe D .

Ca exemple de câmpuri scalare menționăm câmpul temperaturilor, câmpul presiunilor, câmpul densităților etc. Un exemplu tipic de câmp vectorial este câmpul vitezelor particulelor unui fluid în mișcare.

În continuare, presupunem că fixăm un reper rectangular drept $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, unde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versori și identificăm orice punct M din spațiu cu vectorul său de poziție \overrightarrow{OM} . Cu această precizare, dacă $\vec{v} = (P, Q, R): D \rightarrow \square^3$ este un câmp vectorial, atunci

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}, \forall (x, y, z) \in D.$$

Definiția 4.14.3. Dacă $u: D \subset \square^3 \rightarrow \square$ este un câmp scalar de clasă C^1 pe D , atunci câmpul vectorial pe D definit prin $\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, se numește câmpul de gradienti al câmpului scalar u .

Reamintim că produsul scalar a doi vectori \vec{a} și \vec{b} este prin definiție $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \phi$, unde ϕ este unghiul dintre cei doi vectori, iar expresia

analitică a produsului scalar este $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, unde $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Din Teorema 4.14.1 rezultă:

Observația 4.14.1. Fie $D \subset \square^3$ deschisă, $a \in D$ și $\vec{l} = l_1 \vec{i} + l_2 \vec{j} + l_3 \vec{k}$ un versor. Dacă $f : D \rightarrow \square$ este diferențiabilă în a , atunci

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \vec{l} \operatorname{grad}_a(f), \text{ unde } \operatorname{grad}_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(a) \vec{k}.$$

Fie φ unghiul dintre \vec{l} și $\operatorname{grad}_a(f)$. Atunci $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \|\operatorname{grad}_a(f)\| \cos \varphi$, de unde rezultă că valoarea maximă a derivatei lui f în a , după direcția l , se realizează atunci când \vec{l} și $\operatorname{grad}_a(f)$ sunt colineare.

Definiția 4.14.4. Un câmp vectorial \vec{v} pe D se numește de potențial dacă există $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^1(D)$ astfel încât $\vec{v} = \operatorname{grad}(u)$. Dacă $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, aceasta revine la

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Exemplu: $\vec{v}(x, y, z) = y^2 z^3 \vec{i} + 2xyz^3 \vec{j} + 3xy^2 z^2 \vec{k}$ este câmp de potențial, deoarece $\vec{v} = \operatorname{grad} u$, unde $u(x, y, z) = xy^2 z^3$.

Definiția 4.14.5. Fie $\vec{v} = (P, Q, R) : D \rightarrow \square^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D . Se numește divergența câmpului \vec{v} , următorul câmp scalar

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Câmpul vectorial \vec{v} se numește solenoidal (tubular) dacă $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$.

Definiția 4.14.6. Fie $\vec{v} = (P, Q, R) : D \rightarrow \square^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D . Se numește rotorul câmpului \vec{v} , următorul câmp vectorial:

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Câmpul vectorial \vec{v} se numește iracional dacă $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$.

Pentru a reține mai ușor expresia rotorului se folosește următorul determinant simbolic

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

(acest determinant „se dezvoltă“ întotdeauna după prima linie).

Definiția 4.14.7. Se numește operatorul nabla, sau operatorul lui Hamilton, următorul operator simbolic

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Fie $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe D și $\vec{v} = (P, Q, R): D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D . Cu ajutorul operatorului ∇ , operatorii diferențiali se exprimă astfel:

1) $\operatorname{grad}(u) = \nabla u$ – produsul dintre vectorul ∇ și funcția scalară u

$$\operatorname{grad}(u) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k};$$

2) $\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$ – produsul scalar dintre vectorii ∇ și \vec{v}

$$\operatorname{div} \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (Pi + Qj + Rk) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z};$$

3) $\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$ – produsul vectorial dintre vectorii ∇ și \vec{v}

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Teorema 4.14.2. Fie u_1, u_2 două câmpuri scalare de clasă C^1 pe D și \vec{v}_1, \vec{v}_2 două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe D . Au loc următoarele proprietăți:

a) $\operatorname{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_2 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{grad} u_2$

b) $\operatorname{div}(u_1 \cdot \vec{v}_1) = \vec{v}_1 \operatorname{grad} u_1 + u_1 \operatorname{div} \vec{v}_1$

c) $\operatorname{div}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \vec{v}_2 \operatorname{rot} \vec{v}_1 - \vec{v}_1 \operatorname{rot} \vec{v}_2$

d) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \Delta u_1$

(operatorul $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ se numește laplacian)

$$e) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}_1) = 0$$

$$f) \operatorname{rot}(u_1 \cdot \vec{v}_1) = \operatorname{grad} u_1 \times \vec{v}_1 + u_1 \operatorname{rot} \vec{v}_1$$

$$g) \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u_1) = 0.$$

Demonstrație

Demonstrația revine la verificări directe. De exemplu:

$$\begin{aligned} b) \operatorname{div}(u_1 \cdot \vec{v}_1) &= \operatorname{div}(u_1 P_1 \vec{i} + u_1 Q_1 \vec{j} + u_1 R_1 \vec{k}) = \frac{\partial}{\partial x}(u_1 P_1) + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 Q_1) + \frac{\partial}{\partial z}(u_1 R_1) = \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x} P_1 + u_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} Q_1 + u_1 \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z} R_1 + u_1 \frac{\partial R_1}{\partial z} = (\operatorname{grad} u_1) \cdot \vec{v}_1 + u_1 \operatorname{div} \vec{v}_1. \end{aligned}$$

Bibliografie

- [1] G. Chilov, *Analyse Mathématique*, Editions Mir, Moscou, Vol. 1 (1973), Vol. 2 (1975).
- [2] I. Colojoară, *Analiză matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [3] R. Cristescu, *Elemente de analiză funcțională*, Ed. Tehnică, București, 1975.
- [4] P. Flondor, O. Stănășilă, *Lecții de analiză matematică și exerciții rezolvate*, Ed. ALL, 1998.
- [5] V.A. Ilyn and E.G. Poznyak, *Fundamentals of Mathematical Analysis*, Mir Publishers Moscow, Part I and II, 1982.
- [6] S. Lange, *Analysis I*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [7] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, Vol I și II, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1962.
- [8] S.M. Nicolsky, *A Course of Mathematical Analysis*, Mir Publishers Moscow, Part I and Part II, 1977.
- [9] V. Olariu, A. Halanay, S. Turbatu, *Analiză Matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [10] G. Păltineanu, I. Popa, R. Trandafir, *Analiză matematică*, Partea I – Calculul diferențial. Litografie U.T.C.B., 1990.
- [11] I. Popa, *Analiză matematică*, Vol. 1, Calculul diferențial, MATRIX ROM, București, 2000.
- [12] O. Stănășilă, *Analiză matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.