GAVRIIL PĂLTINEANU PAVEL MATEI

ECUAȚII DIFERENȚIALE ŞI CU DERIVATE PARȚIALE

Note de curs

Bucureşti
2007

CAPITOLUL 2

SERII FOURIER

2.1. Serii trigonometrice. Serii Fourier

Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Reamintim că punctul $x_0\in[a,b]$ se numeşte *punct de discontinuitate de prima speță* al funcției f dacă limitele laterale $f(x_0-0)$ şi $f(x_0+0)$ există şi sunt finite.

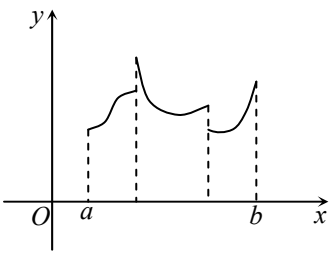

Fig. 1.1

Definiția 2.1.1. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *continuă pe porțiuni* dacă este continuă pe $[a,b]$ cu excepția unui număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță (fig. 1.1).

O astfel de funcție este integrabilă.

Reamintim că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este periodică de perioadă T dacă $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Lema 2.1.1. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcție periodică de perioadă* 2π. *Atunci*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Pentru aceasta este suficient să observăm că

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Cu schimbarea de variabilă $x=t-2\pi$, obținem

$$\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{-\pi} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{-\pi}^{a} f(t)\mathrm{d}t,$$

deci

$$\int_{-\pi}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

de unde rezultă lema. ■

În general, dacă f are perioada T, atunci

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

Definiția 2.1.2. Fie $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Seria de funcții

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx+\beta_n \sin nx) \tag{1}$$

se numeşte *serie trigonometrică de coeficienți* α_n, $n\geq 0$, β_n, $n\geq 0$. Sumele parțiale ale unei astfel de serii de funcții

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx+\beta_k \sin kx)$$

se numesc *polinoame trigonometrice.*

Definiția 2.1.3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π, continuă pe porțiuni pe orice interval compact şi fie

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n\geq 1.$$

Atunci seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx) \tag{2}$$

se numeşte *seria Fourier ataşată funcției* f, iar coeficienții a_n, b_n se numesc *coeficienții Fourier ai funcției* f.

Definiția 2.1.4. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *continuu diferențiabilă pe porțiuni* (sau *netedă pe porțiuni*) pe $[a,b]$ dacă este derivabilă pe $[a,b]$ cu excepția unui număr finit de puncte şi f' este continuă pe $[a,b]$ cu excepția acestor puncte în care are limite laterale finite.

Teorema 2.1.1. (Dirichlet). *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcție periodică de perioadă* 2π, *continuu diferențiabilă pe porțiuni pe orice interval compact* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Atunci seria Fourier* (2) *este convergentă pe* $\mathbb{R}$ *şi avem*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ \forall x\in\mathbb{R},$$

unde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N},\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Observația 2.1.1. Dacă, în plus, f este continuă pe $\mathbb{R}$, avem

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(f se dezvoltă în serie Fourier pe $\mathbb{R}$).

Observația 2.1.2. Dacă funcția f este pară, atunci $b_n=0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă funcția f este impară, atunci $a_n=0$, $n\in\mathbb{N}$.

Exemplu. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi,\pi]$ funcția $f(x)=x^2$.

Fie $f^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcția obținută prin prelungirea prin periodicitate, cu perioada $T=2\pi$, a funcției f. Deoarece funcția este pară, coeficienții b_n sunt nuli. Vom calcula coeficienții a_n. Avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^3}{3},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = x^2\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\infty}^{\infty} x\sin nx\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{2}{n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{4\pi(-1)^n}{n^2},\ n\ge 1.$$

În consecință $a_0=\dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_n=4\cdot\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $b_n=0$, $n\ge 1$, deci

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx,\ \forall x\in[-\pi,\pi].$$

În particular, pentru $x=\pi$ obținem o identitate cunoscută, datorată lui *Euler*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Teorema 2.1.2. (Fejér). *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, periodică de perioadă 2π,*

$$s_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\ n\in\mathbb{N}$$

şi sumele Fejér de ordinul n,

$$\sigma_n=\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Atunci şirul de funcții $(\sigma_n)_n$ converge uniform la f pe $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.3. (Weierstrass). *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, periodică de perioadă 2π. Atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom trigonometric T_ε astfel încât*

$$\|f-T_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

Demonstrație. Fie $m_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\|\sigma_p-f\|<\varepsilon$, pentru orice $p\ge m_\varepsilon$. Putem alege $T_\varepsilon=\sigma_{m_\varepsilon}$, unde σ_{m_ε} este dat de Teorema lui Fejér. ■

Teorema 2.1.4. (Weierstrass). *Dacă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă, atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom algebric P_ε astfel încât $\|f-P_\varepsilon\|<\varepsilon$.*

Demonstrație. Pentru început, fie $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă care satisface $f(0)=f(2\pi)$ şi f^* prelungirea prin periodicitate pe $\mathbb{R}$ a funcției f. Conform Teoremei 2.1.3, pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom trigonometric T_ε astfel încât $\|f-T_\varepsilon\|<\frac{\varepsilon}{2}$, cu

$$T_\varepsilon=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{p}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx).$$

Dezvoltând în serie funcțiile $\cos$ şi $\sin$, rezultă că există un rang m_ε astfel încât

$$\left\|T_\varepsilon-\sum_{k=1}^{m_\varepsilon}a_kx^k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Notând $P_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{m_\varepsilon}a_kx^k$, rezultă că

$$\|f-P_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

Să presupunem acum că funcția f nu mai satisface condiția $f(0)=f(2\pi)$, deci $f(0)\neq f(2\pi)$. Considerăm funcția continuă

$$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\qquad g(x)=f(x)+\frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x.$$

Atunci $g(0)=f(0)$, $g(2\pi)=f(0)$, deci $g(0)=g(2\pi)$. Conform celor de mai sus, pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom P_ε astfel încât $\|g-P_\varepsilon\|<\varepsilon$, adică

$$\left|f(x)+\frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x-P_\varepsilon(x)\right|<\varepsilon,\ \forall x\in[0,2\pi].$$

Notând $Q_\varepsilon(x)=P_\varepsilon(x)-\frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x$, rezultă că

$$\|f-Q_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

În sfârşit, fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi

$$h:[0,2\pi]\to[a,b],\qquad h(t)=a+\frac{b-a}{2\pi}t.$$

Evident, h este un homeomorfism. Considerăm funcția $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $g(t)=f(h(t))$, $\forall t\in[0,2\pi]$. Ținând seama de cele de mai sus, rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom P_ε astfel încât $\|g-P_\varepsilon\|<\varepsilon$, adică

$$|f(h(t))-P_\varepsilon(t)|<\varepsilon,\ \forall t\in[0,2\pi].$$

În consecință,

$$|f(x)-P_\varepsilon(h^{-1}(x))|<\varepsilon,\ \forall x\in[a,b].$$

Notând $Q_\varepsilon=P_\varepsilon\circ h^{-1}$, rezultă că

$$\|f-Q_\varepsilon\|<\varepsilon.\ \blacksquare$$

2.2. Serii Fourier generalizate

Fie $(H, <\cdot,\cdot>)$ un spațiu prehilbertian real şi fie $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ un sistem ortonormal de elemente din H. Aşadar avem:

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}.$$

Fie $x \in H$ oarecare. *Coeficienții Fourier (generalizați) ai lui x în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ se definesc astfel:

$$\xi_n =< x, e_n >, \; n \in \mathbb{N}^*, \tag{1}$$

iar seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n, \tag{2}$$

se numeşte *seria Fourier ataşată lui x în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$.

Teorema 2.2.1. $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|, \; \forall c_i \in \mathbb{R}, \; 1 \leq i \leq n.$

Demonstrație. Într-adevăr:

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 =< x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_j >=$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

Aşadar, avem

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 . \tag{3}$$

Evident această expresie este minimă dacă $c_i = \xi_i$, $1 \leq i \leq n$. Rezultă că

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|, \; \forall c_i \in \mathbb{R}, \; 1 \leq i \leq n. \; \blacksquare$$

Corolarul 1. *Dacă ξ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt coeficienții Fourier ai lui x în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$, *atunci are loc inegalitatea lui Bessel*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leq \|x\|^2 . \tag{4}$$

Demonstrație. Din (3) rezultă că

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 ,$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \|x\|^2 .$$

Făcând $n \to \infty$, se obține (4). ■

Definiția 2.2.1. Sistemul ortonormal $\{e_n\}_{n\ge1}$ se numeşte *închis* dacă $Sp(\{e_n\}_{n\ge1})$ este dens în H, deci dacă pentru orice $x \in H$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| < \varepsilon .$$

Teorema 2.2.2. *Dacă sistemul ortonormal $\{e_n\}_{n\ge1}$ este închis atunci are loc identitatea lui Parseval:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 . \tag{5}$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că

$$\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 . \tag{6}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| < \varepsilon .$$

Din (3) obținem

$$\varepsilon^2 > \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \ge \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

Aşadar

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \varepsilon^2 > \|x\|^2 .$$

Cum ε este arbitrar, făcând $n \to \infty$, rezultă (6). ■

Definiția 2.2.2. Un sistem ortonormal $\{e_n\}_{n\ge1}$ se numeşte *complet (total)* dacă orice $x \in H$ care satisface $\xi_i =< x, e_i >= 0$, pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$, coincide cu elementul nul din H, deci $x = 0_H$.

Teorema 2.2.3. *Orice sistem ortonormal închis este complet.*

Demonstrație. Deoarece $\xi_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, din egalitatea lui Parseval rezultă că $x = 0_H$.
■

Afirmația reciprocă nu este adevărată în general. Se poate arăta că într-un spațiu Hilbert cele două noțiuni coincid.

Fie $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Vom nota cu $\widetilde{C}([a,b])$ spațiul vectorial al funcțiilor continue pe porțiuni pe $[a,b]$ care satisfac

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot[f(x-0)+f(x+0)],\ \forall x\in[a,b].$$

Evident $C([a,b])\subset\widetilde{C}([a,b])$. Pe $\widetilde{C}([a,b])$ definim următorul produs scalar

$$<f,g>=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ \forall f,g\in\widetilde{C}([a,b]).$$

Într-adevăr, se verifică uşor că dacă $f,g,f_1,f_2\in\widetilde{C}([a,b])$, atunci:

$$<f_1+f_2,g>=<f_1,g>+<f_2,g>,$$
$$<\alpha f,g>=\alpha<f,g>,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},$$
$$<f,g>=<g,f>,$$
$$<f,f>\geq 0.$$

Vom arăta acum că din $<f,f>=0$, rezultă că $f\equiv 0$. Să presupunem că

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0.$$

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_n=b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$, astfel încât funcția f este continuă pe intervalul (x_{i-1},x_i). Considerăm funcțiile

$$g_i:[x_{i-1},x_i]\to\mathbb{R},\ 1\leq i\leq n,$$

$$g_i(x)=\begin{cases} f(x_{i-1}+0), & \text{dacă } x=x_{i-1},\\ f(x), & \text{dacă } x\in(x_{i-1},x_i),\\ f(x_i-0), & \text{dacă } x=x_i.\end{cases}$$

Funcția g_i este continuă pe $[x_{i-1},x_i]$ şi $0=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\mathrm{d}x=\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i^2(x)\mathrm{d}x$. În consecință $g_i(x)=0$, $\forall x\in[x_{i-1},x_i]$, deci $f(x)=0$, $\forall x\in(x_{i-1},x_i)$, $f(x_{i-1}+0)=0$, $f(x_i-0)=0$.

Atunci pentru orice $i, 1\leq i\leq n-1$,

$$f(x_i)=\frac{1}{2}\cdot[f(x_i-0)+f(x_i+0)]=0.$$

Prin urmare $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$.

În concluzie, $\widetilde{C}([a,b])$ este un spațiu prehilbertian.

Fie acum spațiul prehilbertian $H=\widetilde{C}([-\pi,\pi])$ Să considerăm în acest spațiu şirul de funcții trigonometrice

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...,\cos nx,\sin nx,.... \tag{7}$$

Se deduc cu uşurință următoarele formule importante:

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\mathrm{d}x=2\pi, \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x = 0, \; m \in \mathbb{N}^*, \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \mathrm{d}x = 0, \; m \in \mathbb{N}^*, \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq n \\ \pi, & \text{dacă } m = n \end{cases}, \; m, n \in \mathbb{N}^*, \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq n \\ \pi, & \text{dacă } m = n \end{cases}, \; m, n \in \mathbb{N}^*, \tag{12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = 0, \; m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{13}$$

Să dovedim, de exemplu, (11). Dacă $m \neq n$, atunci din egalitatea

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} \cdot [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

rezultă că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{m+n} \cdot \sin(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m-n} \cdot \sin(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0.$$

De asemenea

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{2m} \cdot \sin 2mx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Din egalitățile (8)-(13), rezultă că şirul (7) este un sistem ortogonal. Pe de altă parte, cum $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$, din aceste egalități rezultă că

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}, \; \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

În consecință, sistemul de funcții

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ldots. \tag{14}$$

este un sistem ortonormal de funcții.

Fie a_n, b_n, coeficienții Fourier din Teorema lui Dirichlet. Notăm cu

$$c_0, c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_n, d_n, \ldots,$$

coeficienții Fourier generalizați în raport cu sistemul ortonormal (14). Atunci:

$$c_0 =< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot a_0,$$

$$c_n =< f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \cdot a_n, \; n \in \mathbb{N}^*,$$

$$d_n =< f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \cdot b_n, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Inegalitatea lui Bessel devine

$$\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$$

sau

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\,. \tag{15}$$

Se poate arăta că sistemul trigonometric (14) este închis. Rezultă că are loc egalitatea lui Parseval, adică

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Exemplu. În cazul funcției $f:[-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\pi}{2sh\pi}\cdot e^x$, coeficienții Fourier sunt

$$a_0=1,\ a_n=\frac{(-1)^n}{1+n^2},\ b_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{1+n^2},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{ch\pi}{2sh\pi}.$$

Din egalitatea lui Parseval obținem

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi\,ch\pi}{2sh\pi},$$

de unde rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi\,ch\pi-sh\pi}{2sh\pi}.$$

2.3. Serii Fourier pentru funcții periodice de perioadă $T=2l$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție periodică de perioadă $2l$, continuă pe porțiuni, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(t)=\dfrac{l}{\pi}\,t$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g=f\circ h$. Funcția g este periodică de perioadă 2π.

Într-adevăr

$$g(t+2\pi)=f\big(h(t+2\pi)\big)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f(\frac{l}{\pi}t)=g(t),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Dacă f este continuu diferențiabilă pe porțiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$, atunci şi g are această proprietate. Dacă, în plus, f este continuă, din Teorema lui Dirichlet rezultă că

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

unde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\,,\ n\in\mathbb{N}\,,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\,,\ n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Cum $t = \frac{\pi}{l}x$, obținem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)\,,\ \forall x\in\mathbb{R}\,,$$

unde

$$a_n = \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n\in\mathbb{N}\,,\quad b_n = \frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Exemplu. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $(-l,l)$ funcția $f(x)=x$.

Funcția fiind impară, rezultă că $a_n = 0$, $n\in\mathbb{N}$. Prin calcul obținem

$$b_n = \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}\,.$$

Atunci

$$x = \frac{2l}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,,\ x\in(-l,l)\,.$$

CAPITOLUL 3

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA

3.1. Clasificarea ecuațiilor cu derivate parțiale cvasiliniare de ordinul al doilea

Formularea matematică a unor probleme fizice conduce la ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Multe astfel de ecuații întâlnite în fizică şi tehnică sunt ecuații liniare în raport cu funcția necunoscută şi derivatele parțiale ale acesteia sau pot fi aduse la această formă în urma unor aproximații convenabile. În acest capitol ne vom ocupa de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea pentru funcții de două variabile.

Definiția 3.1.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă. Se numeşte *ecuație cvasiliniară de ordinul al doilea* o ecuație cu derivate parțiale de forma

$$A(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,, \qquad (1)$$

unde $(x,y)\in\Omega$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ pe Ω, A,B,C sunt funcții continue pe Ω, iar funcția D este continuă pe Ω. *Necunoscuta* este funcția $u\in C^2(\Omega)$.

Vom începe cu clasificarea acestor ecuații. În acest scop vom determina formulele de transformare a coeficienților ecuației (1) la o schimbare a variabilelor independente x,y.

Fie $\Omega,\Omega_1\subset\mathbb{R}^2$ mulțimi deschise şi fie $F:\Omega\to\Omega_1$, definită astfel:

$$F(x,y)=\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big),\ \forall(x,y)\in\Omega,$$

cu proprietățile:

a) F este bijectivă;

b) $F\in C^1(\Omega)$;

c) $\det J_F(x,y)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}(x,y)\neq 0$, $\forall(x,y)\in\Omega$.

Fie acum funcția $v=u\circ F^{-1}:\Omega_1\to\mathbb{R}$. Atunci $u=v\circ F$, deci

$$u(x,y)=v\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big). \qquad (2)$$

Cu această schimbare de variabile, ecuația (1) se va transforma într-o nouă ecuație cu derivate parțiale pentru funcția v. Reamintim formulele de derivare a funcțiilor compuse învățate la cursul de Analiză matematică:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Înlocuind în (1), obținem

$$A^*(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+2B^*(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}+C^*(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+D^*(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta})=0, \tag{3}$$

unde

$$A^*=A\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2B\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \tag{4}$$

$$B^*=A\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+C\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{5}$$

$$C^*=A\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2B\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \tag{6}$$

Se constată că

$$(B^*)^2-A^*\cdot C^*=(B^2-AC)\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\end{vmatrix}^2.$$

Aşadar, în urma schimbării de variabile, expresiile $B^2-A\cdot C$ şi $(B^*)^2-A^*\cdot C^*$ păstrează acelaşi semn sau sunt în acelaşi timp nule. În consecință, ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea cvasiliniare se clasifică în modul următor.

Definiția 3.1.2. Dacă $B^2-A\cdot C>0$, ecuația se numeşte de *tip hiperbolic*, dacă $B^2-A\cdot C=0$, ecuația se numeşte de *tip parabolic*, iar dacă $B^2-A\cdot C<0$, ecuația se numeşte de *tip eliptic*.

Menționăm că terminologia aceasta este pur convențională.

Subliniem că această clasificare depinde de punctul (x,y), deoarece semnul expresiei $B^2-A\cdot C$ depinde de punctul $(x,y)\in\Omega$. Prin urmare, ecuația (1) poate să nu aibă acelaşi tip pe întreg domeniul Ω.

Exemplu. *Ecuația lui Tricomi*

$$y\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

este de tip mixt. Dacă $y < 0$ ecuaţia este de tip hiperbolic, dacă $y > 0$ este de tip eliptic, iar dacă $y = 0$ ecuaţia este de tip parabolic. Această ecuaţie apare în aerodinamică. Domeniul hiperbolic $(y < 0)$ corespunde mişcării subsonice, iar domeniul eliptic $(y > 0)$ descrie mişcarea supersonică.

Definiţia 3.1.3. Se numeşte *curbă caracteristică a ecuaţiei* (1), orice curbă plană de clasă C^1, nesingulară, $\Gamma \subset \Omega$, de ecuaţie $\varphi(x, y) = 0$, care satisface ecuaţia

$$A \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat al curbei caracteristice Γ. Curba fiind nesingulară, putem presupune că $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Conform teoremei funcţiilor implicite, în vecinătatea punctului M_0, curba are ecuaţia $y = y(x)$. Din relaţia $\varphi(x, y(x)) = 0$, rezultă că

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'(x) = 0, \tag{8}$$

deci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'(x).$$

Înlocuind în (7), obţinem

$$A \cdot y'^2(x) - 2B \cdot y'(x) + C = 0. \tag{9}$$

Aceasta este *ecuaţia diferenţială a curbelor caracteristice* ale ecuaţiei (1).

Observaţia 3.1.1. Coeficienţii A, B, C ai ecuaţiei (1) nu sunt simultan nuli. Putem presupune că $A \neq 0$. Într-adevăr, dacă $A = 0$ şi $C \neq 0$, schimbând x cu y obţinem o ecuaţie în care $A \neq 0$. Dacă $A = C = 0$, atunci $B \neq 0$, schimbarea de variabile $x' = x + y$, $y' = x - y$ conducându-ne la o ecuaţie cu $A \neq 0$. De fapt, în acest ultim caz, după cum se va vedea ulterior, ecuaţia (1) are deja forma canonică, deci nu mai este necesară nici o schimbare de variabile.

Aşadar, ecuaţia (9) este o ecuaţie de gradul al doilea în $y'(x)$. Fie

$$y'(x) = \lambda(x, y) \tag{10}$$

o soluţie a ecuaţiei (9) şi $\varphi(x, y) = C$ soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (10). În ipoteza că $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, avem

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \lambda(x, y).$$

Ţinând seama că λ verifică ecuaţia (9), deducem că

$$A \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

deci $\varphi(x, y) = C$ este o curbă caracteristică a ecuației (1).

3.1.1. Ecuații de tip hiperbolic

În acest caz, din ecuația (8) rezultă

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{11}$$

și

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{12}$$

Fie curbele caracteristice $\varphi_1(x, y) = C_1$ și $\varphi_2(x, y) = C_2$, soluții ale ecuațiilor diferențiale (11) respectiv (12). Cu schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases},$$

rezultă că $A^* = C^* = 0$, deci ecuația (3) devine

$$2B^*(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \, \partial \eta} + D^*(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}) = 0,$$

care se mai scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \, \partial \eta} + D^{**}(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}) = 0. \tag{13}$$

Aceasta este *forma canonică* a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic.

Exemple. 1) Să se reducă la forma canonică următoarea ecuație cu derivate parțiale

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

În acest caz $A(x, y) = x^2$, $B(x, y) = 0$, $C(x, y) = -y^2$. Avem $B^2 - A \cdot C = x^2 y^2 > 0$, deci ecuația este de tip hiperbolic în orice domeniu care nu intersectează axele de coordonate. Conform (9), ecuația diferențială a curbelor caracteristice este

$$x^2 y'^2(x) - y^2 = 0.$$

Rezolvând această ecuație, obținem $y' = \frac{y}{x}$ și $y' = -\frac{y}{x}$, care prin integrare dau $xy = C_1$, $\frac{y}{x} = C_2$. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + (-\frac{y}{x^2}) \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x^3} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

În consecință, forma canonică a ecuației este

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

2) Să se afle soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care satisface condițiile $u(x,0) = 3x^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$.

Mai întâi, determinăm forma canonică a ecuației cu derivate parțiale. Conform (9), ecuația diferențială a curbelor caracteristice este

$$y'^2(x) - 2y'(x) - 3 = 0,$$

de unde obținem $y' = 3$, $y' = -1$. Integrând, rezultă $3x - y = C_1$, $x + y = C_2$. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = 3x - y \\ \eta = x + y \end{cases}.$$

Obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Atunci, forma canonică a ecuației este

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Rezultă că $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \psi_1(\eta)$. Prin integrare, obținem că $v(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, deci soluția generală a ecuației cu derivate parțiale dată este

$$u(x,y) = \varphi(3x - y) + \psi(x + y).$$

Condiția $u(x,0) = 3x^2$ conduce la egalitatea $\varphi(3x) + \psi(x) = 3x^2$, iar condiția $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$ conduce la egalitatea $-\varphi'(3x) + \psi'(x) = 0$. Din această ultimă egalitate, obținem

$-\frac{1}{3}\varphi(3x)+\psi(x)=C$. Cum $\varphi(3x)+\psi(x)=3x^2$, prin scădere rezultă că $\varphi(3x)=\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{4}C$, deci $\varphi(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}C$. Totodată $\psi(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}C$. În consecință, soluția ecuației cu derivate parțiale, cu condițiile specificate, este

$$u(x,y)=\varphi(3x-y)+\psi(x+y)=3x^2+y^2.$$

3.1.2. Ecuații de tip parabolic

În acest caz $AC=B^2$. Ecuația (8) are o singură soluție

$$y'=\frac{B}{A}.$$

Obținem o singură familie de curbe caracteristice $\varphi(x,y)=C$, care va satisface ecuația

$$A\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{14}$$

Dacă $B\neq 0$ (altfel ecuația (1) are deja forma canonică), înmulțim ecuația (14) cu C, ținem seama că $AC=B^2$ şi împărțim cu B. Obținem, astfel, ecuația echivalentă

$$B\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{15}$$

În continuare, facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=h(x,y)\end{cases}, \tag{16}$$

unde h este arbitrar astfel încât $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$. Alegem funcția h cât mai simplă, de regulă $\eta=x$ sau $\eta=y$. Folosind (14) şi ținând seama că $AC=B^2$, rezultă că φ satisface (7), deci $A^*=0$, conform (4). Pe de altă parte, din (14), (15) şi (16) deducem că

$$B^*=(A\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+B\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y})\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}+(B\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+C\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y})\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=0\ .$$

Aşadar, în cazul parabolic, ecuația (3) devine

$$C^*(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+D^*(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta})=0$$

sau încă

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+\bar{D}(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta})=0. \tag{17}$$

Aceasta este *forma canonică* a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic.

Exemplu. Să se reducă la forma canonică şi să se găsească soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

Cum $B^2 - A \cdot C = 0$, ecuația este de tip parabolic. Din ecuația caracteristicilor rezultă $y'(x) = -\frac{y}{x}$, care prin integrare conduce la $\ln xy = C$. În urma schimbării de variabile

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = y \end{cases},$$

obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + 1 \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + y \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} .$$

Forma canonică a ecuației este

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 .$$

Această ecuație se mai scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0 ,$$

de unde rezultă că

$$\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = \varphi(\xi)$$

sau

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} \cdot \varphi(\xi) .$$

Prin integrare obținem

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) \cdot \ln \eta + \psi(\xi) .$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației este

$$u(x, y) = \varphi(xy) \cdot \ln y + \psi(xy) .$$

3.1.3. Ecuații de tip eliptic

Suntem în cazul $B^2 - A \cdot C < 0$. Din (9) obținem

$$y'_{1,2} = \frac{B}{A} \pm \mathrm{i} \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}$$

şi mai departe, prin integrare:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y)+\mathrm{i}\varphi_2(x,y)=C_1 \\ \varphi_1(x,y)-\mathrm{i}\varphi_2(x,y)=C_2 \end{cases}.$$

Vom face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \alpha=\varphi_1(x,y)+\mathrm{i}\varphi_2(x,y) \\ \beta=\varphi_1(x,y)-\mathrm{i}\varphi_2(x,y) \end{cases}.$$

Ca şi în cazul hiperbolic, calculul formal conduce la

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}+D^{**}(\alpha,\beta,v,\frac{\partial v}{\partial\alpha},\frac{\partial v}{\partial\beta})=0. \tag{18}$$

Considerăm o nouă schimbare de variabile

$$\begin{cases} \xi=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ \eta=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\alpha-\beta) \end{cases}.$$

Fie $G(\alpha,\beta)=\big(\xi(\alpha,\beta),\eta(\alpha,\beta)\big)$, $\forall(\alpha,\beta)\in\Omega_1$ şi $w=v\circ G^{-1}$. Atunci

$$v(\alpha,\beta)=w\big(\xi(\alpha,\beta),\eta(\alpha,\beta)\big),$$

deci

$$\frac{\partial v}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\beta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi}-\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right). \tag{19}$$

Înlocuind (19) în (18), deducem că forma canonică a ecuației (1) în cazul eliptic este

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+\tilde{D}\left(\xi,\eta,w,\frac{\partial w}{\partial\xi},\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)=0. \tag{20}$$

Exemplu. Să se reducă la forma canonică următoarea ecuație cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Observăm că $B^2-A\cdot C=-1$, deci ecuația este de tip eliptic. Din ecuația caracteristicilor rezultă $y'(x)=2+\mathrm{i}$, care prin integrare conduce la $y(x)=(2+\mathrm{i})x+C$.

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi=2x-y \\ \eta=x \end{cases}.$$

Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{\partial w}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+4\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}.$$

Înlocuind în ecuația cu derivate parțială dată, rezultă că forma canonică a acestei ecuații este

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{\partial w}{\partial \eta}=0.$$

3.2. Ecuația coardei vibrante

Ecuația coardei vibrante este o ecuație de tip hiperbolic, reprezentativă pentru această clasă de ecuații.

În teoria elasticității prin *coardă* se înțelege un fir flexibil tensionat. Vom considera vibrațiile (oscilațiile) mici transversale ale coardei în planul xOu, în jurul poziției de echilibru, care coincide cu axa Ox. În figura 2.1 este reprezentat graficul coardei la momentul t.

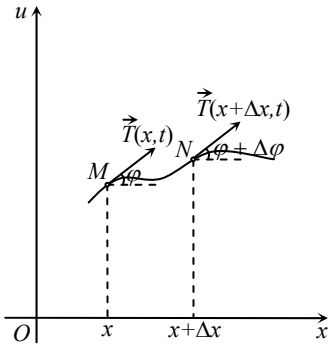

Fig. 2.1

Vom nota cu $u(x,t)$ abaterea relativă a unui punct al coardei față de poziția de echilibru în punctul x la momentul t. Datorită flexibilității, tensiunea $\vec{T}(x,t)$ în punctul x la momentul t are aceeaşi direcție cu tangenta la coardă în punctul x. Deoarece vibrațiile sunt mici, conform legii lui Hooke, putem presupune că mărimea tensiunii va rămâne constantă, independentă de t şi x, deci $\left\|\vec{T}(x,t)\right\|=T$. Să considerăm acum un element al coardei, corespunzător intervalului $[x,x+\Delta x]$. Fie $M=u(x,t)$, $N=u(x+\Delta x,t)$. De asemenea, fie $F(x,t)\cdot\Delta x$ proiecția pe axa Ox a forței externe care acționează la momentul t asupra intervalului $[x,x+\Delta x]$. Dacă $\rho(x)$ este densitatea liniară de masă, masa elementului MN al coardei este $\rho(x)\cdot\Delta x$. Vom presupune coarda omogenă, adică densitatea este constantă, deci $\rho(x)=\rho=const.$. Să notăm cu φ şi $\varphi+\Delta\varphi$ unghiurile făcute de tangentele la coardă în punctele M respectiv N, cu axa Ox. Deoarece vibrațiile sunt presupuse „mici”, rezultă că φ este „mic”, deci putem aproxima

$$\sin\varphi\simeq tg\varphi=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \qquad (1)$$

Asupra intervalului $[x,x+\Delta x]$ acționează o forță datorită tensiunii şi forța externă.

Conform legii a doua a lui Newton, suma acestor forțe este egală cu produsul dintre masă şi accelerație. Proiecția acestei relații vectoriale pe axa Ou este

$$T\cdot\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\cdot\sin\varphi+F(x,t)\cdot\Delta x=\rho\cdot\Delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t). \tag{2}$$

Ținând seama de (1), rezultă că

$$T\cdot\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\cdot\sin\varphi\simeq T\cdot\big(tg(\varphi+\Delta\varphi)-tg\varphi\big)=$$

$$=T\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)\simeq T\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\cdot\Delta x. \tag{3}$$

Înlocuind (3) în (2) şi simplificând cu Δx, deducem

$$\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t). \tag{4}$$

Aceasta este *ecuația micilor vibrații transversale ale coardei*. Dacă $F=0$, vibrațiile sunt *libere*, iar în cazul $F\neq 0$ vibrațiile sunt *forțate*.

Notând $a^2=\dfrac{T}{\rho}$ şi $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$, ecuația (4) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t). \tag{5}$$

Ecuația (5) se întâlneşte şi în probleme de propagarea undelor (acustice, optice, electromagnetice) când constanta a^2 are alte semnificații fizice. De aceea, ecuația (5) se mai numeşte şi *ecuația unidimensională a undelor*.

3.2.1. Ecuația coardei vibrante infinite libere

Prin *coardă infinită* se înțelege o coardă foarte lungă astfel încât vibrațiile la capete nu influențează sau influențează puțin comportarea punctelor dintr-o porțiune a coardei depărtată de extremități. În absența unor forțe exterioare coardei, funcția $(x,t)\to u(x,t)$ verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

cu condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Condițiile inițiale (2) indică starea în care se află coarda la momentul inițial, precum şi viteza fiecărui punct al coardei la acelaşi moment. Vom presupune că funcția f este de clasă C^2, iar funcția g este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$.

Se pune problema determinării funcției $u:\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$, care verifică ecuația (1) şi condițiile inițiale (2). O astfel de problemă se numeşte problemă *Cauchy* sau *problemă cu condiții inițiale*.

Vom aduce mai întâi ecuația (1) la forma canonică. Ecuația diferențială a curbelor caracteristice este

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - a^2 = 0,$$

care conduce la ecuațiile diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a.$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații sunt, respectiv,

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}.$$

Obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + a \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Înlocuind în ecuația (1), rezultă forma canonică a acestei ecuații:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0,$$

care se mai scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Integrând de două ori, obținem succesiv

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \psi(\eta),$$

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta),$$

unde Φ şi Ψ sunt funcții arbitrare de o variabilă, de clasă C^2.

Soluția generală a ecuației (1) este

$$u(x,t) = \Phi(x - at) + \Psi(x + at). \tag{3}$$

Funcțiile $u_1(x,t) = \Phi(x - at)$ şi $u_2(x,t) = \Psi(x + at)$ reprezintă mişcări ale coardei, care pot fi descrise ca unde care se deplasează spre stânga şi respectiv spre dreapta cu viteza a.

Soluția generală a ecuației (1) este superpoziția acestor unde.

Ecuația (1) nu determină mişcarea coardei în mod univoc. Din acest motiv am adăugat condițiile inițiale. Aşadar, vom determina funcțiile Φ şi Ψ astfel încât funcția u să verifice condițiile inițiale (2). Deoarece

$$u(x,0) = \Phi(x) + \Psi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -a \cdot \Phi'(x) + a \cdot \Psi'(x),$$

din (2) rezultă că

$$\begin{cases} \Phi(x)+\Psi(x)=f(x) \\ -a\cdot\Phi'(x)+a\cdot\Psi'(x)=g(x) \end{cases}.$$

Dacă $x_0\in\mathbb{R}$ este un punct arbitrar fixat, din a doua egalitate rezultă:

$$\Phi(x)-\Psi(x)=-\frac{1}{a}\cdot\int_{x_0}^{x} g(z)\mathrm{d}z+C.$$

Se obține astfel sistemul:

$$\begin{cases} \Phi(x)+\Psi(x)=f(x) \\ \Phi(x)-\Psi(x)=-\frac{1}{a}\cdot\int_{x_0}^{x} g(z)\mathrm{d}z+C \end{cases},$$

a cărui soluție este

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)-\frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x} g(z)\mathrm{d}z+\frac{C}{2},$$

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x} g(z)\mathrm{d}z-\frac{C}{2}.$$

Prin urmare

$$u(x,t)=\Phi(x-at)+\Psi(x+at)=\frac{1}{2}\cdot f(x-at)-\frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x-at} g(z)\mathrm{d}z+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot f(x+at)+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x+at} g(z)\mathrm{d}z.$$

Aşadar, soluția ecuației (1) cu condițiile inițiale (2) este:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at} g(z)\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Formula (4) care rezolvă problema (1)-(2) se numeşte *formula lui D'Alembert*, iar metoda folosită se numeşte *metoda schimbării variabilelor*.

Observația 3.2.1. Să considerăm cazul particular al coardei nelimitată în ambele sensuri, satisfăcând condițiile inițiale:

$$u(x,0)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

unde $f(x)\neq 0$, dacă $x\in[\alpha,\beta]$, $f(x)=0$, dacă $x\notin[\alpha,\beta]$ (fig. 2.2) şi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Presupunem că funcția f este derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$.

Procedând ca mai sus, soluția problemei este

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot[f(x-at)+f(x+at)].$$

Această formulă se poate interpreta în modul următor.

La un moment t, graficele funcțiilor $f(x-at)$ şi $f(x+at)$ se obțin din graficul funcției f prin translații în direcția axei Ox, prima în sensul axei Ox, a doua în sens opus.

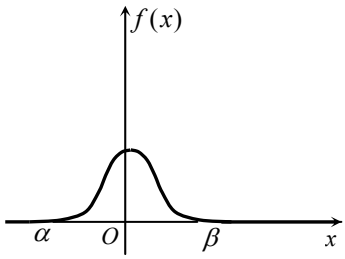

Fig. 2.2

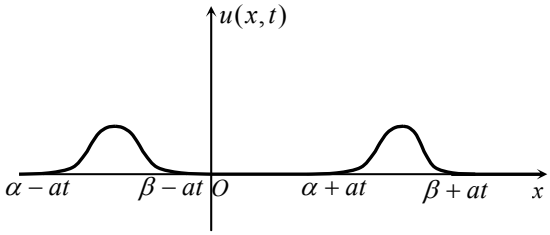

Fig. 2.3

Aşadar, $f(x-at) \neq 0$, dacă $\alpha + at \leq x \leq \beta + at$ şi $f(x+at) \neq 0$, dacă $\alpha - at \leq x \leq \beta - at$, deci graficul funcţiei $u(x,t)$ este cel din fig. 2.3.

Să presupunem că un observator este plasat la momentul $t=0$ în punctul x_0 şi se deplasează pe axa Ox în sensul pozitiv cu viteza a, adică abscisa lui la momentul t va fi $x = x_0 + at$ sau $x - at = x_0$. Pentru acest observator contribuţia termenului $f(x-at)$ în deplasarea u a coardei rămâne mereu aceeaşi şi anume egală cu $f(x_0)$; avem deci o propagare a deplasării, care se numeşte *propagarea undei directe*. În acelaşi mod se arată că termenul $f(x+at)$ corespunde unei propagări în sensul opus pe Ox, cu aceeaşi viteză a, care corespunde *undei inverse*.

Prin urmare, vibraţiile transversale ale coardei apar ca rezultante ale unor propagări de unde, una directă şi una inversă cu aceeaşi viteză a.

3.2.2. Coarda vibrantă liberă cu capete fixe

Problema matematică la care conduce studiul vibraţiilor libere ale unei coarde finite, de lungime l, cu capete fixe, se poate formula în modul următor.

Să se determine soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

cu condiţiile la limită

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \forall t \in [0,\infty) \tag{6}$$

şi condiţiile iniţiale

$$u(x,0) = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ \forall x \in [0,l]. \tag{7}$$

Conform condiţiilor la limită (6), capetele coardei sunt fixe. Condiţiile iniţiale (7) indică starea în care se află coarda la momentul iniţial de timp, precum şi viteza fiecărui punct al coardei la acelaşi moment. Funcţiile f şi g sunt date şi sunt presupuse nenule şi de clasă C^1 pe $[0,l]$. Din (6) şi (7) rezultă că funcţiile f şi g trebuie să satisfacă egalităţile

$$f(0) = f(l) = 0, \ g(0) = g(l) = 0.$$

Pentru rezolvarea problemei enunţate vom folosi *metoda separării variabilelor a lui Fourier*. Această metodă este însoţită de *principiul suprapunerii efectelor*.

Pentru început căutăm soluţii ale ecuaţiei (5) de forma

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{8}$$

Ținând seama de (6), rezultă:

$$\begin{cases} X(0) \cdot T(t) = 0 \\ X(l) \cdot T(t) = 0 \end{cases},$$

pentru orice $t > 0$. Atunci

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{9}$$

deoarece în caz contrar ar rezulta $T(t) = 0$, pentru orice $t > 0$, deci $u(x,t) \equiv 0$, ceea ce contravine condițiilor inițiale.

Punând condiția ca funcția u dată de (8) să verifice ecuația (5), obținem

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t), \ \forall x \in [0,l], \ \forall t \in [0,\infty).$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}, \ \forall x \in [0,l], \ \forall t \in [0,\infty).$$

O funcție de t coincide cu o funcție de x numai dacă ambele sunt egale cu o aceeaşi constantă reală, pe care o vom nota cu λ. Aşadar

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obținem astfel două ecuații diferențiale:

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0, \tag{10}$$

$$T''(t) - \lambda a^2 \cdot T(t) = 0. \tag{11}$$

Vom arăta că ecuația (10) are soluții nenule numai dacă $\lambda < 0$. Într-adevăr, ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (10) este $r^2 - \lambda = 0$. Dacă $\lambda > 0$, această ecuație are rădăcinile $r_1 = \sqrt{\lambda}$ şi $r_2 = -\sqrt{\lambda}$, deci soluția generală a ecuației (10) va fi

$$X(x) = C_1 \cdot e^{x\sqrt{\lambda}} + C_2 \cdot e^{-x\sqrt{\lambda}}.$$

Condițiile (9) conduc la $C_1 = C_2 = 0$, deci $X(x) = 0$, $\forall x \in (0,l)$. În consecință, $u(x,t) = 0$, o astfel de soluție neavând sens fizic. Dacă $\lambda = 0$, atunci $X(x) = C_1 \cdot x + C_2$. Din nou, folosind condițiile (9) rezultă că $u(x,t) = 0$, soluție neacceptabilă.

Prin urmare, rezultă că $\lambda < 0$. Fie $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$. Soluția generală a ecuației (10) va fi

$$X(x) = C_1 \cdot \cos \mu x + C_2 \cdot \sin \mu x. \tag{12}$$

Din (9) obținem $C_1 = X(0) = 0$ şi $C_2 \cdot \sin \mu l = X(l) = 0$. Cum $C_2 \neq 0$, pentru că altfel am ajunge din nou la soluția nulă, deducem că $\sin \mu l = 0$, deci $\mu l = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. În final, rezultă că ecuația (10) are o infinitate de soluții

$$X_n(x) = C_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Înlocuind $\mu = \dfrac{n\pi}{l}$ în ecuația (11), obținem soluția generală:

$$T_n(t) = D_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l} + E_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l}, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

unde D_n şi F_n sunt constante arbitrare.

În sfârşit, dacă notăm $A_n = C_n \cdot D_n$, $B_n = C_n \cdot E_n$, obținem soluția ecuației (5) cu condițiile la limită (6) :

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \left(A_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l} t + B_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l} t \right) \cdot \sin n\frac{\pi}{l} x, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Aplicăm *principiul suprapunerii efectelor* care afirmă că, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ este convergentă, atunci suma sa $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ este, de asemenea, soluție pentru problema (5)-(6). Vom presupune, în plus, că această serie este şi derivabilă termen cu termen de două ori în raport cu x respectiv t. Conform principiului suprapunerii efectelor, rezultă că funcția

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l} t + B_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l} t \right) \cdot \sin n\frac{\pi}{l} x \tag{13}$$

satisface ecuația (5) şi condițiile la limită (6). Rămâne să determinăm constantele A_n şi B_n din condițiile inițiale (7). Din aceste condiții rezultă că

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin n\frac{\pi}{l} x.$$

Prelungind prin imparitate funcția $f:[0,l] \to \mathbb{R}$ pe intervalul $[-l,0]$ şi dezvoltând această prelungire în serie de sinuşi, obținem

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \sin n\frac{\pi}{l} x \, \mathrm{d}x, \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{14}$$

Pe de altă parte

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\pi a}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-A_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l} t + B_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l} t \right) \cdot \sin n\frac{\pi}{l} x,$$

deci, folosind (7), rezultă că

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\pi a}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cdot \sin n\frac{\pi}{l} x.$$

Procedând ca şi în cazul funcției f, găsim

$$n\frac{\pi a}{l} \cdot B_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l g(x) \sin n\frac{\pi}{l} x \, \mathrm{d}x, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

deci

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \cdot \int_0^l g(x) \sin n\frac{\pi}{l} x \, \mathrm{d}x, \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{15}$$

Se poate arăta că, dacă $f, g \in C^2$, atunci seria (13) în care coeficienții A_n şi B_n au expresiile (14) şi (15), este uniform convergentă pe $[0,l]$, deci derivabilă termen cu termen pe acest interval.

Aşadar, soluția problemei (5)-(7) este furnizată de (13), unde A_n şi B_n dați de (14) respectiv (15). Mai mult se poate demonstra unicitatea soluției.

Observația 3.2.2. Fiecare termen al seriei (13), adică funcția

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cdot\cos n\frac{\pi a}{l}t+B_n\cdot\sin n\frac{\pi a}{l}t\right)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x,\ n\in\mathbb{N}^*,$$

descrie una din mişcările simple posibile ale coardei fixate în punctele 0 şi l, numite *oscilații proprii* ale coardei. Fie $\omega_n=n\frac{\pi a}{l}$. Oscilația unui punct al coardei în mişcarea descrisă de u_n are perioada principală

$$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{2l}{na},$$

deci este independentă de x, fiind aceeaşi pentru toate punctele coardei. Amplitudinea acestei oscilații este

$$\sqrt{A_n^2+B_n^2}\cdot\left|\sin n\frac{\pi}{l}x\right|$$

şi este variabilă, depinzând de x. Amplitudinea maximă se realizează când $\sin n\frac{\pi}{l}x=\pm1$. Astfel de puncte există. De exemplu, dacă $n=1$, $x=\frac{l}{2}$; dacă $n=2$, $x=\frac{l}{4},\ \frac{l}{2},\ \frac{3l}{4}$ etc. Amplitudinea maximă $\sqrt{A_n^2+B_n^2}$ se numeşte *amplitudinea vibrației coardei*. Înălțimea sunetului este cu atât mai mare cu cât perioada este mai mică, iar intensitatea sunetului este direct proporțională cu amplitudinea. Fiecare vibrație a coardei corespunde unui ton simplu. Sunetul emis de o coardă vibrantă este o suprapunere de tonuri simple. *Tonul fundamental* este tonul de intensitate maximă, deci cel care are amplitudinea maximă şi acesta este tonul care corespunde soluției $u_1(x,t)$. Celelalte tonuri de intensitate mai mică şi de înălțime mai mare se suprapun peste tonul fundamental creând ceea ce numim *timbrul* sunetului.

Exemplu. Să se determine soluția ecuației

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

cu condițiile la limită

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ \forall t\in[0,\infty)$$

şi condițiile inițiale

$$u(x,0)=hx(l-x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ \forall x\in[0,l].$$

Ținând seama de (13), soluția problemei este

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot\cos n\frac{\pi a}{l}t+B_n\cdot\sin n\frac{\pi a}{l}t\right)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x.$$

În acest caz, în condiția (7) avem $g(x)=0$, deci $B_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos n\frac{\pi a}{l}t\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x,$$

deci

$$hx(l-x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x.$$

În consecință

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l hx(l-x)\sin n\frac{\pi}{l}x \, \mathrm{d}x .$$

Obținem

$$A_{2m} = 0 , \ \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$A_{2m+1} = \frac{8l^2 h}{\pi^3 (2m+1)^3} , \ \forall m \in \mathbb{N} .$$

Aşadar, soluția ecuației este

$$u(x,t) = \frac{8l^2 h}{\pi^3} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \cdot \cos(2m+1)\frac{\pi a}{l} t \cdot \sin(2m+1)\frac{\pi}{l} x .$$

3.2.3. Ecuația neomogenă a coardei vibrante

Această ecuație descrie micile vibrații forțate (întreținute).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{16}$$

cu condițiile la limită

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 , \ \forall t \in [0,\infty) \tag{17}$$

şi condițiile inițiale

$$u(x,0) = f(x) , \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) , \ \forall x \in [0,l] . \tag{18}$$

Căutăm o soluție a ecuației (16) de forma

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) , \tag{19}$$

unde funcția v satisface ecuația cu derivate parțiale omogenă

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} , \tag{20}$$

cu condițiile la limită

$$v(0,t) = v(l,t) = 0 , \ \forall t \in [0,\infty) \tag{21}$$

şi condițiile inițiale

$$v(x,0) = f(x) , \ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x) , \ \forall x \in [0,l] , \tag{22}$$

iar funcția w satisface ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{23}$$

cu condițiile la limită

$$w(0,t) = w(l,t) = 0 , \ \forall t \in [0,\infty) \tag{24}$$

şi condițiile inițiale

$$w(x,0) = 0 , \ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0 , \ \forall x \in [0,l] . \tag{25}$$

Determinarea soluției problemei (16)-(18) se reduce la determinarea funcțiilor v şi w, satisfăcând (20)-(22) respectiv (23)-(25). Într-adevăr

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 (v+w)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+F(x,t)=$$
$$=a^2\frac{\partial^2 (v+w)}{\partial t^2}+F(x,t)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t)$$

şi

$$u(0,t)=v(0,t)+w(0,t)=0\,,$$
$$u(l,t)=v(l,t)+w(l,t)=0\,,$$
$$u(x,0)=v(x,0)+w(x,0)=f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)+\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=g(x)\,.$$

Din secțiunea 3.2.2, avem

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot\cos n\frac{\pi a}{l}t+B_n\cdot\sin n\frac{\pi a}{l}t\right)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x\,, \tag{26}$$

unde

$$A_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n\in\mathbb{N}^*\,. \tag{27}$$

$$B_n=\frac{2}{n\pi a}\cdot\int_0^l g(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n\in\mathbb{N}^*\,. \tag{28}$$

Pentru a rezolva problema (23)-(25), căutăm soluții de forma

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x\,. \tag{29}$$

Observăm că w dat de (29) satisface condițiile la limită (24).

Punem condiția ca w dat de (29) să satisfacă ecuația (23). Obținem

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x=a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\sin n\frac{\pi}{l}x+F(x,t)\,,$$

care se mai scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)\right]\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x=F(x,t)\,. \tag{30}$$

Presupunem că funcția $F(x,t)$ se poate dezvolta în serie Fourier de sinuşi pe intervalul $[0,l]$, deci că

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x\,, \tag{31}$$

unde

$$\varphi_n(t)=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l F(x,t)\sin n\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n\in\mathbb{N}^*\,. \tag{32}$$

Din (30), (31) şi (32), rezultă că funcțiile T_n trebuie să satisfacă ecuațiile diferențiale

$$T_n''(t)+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=\varphi_n(t)\,,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\,. \tag{33}$$

Pe de altă parte, din condiția $w(x,0)=0$, obținem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin n\frac{\pi}{l}x = 0,$$

relație care implică

$$T_n(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{34}$$

Pe de altă parte, din condiția $\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0$ rezultă că

$$\frac{\pi}{l}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\ T_n'(0)\cdot\cos n\frac{\pi}{l}x = 0,$$

deci

$$T_n'(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{35}$$

Prin urmare, funcțiile T_n se obțin în mod unic ca soluții ale ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți (33), cu condițiile inițiale (34) şi (35). Cu funcțiile T_n astfel determinate, se obține soluția w dată de (29).

Exemplu. În cazul particular $F(x,t) = A\sin\omega t$, ecuația (23) devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\sin\omega t.$$

Conform (32):

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l A\sin\omega t\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2A\sin\omega t}{l}\cdot\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos n\frac{\pi}{l}x\Big|_o^l = \frac{2A}{n\pi}\cdot[1-(-1)^n]\cdot\sin\omega t.$$

Prin urmare

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{4A\sin\omega t}{(2k+1)\pi}, & \text{dacă } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Ținând seama de (33) vom avea

$$T_{2k}''(t) + \frac{4a^2\pi^2}{l^2}\cdot k^2\cdot T_{2k}(t) = 0, \text{ dacă } n = 2k. \tag{36}$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2 + \frac{4a^2\pi^2}{l^2}\cdot k^2 = 0.$$

În consecință, soluția ecuației diferențiale (36) este

$$T_{2k}(t) = \alpha_{2k}\cos k\frac{2\pi a}{l}t + \beta_{2k}\sin k\frac{2\pi a}{l}t,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Din (34) rezultă că $\alpha_{2k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Atunci

$$T_{2k}(t) = \beta_{2k}\sin k\frac{2\pi}{l}t,\ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Ținând seama de (35) rezultă că $\beta_{2k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$T_{2k}(t)=0,\ \forall k\in\mathbb{N}^*.$$

Dacă $n=2k+1$, ecuațiile (33) devin

$$T''_{2k+1}(t)+(2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}T_{2k+1}(t)=\frac{4A}{(2k+1)\pi}\sin\omega t,\ \forall k\in\mathbb{N}. \tag{37}$$

Soluția ecuației (37) va fi de forma

$$T_{2k+1}(t)=T_{GO}(t)+T_P(t),$$

unde T_{GO} este soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare ecuației (37)

$$T''_{2k+1}(t)+(2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}T_{2k+1}(t)=0,$$

iar T_P este o soluție particulară a ecuației (37). Este clar că

$$T_{GO}(t)=\gamma_{2k+1}\cdot\cos(2k+1)\frac{a\pi}{l}t+\delta_{2k+1}\cdot\sin(2k+1)\frac{a\pi}{l}t.$$

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma

$$T_P(t)=\lambda\cdot\sin\omega t+\mu\cos\omega t.$$

Derivând de două ori şi introducând în (37), ajungem la

$$\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)\cdot\lambda\cdot\sin\omega t+\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)\cdot\mu\cdot\cos\omega t=\frac{4A}{(2k+1)\pi}\sin\omega t,$$

de unde obținem

$$\left(a^2\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)\cdot\lambda=\frac{4A}{(2k+1)\pi},$$

$$\left(a^2\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)\cdot\mu=0,$$

deci

$$\mu=0$$

şi

$$\lambda=\frac{4A}{(2k+1)\pi\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}.$$

În consecință

$$T_P(t)=\frac{4A}{(2k+1)\pi\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}\sin\omega t,$$

deci

$$T_{2k+1}(t)=\gamma_{2k+1}\cdot\cos(2k+1)\frac{a\pi}{l}t+\delta_{2k+1}\cdot\sin(2k+1)\frac{a\pi}{l}t+$$

$$+\frac{4A}{(2k+1)\pi\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}\sin\omega t,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Din (33) rezultă că

$$\gamma_{2k+1} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

iar din (34) rezultă că

$$\delta_{2k+1} \cdot (2k+1)\frac{a\pi}{l}t + \frac{4A\omega}{(2k+1)\pi\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2} - \omega^2\right)} = 0,$$

deci

$$\delta_{2k+1} = -\frac{4A\omega l}{a\ (2k+1)^2\pi^2\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2} - \omega^2\right)}.$$

Conform (29) soluția problemei considerate va fi

$$w(x,t) = \frac{-4A\omega l}{a\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2} - \omega^2\right)} \cdot \sin(2k+1)\frac{a\pi}{l}t \cdot \sin(2k+1)\frac{\pi}{l}x +$$

$$+\frac{4A\sin\omega t}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2} - \omega^2\right)} \cdot \sin(2k+1)\frac{\pi}{l}x.$$

3.3. Ecuația propagării căldurii

Ecuația propagării căldurii este o ecuație de tip parabolic. Deşi este o ecuație relativ simplă, este întâlnită şi în studiul altor fenomene.

În planul xOu, considerăm o bară rectilinie, omogenă şi izotropă, conducătoare de căldură, situată pe axa Ox. Notăm cu $u(x,t)$ temperatura într-un punct $M(x,0)$ al barei la momentul t. Fie ρ densitatea barei, c căldura specifică a barei, k coeficientul de conducție termică. În virtutea ipotezelor fizice, aceste mărimi sunt constante, nu depind de x. Fie, de asemenea, $F(x,t)$ intensitatea sursei termice în punctul M la momentul t. Calculând bilanțul termic corespunzător în intervalul de timp $[t, t+\Delta t]$ şi ținând seama de legea lui Fourier, se poate arăta că funcția u satisface ecuația

$$k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F - c\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1}$$

unde $a = \frac{k}{c\rho} > 0$ şi $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$. Cazul $f(x,t) = 0$ indică lipsa surselor, ecuația corespunzătoare fiind stabilită de Fourier în 1822. Ca şi în cazul ecuației undelor, pentru descrierea completă a procesului de propagare a căldurii trebuie să fie date distribuția inițială a temperaturii în bară (condiția inițială) şi regimul termic la capetele barei (condiții la limită).

3.3.1. Propagarea căldurii într-o bară infinită

Considerăm o *bară infinită* omogenă, izolată termic, identificată cu axa Ox, care are la momentul inițial $t=0$ temperatura $\varphi(x)$. Fie $u(x,t)$ temperatura barei în punctul de abscisă x la momentul $t>0$. Problema matematică constă în determinarea funcției u care satisface ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

cu condiția inițială

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Problema (2), (3) se numeşte *problema lui Cauchy* pentru ecuația căldurii.
Vom admite că

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=0,\quad \lim_{|x|\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0. \tag{4}$$

Aceste ipoteze nu contravin fenomenului fizic.

Pentru rezolvarea problemei de mai sus vom folosi transformata Fourier. Presupunem că funcțiile u şi φ sunt suficient de netede pentru a admite transformată Fourier. Fie $v(\omega,t)$ transformata Fourier a funcției $u=u(x,t)$ şi $\Phi(\omega)$ transformata Fourier a funcției $\varphi=\varphi(x)$, deci

$$v(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x,$$

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

Folosind formula de derivare a integralei cu parametri, rezultă

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

Pe de altă parte, integrând de două ori prin părți şi folosind (4), obținem succesiv

$$v(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}u(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-\omega^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

Aşadar, avem relațiile

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=-\omega^2\cdot v(x,t),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$$

Având în vedere că u verifică ecuația (2), rezultă că

$$0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\frac{\partial v}{\partial t}+a^2\omega^2\cdot v.$$

Am obținut astfel o ecuație diferențială, a cărei soluție generală este

$$v(\omega,t)=Ce^{-a^2\omega^2 t}.$$

Cum

$$v(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\Phi(\omega),$$

rezultă că

$$v(\omega,t)=\Phi(\omega)\cdot e^{-a^2\omega^2 t}. \tag{5}$$

Pe de altă parte, am stabilit în cap. 2, §2.5, că transformata Fourier a funcției $e^{-\alpha x^2}$, $\alpha>0$, este $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$. Notând $\alpha=\frac{1}{4a^2t}$, rezultă că $e^{-a^2\omega^2 t}=e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$, deci $e^{-a^2\omega^2 t}$ este transformata Fourier a funcției $f(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$.

Atunci $\sqrt{2\pi}\cdot\Phi(\omega)\cdot e^{-a^2\omega^2 t}$ este transformata Fourier a produsului de convoluție

$$(\varphi * f)(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi.$$

Rezultă că

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi.$$

În consecință

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi, \tag{6}$$

formulă cunoscută sub numele *formula integrală Poisson*.

Să considerăm acum cazul

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon}, & \text{dacă } |x-x_0|<\varepsilon\\ 0, & \text{dacă } |x-x_0|\geq\varepsilon\end{cases},$$

deci φ se anulează în afara intervalului $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, iar în interiorul acestui interval temperatura are valoare constantă. Distribuția temperaturii în bară la momentul t este dată de formula lui Poisson, care în cazul de față devine

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi.$$

Folosind formula de medie, rezultă că există $\xi\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ astfel încât

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2\varepsilon}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot 2\varepsilon .$$

Atunci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}=G(x,t,x_0) .$$

Pe de altă parte, observăm că

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(x)=\delta(x)=\begin{cases}0, \text{ dacă } x\neq x_0\\ \infty, \text{ dacă } x=x_0\end{cases},$$

unde δ este *funcția generalizată a lui Dirac*.

Din punct de vedere fizic, această situație corespunde unei *surse instantanee de căldură* în punctul x_0. Temperatura într-un punct oarecare al barei, la momentul t, este dată de

$$G(x,t,x_0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}},$$

În fig. 3.1 reprezentăm grafic funcția G pentru câteva valori ale lui t $(0<t_1<t_2<t_3)$.

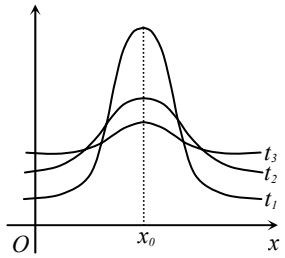

Fig. 3.1

Această expresie dă distribuția temperaturii în bară, când la momentul inițial apare în punctul x_0 o sursă instantanee de căldură. Vom putea spune că formula lui Poisson dă efectul total al distribuției inițiale de temperatură definită de funcția φ, efect care rezultă din însumarea acțiunilor unor surse instantanee de căldură răspândite pe toată bara.

Exemplu. Să presupunem acum că

$$\varphi(x)=\begin{cases}c, \text{ dacă } x\in[x_1,x_2]\\ 0, \text{ dacă } x\notin[x_1,x_2]\end{cases}.$$

Din formula lui Poisson obținem

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_1}^{x_2}c\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi .$$

Făcând schimbarea de variabilă $\dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=\mu$, rezultă că

$$u(x,t)=\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}}e^{-\mu^2}\,\mathrm{d}\mu . \qquad (7)$$

Această soluție se poate exprima cu ajutorul *funcției lui Laplace*. Reamintim că funcția lui Laplace se definește astfel

$$L(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t,\ x\in\mathbb{R}.$$

Se verifică imediat că funcția L este impară, $L(0)=0$ şi $L(\infty)=1$. Această funcție este mult utilizată în Teoria Probabilităților şi, de aceea, este tabelată. Cu ajutorul funcției lui Laplace, soluția (7) se scrie

$$u(x,t)=\frac{c}{2}\left[L\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)-L\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

3.3.2. Propagarea căldurii în bara finită

Problema matematică la care conduce studiul propagării căldurii în bara finită, se poate formula în modul următor.

Să se determine soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

cu condițiile la limită

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ \forall t\in[0,\infty) \tag{2}$$

şi condiția inițială

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \forall x\in[0,l]. \tag{3}$$

Conform condițiilor la limită (2), temperatura în capetele barei este nulă, iar condiția inițială (3) indică faptul că, la momentul inițial de timp, temperatura barei se exprimă prin funcția φ. Vom presupune că funcția φ este nenulă şi continuă pe intervalul $[0,l]$. Din (2) şi (3) rezultă că funcția φ trebuie să satisfacă egalitatea

$$\varphi(0)=0.$$

Ca şi în cazul coardei vibrante finite, vom folosi *metoda separării variabilelor a lui Fourier*, însoțită de *principiul suprapunerii efectelor*.

Căutăm soluții ale ecuației (1) de forma

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t). \tag{4}$$

Din condițiile la limită (2) deducem

$$\begin{cases}X(0)\cdot T(t)=0\\ X(l)\cdot T(t)=0\end{cases},$$

pentru orice $t>0$. Atunci

$$X(0)=X(l)=0, \tag{5}$$

deoarece în caz contrar ar rezulta $T(t)=0$, pentru orice $t>0$, deci $u(x,t)\equiv 0$, ceea ce contravine condițiilor inițiale.

Punând condiția ca funcția u dată de (4) să verifice ecuația (1), obținem

$$X(x)\cdot T'(t)=a^2\cdot X''(x)\cdot T(t),\ \forall x\in[0,l],\ \forall t\in[0,\infty).$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)}, \ \forall x \in [0,l], \ \forall t \in [0,\infty).$$

Atunci

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu,$$

unde μ este o constantă reală.

Obținem astfel două ecuații diferențiale:

$$X''(x) - \mu \cdot X(x) = 0, \tag{6}$$

$$T'(t) - \mu a^2 \cdot T(t) = 0. \tag{7}$$

Vom arăta că ecuația (7) are soluții nenule numai dacă $\mu < 0$. Într-adevăr, soluția generală a acestei ecuații este

$$T(t) = Ce^{\mu a^2 t}.$$

Dacă $\mu > 0$, atunci $|T(t)| \to \infty$, când $t \to \infty$, deci, pornind cu o anumită distribuție a temperaturii în bară, când t crește valoarea absolută a temperaturii ar putea depăşi orice valoare pozitivă, fapt inacceptabil din punct de vedere fizic. Pentru $\mu = 0$, T s-ar reduce la o constantă, adică temperatura ar rămâne aceeaşi în orice punct al barei, fapt de asemenea inacceptabil. Prin urmare, $\mu = -\lambda^2 < 0$ şi soluția generală a ecuației (7) devine

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}. \tag{8}$$

Pe de altă parte, în acest caz, ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (6) este $r^2 + \lambda^2 = 0$, deci soluția generală a acestei ecuații va fi

$$X(x) = C \cdot \cos \lambda x + D \cdot \sin \lambda x. \tag{9}$$

Din (5) deducem $C = X(0) = 0$ şi $D \cdot \sin \lambda l = X(l) = 0$. Cum $D \neq 0$, pentru că altfel am ajunge la soluția nulă, rezultă că $\sin \lambda l = 0$, deci $\lambda l = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. În final, rezultă că ecuația (6), cu condițiile la limită (5), are o infinitate de soluții

$$X_n(x) = D_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, soluția corespunzătoare a ecuației (7) este

$$T(t) = C_n \cdot e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t}.$$

Notând $A_n = C_n \cdot D_n$, rezultă că funcțiile de forma (4) care verifică ecuația (1) şi condițiile la limită (2) sunt

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = A_n \cdot e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Aplicând *principiul suprapunerii efectelor* rezultă că

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x \tag{10}$$

este soluția ecuației (1) cu condițiile la limită (2). Rămâne să determinăm constantele A_n din condiția inițială (3). Din această condiție rezultă că

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x.$$

Prelungind prin imparitate funcţia $\varphi:[0,l]\to\mathbb{R}$ pe intervalul $[-l,0]$ şi dezvoltând această prelungire în serie de sinuşi, obţinem

$$A_n=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l\varphi(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{11}$$

Aşadar, soluţia problemei (1)-(3) este furnizată de (10), unde coeficienţii A_n sunt daţi de (11).

3.3.3. Bara neomogenă

Problema matematică care guvernează fenomenul este descrisă de ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t) \tag{1}$$

cu condiţiile la limită

$$u(0,t)=u(l,t)=0\,,\ \forall t\in[0,\infty) \tag{2}$$

şi condiţia iniţială

$$u(x,0)=f(x)\,,\ \forall x\in[0,l]\,. \tag{3}$$

Căutăm o soluţie a ecuaţiei (1) de forma

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\,, \tag{4}$$

unde funcţia v satisface ecuaţia cu derivate parţiale omogenă

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,, \tag{5}$$

cu condiţiile la limită

$$v(0,t)=v(l,t)=0\,,\ \forall t\in[0,\infty) \tag{6}$$

şi condiţia iniţială

$$v(x,0)=f(x)\,,\ \forall x\in[0,l]\,, \tag{7}$$

iar funcţia w satisface ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+F(x,t) \tag{8}$$

cu condiţiile la limită

$$w(0,t)=w(l,t)=0\,,\ \forall t\in[0,\infty) \tag{9}$$

şi condiţia iniţială

$$w(x,0)=0\,,\ \forall x\in[0,l]\,. \tag{10}$$

Determinarea soluţiei problemei (1)-(3) este rezolvată o dată cu determinarea funcţiilor v şi w, satisfăcând (5)-(7) respectiv (8)-(10). Într-adevăr

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial(v+w)}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+F(x,t)=$$

$$=a^2\frac{\partial^2(v+w)}{\partial t^2}+F(x,t)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t)$$

şi

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0\,,$$
$$u(l,t) = v(l,t) + w(l,t) = 0\,,$$
$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x)\,.$$

Din secțiunea anterioară, avem

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x\,, \tag{11}$$

unde

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x \, \mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{12}$$

Pentru a rezolva problema (8)-(10), căutăm soluții de forma

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x\,. \tag{13}$$

Observăm că w dat de (13) satisface condițiile la limită (9).

Punând condiția ca w dat de (13) să satisfacă ecuația (8), obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \left(-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin n \frac{\pi}{l} x + F(x,t)\,,$$

care se mai scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + a^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) \right] \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x = F(x,t)\,. \tag{14}$$

Presupunem că funcția $F(x,t)$ se poate dezvolta în serie Fourier de sinuşi pe intervalul $[0,l]$, deci că

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x\,, \tag{15}$$

unde

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l F(x,t) \sin n \frac{\pi}{l} x \, \mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{16}$$

Din (14), (15) şi (16), rezultă că funcțiile T_n trebuie să satisfacă ecuațiile diferențiale de ordinul întâi

$$T_n'(t) + a^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} T_n(t) = \varphi_n(t)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,, \tag{17}$$

care admit soluțiile

$$T_n(t) = e^{-\int_0^t \left(\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \right) \mathrm{d}\tau} \left(C_n + \int_0^t \varphi_n(\tau) e^{\int_0^t \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} \mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau \right),\ n \in \mathbb{N}^*\,, \tag{18}$$

constantele C_n urmând a fi determinate.

Pe de altă parte, din condiția $w(x,0) = 0$, rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin n \frac{\pi}{l} x = 0$$

şi mai departe că:

$$T_n(0) = 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{19}$$

În consecinţă, ţinând seama de (18), deducem că

$$C_n = 0\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,$$

deci

$$T_n(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Conform (13), avem

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \varphi_n(\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau \right) \sin \frac{n\pi x}{l}\,. \tag{20}$$

3.4. Ecuaţii de tip eliptic

Ecuaţiile de tip eliptic descriu procese staţionare (în care funcţia necunoscută nu depinde de timp).

Ecuaţia lui Laplace în plan este

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{1}$$

iar ecuaţia lui Laplace în spaţiu este

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,,$$

necunoscuta fiind funcţia u. Dacă intervin forţe externe, acţiunea acestora fiind descrisă de o funcţie f, procesele fizice corespunzătoare sunt descrise de *ecuaţia lui Poisson*

$$\Delta u = f\,. \tag{2}$$

Din câte s-a observat în cazul ecuaţiilor de tip hiperbolic şi parabolic, pentru descrierea completă a unui proces fizic este necesar ca, în afară de ecuaţia acestui proces, să specificăm condiţii suplimentare: condiţii iniţiale şi condiţii la limită (pe frontiera domeniului). Din punct de vedere matematic, această necesitate decurge din faptul că soluţiile acestor ecuaţii nu sunt unice. Astfel, chiar şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare de ordinul n, soluţia generală depinde de n constante arbitrare. În cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale soluţia va depinde, în general, de funcţii arbitrare (a se vedea, de exemplu, soluţia generală a ecuaţiilor de tip hiperbolic). Din această cauză, pentru a pune în evidenţă soluţia care descrie procesul fizic real, sunt necesare condiţii suplimentare. Pentru ecuaţiile de tip eliptic aceste condiţii suplimentare sunt *condiţiile pe frontieră*, problema corespunzătoare numindu-se *problemă la limită*.

În cele ce urmează ne vom ocupa de ecuaţia lui Laplace în plan. Putem considera două tipuri de domenii: mărginite şi nemărginite. În ambele cazuri vom presupune că frontiera este formată dintr-o curbă netedă pe porţiuni. Problema la limită pentru ecuaţia eliptică se numeşte *interioară* dacă funcţia căutată trebuie să fie definită într-un domeniu mărginit şi *exterioară* dacă funcţia căutată trebuie să fie definită într-un domeniu nemărginit.

Fie $G \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit a cărui frontieră C este o curbă netedă pe porţiuni.

Deşi sunt valabile pentru ecuaţia lui Laplace în general, noi vom prezenta tipurile de probleme la limită pentru această ecuaţie în plan. Acestea sunt:

Problema Dirichlet interioară. Această problemă constă în determinarea unei funcții $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, armonică în G (deci care verifică ecuația (1)), dacă se cunosc valorile acesteia pe frontiera C a domeniului:

$$u\big|_C = f, \tag{3}$$

unde f este o funcție dată, continuă pe C.

Problema Neumann interioară constă în determinarea unei funcții $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, armonică în G, astfel încât

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = g, \tag{4}$$

unde $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ este derivata după normala exterioară la curba C, iar g este o funcție dată, continuă pe C.

Problema mixtă constă în determinarea unei funcții $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, armonică în G, astfel încât

$$\alpha \cdot u + \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h, \tag{5}$$

α şi h fiind funcții date, continue pe C, $\alpha \geq 0$.

Vom stabili acum o formulă integrală utilă în cele ce urmează. Fie $v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. Atunci

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \Delta u.$$

Integrând pe G, obținem

$$\iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G \left(v \cdot \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Din formula lui Green-Riemann rezultă

$$\iint_G \left(v \cdot \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C (-v) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}x + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}y, \tag{6}$$

cunoscută sub numele de *formula integrală Green*.

În continuare, vom studia probleme la limită standard pentru ecuația lui Laplace în plan.

3.4.1. Problema lui Dirichlet interioară pentru disc

Fie $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < r^2\}$ şi $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = r^2\}$, frontiera orientată pozitiv a domeniului G. Problema Dirichlet interioară pentru ecuația lui Laplace constă în a determina funcția continuă $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ care satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \forall(x,y)\in G, \tag{7}$$

cu condiţia la frontieră

$$u\big|_C=f, \tag{8}$$

unde f este o funcţie dată, continuă pe C.

Vom arăta că dacă problema (7)-(8) admite o soluţie, atunci această soluţie este unică.

Într-adevăr, dacă problema ar admite două soluţii u_1, u_2 şi $v=u_1-u_2$, rezultă că $\Delta v=0$ şi $v\big|_C=0$. Făcând $u=v$ în formula integrală Green (6), obţinem

$$\iint_G\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

Prin urmare, $\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)^2=0$, $\forall(x,y)\in G$, deci $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0$, $\forall(x,y)\in G$. În consecinţă, funcţia v este constantă şi cum se anulează pe C, rezultă că $v=0$, deci $u_1=u_2$ pe G.

Soluţia fiind unică, nu contează metoda folosită pentru obţinerea soluţiei. Vom folosi metoda separării variabilelor (Fourier). Din cauza simetriei centrale faţă de origine a problemei, vom trece la coordonate polare în plan. Fie ρ şi θ coordonatele polare ale punctului (x,y), deci

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}.$$

În urma acestei schimbări de variabile, ecuaţia (7) devine

$$\rho^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0. \tag{9}$$

Problema (7)-(8) se reformulează astfel: să se determine funcţia $u(\rho,\theta)$, $u:[0,r]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisface ecuaţia (9) şi condiţia la frontieră

$$u(\rho,\theta)\big|_{\rho=r}=f(\theta), \tag{10}$$

unde funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă, nenulă, periodică de perioadă 2π şi este presupusă cunoscută.

De remarcat că, dacă $f\equiv 0$ atunci problema corespunzătoare admite soluţia $u\equiv 0$.

Acesta este motivul pentru care putem presupune că funcţia f este nenulă.

Conform metodei separării variabilelor, căutăm soluţii ale ecuaţiei (9) de forma

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)\cdot T(\theta), \tag{11}$$

unde funcţiile R şi T sunt de clasă C^2. În plus, funcţia T este presupusă periodică de perioadă 2π. Punând condiţia ca funcţia u dată de (11) să verifice ecuaţia (9), obţinem

$$\rho^2\cdot R''(\rho)\cdot T(\theta)+\rho\cdot R'(\rho)\cdot T(\theta)=-R(\rho)\cdot T''(\theta)$$

sau

$$\frac{\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = k\,, \tag{12}$$

unde k este o constantă.

Din (6) rezultă următoarele ecuații diferențiale:

$$T''(t) + k \cdot T(t) = 0\,, \tag{13}$$

$$\rho^2 \cdot R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - k \cdot R(\rho) = 0\,, \tag{14}$$

Când constanta este $-\lambda^2$, $\lambda > 0$, (13) devine

$$T''(t) - \lambda^2 \cdot T(t) = 0\,.$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este

$$T(\theta) = C_1 \cdot e^{\lambda\theta} + C_2 \cdot e^{-\lambda\theta}\,,$$

C_1 şi C_2 fiind constante. Această soluție este periodică numai dacă $C_1 = C_2 = 0$, adică doar dacă $T \equiv 0$, ceea ce ar însemna că funcția f este nulă, ceea ce contravine ipotezei. Prin urmare constanta în (12) nu poate fi negativă.

Dacă $k = 0$, din (13) va rezulta că $T(\theta) = C_1 \cdot \theta + C_2$, care este periodică numai dacă $C_1 = 0$. Aşadar, în acest caz, avem soluția

$$T_0(\theta) = C_0\,. \tag{15}$$

Totodată, ecuația (14) se mai scrie sub forma $\left(\rho \cdot R'(\rho)\right)' = 0$, de unde $\rho \cdot R'(\rho) = C$, deci $R(\rho) = C \cdot \ln \rho + D$. Cum $\ln \rho$ nu are sens în 0, rezultă că $C = 0$, deci putem pune

$$R_0(\rho) = F_0 \text{ (constant).} \tag{16}$$

Notând $A_0 = C_0 F_0$, soluția de forma (11) a ecuației (9), pentru $k = 0$, este

$$u_0(\rho, \theta) = A_0\,. \tag{17}$$

Când constanta este $k = \lambda^2$, $\lambda > 0$, din (13) obținem

$$T''(t) + \lambda^2 \cdot T(t) = 0\,,$$

a cărei soluție generală este

$$T(\theta) = C_1 \cdot \cos \lambda\theta + C_2 \cdot \sin \lambda\theta\,,$$

C_1 şi C_2 fiind constante. Din condiția de periodicitate rezultă că trebuie să avem

$$T(\theta + 2\pi) = T(\theta)\,,$$

deci $\lambda(\theta + 2\pi) = \lambda\theta + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. În consecință, $\lambda = n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$T_n(\theta) = C_n \cdot \cos n\theta + D_n \cdot \sin n\theta\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{18}$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Ținând seama de (14) şi cum $k = n^2$, obținem că funcția $R_n(\rho)$ trebuie să verifice următoarea ecuație diferențială de tip Euler

$$\rho^2 \cdot R_n''(\rho) + \rho \cdot R_n'(\rho) - n^2 R_n(\rho) = 0\,. \tag{19}$$

Pentru a găsi soluția acestei ecuații, facem schimbarea de variabilă $\rho = e^{\varphi}$. Atunci:

$$R_n'(\rho) = e^{-\varphi} \frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}\varphi}$$

şi

$$R_n''(\rho) = e^{-2\varphi} \left(\frac{\mathrm{d}^2 R_n}{\mathrm{d}\varphi^2} - \frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}\varphi} \right).$$

Înlocuind în (19), obținem ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți

$$\frac{\mathrm{d}^2 R_n}{\mathrm{d}\varphi^2} - n^2 R_n = 0 .$$

Ecuaţia caracteristică a acestei ecuaţii diferenţiale este $r^2 - n^2 = 0$ şi are soluţiile $r_1 = n$, $r_2 = -n$, deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu coeficienţi constanţi este

$$R_n(\varphi) = F_n e^{n\varphi} + E_n e^{-n\varphi} .$$

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei (19) este

$$R_n(\rho) = F_n \rho^n + E_n \rho^{-n} ,$$

unde E_n şi F_n sunt constante arbitrare.

Dacă $E_n \neq 0$, rezultă că $R_n(\rho) \to \pm\infty$ când $\rho \to 0$, deci funcţia $u_n(\rho,\theta)$ ar tinde la infinit spre centrul cercului, ceea ce contrazice faptul că funcţia $u_n(\rho,\theta) = R_n(\rho)\cdot T_n(\theta)$ este continuă. În consecinţă, $E_n = 0$, deci

$$R_n(\rho) = F_n \cdot \rho^n . \tag{20}$$

Notând $A_n = C_n F_n$, $B_n = D_n F_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, obţinem soluţiile

$$u_n(\rho,\theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\cdot \rho^n ,\ n \in \mathbb{N}^* . \tag{21}$$

Conform "principiului suprapunerii efectelor", în ipoteza convergenţei, seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho,\theta)$ va fi soluţia problemei Dirichlet. Vom presupune că această serie este convergentă şi este derivabilă termen cu termen de două ori în raport cu ρ respectiv θ.

Fie deci:

$$u(\rho,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\cdot \rho^n . \tag{22}$$

Este uşor de văzut că această funcţie verifică ecuaţia (9). Condiţia la frontieră (10) va fi satisfăcută dacă şi numai dacă

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\cdot r^n = f(\theta) .$$

Prin ipoteză, f se poate dezvolta în serie Fourier pe intervalul $[0, 2\pi]$, deci

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi , \tag{23}$$

$$r^n \cdot A_n = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \cos n\varphi\ \mathrm{d}\varphi , \qquad r^n \cdot B_n = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \sin n\varphi\ \mathrm{d}\varphi .$$

Atunci

$$A_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{r^n}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \cos n\varphi\ \mathrm{d}\varphi , \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{r^n}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \sin n\varphi\ \mathrm{d}\varphi . \tag{24}$$

Prin urmare, soluţia problemei (9)-(10) este dată de (22), unde coeficienţii A_n, $n \in \mathbb{N}$, B_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt daţi de (23) respectiv (24).

În cele ce urmează vom scrie soluţia (22) sub o altă formă, utilizată frecvent în aplicaţii.

Ţinând seama de formulele (22)-(24)

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n(\cos n\varphi\cos n\theta+\sin n\varphi\sin n\theta)\right]\cdot f(\varphi)\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n(\varphi-\theta)\right]\cdot f(\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{25}$$

Pentru a prelucra această formulă, să remarcăm că ar trebui găsită o formulă pentru calculul sumei seriei $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\alpha$, cu $|a|<1$. Această serie este partea reală a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}a^n e^{\mathrm{i}n\alpha}$ care este o serie geometrică cu rația $q=ae^{\mathrm{i}\alpha}$, unde $|q|<1$. În consecință

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^n e^{\mathrm{i}n\alpha}=\frac{ae^{\mathrm{i}\alpha}}{1\text{-}ae^{\mathrm{i}\alpha}}=\frac{a}{e^{-\mathrm{i}\alpha}-a}=a\cdot\frac{\cos\alpha-a+\mathrm{i}\sin\alpha}{(\cos\alpha-a)^2+\sin^2\alpha}$$

Prin urmare,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\alpha=\frac{a\cos\alpha-a^2}{1-2a\cos\alpha+a^2},$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n(\varphi-\theta)=\frac{\rho r\cos(\varphi-\theta)-\rho^2}{r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}.$$

Înlocuind în (25), obținem că formula (22) se scrie sub forma

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}\cdot f(\varphi)\mathrm{d}\varphi, \tag{26}$$

formulă cunoscută sub numele de *formula lui Poisson*.

Soluția problemei Dirichlet interioare pentru disc se mai poate obține folosind teorema reziduurilor. Pentru a vedea cum se poate face aceasta, fie $z=\rho\cdot e^{\mathrm{i}\theta}$, $w=r\cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$. Atunci

$$\frac{w+z}{w-z}=\frac{re^{\mathrm{i}(\varphi-\theta)}+\rho}{re^{\mathrm{i}(\varphi-\theta)}-\rho}=\frac{r\cos(\varphi-\theta)+\rho+\mathrm{i}r\sin(\varphi-\theta)}{r\cos(\varphi-\theta)-\rho+\mathrm{i}r\sin(\varphi-\theta)}.$$

Amplificând cu conjugatul numitorului, rezultă că

$$\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right)=\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2},$$

deci formula lui Poisson devine

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right)\cdot f(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

Ținând seama că $\mathrm{d}w=\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi=\mathrm{i}w\mathrm{d}\varphi$, această formulă se mai scrie

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{|w|=r}\tilde{f}(w)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{i}w}\cdot\mathrm{d}w,$$

deci

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\int_{|w|=r}\tilde{f}(w)\cdot\frac{1}{w}\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right)\cdot\mathrm{d}w. \tag{27}$$

Formula (27) permite determinarea soluției problemei Dirichlet interioare pentru disc folosind teorema reziduurilor şi poartă denumirea de *formula lui Schwarz-Villat*.

Exemple. 1) Fie domeniul $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<9\}$ a cărui frontieră orientată pozitiv este $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=9\}$. Să se găsească soluția u a problemei Dirichlet interioare pentru ecuația lui Laplace cu condiția la frontieră

$$u(3,\theta)=\cos\theta+2\sin\theta\,.$$

Metoda I. Folosim formulele (22)-(24). Obținem

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+2\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=0\,,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{3^n}\cdot\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+2\sin\varphi)\ \cos n\varphi\ \mathrm{d}\varphi\,,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{3^n}\cdot\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+2\sin\varphi)\ \sin n\varphi\ \mathrm{d}\varphi\,.$$

Dacă $n\neq 1$, atunci $A_n=0$, $B_n=0$. De asemenea, $A_1=\frac{1}{3}$, $B_1=\frac{2}{3}$. Ținând seama de (22), rezultă că

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{3}\rho\cos\theta+\frac{2}{3}\rho\sin\theta\,,$$

deci

$$u(x,y)=\frac{x+2y}{3}\,.$$

Metoda II. Folosim formula lui Schwarz-Villat. Fie $w=3e^{\mathrm{i}\varphi}$. Atunci

$$\cos\varphi=\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}+e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{w}{3}+\frac{3}{w}\right)=\frac{w^2+9}{6w}\,,\ \sin\varphi=\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{w}{3}-\frac{3}{w}\right)=\frac{w^2-9}{6\mathrm{i}w}\,,$$

deci

$$\cos\varphi+2\sin\varphi=\frac{w^2(\mathrm{i}+2)+9(\mathrm{i}-2)}{6\mathrm{i}w}\,.$$

Pentru a aplica formula lui Schwarz-Villat, trebuie să calculăm integrala

$$\int_{|w|=3}h(w)\mathrm{d}w\,,$$

unde

$$h(w)=\frac{w^2(\mathrm{i}+2)+9(\mathrm{i}-2)}{6\mathrm{i}w^2}\cdot\frac{w+z}{w-z}\,.$$

Pentru calculul integralei, vom aplica teorema reziduurilor. Avem

$$Rez(h,0)=\lim_{w\to 0}[w^2h(w)]'=\frac{-3(1+2\mathrm{i})}{z}\,,$$

$$Rez(h,z)=\lim_{w\to z}[(w-z)h(w)]=\frac{(1-2i)z}{3}+\frac{3(1+2\mathrm{i})}{z}\,.$$

Conform (27), soluția problemei considerate este

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot[Rez(h,0)+Rez(h,z)]\right]=\mathrm{Re}\frac{(1-2\mathrm{i})z}{3}=\frac{x+2y}{3}\,.$$

2) Fie domeniul $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$ a cărui frontieră orientată pozitiv este $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$. Să se găsească soluția u a problemei Dirichlet interioare pentru ecuația lui Laplace cu condiția la frontieră

$$u(1,\theta)=\frac{1}{5+4\sin\theta}.$$

Folosim formula lui Schwarz-Villat. Fie $w=e^{\mathrm{i}\varphi}$. Atunci

$$\sin\varphi=\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}-e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(w-\frac{1}{w}\right)=\frac{w^2-1}{2\mathrm{i}w},$$

deci

$$\frac{1}{5+4\sin\theta}=\frac{\mathrm{i}w}{2w^2+5\mathrm{i}w-2}.$$

Pentru a aplica formula lui Schwarz-Villat, trebuie să calculăm integrala

$$\int_{|w|=1} h(w)\mathrm{d}w,$$

unde

$$h(w)=\frac{\mathrm{i}}{2w^2+5\mathrm{i}w-2}\cdot\frac{w+z}{w-z}.$$

Pentru calculul integralei, vom aplica teorema reziduurilor. Funcția h are polii simpli $-\frac{\mathrm{i}}{2}$, $-2\mathrm{i}$ şi z. Deoarece $2w^2+5\mathrm{i}w-2=2(w+\frac{\mathrm{i}}{2})\cdot(w+2\mathrm{i})$, conform formulei de calcul a reziduurilor, avem:

$$Rez(h,-\frac{\mathrm{i}}{2})=\lim_{w\to-\frac{\mathrm{i}}{2}}[(w+\frac{\mathrm{i}}{2})\cdot h(w)]=\frac{-1}{3}\cdot\frac{2z-\mathrm{i}}{2z+\mathrm{i}},$$

$$Rez(h,z)=\lim_{w\to z}[(w-z)\cdot h(w)]=\frac{2\mathrm{i}z}{(2z+\mathrm{i})\cdot(z+2\mathrm{i})}.$$

Conform (27), soluția problemei considerate este

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot[Rez(h,\frac{-\mathrm{i}}{2})+Rez(h,z)]\right]=\mathrm{Re}\frac{2\mathrm{i}-z}{3(z+2\mathrm{i})}=$$

$$=\frac{4-x^2-y^2}{3[x^2+(y+2)^2]}.$$

3.4.2. Problema lui Dirichlet pentru semiplan

Fie G semiplanul superior, deci $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y>0\}$ şi $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y=0\}$, frontiera orientată pozitiv a domeniului G. Problema Dirichlet constă în a determina funcția continuă $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ care satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \forall(x,y)\in G, \tag{28}$$

cu condiția la frontieră

$$u\big|_C = g\,, \tag{29}$$

unde g este o funcţie dată, continuă şi mărginită pe $C = Ox$.

Fie f o funcţie olomorfă pe $D = \{x + \mathrm{i}y;\ (x, y) \in G\}$, a cărei parte reală ia aceleaşi valori cu g pe axa reală. Considerăm un contur format dintr-un semicerc Γ, cu centrul în O şi de rază R, situat în semiplanul superior, şi segmentul $[AB] = [-R, R]$ (fig. 4.1).

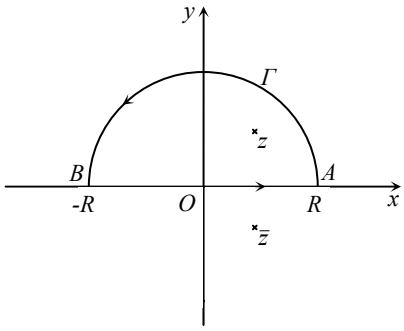

Fig 4.1

Fie $z = x + \mathrm{i}y$ un punct aflat în interiorul acestui contur. Din formula lui Cauchy, avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int\limits_{AB\cup\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\mathrm{d}w$$

şi

$$0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int\limits_{AB\cup\Gamma} \frac{f(w)}{w - \overline{z}}\mathrm{d}w\,.$$

Notând $w = s + \mathrm{i}t$ şi făcând diferenţa dintre cele două formule, obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{AB\cup\Gamma} \frac{z - \overline{z}}{(w - z)(w - \overline{z})} \cdot f(w)\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{z - \overline{z}}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int\limits_{-R}^{R} \frac{g(s)}{(s - x)^2 + y^2}\mathrm{d}s + \frac{z - \overline{z}}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z)(w - \overline{z})}\mathrm{d}w\,. \tag{30}$$

Dacă notăm cu $M(R) = \sup\{|f(w)|; w \in \Gamma\}$, atunci avem

$$\left|\int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z)(w - \overline{z})}\mathrm{d}w\right| \le \int\limits_{\Gamma} \frac{|f(w)|}{|w - z||w - \overline{z}|}\mathrm{d}s \le \int\limits_{\Gamma} \frac{|f(w)|}{\big||w| - |z|\big|\big||w| - |\overline{z}|\big|}\mathrm{d}s \le$$

$$\le \frac{M(R)}{(R - \rho)^2} \cdot \pi R = \frac{M(R)}{R} \cdot \frac{\pi}{\left(1 - \dfrac{\rho}{R}\right)^2}\,.$$

Dacă presupunem în plus că $\lim\limits_{|w|\to\infty} \dfrac{f(w)}{w} = 0$, rezultă că

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z)(w - \overline{z})}\mathrm{d}w = 0\,.$$

Pe de altă parte, observăm că deoarece g este mărginită pe $\mathbb{R}$, integrala generalizată $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{(s - x)^2 + y^2}\mathrm{d}s$ este convergentă. Prin urmare, dacă în (30) facem $R \to \infty$, rezultă că

$$f(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\pi \mathrm{i}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(s)}{(s-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Dacă $f=u+\mathrm{i}v$, atunci

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\cdot g(s)}{(s-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Dar

$$\frac{y}{(s-x)^2+y^2}=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mathrm{i}(s-z)}\right),$$

deci

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s\,. \tag{31}$$

Exemplu. Să se determine soluția problemei Dirichlet pentru semiplanul superior, ale cărei valori pe axa Ox sunt date de

$$u(x,0)=\frac{1}{x^2+1}\,.$$

Conform (31) soluția problemei considerate este

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(s^2+1)(s-z)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Pentru a calcula integrala improprie vom folosi teorema reziduurilor. Funcția

$$h(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s-z)}$$

are în semiplanul superior punctele singulare $s_1=\mathrm{i}$, $s_2=z$. Deoarece

$$Rez(h,\mathrm{i})=\frac{\mathrm{i}}{2(z-\mathrm{i})},\quad Rez(h,z)=\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})},$$

obținem că

$$Rez(h,\mathrm{i})+Rez(h,z)=\frac{\mathrm{i}}{2(z+\mathrm{i})}\,.$$

În consecință

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\cdot 2\pi i\cdot\frac{\mathrm{i}}{2(z+\mathrm{i})}=\mathrm{Re}\frac{\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}}=\mathrm{Re}\frac{ix+y+1}{x^2+(y+1)^2}\,,$$

deci

$$u(x,y)=\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}\,.$$

CAPITOLUL 4

ELEMENTE DE CALCUL VARIAȚIONAL

4.1. Introducere

Calculul variațional se ocupă cu studiul extremelor pentru o clasă specială de funcții numite *funcționale*. Aceste funcționale sunt definite pe submulțimi ale unor spații de funcții obişnuite. Din punct de vedere istoric, contribuții decisive la dezvoltarea calculului variațional au adus Euler (1744), dar mai ales Lagrange (1760) care a dat metodele generale ale disciplinei şi le-a aplicat în mecanică. Vom începe cu prezentarea unor probleme clasice ale calculului variațional.

Curba de cea mai rapidă coborâre (problema brachistocronei). Problema a fost formulată de Johann Bernoulli în 1696. De rezolvarea acestei probleme s-au ocupat frații Johann şi Jacob Bernoulli, Newton, Leibniz, l'Hospital. Originea termenului brachistocronă se află în limba greacă (brakhistos = cel mai scurt, khronos = timp). Prin brachistocronă se înțelege traiectoria pe care un corp care se deplasează între două puncte date, sub acțiunea gravitației, realizează cel mai scurt timp. Aşadar, dintre toate curbele aflate într-un plan vertical şi trecând prin punctele fixe $O(0,0)$ şi $P(a,b)$, cu P mai jos decât O, să se determine acea curbă pentru care timpul de coborâre din O în P a unui punct material greu fără frecare, să fie minim.

Pentru rezolvare, vom orienta axa Oy pe verticală în jos ca în fig. 1.1. Fie $y = y(x)$, $x \in [0,a]$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a,b > 0$, curba căutată. Fie v viteza de deplasare a punctului material, deci $v = \sqrt{2g\,y} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, unde $\mathrm{d}s$ este lungimea arcului OM. Atunci $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g\,y}}$. Prin urmare dacă T este timpul necesar pentru ca punctul material să ajungă în punctul P, vom avea

$$T = \int_{\widehat{OP}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g\,y}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2g\,y(x)}}\,\mathrm{d}x .$$

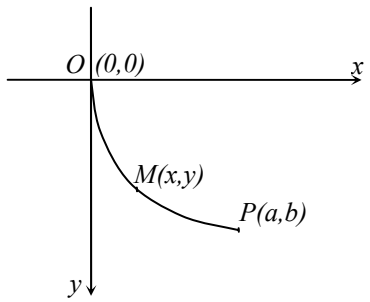

Fig. 1.1

Problema suprafeței de rotație de arie minimă constă în determinarea unei curbe $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, $y(a) = c$, $y(b) = d$, cu proprietatea că aria suprafeței de rotație a graficului în jurul axei Ox este minimă (fig. 1.2). După cum se cunoaşte, expresia acestei arii este

$$A = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x .$$

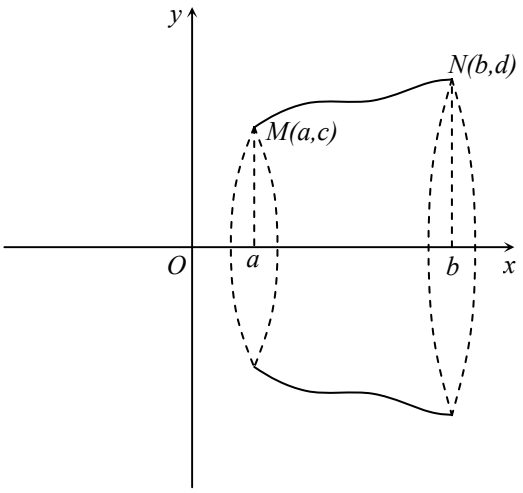

Fig. 1.2

Echilibrul unei membrane deformate. O membrană elastică în stare de repaus are forma domeniului $D \subset xOy$ (fig. 1.3). Fie C frontiera lui D. Deformăm conturul C al membranei în direcția perpendiculară pe planul xOy şi notăm cu $u(x,y)$ deplasarea (deformația) unui punct oarecare $M(x,y) \in D$ (deformarea conturului atrage după sine şi deplasarea punctelor din interiorul membranei). Se cere să se determine poziția de echilibru a membranei când cunoaştem deformarea conturului ei. Aria membranei deformate va fi

$$\iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Dacă deplasările sunt mici, aproximăm această arie cu

$$\iint_D \left(1 + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Rezultă că variația ariei suprafeței deformate este

$$\frac{1}{2}\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Se admite că energia potențială a membranei deformate este proporțională cu creşterea arie sale. Prin urmare energia potențială de deformație E este

$$E = \frac{\mu}{2}\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y , \qquad (1)$$

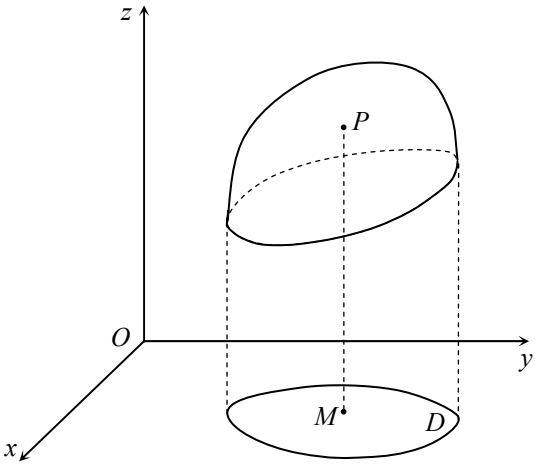

Fig. 1.3

unde μ este o constantă care exprimă calitățile elastice ale membranei. Presupunem că se cunosc deplasările punctelor de pe contur, deci că

$$u\big|_C = \varphi(x,y)\,, \tag{2}$$

φ fiind o funcție cunoscută.

Poziția de echilibru se realizează când energia potențială este minimă. Se obține astfel următoarea problemă variațională. Dintre toate funcțiile $u \in C^1(D)$ care satisfac condiția (2), să se determine acea funcție pentru care integrala (1) devine minimă.

4.2. Extreme ale funcționalelor. Variația întâi a unei funcționale. Teorema lui Fermat

Pentru început, reamintim câteva noțiuni învățate la cursul de Analiză matematică.

Fie X un spațiu vectorial real.

Definiția 4.2.1. Se numeşte *normă* pe X o funcție $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+$, cu proprietățile:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0_X$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in X$;

3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in X$. *(inegalitatea triunghiului)*

Spațiul vectorial X înzestrat cu o normă se numeşte *spațiu vectorial normat*.

Exemple. 1) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b]$ un interval şi $n \in \mathbb{N}^*$. Spațiul vectorial real $C^n(I;\mathbb{R})$ al funcțiilor $y: I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n, înzestrat cu norma

$$\|y\| = \sup_{x\in I}|y(x)| + \sup_{x\in I}|y'(x)| + \ldots + \sup_{x\in I}\left|y^{(n)}(x)\right|, \tag{1}$$

este un spațiu vectorial normat. De asemenea, spațiul vectorial real $C^1(I;\mathbb{R}^2)$ al funcțiilor $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(x) = \big((y(x), z(x)\big)$, unde $y, z \in C^1(I;\mathbb{R})$, înzestrat cu norma

$$\|\gamma\| = \sup_{x\in I}\sqrt{y^2(x) + z^2(x)} + \sup_{x\in I}\sqrt{y'^2(x) + z'^2(x)}\,, \tag{2}$$

este un spațiu vectorial normat.

2) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit de o curbă închisă, netedă pe porțiuni. Spațiul $C^1(\bar{D};\mathbb{R})$ este spațiu vectorial normat în raport cu norma

$$\|z\| = \sup_{(x,y)\in\bar{D}}|z(x,y)| + \sup_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right| + \sup_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right|,\ \forall z \in C^1(\bar{D};\mathbb{R})\,. \tag{3}$$

Definiția 4.2.2. Fie X un spațiu vectorial normat, $y_0 \in X$ şi $r > 0$. Se numeşte *bila deschisă cu centrul în* z_0 *şi de rază* r mulțimea $B(y_0, r) = \{y \in X;\ |y - y_0| < r\}$. Mulțimea $A \subset X$ se numeşte *deschisă* dacă $\forall y \in A$, există $r > 0$ astfel încât $B(y,r) \subset A$.

Definiția 4.2.3. Fie $(y_n)_n \subset X$. Șirul $(y_n)_n$ *converge* la $y \in X$ şi se notează $y_n \to y$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n - y\| = 0$. Şirul $(y_n)_n$ se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă şi numai dacă $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|y_m - y_n\| = 0$. Un spațiu vectorial normat, în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte *spațiu complet* sau *spațiu Banach*.

Observația 4.2.1. Reamintim că pe spațiul $C([a,b];\mathbb{R})$, al funcțiilor continue pe $[a,b]$, se poate defini norma Cebâşev:

$$\|g\|_C = \sup\{|g(x)|; x \in [a,b]\}, \ \forall g \in C([a,b];\mathbb{R}).$$

Mai mult, spațiul $C([a,b];\mathbb{R})$ înzestrat cu norma Cebâşev este un spațiu Banach.

Rezultatul se extinde şi pentru spațiul funcțiilor continue pe o mulțime compactă $K \subset \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Cu aceste precizări, norma (1) se mai scrie:

$$\|y\| = \|y\|_C + \|y'\|_C + \ldots + \|y^{(n)}\|_C.$$

De asemenea, normele (2) şi (3) devin

$$\|\gamma\| = \|\gamma\|_C + \|\gamma'\|_C$$

respectiv

$$\|z\| = \|z\|_C + \left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_C + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_C.$$

Este uşor de observat că spațiile vectoriale normate din exemplele 1) şi 2) sunt spații Banach.

Fie X un spațiu vectorial normat. În cele ce urmează, prin *funcțională* pe X înțelegem orice funcție $F : X \to \mathbb{R}$.

Exemple. Problemele clasice ale calculului variațional prezentate secțiunea 4.1, ne sugerează să considerăm următoarele funcționale.

1) Fie $X = C^1([0,a];\mathbb{R})$. În cazul problemei brachistocronei, definim pe X *funcționala-timp* $T : X \to \mathbb{R}$,

$$T(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,\mathrm{d}x, \ \forall y \in X.$$

De asemenea, în cazul problemei suprafeței de rotație de arie minimă, pe $X = C^1([a,b];\mathbb{R})$ putem defini *funcționala-arie* $A : X \to \mathbb{R}$,

$$A(y) = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x, \ \forall y \in X.$$

Mai general, pe $X = C^1([a,b];\mathbb{R})$ putem considera funcționale de tipul

$$F(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x,$$

unde F este o funcție continuă pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, iar y este o funcție oarecare de clasă C^1 pe $[a,b]$, cu proprietatea că $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$, $\forall x \in [a,b]$.

2) Problema echilibrului unei membrane deformate care ocupă domeniul mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$, ne conduce la considerarea *funcţionalei-energie*

$$E(u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

cunoscută sub numele de *integrala energiei* sau *integrala Dirichlet* a funcţiei $u : D \to \mathbb{R}$.

Mai general, pe $X = C^1(D;\mathbb{R})$ putem considera funcţionale de tipul

$$F(z) = \int_a^b F(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde F este o funcţie continuă de cinci variabile reale, definită pe mulţimea $\{(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)) \in \mathbb{R}^5; (x, y) \in D\}$, z fiind o funcţie de clasă C^1 pe domeniul D.

Definiţia 4.2.4. Fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ şi $F : A \to \mathbb{R}$ o funcţională. Un element $y_0 \in A$ se numeşte punct de *minim local* (respectiv *maxim local*) pentru F, dacă există $r > 0$ astfel încât pentru orice $y \in A$ care satisface $\|y - y_0\| < r$, rezultă $F(y) \geq F(y_0)$ (respectiv $F(y) \leq F(y_0)$). Un punct de minim local sau de maxim local se numeşte punct de *extrem local*. Dacă inegalităţile de mai sus au loc pentru orice $y \in A$, atunci se poate vorbi de punct de *minim global* (respectiv *maxim global*) sau *extrem global*.

În continuare, fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulţime deschisă, $F : A \to \mathbb{R}$ o funcţională, $y_0 \in A$ şi $h \in X$, $h \neq 0_X$, un element fixat. Mulţimea A fiind deschisă, există $r > 0$ astfel încât $B(y_0, r) \subset A$. Dacă $t \in \mathbb{R}$, atunci elementul $y = y_0 + th \in B(y_0, r)$ dacă şi numai dacă $\|y - y_0\| < r$, deci dacă şi numai dacă $|t| < \frac{r}{\|h\|}$. În consecinţă, putem defini funcţia reală

$$\varphi_h : \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R},\ \varphi_h(t) = F(y_0 + th). \tag{4}$$

Definiţia 4.2.5. Fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulţime deschisă, $F : A \to \mathbb{R}$ şi $y_0 \in A$. Se spune că F *admite variaţia întâi în* y_0 *pe direcţia unui vector nenul* $h \in X$, dacă funcţia φ_h dată de (4) este derivabilă în punctul $t = 0$. În acest caz, $\varphi_h'(0)$ se numeşte *variaţia întâi a lui* F *în* y_0 *pe direcţia lui* h şi se notează cu $\delta_h F(y_0)$.

Vectorul h se numeşte *variaţie* a argumentului funcţionalei F. Un punct $y_0 \in A$ cu proprietatea că $\delta_h F(y_0) = 0$, $\forall h \in X$, se numeşte punct *critic* (*staţionar*) al funcţionalei F.

Prin urmare

$$\delta_h F(y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_h(t)-\varphi_h(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{F(y_0+th)-F(y_0)}{t}. \tag{5}$$

Dacă $h=0$, atunci punem $\delta_h F(y_0)=0$.

Observația 4.2.2. În particular, fie $X=\mathbb{R}^n$, $h\in\mathbb{R}^n$, $h\neq 0$ şi $s=\dfrac{h}{\|h\|}$ versorul lui h.

Atunci

$$\delta_h F(y_0) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(y_0),$$

unde $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}(y_0)$ este derivata lui F după direcția lui s în y_0. Aşadar, noțiunea de variație întâi este o extindere a conceptului de derivată după o direcție.

Ca şi în cazul funcțiilor reale următoarea teoremă furnizează o condiție necesară de extrem.

Teorema 4.2.1. (Teorema lui Fermat). *Fie X un spațiu vectorial normat, $A\subset X$ o mulțime deschisă şi $F:A\to\mathbb{R}$ o funcțională. Dacă $y_0\in A$ este un punct de extrem local pentru F şi dacă F admite variația întâi în y_0 pe orice direcție, atunci y_0 este punct critic al lui F, adică*

$$\delta_h F(y_0)=0,\ \forall h\in X. \tag{6}$$

Demonstrație. Egalitatea (6) este evidentă pentru $h=0_X$. Să presupunem acum că $h\neq 0_X$ şi că y_0 este punct de minim local, în cazul în care y_0 este punct de maxim local raționamentul fiind similar. Conform definiției, există $r>0$ astfel încât pentru orice $y\in A\cap B(y_0,r)$ are loc $F(y)\geq F(y_0)$. Mulțimea A fiind deschisă, putem alege $r>0$ suficient de mic astfel încât $B(y_0,r)\subset A$. Aşadar, pentru orice $y\in B(y_0,r)$ avem $F(y)\geq F(y_0)$. Deoarece pentru $|t|<\dfrac{r}{\|h\|}$, $y=y_0+th\in B(y_0,r)$, rezultă că pentru orice $t\in\left(-\dfrac{r}{\|h\|},\dfrac{r}{\|h\|}\right)$ are loc inegalitatea $F(y_0+th)\geq F(y_0)$ care, ținând seama de (4), se mai poate scrie sub forma $\varphi_h(t)\geq\varphi_h(0)$, $\forall t\in\left(-\dfrac{r}{\|h\|},\dfrac{r}{\|h\|}\right)$. Conform teoremei clasice a lui Fermat pentru funcții de o variabilă reală, rezultă că $\varphi_h'(0)=0$ sau, echivalent, $\delta_h F(y_0)=0$. ■

În cele ce urmează, vom aborda problema determinării punctelor critice (staționare) pentru funcționale concrete.

4.3. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$

Fie $D\subset\mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă , $F:D\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. De asemenea, fie

$$\mathcal{D}=\{y\in C^1(I;\mathbb{R})\ \big|\ \big(x,y(x),y'(x)\big)\in D,\ \forall x\in I\},$$

Considerăm funcţionala $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x,\ \forall y\in\mathcal{D}\ . \tag{1}$$

Această funcţională depinde de F.

Lema 4.3.1. *Mulţimea* $\mathcal{D}$ *este deschisă în spaţiul Banach* $C^1(I;\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Fie $y_0\in\mathcal{D}$ oarecare. Cum funcţia vectorială

$$x\to(x,y_0(x),y_0'(x)):I\to D\subset\mathbb{R}^3$$

este continuă, rezultă că mulţimea $K=\{(x,y_0(x),y_0'(x));x\in I\}\subset D$ este compactă. Fie $r=d(x,\complement D)=\inf\{d(M,N);M\in K,N\in\complement D\}$. Deoarece $K\cap\complement D=\varnothing$, K este compactă şi $\complement D$ este închisă, rezultă că $r>0$ (vezi [8], Teorema 5.2.1, pag. 100). Vom arăta că $B(y_0;\frac{r}{2})\subset\mathcal{D}$, de unde va rezulta că $\mathcal{D}$ este o mulţime deschisă. Fie $y\in B(y_0;\frac{r}{2})$. Atunci

$$\|y-y_0\|=\sup_{x\in I}|y(x)-y_0(x)|+\sup_{x\in I}|y'(x)-y_0'(x)|<\frac{r}{2}.$$

În particular, avem

$$|y(x)-y_0(x)|+|y'(x)-y_0'(x)|<\frac{r}{2},\ \forall x\in I\ . \tag{2}$$

Fie $x\in I$ oarecare fixat, $M(x,y_0(x),y_0'(x))\in K$ şi $P(x,y(x),y'(x))$. Avem

$$d(M,P)=\sqrt{(y(x)-y_0(x))^2+(y'(x)-y_0'(x))^2}\le|y(x)-y_0(x)|+|y'(x)-y_0'(x)|<\frac{r}{2}.$$

Cum $d(P,K)\le d(P,M)$, rezultă că $d(P,K)<\frac{r}{2}$. Din această ultimă inegalitate deducem că $P\in D$, pentru că, în caz contrar, $P\in\complement D$ şi $d(P,K)\ge d(\complement D,K)=r$, ceea ce este absurd.

În definitiv, am arătat că dacă $y\in B(y_0;\frac{r}{2})$, atunci $(x,y(x),y'(x))\in D$, $\forall x\in I$, deci $y\in\mathcal{D}$. Cu aceasta, lema este demonstrată. ■

Ne punem problema determinării funcţiilor din $\mathcal{D}$ care realizează un extrem al funcţionalei (1) pe această mulţime. Conform teoremei lui Fermat, dacă $y_0\in\mathcal{D}$ realizează un extrem al funcţionalei (1) pe $\mathcal{D}$, atunci, în mod necesar

$$\delta_h F(y_0) = 0,\ \forall h \in C^1(I;\mathbb{R}).$$

În practică se pune problema determinării punctelor de extrem ale funcționalei (1) *cu capete fixe*. În acest caz, fie $c, d \in \mathbb{R}$ numere date şi

$$A = \{y \in D \mid y(a) = c,\ y(b) = d\},$$

cunoscută sub numele de *mulțimea funcțiilor admisibile* ale problemei. Este uşor de constatat că, dacă se cunoaşte o funcție $y_0 \in A$, atunci orice altă funcție $y \in A$ este de forma $y = y_0 + h$, unde $h(a) = h(b) = 0$. Prin urmare, dacă $y_0 \in A$ realizează un extrem al funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor admisibile, atunci, în mod necesar

$$\delta_h F(y_0) = 0,\ \forall h \in C^1(I;\mathbb{R}),\ h(a) = h(b) = 0.$$

Pentru rezolvarea problemelor de extrem pentru funcționala (1) este util următorul rezultat.

Lema 4.3.2. (Lema fundamentală a calculului variațional). (Lagrange). *Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 pe $[a,b]$, cu $h(a) = h(b) = 0$, satisface condiția*

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

Atunci $f(x) = 0$, pentru orice $x \in [a,b]$.

Demonstrație. Funcția f fiind continuă, este suficient să arătăm că $f(x) = 0$, pentru orice $x \in (a,b)$. Presupunem, prin absurd, că f nu este identic nulă pe (a,b), deci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) \neq 0$. Fără micşorarea generalității, putem presupune că $f(c) > 0$. Funcția f fiind continuă în punctul c, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ suficient de mic, astfel încât $J = [c-\delta, c+\delta] \subset (a,b)$ şi pentru orice $x \in J$, avem $|f(x) - f(c)| \le \varepsilon$. Altfel spus, pentru orice $x \in J$ au loc inegalitățile $f(c) - \varepsilon \le f(x) \le f(c) + \varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} f(c)$ rezultă că există un interval corespunzător $J = [c-\delta, c+\delta]$ astfel încât pentru orice $x \in J$ avem $f(x) \ge \frac{1}{2} f(c)$. Fie funcția

$$h(x) = \begin{cases} (x-c+\delta)^2 (x-c-\delta)^2, & \text{dacă } x \in J \\ 0, & \text{dacă } x \notin J \end{cases}.$$

Se verifică uşor că funcția h satisface condițiile din enunțul lemei. În plus, folosind teorema de medie, rezultă că

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)h(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{2} f(c) \int_{c-\delta}^{c+\delta} h(x)\mathrm{d}x = f(c)h(\xi)\delta > 0,$$

unde $\xi \in (c-\delta, c+\delta)$, ceea ce contrazice (3). ■

Observația 4.3.1. Lema lui Lagrange rămâne valabilă dacă funcția h din enunțul lemei este o funcție de clasă C^k, $k \ge 1$, pe $[a,b]$, care se anulează în a şi b împreună cu

derivatele sale până la ordinul $k-1$ inclusiv. Este suficient să luăm $h(x)=(x-c+\delta)^{2k}(x-c-\delta)^{2k}$, dacă $x\in J$.

Lema 4.3.3. (Du-Bois-Raymond). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice funcţie* $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, *de clasă* C^1 *pe* $[a,b]$, *cu* $h(a)=h(b)=0$, *satisface condiţia*

$$\int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x=0. \tag{4}$$

Atunci funcţia f *este constantă pe intervalul* $[a,b]$.

Demonstraţie. Fie

$$h:[a,b]\to\mathbb{R},\ h(x)=\int_a^x (f(t)-c)\mathrm{d}t,$$

unde c este o constantă care se determină din condiţia $h(b)=0$, deci

$$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Este clar că funcţia h astfel construită este de clasă C^1 pe $[a,b]$, satisface condiţiile $h(a)=h(b)=0$ şi $h'(x)=f(x)-c$. Atunci

$$\int_a^b \big(f(x)-c\big)^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b \big(f(x)-c\big)h'(x)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x-c\int_a^b h'(x)\mathrm{d}x=0-c[h(b)-h(a)]=0.$$

Integrantul fiind pozitiv şi funcţia f continuă, rezultă că $f(x)=c$, $\forall x\in[a,b]$. ■

Corolarul 1. *Dacă* $P,Q:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sunt funcţii continue care satisfac*

$$\int_a^b [P(x)h(x)+Q(x)h'(x)]\mathrm{d}x=0$$

pentru orice funcţie h *de clasă* C^1 *pe* $[a,b]$, *cu* $h(a)=h(b)=0$, *atunci funcţia* Q *este derivabilă şi* $Q'(x)=P(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

Demonstraţie. Fie funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_a^x P(t)\mathrm{d}t$. Această funcţie este derivabilă şi $f'(x)=P(x)$, $\forall x\in[a,b]$. Conform ipotezei, pentru orice funcţie h de clasă C^1 pe $[a,b]$, cu $h(a)=h(b)=0$, avem

$$\int_a^b [f'(x)h(x)+Q(x)h'(x)]\mathrm{d}x=0,$$

de unde, integrând prin părţi, obţinem

$$\int_a^b Q(x)h'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x .$$

În consecință

$$\int_a^b [Q(x) - f(x)]h'(x)\mathrm{d}x = 0 .$$

Conform Lemei 4.3.3, rezultă că funcția $Q - f$ este constantă pe $[a,b]$, deci $Q'(x) = f'(x) = P(x)$, $\forall x \in [a,b]$. ■

Teorema 4.3.1. (Teorema lui Euler). *Fie* $D \subset \mathbb{R}^3$ *o mulțime deschisă,* $F : D \to \mathbb{R}$ *o funcție de clasă* C^1, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ *şi* $D = \{y \in C^1(I;\mathbb{R}) \mid (x, y(x), y'(x)) \in D,\ \forall x \in I\}$.

Fie, de asemenea, funcționala $F : D \to \mathbb{R}$,

$$F(y) = \int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x,\ \forall y \in D .$$

Dacă funcția $y_0 \in A = \{y \in D \mid y(a) = c,\ y(b) = d\}$ *realizează un extrem al funcționalei* F *pe mulțimea funcțiilor admisibile* A, *atunci funcția* $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ *este de clasă* C^1 *pe* $[a,b]$ *şi funcția* y_0 *verifică ecuația diferențială*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right). \tag{5}$$

Demonstrație. Fie h o funcție de clasă C^1 pe $[a,b]$, care satisface condițiile la limită $h(a) = 0$, $h(b) = 0$ şi funcția $\varphi_h : \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}$, $\varphi_h(t) = F(y_0 + th)$. Variația întâi a funcționalei F este $\delta_h F(y_0) = \varphi_h'(0)$, deci

$$\delta_h F(y_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\left(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)\right)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F\left(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)\right)\right)\Bigg|_{t=0}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x .$$

Conform teoremei lui Fermat, $\delta_h F(y_0) = 0$, pentru orice funcție h de clasă C^1 pe $[a,b]$, care satisface $h(a) = 0$, $h(b) = 0$, deci

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x = 0 .$$

Concluzia teoremei rezultă din Corolarul 1. ■

Aşadar, teorema lui Euler ne dă o condiţie necesară de extrem, cu care problema poate fi complet rezolvată în multe cazuri. Problema condiţiilor suficiente de extrem depăşeşte cadrul acestui curs şi nu o vom aborda.

Ecuaţia diferenţială (5) se numeşte *ecuaţia lui Euler-Lagrange* asociată funcţionalei $\mathcal{F}$. Soluţiile ecuaţiei diferenţiale (5) se numesc *extremale*. Ele sunt susceptibile de a fi puncte de minim pentru funcţionala $\mathcal{F}$.

Observaţia 4.3.2. Dacă funcţia $F \in C^2(D)$, derivând în raport cu x termenul drept al ecuaţiei (4), aceasta devine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

Rezultă că, dacă $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ nu este identic nulă, atunci ecuaţia diferenţială (4) este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, deci soluţia sa generală depinde de două constante arbitrare.

Aceste constante se determină folosind condiţia suplimentară a problemei: curba căutată trebuie să treacă prin două puncte date.

Exemplu. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12 y^2) \mathrm{d}x ,$$

care satisfac condiţiile la limită $y(1) = 1$, $y(2) = 8$.

În acest caz $F(x, y, y') = x^2 y'^2 + 12 y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 24 y$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2 y'$.

În consecinţă, ecuaţia Euler-Lagrange va fi

$$24 y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^2 y') = 0 \text{ sau } 24 y - 4xy' - 2x^2 y'' = 0 .$$

Se ajunge astfel la ecuaţia diferenţială de tip Euler

$$x^2 y'' + 2xy' - 12 y = 0 .$$

Facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi ţinem seama că $y' = e^{-t} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,

$y'' = e^{-2t} \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)$. Atunci, ecuaţia diferenţială Euler se transformă în ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 12 y = 0 ,$$

care are soluţia $y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-4t}$. Prin urmare soluţia ecuaţiei diferenţiale Euler este $y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^4}$. Din condiţiile la limită obţinem $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Aşadar, extremala căutată este $y(x) = x^3$.

Observația 4.3.3. Să presupunem că $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \equiv 0$. Atunci funcția F este de forma

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'.$$

Ecuația lui Euler devine

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} y' = 0,$$

adică

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6}$$

Dacă această relație este satisfăcută identic, atunci expresia de sub semnul integralei

$$[P(x, y) + Q(x, y)y']\mathrm{d}x = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

va fi o diferențială totală exactă, deci valoarea integralei depinde numai de capetele curbei, nu şi de drumul de integrare. În acest caz problema variațională nu are sens.

Dacă relația (6) nu este satisfăcută identic, atunci ea defineşte o curbă bine determinată, care, în general, nu va trece prin punctele date. În acest caz, problema variațională nu are soluție. În anumite cazuri particulare, relația (6) poate să dea soluția problemei de extrem pentru funcționala corespunzătoare.

Exemplu. Să se determine extremalele funcționalei

$$F(y) = \int_1^2 (3x - y)y\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(1) = 1$, $y(2) = 8$.

În acest caz $F(x, y, y') = 3xy - y^2$, iar ecuația lui Euler devine $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, adică $3x - 2y = 0$. Prin urmare, $y(x) = \frac{3}{2}x$, care, în mod evident, nu satisface condițiile la limită.

Cazuri particulare ale ecuației lui Euler

1) *Funcția F nu depinde de y.*

În acest caz $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ şi ecuația lui Euler devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

deci

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \tag{7}$$

este o integrală primă pentru ecuația lui Euler.

Exemplu. Să se determine extremalele funcționalei

$$F(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(1)=3$, $y(2)=5$.

În acest caz $F(x,y,y')=y'(1+x^2y')$, deci F nu depinde de y. Conform celor de mai sus, extremalele funcționalei satisfac ecuația (6), adică $1+2x^2y'=C$. Atunci $y'=\dfrac{C-1}{2x^2}$, de unde, prin integrare, găsim familia de hiperbole $y=\dfrac{C_1}{x}+C_2$. Constantele C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită. Obținem sistemul $C_1+C_2=3$, $\dfrac{1}{2}C_1+C_2=5$, care are soluțiile $C_1=-4$, $C_2=7$. Extremala căutată este $y(x)=7-\dfrac{4}{x}$.

2) *Funcția F nu depinde de x.*

În acest caz vom arăta că

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C \tag{8}$$

este o integrală primă pentru ecuația lui Euler.

Într-adevăr, deoarece $F=F(y,y')$ şi ținând seama de ecuația lui Euler, obținem succesiv:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''-\frac{\partial F}{\partial y'}y''-y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=$$

$$=y'\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)=0,$$

de unde rezultă (8).

Exemplu. Să se rezolve problema brachistocronei. Altfel spus, să se determine extremalele funcționalei

$$T\quad(y)=\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(0)=0$, $y(a)=b$.

În acest caz $F(x,y,y')=F(y,y')=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$. Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=\dfrac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$, din (8) obținem $\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\dfrac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=C$, care se mai scrie $\dfrac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=C$. Notând $k=\dfrac{1}{C^2}$, rezultă că

$$y=\frac{k}{1+y'^2}.$$

Punând $y' = \mathrm{ctg}t$, rezultă că $y = k\sin^2 t = \frac{k}{2}(1-\cos 2t)$. Atunci

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{k\sin 2t}{\mathrm{ctg}t} = 2k\sin^2 t\mathrm{d}t = k(1-\cos 2t)\mathrm{d}t.$$

Prin urmare

$$x = \frac{k}{2}(2t - \sin 2t) + k_1.$$

Aşadar, obținem curbele sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = \frac{k}{2}(2t - \sin 2t) + k_1 \\ y = \frac{k}{2}(1-\cos 2t) \end{cases} \tag{9}$$

constantele k şi k_1 fiind arbitrare şi se determină din condițiile la limită. Ecuațiile (9) reprezintă o familie de cicloide generate prin rostogolirea unui cerc de rază $\frac{k}{2}$ pe axa reală.

Punctele de întoarcere vor fi puncte de pe axa reală de abscise $x = k_1 + 2n\pi k$, $n \in \mathbb{Z}$.

Cum, prin ipoteză, curba căutată trece prin origine, va rezulta $k_1 = 0$. Constanta k se determină din condiția $y(a) = b$.

4.4. Funcționale de tipul $F(y,z) = \int_a^b F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$

Fie $D \subset \mathbb{R}^5$ o mulțime deschisă, $F : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 şi $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

De asemenea, fie

$$D = \{(y,z) \in C^1(I;\mathbb{R}^2) \mid (x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)) \in D,\ \forall x \in I\},$$

$y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ numere date şi

$$A = \{(y,z) \in D \mid y(a) = y_1,\ y(b) = y_2, z(a) = z_1, z(b) = z_2\}.$$

Considerăm funcționala $F : A \to \mathbb{R}$,

$$F(y,z) = \int_a^b F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Această funcțională depinde de F. Mulțimea A se numeşte *mulțimea funcțiilor admisibile*.

Teorema 4.4.1. *Dacă* $(y,z) \in C^1(I;\mathbb{R}^2)$ *realizează extremumul funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor admisibile, atunci funcțiile* $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$, $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial z'}(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$ *sunt de clasă* C^1, *iar funcțiile* y *şi* z *verifică sistemul de ecuații diferențiale*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) \end{cases}. \tag{2}$$

Demonstrație. Fie $(g,h) \in C^1(I;\mathbb{R}^2)$ care satisface condițiile la limită $g(a)=0$, $g(b)=0$, $h(a)=0$, $h(b)=0$ şi funcția

$$\varphi_{(g,h)} : \left(-\frac{r}{\|(g,h)\|}, \frac{r}{\|(g,h)\|}\right) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{(g,h)}(t) = F(y+tg, z+th).$$

Variația întâi a funcționalei (1) este $\delta_{(g,h)}F(y,z) = \varphi'_{(g,h)}(0)$, deci

$$\delta_{(g,h)}F(y,z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\big(x, y(x)+tg(x), y'(x)+tg'(x), z(x)+th(x), z'(x)+th'(x)\big)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F\big(x, y(x)+tg(x), y'(x)+tg'(x), z(x)+th(x), z'(x)+th'(x)\big)\Big)\Bigg|_{t=0}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot g'(x)\right]\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial z}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial z'}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Conform teoremei lui Fermat, $\delta_{(g,h)}F(y,z) = 0$, pentru orice funcții g şi h de clasă C^1 pe $[a,b]$, care satisfac $g(a)=0$, $g(b)=0$, $h(a)=0$, $h(b)=0$.

În particular, scriind $\delta_{(g,h)}F(y,z) = 0$ pentru $(g,0)$ respectiv $(0,h)$ şi ținând seama de (3), obținem:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot g'(x)\right]\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial z}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial z'}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Concluzia teoremei rezultă din Corolarul 1. ■

Aşadar, Teorema 4.4.1 dă condiții necesare de extrem. Sistemul de ecuații diferențiale (2) se numeşte *sistemul Euler-Lagrange* asociat funcționalei (1). Curbele y şi z care satisfac sistemul (2) se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcționalei (1).

Observația 4.5.1. 1) Dacă funcția F nu depinde explicit de y sau z, atunci sistemul (2) admite, în mod evident, integralele prime

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \text{ respectiv } \frac{\partial F}{\partial z'} = C'.$$

2) Dacă funcția F nu depinde explicit de x, atunci sistemul (2) admite integrala primă

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C .$$

Într-adevăr,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F}{\partial z'}z'' -$$

$$-y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - z''\frac{\partial F}{\partial z'} - z'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0,$$

deoarece y şi z care satisfac sistemul Euler-Lagrange.

Exemplu. Să se determine extremalele funcționalei

$$F\quad(y,z) = \int_0^{\pi}(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\mathrm{d}x ,$$

care satisfac condițiile la limită $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $z(0) = 0$, $z(\pi) = 1$.

Deoarece $F(x, y, z, y', z') = 2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2$, sistemul Euler-Lagrange devine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2z - 4y - 2y'' = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 2y - 2z'' = 0 \end{cases} .$$

Din sistemul $y'' + 2y - z = 0$, $z'' + y = 0$, eliminând pe z, obținem ecuația diferențială $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, a cărei soluție generală este

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x(C_3\cos x + C_4\sin x) .$$

Din condițiile $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, obținem $C_1 = 0$ şi $C_3 = -\dfrac{1}{\pi}$. În consecință

$$y(x) = C_2\sin x + C_4 x\sin x - \frac{x}{\pi}\cos x .$$

Din prima ecuație a sistemului rezultă că

$$z(x) = C_2\sin x + C_4(2\cos x + x\sin x) + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x) .$$

Folosind condițiile $z(0) = 0$, $z(\pi) = 1$, obținem $C_4 = 0$ şi C_2 arbitrar. În concluzie, curbele extremale căutate sunt:

$$y(x) = C_2\sin x - \frac{x}{\pi}\cos x ,$$

$$z(x) = C_2\sin x + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x) .$$

4.5. Funcţionale de tipul $F(y)=\int_a^b F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})\mathrm{d}x$

Procedând ca în secţiunea 4.3, vom aborda probleme ale calculului variaţional, în care funcţia de sub semnul integrală depinde nu numai de derivata de ordinul întâi, ci şi de derivatele de ordin superior. Probleme de acest tip apar des în teoria elasticităţii. Prezentăm, pe scurt, un exemplu. Să se determine forma axei unei grinzi încovoiate, cu anumite condiţii la extremităţi. Această problemă revine la găsirea extremumului energiei potenţiale a sistemului. Dar energia potenţială a unei grinzi încovoiate depinde de curbură. Prin urmare, în această problemă se caută curbele extremale în cazul în care funcţia de sub semnul integrală depinde de derivatele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea ale funcţiei necunoscute.

Fie $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi fie $C^n(I;\mathbb{R})$ spaţiul vectorial real al funcţiilor $y:I\to\mathbb{R}$ de clasă C^n, înzestrat cu norma

$$\|y\|=\sup_{x\in I}|y(x)|+\sup_{x\in I}|y'(x)|+...+\sup_{x\in I}|y^{(n)}(x)|.$$

Dacă $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ este o funcţie dată, de clasă C^1, considerăm funcţionala $F:C^n(I;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,

$$F(y)=\int_a^b F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Problema pe care o vom aborda se enunţă în modul următor. Dintre toate curbele $y\in C^n(I;\mathbb{R})$, care verifică condiţiile la limită:

$$\begin{aligned} &y(a)=c_1,\ y'(a)=c_2,\ldots,\ y^{(n-1)}(a)=c_n,\\ &y(b)=d_1,\ y'(b)=d_2,\ldots,\ y^{(n-1)}(b)=d_n, \end{aligned} \tag{2}$$

să se determine acea curbă de-a lungul căreia funcţionala (1) realizează un extremum.

Se constată uşor că, dacă se cunoaşte o funcţie $y_0\in C^n(I;\mathbb{R})$ care verifică condiţiile la limită (2), atunci orice altă funcţie $y\in C^n(I;\mathbb{R})$ care verifică, de asemenea, condiţiile la limită (2), este de forma $y=y_0+h$, unde $h\in C^n(I;\mathbb{R})$ satisface condiţiile la limită:

$$\begin{aligned} &h(a)=0,\ h'(a)=0,\ldots,\ h^{(n-1)}(a)=0,\\ &h(b)=0,\ h'(b)=0,\ldots,\ h^{(n-1)}(b)=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Prin urmare, dacă $y_0\in C^n(I;\mathbb{R})$ realizează un extrem al funcţionalei (1) pe mulţimea funcţiilor din $C^n(I;\mathbb{R})$ care satisfac condiţiile la limită (2), atunci, în mod necesar

$$\delta_h F(y_0)=0,$$

pentru orice $h\in C^n(I;\mathbb{R})$ care satisface condiţiile la limită (3).

Teorema 4.5.1. *Fie $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^{n+1}. Dacă funcţia $y\in C^{2n}(I;\mathbb{R})$ realizează un extrem al funcţionalei (1) pe mulţimea funcţiilor din $C^n(I;\mathbb{R})$, care satisfac condiţiile la limită (2), atunci funcţia y verifică ecuaţia diferenţială*

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+...+(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right). \tag{4}$$

Demonstrație. Vom arăta că funcționala (1) admite variația întâi în orice punct $y \in C^n(I;\mathbb{R})$, după direcția oricărui $h \in C^n(I;\mathbb{R})$. Într-adevăr

$$\delta_h F(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\left(x, y+th, y'+th', \ldots, y^{(n)}+th^{(n)}\right)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot h' + \frac{\partial F}{\partial y''}\cdot h'' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\cdot h^{(n)}\right]\mathrm{d}x .$$

Să presupunem acum că funcția h satisface condițiile la limită (3). Integrând prin părți, pentru orice k, $1 \le k \le n$, obținem

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\cdot h^{(k)}\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\cdot h^{(k-1)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\cdot h^{(k-2)}\mathrm{d}x = \ldots = (-1)^k \int_a^b \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\cdot h\,\mathrm{d}x .$$

În consecință, avem

$$\delta_h F(y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)\right]\cdot h\,\mathrm{d}x .$$

Deoarece $\delta_h F(y) = 0$ pentru orice funcție h de clasă C^n pe $[a,b]$, care satisface $h(a)=0$, $h(b)=0$, din lema fundamentală a calculului variațional rezultă că funcția y satisface ecuația diferențială (4). ■

Prin urmare Teorema lui 4.5.1 dă o condiție necesară de extrem. Ecuația diferențială (4) se numeşte *ecuația Euler-Poisson* asociată funcționalei (1). Soluțiile acestei ecuații se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcționalei (1).

Exemplu. Să se determine extremalele funcționalei

$$F(y) = \int_0^1 (2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2)\mathrm{d}x ,$$

care satisfac condițiile la limită $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y(1)=\mathrm{ch}1$, $y'(0)=\mathrm{sh}1$.

În acest caz $F(x,y,y',y'') = 2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y' - 4y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y - 2y'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$. În consecință, ecuația Euler-Poisson asociată funcționalei este $2y' - 4y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y-2y') + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(2y'') = 0$ sau $y^{IV} + y'' - 2y = 0$. Ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale este $r^4 + r^2 - 2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = \mathrm{i}\sqrt{2}$, $r_4 = -\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Atunci soluția generală a ecuației Euler-Poisson va fi

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x .$$

Ținând seama de condițiile la limită, este util să scriem această soluție generală folosind funcțiile hiperbolice. Deoarece $e^x = \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x$ şi $e^{-x} = \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x$, atunci, notând $k_1 = C_1 + C_2$, $k_2 = C_1 - C_2$, rezultă că soluția generală a ecuației Euler-Poisson se poate scrie sub forma

$$y(x) = k_1\mathrm{ch}x + k_2\mathrm{sh}x + C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\sin\sqrt{2}x.$$

Folosind condițiile la limită, ajungem la sistemul algebric liniar $k_1 + C_3 = 0$, $k_2 + \sqrt{2}C_4 = 0$, $k_1\mathrm{ch}1 + k_2\mathrm{sh}1 + C_3\cos\sqrt{2} + C_4\sin\sqrt{2} = \mathrm{ch}1$, $k_1\mathrm{sh}1 + k_2\mathrm{ch}1 - \sqrt{2}C_3\sin\sqrt{2} + \sqrt{2}C_4\cos\sqrt{2} = \mathrm{sh}1$. Rezolvând acest sistem, obținem $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Prin urmare, extremala căutată este $y(x) = \mathrm{ch}x$.

4.6. Funcționale de tipul $F(u) = \iint_D F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră este curba închisă, netedă pe porțiuni C, $U \subset \mathbb{R}^5$ o mulțime deschisă şi $F : U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1. Fie

$$D = \{u \in C^1(\bar{D};\mathbb{R}) \mid \left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) \in U, \forall (x,y) \in \bar{D}\}.$$

Considerăm funcționala $F : D \to \mathbb{R}$,

$$F(u) = \int_a^b F(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

Se poate demonstra că mulțimea D este o submulțime deschisă a spațiului normat $C^1(\bar{D};\mathbb{R})$. Dacă g este o funcție dată pe curba C, fie

$$A = \{u \in D \ ; \ u|_C = g\}.$$

Este clar că, dacă funcția $u_0 \in A$ este cunoscută, atunci orice altă funcție $u \in A$ este de forma $u = u_0 + h$, unde $h|_C = 0$.

Ne punem problema determinării punctelor de extrem ale funcționalei (1) pe mulțimea A. Pentru rezolvarea acestei probleme sunt utile următoarele rezultate.

Lema 4.6.1. *Fie $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție h de clasă C^1 pe o mulțime deschisă ce conține $\bar{D}$, cu $h|_C = 0$, satisface condiția*

$$\iint_D f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

Atunci $f(x,y) = 0$, pentru orice $(x,y) \in \bar{D}$.

Demonstrație. Funcția f fiind continuă, este suficient să arătăm că $f(x,y) = 0$, pentru orice $x \in D$. Presupunem, prin absurd, că f nu este identic nulă pe D, deci există $(a,b) \in D$ astfel încât $f(a,b) \neq 0$. Fără micşorarea generalității, presupunem că $f(a,b) > 0$.

Funcția f fiind continuă în punctul (a,b), pentru orice $\varepsilon > 0$ există $r > 0$ suficient de mic, astfel încât $V = B\big((a,b);r\big) \subset D$ şi pentru orice $(x,y) \in V$, avem $\left|f(x,y) - f(a,b)\right| < \varepsilon$. Altfel spus, pentru orice $(x,y) \in V$ au loc inegalitățile $f(a,b) - \varepsilon < f(x,y) < f(a,b) + \varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a,b)$ rezultă că există o bilă corespunzătoare $V = B\big((a,b);r\big)$ astfel încât pentru orice $x \in V$ avem $f(x,y) > \frac{1}{2} f(a,b)$. Fie funcția

$$h(x,y) = \begin{cases} \left((x-a)^2 + (z-b)^2 - r^2\right)^2, & \text{dacă } x \in V \\ 0, & \text{dacă } x \notin V \end{cases}.$$

Se verifică uşor că funcția h satisface condițiile din enunțul lemei. În plus, folosind teorema de medie pentru integrala dublă, rezultă că

$$\iint_D f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_V f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y >$$

$$> \frac{1}{2} f(a,b) \iint_V h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} f(a,b) h(\overline{x},\overline{y}) \cdot \pi r^2 > 0,$$

unde $(\overline{x},\overline{y}) \in V$, ceea ce contrazice (2). ■

Corolarul 1. *Dacă $P : \overline{D} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, iar Q şi R sunt două funcții de clasă C^1 pe o mulțime deschisă care conține $\overline{D}$, care satisfac*

$$\iint_D [P(x,y)h(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + R(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{3}$$

pentru orice funcție h de clasă C^1 pe o mulțime deschisă ce conține $\overline{D}$, cu $h\big|_C = 0$, atunci

$$P(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial R}{\partial y}(x,y), \ \forall (x,y) \in \overline{D}.$$

Demonstrație. Deoarece

$$Q\frac{\partial h}{\partial x} + R\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(Qh) + \frac{\partial}{\partial y}(Rh) - \frac{\partial Q}{\partial x}h - \frac{\partial R}{\partial y}h,$$

rezultă că

$$\iint_D [Q\frac{\partial h}{\partial x} + R\frac{\partial h}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(Qh) + \frac{\partial}{\partial y}(Rh)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D [\frac{\partial Q}{\partial x}h + \frac{\partial R}{\partial y}h]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Conform formulei Green-Riemann şi ținând seama că $h\big|_C = 0$, rezultă

$$\iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(Qh) + \frac{\partial}{\partial y}(Rh)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C (-Rh)\mathrm{d}x + (Qh)\mathrm{d}y = 0.$$

Aşadar

$$\iint_D [Q\frac{\partial h}{\partial x} + R\frac{\partial h}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D [\frac{\partial Q}{\partial x}h + \frac{\partial R}{\partial y}h]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Înlocuind în (3), obținem

$$\iint_D [P(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial R}{\partial y}(x,y)]h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

pentru funcție h de clasă C^1, care satisface $h|_C = 0$. Corolarul rezultă din Lema 4.6.1. ■

Teorema 4.6.1. *Dacă funcția $u \in A$ realizează un extrem al funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor admisibile, atunci funcția u verifică ecuația cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0, \tag{4}$$

unde $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Demonstrație. Fie h o funcție de clasă C^1, care satisface $h|_C = 0$ şi funcția $\varphi_h : \left(-\dfrac{r}{\|h\|}, \dfrac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}$, $\varphi_h(t) = F(u + th)$. Variația întâi a funcționalei (1) este $\delta_h F(u) = \varphi_h'(0)$, deci

$$\delta_h F(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_D F\left(x, y, u + th, \frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + t\frac{\partial h}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \iint_D \frac{d}{dt}\left[F\left(x, y, u + th, \frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + t\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]\Bigg|_{t=0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u}h + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Deoarece $\delta_h F(u) = 0$ pentru orice funcție h de clasă C^1 care satisface $h|_C = 0$, obținem că

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u}h + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \ \forall h \in C^1, \ h|_C = 0.$$

Teorema rezultă din Corolarul 1. ■

Şi în acest caz, Teorema 4.6.1 dă o condiție necesară de extrem. Ecuația cu derivate parțiale (4) se numeşte *ecuația Euler-Ostrogradski* asociată funcționalei (1). Soluțiile acestei ecuații se numesc *suprafețe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcționalei (1).

Exemplu. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră este curba închisă, netedă pe porțiuni C şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă dată. Să se determine extremalele funcționalei

$$F(u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + 2fu)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

care satisfac $u|_C = g$, g fiind o funcție dată pe curba C.

Deoarece $F(x, y, u, u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2 + 2fu$, avem

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2f\ ,\ \frac{\partial F}{\partial u_x} = 2u_x\ ,\ \frac{\partial F}{\partial u_y} = 2u_y\ ,$$

deci ecuația Euler-Ostrogradski este

$$2f - \frac{\partial}{\partial x}(2u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(2u_y) = 0\ ,$$

adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\ .$$

Prin urmare, problema determinării extremalelor funcționalei (5) conduce la rezolvarea problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\big|_C = g \end{cases}.$$

CAPITOLUL 5

ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR

5.1. Câmp de evenimente

Un fenomen întâmplător se poate observa, de regulă, de mai multe ori. Faptul că este întâmplător se manifestă prin aceea că nu ştim dinainte care este rezultatul producerii acestui fenomen. Rezultatele posibile ale unui fenomen întâmplător se numesc *evenimentele elementare* ale acestui fenomen.

Exemplu. Pentru fenomenul "aruncarea zarului" mulțimea evenimentelor elementare este

$$E = \{(1),(2),(3),(4),(5),(6)\} \ .$$

Mulțimea evenimentelor elementare ale fenomenului "aruncarea banului" este $\{\{b\},\{s\}\}$, unde b =banul, s =stema.

Prin *eveniment* se înțelege o submulțime a mulțimii evenimentelor elementare.

Exemplu. La aruncarea zarului evenimentul "rezultat par" este submulțimea $\{2,4,6\}$.

Toate evenimentele care pot fi considerate la aruncarea zarului sunt următoarele:

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$

$\{1,2\}$, $\{1,3\}$,…, $\{5,6\}$

$\{1,2,3\}$,…, $\{4,5,6\}$

$\{1,2,3,4\}$,…, $\{3,4,5,6\}$

$\{1,2,3,4,5\}$,…, $\{2,3,4,5,6\}$

$\{1,2,3,4,5,6\}$

În total sunt $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 - 1$ evenimente. Evenimentul $\{1,2,3,4,5,6\}$ se mai numeşte şi *evenimentul sigur*. La aceste evenimente se adaugă şi *evenimentul imposibil*, notat $\varnothing$. Astfel încât mulțimea tuturor evenimentelor corespunzătoare fenomenului "aruncarea zarului" este $\mathsf{P}\ (E)$ şi conține 2^6 elemente.

În general, dacă mulțimea evenimentelor elementare este E, atunci mulțimea tuturor evenimentelor este $\mathsf{P}\ (E)$ şi conține 2^{CardE} elemente, unde am notat cu $CardE$ numărul elementelor mulțimii E.

Exemplu. Considerăm fenomenul „aruncarea a două zaruri".

$$E = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(i,j); 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6\}.$$

Evenimentul „dublă" este

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}.$$

Evenimente contrare. Fiecărui eveniment A îi corespunde *evenimentul contrar*, notat $\overline{A} = CA = E \setminus A$ şi constă în nerealizarea evenimentului A.

De exemplu, în cazul aruncării zarului, dacă $A = \{1,2\}$, atunci $\overline{A} = \{3,4,5,6\}$.

Evenimentul implicat de alt eveniment. Spunem că *evenimentul* A *implică evenimentul* B şi notăm $A \subset B$, dacă B se realizează de fiecare dată când se realizează A.

Este clar că $\varnothing \subset A$, pentru orice eveniment A.

Două evenimente A şi B se numesc *egale* şi scriem $A = B$, dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$.

În cazul aruncării zarului, evenimentul $\{3\}$ nu poate fi consecinţa nici unui alt eveniment în afară de $\varnothing$.

În general, evenimentele elementare nu sunt implicate de nici un alt eveniment diferit de $\varnothing$. Aşadar, dacă $\{e\}$ este un eveniment elementar şi $A \subset \{e\}$, rezultă că $A = \varnothing$ sau $A = \{e\}$.

Operaţii cu evenimente

Dacă A şi B sunt evenimente, putem considera evenimentul „A *sau* B”, notat $A \cup B$ şi evenimentul „A *şi* B”, notat $A \cap B$.

Evenimentele A şi B se numesc *incompatibile* dacă $A \cap B = \varnothing$. Evident, evenimentele A şi B se numesc *compatibile* dacă $A \cap B \neq \varnothing$.

Prin abstractizarea noţiunilor expuse mai sus, se introduce noţiunea de *câmp de evenimente*, ale cărei axiome trebuie să ne asigure că o dată cu două evenimente A şi B, putem vorbi de evenimentele $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ etc.

Definiţia 5.1.1. Fie X o mulţime nevidă ale cărei elemente le vom numi evenimente elementare şi fie $\Omega \subset \mathrm{P}(X)$ o familie nevidă de părţi ale lui X. Perechea (X,Ω) se numeşte *câmp de evenimente* dacă

1) $\forall A \in \Omega$, rezultă că $\overline{A} \in \Omega$;

2) Dacă $A_i \in \Omega$, $1 \le i \le n$, atunci $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Omega$.

În cazul când X este finită, rolul lui Ω îl joacă $\mathrm{P}(X)$. În cazul când X este infinită, incluziunea $\Omega \subset \mathrm{P}(X)$ este, în general, strictă. În acest caz, admitem în plus axioma

3) Dacă $A_i \in \Omega$, $i \in \mathbb{N}^*$, atunci $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$.

Propoziţia 5.1.1. *Fie* (X,Ω) *un câmp de evenimente. Atunci:*

1) $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$;

2) $\forall A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$;

3). $\forall A, B \in \Omega \Rightarrow A \setminus B \in \Omega$.

Demonstraţie. 1) Fie $A \in \Omega$. Conform definiţiei, $\overline{A} \in \Omega$, deci $X = A \cup \overline{A} \in \Omega$, $\varnothing = \overline{X} \in \Omega$.

2) Ţinem seama că $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$. Mai general, dacă

$A_i \in \Omega$, $1 \le i \le n$, atunci $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Omega$.

3) În acest caz, $A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \Omega$.

5.2. Noțiunea de probabilitate

Definiția clasică a probabilității. După definiția clasică, *probabilitatea* este raportul dintre numărul cazurilor favorabile şi numărul cazurilor posibile, în ipoteza că toate cazurile sunt egal posibile. Definiția clasică a probabilității este insuficientă, deoarece se aplică numai la câmpuri finite de evenimente. Pe de altă parte, chiar şi în cazul câmpurilor finite de evenimente nu se poate vorbi totdeauna de cazuri egal posibile (de exemplu, zarul nu este perfect simetric).

Definiția 5.2.1.(Definiția axiomatică a probabilității). Fie (X, Ω) un câmp de evenimente. Se numeşte *probabilitate* orice funcție $p : \Omega \to [0,1]$ cu proprietățile:

1) $p(X) = 1$, $p(\varnothing) = 0$;

2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, dacă $A \cap B = \varnothing$.

Tripletul (X, Ω, p) se numeşte *câmp de probabilitate*.

Teorema 5.2.1. *Fie* (X, Ω, p) *un câmp de probabilitate. Atunci:*

a) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, $\forall A \in \Omega$;

b) *Dacă* $A_1, A_2, ..., A_n \in \Omega$ *şi* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *pentru* $i \ne j$, *atunci* $p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$;

c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, $\forall A, B \in \Omega$;

d) *Dacă* $A \subset B$, *atunci* $p(A) \le p(B)$.

Demonstrație. a) Deoarece $A \cap \overline{A} = \varnothing$, obținem $p(A) + p(\overline{A}) = p(A \cup \overline{A}) = p(X) = 1$, deci $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

b) Demonstrația se face prin inducție. Presupunem afirmația adevărată pentru k, deci că $p(A_1 \cup ... \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} p(A_i)$. Vom demonstra că afirmația este adevărată pentru $k+1$.

Deoarece $(A_1 \cup ... \cup A_k) \cap A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1}) = \varnothing$, rezultă că

$$p(A_1 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}) = p(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) + p(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} p(A_i),$$

deci afirmația este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

c) Din egalitatea $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ (fig. 2.1) obținem că

$$p(A \cup B) = p(A \cap \overline{B}) + p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B). \qquad (1)$$

Pe de altă parte $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$, deci $p(A) = p(A \cap \overline{B}) + p(A \cap B)$.

Prin urmare $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$. În mod asemănător se arată că

$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$.

Înlocuind în (1) rezultă relaţia din enunţ.

d) Cum $B = A \cup (B \cap \overline{A})$, avem

$p(B) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$, deci $p(A) \le p(B)$. ■

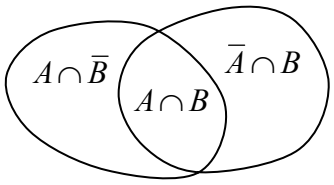

Fig. 2.1

Observaţia 5.2.1. Fie $X = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o mulţime finită şi $\Omega = \mathrm{P}\ (X)$. Elementele lui X sunt evenimentele elementare. Atunci

$$1 = p(X) = p(\bigcup_{i=1}^{n} \{e_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p(\{e_i\}).$$

Dacă evenimentele sunt egal probabile atunci $p(\{e_1\}) = p(\{e_2\}) = ... = p(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$. Fie $A = \{e_{i_1}\} \cup ... \cup \{e_{i_k}\} \in \Omega$. Atunci $p(A) = \sum_{j=1}^{k} p(\{e_{i_j}\}) = \frac{k}{n}$.

Aşadar, într-un câmp finit de evenimente, ale cărui evenimente elementare sunt egal probabile, probabilitatea unui eveniment oarecare este raportul dintre numărul evenimentelor elementare favorabile evenimentului şi numărul total de evenimente elementare ale câmpului.

Regăsim astfel definiţia clasică a probabilităţii.

Jocurile de noroc sunt exemplele cele mai cunoscute de fenomene întâmplătoare în care evenimentele întâmplătoare sunt egal probabile. Acesta este motivul pentru care, la începuturile teoriei probabilităţilor, exemplele sunt luate din aceste jocuri.

Exemple. 1) Într-o urnă sunt 4 bile albe, 3 bile verzi şi 5 bile negre. Se extrage o bilă din urnă. Fie A evenimentul ca bila extrasă să fie albă, V evenimentul ca bila extrasă să fie verde şi N evenimentul ca bila extrasă să fie neagră. Atunci $p(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $p(V) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $p(N) = \frac{5}{12}$.

2) Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea să iasă suma 7?

Fie $E = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$, deci $card(E) = 36$. Cazurile favorabile sunt date de $A_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, $card(A_7) = 7$. Atunci $p(A_7) = \frac{7}{36}$.

3) Considerăm un pachet de 52 cărţi de joc, $N = \{as, 2, ..., 12, valet, damă, rege\}$, $K = \{cupă, caro, treflă, pică\}$, $C = N \times K$. Se extrag 5 cărţi. Care este probabilitatea de a obţine o culoare?

Mulţimea evenimentelor elementare are C_{52}^5 elemente. Evenimentul *culoare* este reuniunea disjunctă a 4 evenimente: culoare de cupă, culoare de treflă, culoare de caro, culoare de pică. Fiecare din aceste evenimente are C_{13}^5 elemente. Deci, probabilitatea de a obţine o culoare este

$$\frac{4C_{13}^5}{C_{52}^5} = \frac{33}{16660} \approx 0,002.$$

Evenimentul *careu* este reuniunea a 13 evenimente disjuncte: careu de aşi,…, careu de regi. Câte elemente are evenimentul careu de aşi? Din cele 5 cărţi, 4 sunt aşi, a cincea fiind oarecare. În total sunt 48 posibilităţi. Aşadar, probabilitatea evenimentului careu este

$$\frac{13\cdot 48}{C_{52}^{5}}=\frac{1}{4165}\approx 0,00024.$$

5.3. Probabilităţi condiţionate

Fie (X,Ω,p) un câmp de probabilitate şi $B\in\Omega$ cu $p(B)>0$.

Definiţia 5.3.1. Fie $A\in\Omega$. Se numeşte *probabilitate a lui A condiţionată de B* funcţia $p_B:\Omega\to\mathbb{R}$,

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}.$$

Teorema 5.3.1. *Funcţia p_B este o probabilitate pe Ω. În plus*

$$p(A\cap B)=p(B)\cdot p_B(A).$$

Demonstraţie. Deoarece $\varnothing\subset A\cap B\subset B$, rezultă că

$$0=p(\varnothing)\le p(A\cap B)\le p(B).$$

Împărţind cu $p(B)$, obţine,

$$0\le p_B(A)\le 1.$$

Evident $p_B(\varnothing)=0$ şi $p_B(X)=1$.

Fie acum $A_1,A_2\in\Omega$, satisfăcând $A_1\cap A_2=\varnothing$. Atunci $(A_1\cap B)\cap(A_2\cap B)=\varnothing$. În consecinţă

$$p_B(A_1\cup A_2)=\frac{p\big((A_1\cup A_2)\cap B\big)}{p(B)}=\frac{p\big((A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\big)}{p(B)}=$$

$$=\frac{p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)}{p(B)}=p_B(A_1)+p_B(A_2).\ \blacksquare$$

Definiţia 5.3.2. Spunem că evenimentele A şi B sunt *independente* dacă

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B).$$

Propoziţia 5.3.2. *Dacă A şi B sunt independente atunci perechile de evenimente $(A,\overline{B})$, $(\overline{A},B)$, $(\overline{A},\overline{B})$ sunt independente.*

Demonstraţie. Prin ipoteză $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$. Deoarece $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$, avem $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})$, deci

$$p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A)\cdot p(B)=p(A)\big(1-p(B)\big)=p(A)\cdot p(\overline{B})$$

etc. ■

Definiţia 5.3.3. Evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ se numesc *independente* dacă pentru orice $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ avem

$$p(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \cdot p(A_{i_2}) \cdot ... \cdot p(A_{i_k}).$$

Observaţia 5.3.1. Dacă evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt independente, atunci şi evenimentele $A_1, \overline{A}_1, A_2, \overline{A}_2 ..., A_n, \overline{A}_n$ sunt independente.

Definiţia 5.3.4. Spunem că evenimentele $B_1, B_2, ..., B_n$ formează o *partiţie* a lui X dacă $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ şi $B_i \cap B_j = \varnothing$ dacă $i \neq j$.

Formula probabilităţii totale. *Fie* (X, Ω, p) *un câmp de probabilitate şi* $B_1, B_2, ..., B_n$ *o partiţie a lui* X. *Atunci, pentru orice* $A \in \Omega$ *avem*

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p_{B_i}(A).$$

Demonstraţie. Este clar că $A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$. În consecinţă

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p_{B_i}(A). \blacksquare$$

Formula lui Bayes

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} p(B_j) \cdot p_{B_j}(A)}.$$

Demonstraţie. Într-adevăr

$$p_A(B_i) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(A)} = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} p(B_j) \cdot p_{B_j}(A)}. \blacksquare$$

Exemplu. Considerăm 3 urne care conţin bile albe şi negre, după cum urmează: prima urnă conţine 3 bile albe şi o bilă neagră, a doua urnă conţine 4 bile albe şi 4 bile negre, iar a treia urnă conţine 2 bile albe şi 18 bile negre. Alegem la întâmplare o urnă şi apoi extragem o bilă. Bila se dovedeşte a fi albă. Să se determine care este probabilitatea ca bila să fie din urna a treia.

Notăm cu: A evenimentul "s-a extras o bilă albă", B_i, evenimentul "bila albă este din urna i", $i = 1, 2, 3$. Atunci $p(B_1) = p(B_2) = p(B_3) = \frac{1}{3}$, $p_{B_1}(A) = \frac{3}{4}$, $p_{B_2}(A) = \frac{1}{2}$, $p_{B_3}(A) = \frac{1}{10}$.

Conform formulei probabilităţii totale, avem

$$p(A) = p(B_1)\cdot p_{B_1}(A) + p(B_2)\cdot p_{B_2}(A) + p(B_3)\cdot p_{B_3}(A) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}) = \frac{9}{20}.$$

Din formula lui Bayes rezultă

$$p_A(B_3) = \frac{p(B_3)\cdot p_{B_3}(A)}{\frac{9}{20}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{9}{20}} = \frac{2}{27}.$$

5.4. Scheme clasice de probabilitate

Schema lui Poisson. Se dau n urne $U_1, U_2, ..., U_n$ care conțin bile albe şi negre în proporții date. Se cere probabilitatea de a extrage k bile albe şi $n-k$ bile negre, atunci când din fiecare urnă se extrage câte o bilă.

Fie p_i probabilitatea de a extrage o bilă albă din urna U_i şi $q_i = 1 - p_i$ probabilitatea de a extrage o bilă neagră din urna U_i. Notăm cu A_i evenimentul de a extrage o bilă albă din urna U_i şi $\overline{A}_i$ evenimentul contrar. Pentru a extrage k bile albe şi $n-k$ bile negre trebuie să se realizeze evenimentul $\cup\left[A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k}\cap\overline{A}_{i_{k+1}}\cap...\cap\overline{A}_{i_n}\right]$. Probabilitatea acestui eveniment este $\sum p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot...\cdot p_{i_k}\cdot q_{i_{k+1}}\cdot...\cdot q_{i_n}$.

De exemplu, pentru $k=2$ şi $n=3$ această probabilitate este $p_1p_2q_3 + p_1p_3q_2 + p_2p_3q_1$.

Se observă uşor că după aceeaşi regulă se calculează coeficientul lui x^k în polinomul

$$P(x) = (p_1x+q_1)(p_2x+q_2)...(p_nx+q_n).$$

Astfel, când $k=2$ şi $n=3$, $P(x) = (p_1x+q_1)(p_2x+q_2)(p_3x+q_3)$, coeficientul lui x^2 fiind $p_1p_2q_3 + p_1p_3q_2 + p_2p_3q_1$.

Schema lui Poisson este utilă în rezolvarea problemelor în care se cere probabilitatea realizării de k ori a unui eveniment într-o experiență ce constă în efectuarea a n experiențe independente, atunci când cunoaştem probabilitatea realizării evenimentului în fiecare din cele n experiențe.

Exemplu. Într-un atelier sunt 3 maşini. Prima dă $0,9\%$ rebuturi, a doua 1% rebuturi şi a treia $1,3\%$ rebuturi. Se ia la întâmplare câte o piesă de la fiecare maşină. Se cere probabilitatea ca 2 piese să fie bune şi una să fie rebut.

În acest caz $q_1 = \frac{0,9}{100} = 0,009$, $q_2 = 0,01$, $q_3 = 0,013$, $p_1 = 0,991$, $p_2 = 0,99$, $p_3 = 0,987$. Probabilitatea cerută este coeficientul lui x^2 din polinomul

$$(0,991\cdot x + 0,009)(0,99\cdot x + 0,01)(0,987\cdot x + 0,013),$$

adică $0,198506 \approx 0,2$, deci 20%.

Schema lui Bernoulli. Presupunem că în schema lui Poisson urnele sunt identice.

Probabilitatea extragerii a k bile albe va fi în acest caz coeficientul lui x^k din polinomul $P(x)=(px+q)^n$ şi va fi $C_n^k p^k q^{n-k}$.

Deoarece urnele sunt identice putem considera că extragerile se fac dintr-o singură urnă, bila extrasă punându-se înapoi în urnă după fiecare extragere.

Exemple. 1) Se aruncă o monedă de 4 ori. Se cere probabilitatea de a obţine o singură dată stema.

În acest caz $p=q=\frac{1}{2}$, $n=4$, $k=1$. Probabilitatea cerută va fi $C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$.

2) Se aruncă un zar de 5 ori. Se cere probabilitatea ca faţa $\{1\}$ să apară de 2 ori şi să nu apară de 3 ori.

De această dată $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$, $n=5$, $k=2$, deci probabilitatea cerută va fi $C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{625}{3888}\approx 0{,}16$.

5.5. Variabile aleatoare

Prin variabilă aleatoare se înţelege o funcţie ataşată unui fenomen întâmplător (aleatoriu). Valorile acestei funcţii depind de rezultatul experienţei, deci sunt aleatoare.

Definiţia 5.5.1. Fie (X,Ω,p) un câmp de probabilitate. Se numeşte *variabilă aleatoare* orice funcţie $f:X\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$,

$$f^{-1}\big((-\infty,a)\big)=\{x\in X; f(x)<a\}=\{f<a\}\in\Omega.$$

Observaţia 5.5.1. Dacă mulţimea X este finită, orice funcţie $f:X\to\mathbb{R}$ este variabilă aleatoare. Într-adevăr, dacă $X=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, atunci $f^{-1}\big((-\infty,a)\big)\in P\ (X)\in\Omega$.

Observaţia 5.5.2. Deoarece $\{f\le a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f<a+\frac{1}{n}\}$, $\{f>a\}=\overline{\{f\le a\}}$, $\{f\ge a\}=\overline{\{f<a\}}$, rezultă că funcţia f este variabilă aleatoare dacă şi numai dacă $\{f\le a\}\in\Omega$ sau $\{f>a\}\in\Omega$, sau $\{f\ge a\}\in\Omega$.

Variabilele aleatoare care iau un număr finit de valori se numesc *variabile aleatoare simple.* Variabilele aleatoare pentru care mulţimea valorilor este cel mult numărabilă se numesc *variabile aleatoare discrete.* Variabilele aleatoare pentru care mulţimea valorilor este nenumărabilă (de puterea continuului) se numesc *variabile aleatoare continue.*

5.5.1. Variabile aleatoare simple

Fie $X=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ şi $f:X\to\mathbb{R}$ o variabilă aleatoare care ia valorile $a_1<a_2<...<a_r$, $r\le n$. Considerăm evenimentele $A_i=\{e\in X; f(e)=a_i\}$. Evident că $A_i\cap A_j=\varnothing$, dacă $i\ne j$ şi $\bigcup_{i=1}^{r}A_i=X$.

Cunoaşterea unei variabile aleatoare presupune să cunoaştem valorile pe care le ia şi probabilităţile cu care ia aceste valori. Diagrama unei variabile aleatoare simple este

$$f\to\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_r \\ p_1 & p_2 & ... & p_r \end{pmatrix} \tag{1}$$

unde $p_i=p(f=a_i)=p(A_i)$ şi $\sum_{i=1}^{r}p_i=1$.

Exemple. 1) La un examen o grupă de 20 studenţi au obţinut notele: opt studenţi au obţinut nota 5, trei studenţi au obţinut nota 7, cinci studenţi au obţinut nota 8 şi patru studenţi au obţinut nota 10. Obţinem următoarea diagramă

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 \\ \frac{8}{20} & \frac{3}{20} & \frac{5}{20} & \frac{4}{20} \end{pmatrix}.$$

2) Într-o urnă sunt 2 bile albe şi 4 bile negre. Efectuăm 3 extrageri a câte o bilă, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Atunci numărul de apariţii de bile albe este o variabilă aleatoare. Să se determine distribuţia acestei variabile aleatoare.

Problema se încadrează în schema lui Bernoulli. Fie p probabilitatea de a extrage o bilă albă şi q probabilitatea de a extrage o bilă neagră, deci $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$. Diagrama variabilei aleatoare va fi:

$$f\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 & C_3^1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 & C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3} & C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 \end{pmatrix}.$$

Operaţii cu variabile aleatoare simple

Definiţia 5.5.2. Fie variabilele aleatoare $f,g:X\to\mathbb{R}$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$.

Dacă diagramele celor două variabile aleatoare sunt

$$f\to\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_r \\ p_1 & p_2 & ... & p_r \end{pmatrix},\ g\to\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_m \\ q_1 & q_2 & ... & q_m \end{pmatrix},$$

atunci definim variabilele aleatoare αf, $f+g$, $f\cdot g$ ca fiind date de diagramele

$$\alpha f \to \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \dots & \alpha a_r \\ p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{pmatrix},$$

$$f+g \to \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_r+b_m \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{rm} \end{pmatrix},$$

$$f \cdot g \to \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & \dots & a_r \cdot b_m \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{rm} \end{pmatrix},$$

unde

$$p_{ij} = p\left(\{f = a_i\} \cap \{g = b_j\}\right),$$

$\{f = a_i\} = A_i = \{x \in X; p(x) = a_i\}$ şi $\{g = b_j\} = B_j = \{x \in X; p(x) = b_j\}$.

Definiţia 5.5.3. Variabilele aleatoare f şi g se numesc *independente* dacă

$$p(A_i \cap B_j) = p(A_i) \cdot p(B_j) = p_i \cdot q_j,\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le m.$$

Cum $p(A_i \cap A_j) = \begin{cases} p(A_i), & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \ne j \end{cases}$,

vom avea

$$f^2 \to \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_r^2 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{pmatrix}.$$

Definiţia 5.5.4. Prin definiţie, *valoarea medie* a variabilei aleatoare f, cu diagrama dată de (1), este

$$M(f) = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i = \sum_{i=1}^{r} a_i p(A_i) = \sum_{j=1}^{n} f(e_j) p(e_j).$$

Proprietăţile valorii medii a unei variabile aleatoare sunt date de următoarea propoziţie.

Propoziţia 5.5.1. *Valoarea medie a unei variabile aleatoare are următoarele proprietăţi:*

1) $M(a) = a$;
2) $M(f+a) = M(f) + a$;
3) $M(\alpha f) = \alpha M(f)$;
4) $M(f+g) = M(f) + M(g)$;
5) *Dacă* f *şi* g *sunt independente, atunci* $M(f \cdot g) = M(f) \cdot M(g)$.

Demonstraţie. Vom justifica, de exemplu, proprietatea 4.

$$M(f+g) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j)p_{ij} = \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} p(A_i \cap B_j)$$

$$A_i = A_i \cap X = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j),$$

deci

$$\sum_{j=1}^{m} p(A_i \cap B_j) = p(A_i).$$

Analog

$$\sum_{i=1}^{r} p_{ij} = p(B_j).$$

În consecință

$$M(f+g) = \sum_{i=1}^{r} a_i p(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j p(B_j) = M(f) + M(g). \blacksquare$$

Definiția 5.5.5. *Momentul de ordinul* k al variabilei aleatoare f se defineşte astfel:

$$M_k(f) = \sum_{i=1}^{r} a_i^k p_i.$$

Dispersia variabilei aleatoare f este definită prin:

$$\sigma^2 = D^2(f) = M_2(f - M(f)).$$

Numărul σ se numeşte *abaterea medie pătratică* a variabilei aleatoare f.

În consecință,

$$\sigma^2 = D^2(f) = \sum_{i=1}^{r} (a_i - M(f))^2 p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} [a_i^2 - 2a_i M(f) + (M(f))^2] p_i = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 p_i - 2(M(f))^2 + (M(f))^2,$$

deci

$$D^2(f) = M(f^2) - (M(f))^2.$$

Observația 5.5.3. Dispersia măsoară împrăştierea valorilor variabilei aleatoare față de valoarea medie.

Propoziția 5.5.2. *Dispersia unei variabile aleatoare are următoarele proprietăți:*

1) $D^2(a) = 0$;
2) $D^2(f + a) = D^2(f)$;
3) $D^2(\alpha f) = \alpha^2 D^2(f)$;
4) *Dacă* f *şi* g *sunt independente, atunci* $D^2(f+g) = D^2(f) + D^2(g)$.

Demonstrație. Vom justifica, de exemplu, proprietatea 4. Deoarece

$$D^2(f+g) = M_2\left[(f+g) - M(f+g)\right] =$$

$$= M_2\left[(f - M(f)) + (g - M(g))\right],$$

ţinând seama de liniaritatea valorii medii M, obţinem

$$D^2(f+g)=M\left(\left[(f-M(f))+(g-M(g))\right]^2\right)=$$
$$=M\left((f-M(f))^2\right)+2M\left((f-M(f))(g-M(g))\right)+M\left((g-M(g))^2\right)=$$
$$=D^2(f)+2M\left((f-M(f))(g-M(g))\right)+D^2(g).$$

Pe de altă parte, variabilele aleatoare f şi g fiind independente şi din proprietăţile valorii medii, avem

$$M\left((f-M(f))(g-M(g))\right)=M(f)M(g)-2M(f)M(g)+M(f)M(g)=0.$$

În consecinţă

$$D^2(f+g)=D^2(f)+D^2(g).\blacksquare$$

Exemplu. Se dă variabila aleatoare $f\to\begin{pmatrix}5 & 7 & 8 & 10\\ \frac{8}{20} & \frac{3}{20} & \frac{5}{20} & \frac{4}{20}\end{pmatrix}$. Să se calculeze valoarea medie şi dispersia.

$$M(f)=5\cdot\frac{8}{20}+7\cdot\frac{3}{20}+8\cdot\frac{5}{20}+10\cdot\frac{4}{20}=7{,}05.$$
$$\sigma^2=(5-7{,}05)^2\cdot\frac{8}{20}+(7-7{,}05)^2\cdot\frac{3}{20}+(8-7{,}05)^2\cdot\frac{4}{20}.$$
$$\sigma^2=3{,}6475.$$

Teorema 5.5.1. (Inegalitatea lui Cebâşev). *Fie* (X,Ω,p) *un câmp finit de probabilitate şi* f *o variabilă aleatoare. Pentru orice* $\varepsilon>0$, *avem*

$$p\left(\left|f-M(f)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \tag{2}$$

$$p\left(\left|f-M(f)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \tag{3}$$

unde $\sigma^2=D^2(f)$.

Demonstraţie. Notăm $M(f)=m$ şi presupunem că ordonăm valorile variabilei aleatoare f astfel

$$|a_1-m|\leq|a_2-m|\leq\ldots\leq|a_r-m|.$$

Fie $\varepsilon>0$ astfel încât $\min\{|a_i-m|;1\leq i\leq r\}<\varepsilon\leq\max\{|a_i-m|;1\leq i\leq r\}$. Este clar că există l astfel încât

$$|a_1-m|\leq|a_2-m|\leq\ldots\leq|a_l-m|<\varepsilon\leq|a_{l+1}-m|\leq\ldots\leq|a_r-m|.$$

Atunci

$$(a_1-m)^2\leq(a_2-m)^2\leq\ldots\leq(a_l-m)^2<\varepsilon^2\leq(a_{l+1}-m)^2\leq\ldots\leq(a_r-m)^2.$$

În consecinţă

$$D^2(f)=(a_1-m)^2p_1+\ldots+(a_l-m)^2p_l+(a_{l+1}-m)^2p_{l+1}+\ldots+(a_r-m)^2p_r\geq$$
$$\geq 0\cdot p_1+\ldots+0\cdot p_l+\varepsilon^2\cdot p_{l+1}+\ldots+\varepsilon^2\cdot p_r=$$

$$= \varepsilon^2 \cdot (p_{l+1} + \ldots + p_r) .$$

Dar

$$p_{l+1} + \ldots + p_r = p(A_{l+1} \cup \ldots \cup A_r) = p(|f - m| \geq \varepsilon) .$$

Aşadar

$$p\left(|f - M(f)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} .$$

Trecând la probabilitatea evenimentului contrar, obținem

$$p\left(|f - M(f)| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} . \blacksquare$$

Observația 5.5.4. Inegalitatea lui Cebâşev arată că abateri mari de la medie sunt puțin probabile când dispersia este mică.

Exemplu. O variabilă aleatoare f are media 30 şi dispersia 2. Să se găsească o limită inferioară pentru $p(24 < f < 36)$.

Ținând seama că $24 < f < 36$ dacă şi numai dacă $|f - 30| < 6$, rezultă că $p(24 < f < 36) = p(|f - 30| < 6)$. Conform (3)

$$p(|f - 30| < 6) \geq 1 - \frac{2}{36} = \frac{17}{18} .$$

Funcția caracteristică asociată unei variabile aleatoare simple

Definiția 5.5.6. Fie f o variabilă aleatoare simplă:

$$f \to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Funcția

$$\Psi_c(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i} a_k t} p_k ,$$

unde $\mathrm{i}^2 = -1$, se numeşte *funcție caracteristică* asociată variabilei aleatoare f.

Ținând seama de dezvoltarea în serie a funcției e^x, avem:

$$\Psi_c(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^m a_k^m t^m}{m!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^m t^m}{m!} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^m p_k \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} M_m(f) \frac{\mathrm{i}^m}{m!} t^m ,$$

unde $M_m(f)$ este momentul de ordinul m. Pe de altă parte

$$\Psi_c(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi_c^{(m)}(0)}{m!} t^m ,$$

de unde rezultă

$$M_m(f) = \frac{1}{\mathrm{i}^m} \Psi_c^{(m)}(0) , \qquad (1)$$

formulă ce permite calculul momentului de ordinul m.

Variabila aleatoare asociată schemei lui Bernoulli

Are diagrama

$$f \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ q^n & C_n^1 pq^{n-1} & C_n^2 p^2 q^{n-2} & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}$$

În consecinţă, valoarea medie a variabilei aleatoare va fi

$$M(f) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} .$$

Pe de altă parte, avem

$$(px+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k x^k q^{n-k} .$$

Derivând, obţinem

$$n(px+q)^{n-1} \cdot p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k kx^{k-1} q^{n-k} .$$

Pentru $x = 1$, rezultă că

$$n(p+q)^{n-1} \cdot p = np = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = M(f) .$$

Aşadar valoarea medie a variabilei aleatoare din schema lui Bernoulli este

$$M(f) = np .$$

Ne propunem acum să determinăm dispersia acestei variabile aleatoare:

$$\sigma^2 = D^2(f) = M_2(f) - M^2(f) .$$

Pentru calculul momentului de ordinul 2, $M_2(f)$, folosim funcţia caracteristică. Avem

$$M_2(f) = \frac{1}{\mathrm{i}^2} \Psi_c''(0) .$$

Dar

$$\Psi_c(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}kt} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{\mathrm{i}t})^k q^{n-k} = (pe^{\mathrm{i}t} + q)^n .$$

Atunci

$$\Psi_c'(t) = n(pe^{\mathrm{i}t} + q)^{n-1} \cdot p\mathrm{i} \cdot e^{\mathrm{i}t} ,$$

$$\Psi_c''(t) = np\mathrm{i} \cdot [(n-1)(pe^{\mathrm{i}t} + q)^{n-2} \cdot p\mathrm{i} \cdot e^{2\mathrm{i}t} + (pe^{\mathrm{i}t} + q)^{n-1} \cdot \mathrm{i} \cdot e^{\mathrm{i}t}] ,$$

deci

$$\Psi_c''(0) = np\mathrm{i}^2 \cdot [(n-1)p\mathrm{i} + \mathrm{i}] = \mathrm{i}^2 np(np - p + 1) .$$

În consecinţă

$$M_2(f) = n^2 p^2 - np^2 + np = n^2 p^2 + npq ,$$

deci

$$\sigma^2 = npq .$$

Aşadar, dispersia variabilei aleatoare asociate schemei lui Bernoulli este

$$\sigma^2 = npq .$$

5.5.2. Variabile aleatoare discrete

Sunt variabile aleatoare care iau o infinitate numărabilă de valori. Diagrama unei variabile aleatoare discrete are forma

$$f \to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

unde $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

Distribuția Poisson

Are diagrama

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ e^{-\lambda} & \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}.$$

Se constată că

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

Distribuția Poisson este un caz limită al distribuției Bernoulli. Fie $\lambda = np$ valoarea medie a distribuției Bernoulli. Atunci $p = \frac{\lambda}{n} \to 0$ când $n \to \infty$. De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\cdot\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{\lambda(n-k)}{n}} = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}.$$

În schema lui Bernoulli $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ reprezintă probabilitatea realizării de k ori a evenimentului A într-o serie de n experiențe. Dacă $p = \frac{\lambda}{n}$ şi $n \to \infty$, atunci p este foarte mic. Distribuția Poisson se mai numeşte şi legea evenimentelor rare şi este folosită la controlul statistic al produselor industriale atunci când probabilitatea obținerii unei piese defecte este foarte mică.

Valoarea medie a distribuției Poisson este

$$M(f) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda}e^{-\lambda} = \lambda.$$

De asemenea

$$M_2(f) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda^2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) = e^{-\lambda}e^{\lambda}(\lambda^2+\lambda) = \lambda^2+\lambda.$$

În consecință, dispersia distribuției Poisson este $\sigma^2 = \lambda$.

5.5.3. Variabile aleatoare continue

Fie (X,Ω,p) un câmp de probabilitate. Reamintim că funcţia $f:X\to\mathbb{R}$ se numeşte *variabilă aleatoare continuă* dacă are proprietatea că oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$,

$$f^{-1}\big((-\infty,a)\big)=\{x\in X;f(x)<a\}=\{f<a\}\in\Omega,$$

funcţia f luând o infinitate nenumărabilă de valori.

Definiţia 5.5.7. Se numeşte *funcţie de repartiţie* asociată variabilei aleatoare f funcţia $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ dată de $F(x)=p(f<x)$.

Teorema 5.5.2. *Funcţia de repartiţie F a unei variabile aleatoare continue f are următoarele proprietăţi:*

1) *F este monoton crescătoare;*
2) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$;
3) $p(a\le f<b)=F(b)-F(a)$;
4) *F este continuă la stânga pe $\mathbb{R}$.*

Demonstraţie. 1) Dacă $x_1\le x_2$, atunci $\{f<x_1\}\subseteq\{f<x_2\}$, deci $F(x_1)\le F(x_2)$.

2) Ţinem seama că $F(-\infty)=p(\varnothing)=0$ şi $F(\infty)=p(X)=1$.

3) Deoarece $\{f<b\}=\{f<a\}\cup\{a\le f<b\}$, iar ultimele două evenimente sunt disjuncte, rezultă că $F(b)=F(a)+p(a\le f<b)$, deci $p(a\le f<b)=F(b)-F(a)$.

4) Fie $A=\{f<x\}$ şi $(x_n)_n$ un şir, $x_n\nearrow x$. Dacă

$$A_1=\{f<x_1\},\ A_2=\{x_1\le f<x_2\},\dots,A_n=\{x_{n-1}\le f<x_n\},\dots,$$

atunci $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ şi $A_n\cap A_m=\varnothing$ pentru $n\ne m$. În consecinţă

$$F(x)=p(A)=\lim_{n\to\infty}\big(p(A_1)+p(A_2)+\dots+p(A_n)\big)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\big[F(x_1)+F(x_2)-F(x_1)+\dots+F(x_n)-F(x_{n-1})\big]=\lim_{n\to\infty}F(x_n),$$

deci F este continuă la stânga în x. ■

Definiţia 5.5.8. Fie f o variabilă aleatoare continuă şi F funcţia sa de repartiţie. Dacă există o funcţie integrabilă $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ astfel încât

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(t)\mathrm{d}t,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

atunci funcţia ρ se numeşte *densitate de repartiţie* sau *densitate de probabilitate* a variabilei aleatoare f.

Teorema 5.5.3. *Densitatea de repartiţie ρ a variabilei aleatoare continue f are următoarele proprietăţi:*

1) $\rho(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$;

3) $p(a \le f < b) = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$.

Demonstraţia este evidentă. ■

Observaţia 5.5.5. Fie f o variabilă aleatoare continuă şi F funcţia sa de repartiţie. Dacă densitatea de repartiţie ρ a variabilei aleatoare f este continuă, atunci

$$F'(x) = \rho(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definiţia 5.5.9. Se numeşte *valoare medie* a unei variabile aleatoare continue f expresia

$$M(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)\mathrm{d}x.$$

Momentul de ordinul k al unei variabile aleatoare continue f se defineşte prin formula

$$M_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \rho(x)\mathrm{d}x.$$

Dispersia variabilei aleatoare f este definită astfel:

$$\sigma^2 = D^2(f) = M_2(f - M(f)).$$

$$D^2(f) = M(f^2) - (M(f))^2.$$

Numărul σ se numeşte *abaterea medie pătratică* a variabilei aleatoare f.

În cele ce urmează, vom prezenta unele legi de probabilitate uzuale, definite prin densităţi de repartiţie.

Definiţia 5.5.10. Variabila aleatoare f are o *repartiţie uniformă* pe $[a,b]$ dacă are densitatea de repartiţie

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{dacă } x \in [a,b] \\ 0, \quad \text{dacă } x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Este clar că $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$. Avem:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\rho(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, \text{ dacă } x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ dacă } x\in(a,b]\\ 1, \text{ dacă } x>b\end{cases}.$$

Obţinem succesiv:

$$M(f)=\int_a^b\frac{x}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2},\ M_2(f)=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

deci

$$\sigma^2=M_2(f)-(M(f))^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Definiţia 5.5.11. Variabila aleatoare f satisface o *lege normală* $N(m,\sigma)$ dacă are densitatea de repartiţie

$$\rho(x;m,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Observaţia 5.5.6. Legea normală a apărut în legătură cu teoria erorilor de măsurare.

Funcţia ρ are proprietăţile unei densităţi de repartiţie. Într-adevăr

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x;m,\sigma)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x=m+\sigma\sqrt{2}t, \tag{1}$$

obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x;m,\sigma)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=1.$$

În fig. 7.1 sunt reprezentate graficele funcţiilor $\rho(x;m,\sigma)$ pentru diferite valori ale lui m şi acelaşi σ, iar în fig. 7.2 sunt reprezentate graficele funcţiilor $\rho(x;m,\sigma)$ pentru acelaşi m şi diferite valori ale lui σ.

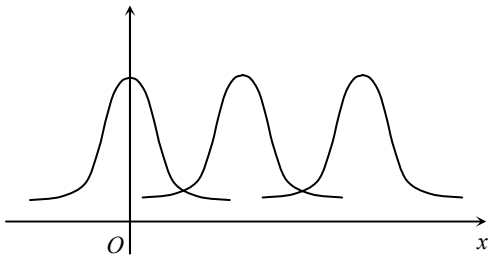

Fig. 7.1

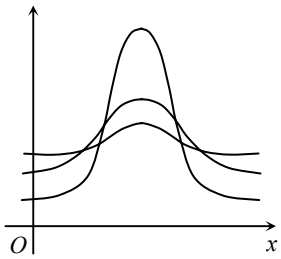

Fig. 7.2

Vom calcula acum media şi dispersia acestei variabile aleatoare. Folosind schimbarea de variabilă (1), rezultă:

$$M(f)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t+\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}\mathrm{d}t=m,$$

$$D^2(f)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Integrând prin părți, obținem

$$D^2(f)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)=\sigma^2.$$

Vom determina acum funcția de repartiție a legii normale.

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t.$$

Facem schimbarea de variabilă $t=m+\sigma\sqrt{2}y$. Rezultă că

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}}e^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

Pe de altă parte

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

deci

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}}e^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

Folosind *funcția lui Laplace* $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-y^2}\mathrm{d}y,$$

putem scrie

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(1+\Phi(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

În consecință

$$p(a\le f<b)=F(b)-F(a)=\frac{1}{2}\left(\Phi(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}})-\Phi(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}})\right).$$