Gavriil PĂLTINEANU

Ştefania DONESCU Mariana ZAMFIR

GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ

EDITURA CONSPRESS

Bucureşti 2011

Referenţi ştiinţifici: **Prof. univ. dr. Ghiocel Groza**
Prof. univ. dr. Angel Sever Popescu

P R E F A Ţ Ă

Acest curs se adresează în principal studenţilor din anul I ai Facultăţii de Geodezie din Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti, dar este util şi altor categorii de studenţi din universităţile tehnice, inginerilor, doctoranzilor sau cercetătorilor interesaţi de geometria analitică şi geometria diferenţială.

Lucrarea începe cu o recapitulare a principalelor noţiuni şi rezultate privind vectorii liberi, capitol studiat în cadrul cursului de algebră liniară.

În continuare sunt tratate temele obişnuite ale unui curs de geometrie: planul şi dreapta în spaţiu, conice, cuadrice, geometria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor.

Cartea conţine numeroase exemple, desene şi comentarii menite să uşureze înţelegerea noţiunilor şi enunţurile teoremelor. Fiecare capitol se încheie cu un număr semnificativ de exerciţii şi probleme propuse, astfel încât lucrarea poate fi folosită cu succes şi pe post de culegere de probleme.

Autorii mulţumesc referenţiilor ştiinţifici: dl. prof. Dr. Ghiocel GROZA şi dl. prof. Dr. Angel POPESCU, pentru atenţia cu care au citit manuscrisul şi pentru sugestiile făcute.

De asemenea, adresăm mulţumiri sincere dlui. conf. Dr. George Daniel MATEESCU care a realizat desenele din carte, în format electronic.

În sfârşit, un gând bun şi pentru dna. Mariana NICULCEANU care a făcut tehnoredactarea computerizată a lucrării.

Bucureşti, Decembrie 2010

Autorii

Cuprins

PREFAŢĂ **3**
CUPRINS **5**

0. COMPLEMENTE DE CALCUL VECTORIAL **7**
Vectori legaţi. Vectori liberi 7
Operaţii cu vectori liberi. Spaţiul vectorilor liberi 9
Produsul scalar a doi vectori liberi 15
Produsul vectorial a doi vectori liberi 17
Produsul mixt a trei vectori liberi 19
Dublul produs vectorial a trei vectori liberi 21

1. PLANUL ŞI DREAPTA ÎN SPAŢIU **23**
1.1. Ecuaţii ale planului în spaţiu 23
1.2. Dreapta în spaţiu 30
1.3. Fascicule de plane 35
1.4. Unghiuri şi distanţe 37
Probleme propuse 53

2. CONICE **63**
2.1. Ecuaţiile canonice ale conicelor 63
2.2. Reducerea la forma canonică a conicelor 73
Probleme propuse 96

3. CUADRICE **105**
3.1. Elipsoidul 107
3.2. Hiperboloidul cu o pânză 109
3.3. Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză 111
3.4. Hiperboloidul cu două pânze 118
3.5. Conul 119

3.6. Paraboloidul eliptic 120

3.7. Paraboloidul hiperbolic 121

3.8. Generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic 122

3.9. Cilindri 125

3.10. Reducerea la forma canonică a cuadricelor 128

Probleme propuse 137

4. CURBE 145

4.1. Drumuri parametrizate. Definiţia curbei 145

4.2. Tangentă. Plan osculator. Triedrul lui Frenet 157

4.3. Curbura unei curbe 172

4.4. Torsiunea unei curbe. Formulele lui Frenet 178

4.5. Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane. Evoluta unei curbe plane 186

Probleme propuse 190

5. SUPRAFEŢE 203

5.1. Pânze parametrizate. Definiţia suprafeţei 203

5.2. Curbe pe o suprafaţă. Planul tangent şi normala la o suprafaţă 213

5.3. Orientarea unei suprafeţe 223

5.4. Prima formă fundamentală a unei suprafeţe 225

5.5. A doua formă fundamentală a unei suprafeţe 231

5.6. Teorema lui Euler. Curburi principale. Direcţii principale 237

5.7. Curbura totală. Curbura medie. Clasificarea punctelor unei suprafeţe 241

5.8. Linii asimptotice 245

5.9. Linii de curbură 247

5.10. Linii geodezice 251

Probleme propuse 269

BIBLIOGRAFIE 279

INDEX 281

COMPLEMENTE DE CALCUL VECTORIAL

VECTORI LEGAŢI. VECTORI LIBERI

Fie E_3 spaţiul geometriei elementare (spaţiul euclidian real tridimensional).

Definiţie. *O pereche ordonată de puncte din spaţiul* E_3 *se numeşte* ***vector legat*** (***segment orientat***).

Se notează cu $\overrightarrow{AB}$ vectorul legat corespunzător perechii de puncte $(A, B) \in E_3 \times E_3$.

Punctul A se numeşte ***originea*** (***punctul de aplicaţie***) vectorului, iar punctul B se numeşte ***extremitatea*** (***vârful***) vectorului.

Distanţa de la punctul A la punctul B se numeşte ***norma*** (***modulul***, ***mărimea***) vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ şi se notează $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Direcţia vectorului $\overrightarrow{AB}$ este direcţia dreptei suport AB sau a oricărei drepte paralele cu AB.

Sensul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este de la originea A către extremitatea B.

Vectorul $\overrightarrow{BA}$ se numeşte ***vectorul opus*** vectorului $\overrightarrow{AB}$; vectorul opus are aceeaşi direcţie şi aceeaşi normă cu ale vectorului $\overrightarrow{AB}$, dar sensul este opus.

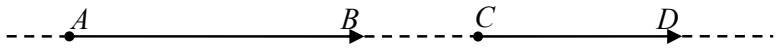
Vectorul legat nul este vectorul pentru care originea şi extremitatea coincid, deci de forma $\overrightarrow{AA}$, cu $A \in E_3$; vectorul nul are norma 0, iar direcţia şi sensul sunt nedeterminate.

Definiţie. *Doi vectori legaţi* $\overrightarrow{AB}$ *şi* $\overrightarrow{CD}$ *sunt* ***egali*** *şi se scrie* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *dacă şi numai dacă* $A = C$ *şi* $B = D$.

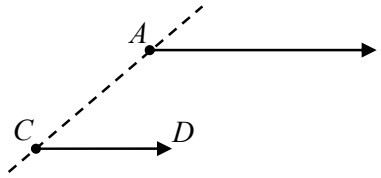
Doi vectori legaţi nenuli $\overrightarrow{AB}$ *şi* $\overrightarrow{CD}$ ***au aceeaşi direcţie*** *dacă dreptele lor suport coincid sau sunt paralele, ceea ce înseamnă* că $AB = CD$ *sau* $AB \| CD$.

Doi vectori legaţi nenuli $\overrightarrow{AB}$ *şi* $\overrightarrow{CD}$ ***au acelaşi sens*** *dacă au aceeaşi direcţie şi dacă*:

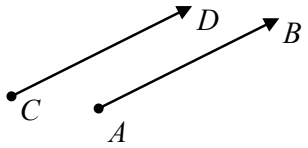
1) *în cazul în care* $\overrightarrow{AB}$ *şi* $\overrightarrow{CD}$ *sunt coliniari sensurile determinate pe dreapta suport comună coincid.*



2) *în cazul în care* $\overrightarrow{AB}$ *şi* $\overrightarrow{CD}$ *sunt paraleli, extremităţile lor, B şi D, se află în acelaşi semiplan determinat de dreapta ce uneşte originile lor, A şi C.*



Observaţie. Conform definiţiei anterioare, se poate vorbi despre vectori care au acelaşi sens doar dacă au şi aceeaşi direcţie.



Definiţie. *Doi vectori legaţi nenuli* $\overrightarrow{AB}$ *şi* $\overrightarrow{CD}$ *se numesc* ***echipolenţi*** (***echivalenţi***) *şi se scrie* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ *dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi normă.*

Propoziţie. *Vectorii legaţi* $\overrightarrow{AB}$ *şi* $\overrightarrow{CD}$ *sunt echipolenţi dacă şi numai dacă segmentele* $[AD]$ *şi* $[BC]$ *au acelaşi mijloc.*

Observaţie. Relaţia de echipolenţă „$\sim$” este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea vectorilor legaţi nenuli. Relaţia de echipolenţă poate fi prelungită şi la vectorii legaţi nuli astfel: admitem că toţi vectorii legaţi nuli sunt echipolenţi între ei.

Relaţia de echipolenţă împarte mulţimea vectorilor legaţi în submulţimi disjuncte numite ***clase de echivalenţă***.

Spunem că doi vectori legaţi fac parte din aceeaşi clasă de echivalenţă dacă sunt echipolenţi şi spunem că fac parte din clase diferite dacă nu sunt echipolenţi.

Definiţie. *Se numeşte* ***vector liber*** *orice clasă de echivalenţă de vectori legaţi.*

Se notează cu V_3 mulţimea vectorilor liberi din spaţiul E_3, iar vectorii liberi vor fi notaţi cu litere mici $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v}$, etc.

Orice vector legat $\overrightarrow{AB}$ determină un vector liber $\vec{a}$, şi anume clasa tuturor vectorilor legaţi $\overrightarrow{CD}$ echivalenţi cu $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{a} = \left\{\overrightarrow{CD};\ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\right\}.$$

Observaţie. Orice vector legat din clasa de echivalenţă $\vec{a}$ se numeşte ***reprezentant*** al vectorului liber $\vec{a}$. Dacă $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al vectorului liber $\vec{a}$ vom scrie $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$.

Clasa de echivalenţă a vectorilor legaţi nuli se notează cu $\vec{0}$ şi se numeşte ***vectorul liber nul***.

Prin direcţia, sensul şi norma unui vector liber $\vec{a}$ înţelegem direcţia, sensul şi norma oricărui reprezentant din clasa $\vec{a}$.

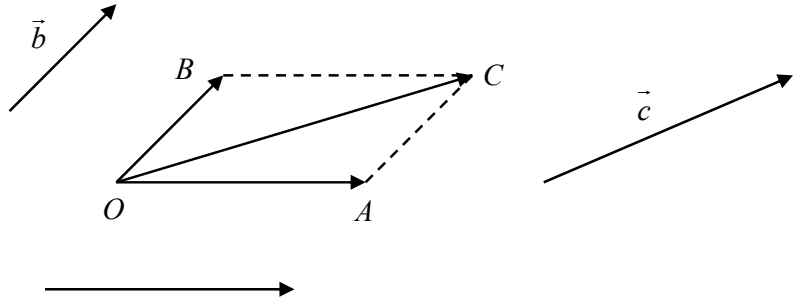
OPERAŢII CU VECTORI LIBERI. SPAŢIUL VECTORILOR LIBERI

Pe mulţimea vectorilor liberi V_3 se introduc două operaţii:

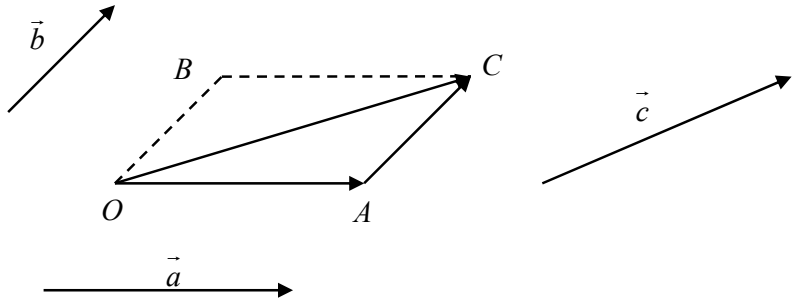
- operaţia internă $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \to \vec{a} + \vec{b} : V_3 \times V_3 \to V_3$, numită ***adunarea vectorilor liberi***
- operaţia externă $\left(\lambda, \vec{a}\right) \to \lambda \vec{a} : \mathbb{R} \times V_3 \to V_3$, numită ***înmulţirea vectorilor liberi cu numere reale*** (***scalari***).

Definiţie. *Prin* ***suma a doi vectori liberi*** $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *se înţelege vectorul liber notat* $\vec{a} + \vec{b}$ *obţinut prin una din regulile echivalente între ele*:

1) ***regula paralelogramului***: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, unde $\vec{c}$ este vectorul liber de reprezentant vectorul legat $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC}$ fiind diagonala paralelogramului construit pe vectorii legaţi $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}, \overrightarrow{OB} \in \vec{b}$.



2) ***regula triunghiului***: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, unde $\vec{c}$ este vectorul liber de reprezentant vectorul legat $\overrightarrow{OC}$ din triunghiul OAC şi $\overrightarrow{OA}\in\vec{a},\ \overrightarrow{AC}\in\vec{b}$.



Observaţie. Se pot aduna şi mai mult de doi vectori, aplicând succesiv regula triunghiului: se duce în extremitatea lui $\vec{a}$ un vector echipolent cu $\vec{b}$, apoi în extremitatea echipolentului construit un vector echipolent cu $\vec{c}$, ş.a.m.d. Vectorul care are punctul de aplicaţie în originea lui $\vec{a}$ şi extremitatea în extremitatea ultimului vector echipolent construit este vectorul sumă a vectorilor consideraţi; în acest caz regula triunghiului devine ***regula poligonului***.

Observaţie. Vectorul liber sumă $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ nu depinde de alegerea punctului iniţial O (adică alegând puncte O diferite obţinem vectori $\overrightarrow{OC}$ echipolenţi, adică acelaşi vector liber $\vec{c}$), ceea ce înseamnă că adunarea vectorilor liberi este bine definită.

Adunarea vectorilor liberi are proprietăţile:

i) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c},\ (\forall)\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$ (i.e. adunarea este asociativă)

ii) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},\ (\forall)\ \vec{a},\vec{b}\in V_3$ (i.e. adunarea este comutativă)

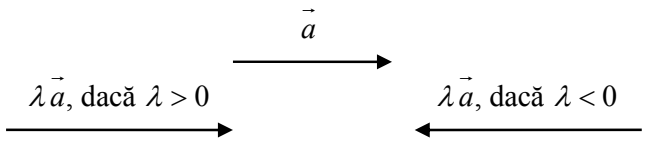
iii) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a},\ (\forall)\ \vec{a}\in V_3$ (i.e. vectorul $\vec{0}$ este elementul neutru la adunare)

iv) pentru orice vector $\vec{a}\in V_3$, există vectorul $-\vec{a}\in V_3$ (numit ***opusul*** vectorului $\vec{a}$) astfel încât $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$,

adică mulţimea $(V_3, +)$ este un grup comutativ.

Definiţie. *Prin* ***înmulţirea vectorului liber nenul*** $\vec{a}$ ***cu scalarul nenul*** $\lambda \in \mathbb{R}$ *se înţelege un vector liber notat* $\lambda\vec{a}$ *care are aceeaşi direcţie cu* $\vec{a}$, *are acelaşi sens cu* $\vec{a}$, *dacă* $\lambda > 0$ *şi sens opus lui* $\vec{a}$, *dacă* $\lambda < 0$ *şi are mărimea* $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\|\vec{a}\|$.

Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ *sau* $\lambda = 0$, *atunci prin definiţie* $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.



Înmulţirea vectorilor liberi cu scalari reali are proprietăţile:

i) $1\vec{a} = \vec{a},\ (\forall)\ \vec{a} \in V_3$

ii) $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b},\ (\forall)\ \vec{a}, \vec{b} \in V_3, (\forall)\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a},\ (\forall)\ \vec{a} \in V_3, (\forall)\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

iv) $\lambda\left(\mu\vec{a}\right) = (\lambda\mu)\vec{a},\ (\forall)\ \vec{a} \in V_3, (\forall)\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Mulţimea vectorilor liberi V_3 împreună cu operaţiile de adunare şi de înmulţire cu scalari a vectorilor liberi formează un ***spaţiu vectorial real*** de dimensiune 3 numit ***spaţiul vectorilor liberi***.

Observaţie. Prin ***versor*** se înţelege orice vector liber de normă 1. Dacă $\vec{a} \in V_3$ este un vector liber nenul, atunci $\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ este versorul corespunzător vectorului liber $\vec{a}$.

Definiţie. *Doi vectori liberi nenuli se numesc* ***coliniari*** *dacă au aceeaşi direcţie. Prin convenţie, vectorul nul* $\vec{0}$ *este coliniar cu orice vector liber.*

Doi vectori liberi nenuli $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *sunt* ***egali*** *şi se scrie* $\vec{a} = \vec{b}$ *dacă reprezentanţii lor sunt echipolenţi.*

Trei vectori liberi nenuli se numesc ***coplanari*** *dacă au direcţiile paralele cu un acelaşi plan sau sunt conţinute într-un acelaşi plan.*

Propoziţie. *Fie* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *doi vectori liberi nenuli. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *sunt coliniari*

2) $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *sunt liniar dependenţi* (*i.e. există scalarii* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *cel puţin unul nenul*, *astfel încât* $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$)

3) *există un scalar* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *astfel încât* $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Corolar. *Doi vectori liberi nenuli sunt liniar independenţi* (*i.e.* $(\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$) *dacă şi numai dacă sunt necoliniari.*

Propoziţie. *Fie* $\vec{a}, \vec{b}$ *şi* $\vec{c}$ *trei vectori liberi nenuli. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*:

1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *sunt coplanari*

2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *sunt liniar dependenţi* (*i.e. există scalarii* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *cel puţin unul nenul*, *astfel încât* $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$)

3) *există scalarii* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, *astfel încât* $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$.

Corolar. *Trei vectori liberi nenuli sunt liniar independenţi* (*i.e.* $(\forall)\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$) *dacă şi numai dacă sunt necoplanari.*

Oricare patru vectori liberi sunt liniar dependenţi.

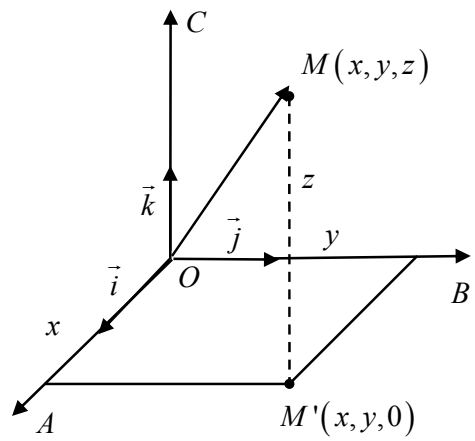
Propoziţie. *Oricare trei vectori liberi nenuli şi necoplanari formează o bază a spaţiului* V_3.

Teoremă. *Fie* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *trei vectori liberi nenuli şi necoplanari. Atunci pentru orice vector liber* $\vec{v} \in V_3$, *există scalarii unic determinaţi* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *astfel încât să avem o relaţie de tipul*:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}.$$

Numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *se numesc* ***componentele*** (***coordonatele***) *vectorului* $\vec{v}$ *în raport cu baza* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Fie $O \in E_3$ un punct fixat şi fie $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k} \in V_3$ trei versori $\left(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\right)$ astfel încât $OA \perp OB \perp OC$, unde $\overrightarrow{OA} \in \vec{i},\ \overrightarrow{OB} \in \vec{j},\ \overrightarrow{OC} \in \vec{k}$ (deci suporturile celor trei reprezentanţi sunt perpendiculare două câte două). Cum versorii $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ sunt necoplanari, atunci mulţimea $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ formează o bază ortonormată a spaţiului V_3 numită ***baza canonică***.



Definiţie. *Ansamblul* $\left(O,\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}\right)$ *format din originea* O *şi baza* $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ *se numeşte* ***reper cartezian (sistem cartezian de coordonate)*** *în spaţiu. Dreptele care trec prin originea* O *şi sunt paralele cu versorii* $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ *se numesc* ***axe de coordonate***, *iar planele determinate de axele de coordonate se numesc* ***plane de coordonate***.

Definiţie. *Fie* $M \in E_3$ *un punct din spaţiu. Vectorul liber* $\vec{r} \in V_3$ *de reprezentant* $\overrightarrow{OM}$ *se numeşte* ***vectorul de poziţie*** *al punctului* M *în raport cu originea sistemului. În baza* canonică $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ *avem*

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

unde numerele $x,\ y,\ z$ *se numesc* ***coordonatele carteziene*** *ale punctului* M *în raport cu reperul* $\left(O,\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}\right)$ *şi se obţin prin proiecţia ortogonală a vectorului* $\overrightarrow{OM}$ *pe axele de coordonate notate Ox, Oy, Oz* (adică pe suporturile vectorilor $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$).

Se va folosi notaţia $M(x,y,z)$ pentru a indica coordonatele carteziene ale punctului M.

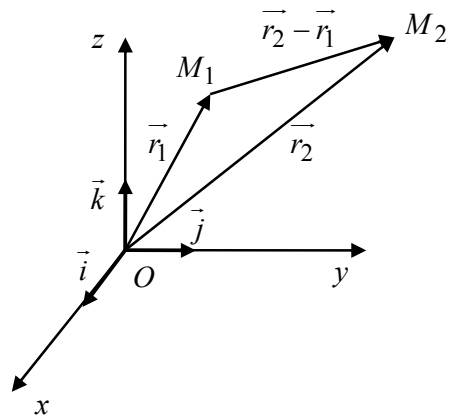
Observaţie. În acest mod, prin fixarea originii $O \in E_3$ se stabileşte o bijecţie între mulţimea punctelor M din spaţiul E_3 şi mulţimea vectorilor $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ din spaţiu, respectiv între mulţimea punctelor M din spaţiul E_3 şi mulţimea tripletelor ordonate de numere reale (x,y,z) din $\mathbb{R}^3$. Un sistem cartezian de coordonate va fi notat $Oxyz$ pentru a marca axele lui de coordonate Ox,Oy,Oz, axe care au acelaşi sens cu sensul pozitiv al versorilor $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$.

Observaţie. Dacă $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sunt două puncte din spaţiu astfel încât

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{r_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \text{ şi } \overrightarrow{OM_2} = \vec{r_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

sunt vectorii lor de poziţie, atunci

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$



Teoremă. *Pentru orice vector liber* $\vec{a} \in V_3$, *există scalarii* $a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$, *unic determinaţi astfel încât*

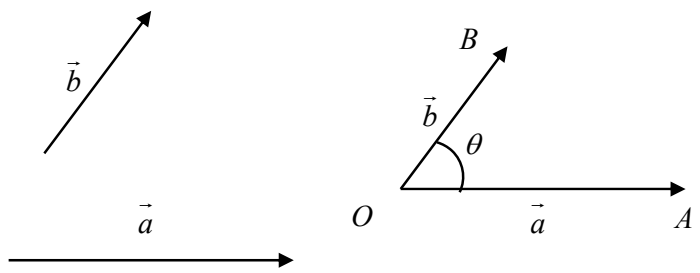
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{1}$$

Numerele a_x, a_y, a_z se numesc ***componentele*** (***coordonatele***) ***scalare*** ale vectorului liber $\vec{a}$ în raport cu baza canonică $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ şi definesc în mod unic vectorul $\vec{a}$. Formula (1) se numeşte ***expresia analitică*** a vectorului liber $\vec{a}$ şi mai poate fi scrisă şi sub forma $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Teoremă. *Doi vectori liberi nenuli sunt coliniari dacă şi numai dacă componentele lor scalare sunt proporţionale.*

Teoremă. *Trei vectori liberi nenuli sunt coplanari dacă şi numai dacă determinantul format cu componentele lor scalare este nul.*

Definiţie. *Prin* ***unghiul*** *dintre doi vectori liberi nenuli* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ se *înţelege unghiul* $\theta \in [0, \pi]$ *format de suporturile reprezentanţilor lor cu originea într-un punct comun oarecare* O, $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \vec{b}$.



Dacă cel puţin unul dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este nul, atunci unghiul θ dintre ei se consideră nedeterminat.

Observaţie. În unele situaţii se poate considera unghiul orientat, precizându-se ordinea vectorilor şi sensul în care se măsoară acest unghi. Dacă nu se fac aceste precizări, atunci se consideră unghiul θ mai mic decât π.

Dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$, atunci vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se numesc ***ortogonali*** (***perpendiculari***) şi se scrie $\vec{a} \perp \vec{b}$. Prin convenţie, vectorul nul $\vec{0}$ este ortogonal pe orice vector.

PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI LIBERI

Fie $\vec{a}, \vec{b}$ doi vectori liberi şi $\theta \in [0, \pi]$ măsura unghiului dintre ei.

Definiţie. *Se numeşte **produsul scalar** dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ numărul real notat $\vec{a} \cdot \vec{b}$, definit astfel*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta, & \text{dacă} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \text{şi} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{dacă} \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \text{sau} \quad \vec{b} = \vec{0}. \end{cases} \tag{2}$$

Proprietăţi geometrice ale produsului scalar

1) Doi vectori liberi nenuli sunt ortogonali dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul, adică

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \tag{3}$$

2) Produsul scalar dintre vectorii liberi nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este egal cu produsul dintre $\|\vec{a}\|$

mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale a lui $\vec{b}$ pe $\vec{a}$ (sau dintre $\|\vec{b}\|$ şi mărimea proiecţiei ortogonale a lui $\vec{a}$ pe $\vec{b}$), adică

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,pr_{\vec{a}}\vec{b}=\|\vec{b}\|\,pr_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{4}$$

Proprietăţi algebrice ale produsului scalar

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},\ (\forall)\vec{a},\vec{b}\in V_3$ (comutativitatea produsului scalar).

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}),\ (\forall)\vec{a},\vec{b}\in V_3,\ (\forall)\lambda\in\mathbb{R}$.

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ şi $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},\ (\forall)\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$

(distributivitatea produsului scalar faţă de adunarea vectorilor liberi).

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\|\vec{a}\|^2\geq 0$ şi $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0},(\forall)\vec{a}\in V_3$.

5) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})\neq(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c},\ (\forall)\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$

(produsul scalar nu este asociativ).

Expresia analitică a produsului scalar

Fie $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ şi $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ expresiile analitice ale vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ în raport cu baza canonică $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Expresia analitică a produsului scalar dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{5}$$

Mai mult, mărimea (norma) vectorului $\vec{a}$ este

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{6}$$

şi dacă $\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},$ atunci cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este

$$\cos\theta=\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{7}$$

Observaţie. Doi vectori liberi nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{8}$$

Observaţie. În aplicaţii practice, produsul scalar se foloseşte pentru a determina distanţa dintre două puncte A şi B $\left(\operatorname{dist}(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}\right)$, pentru a determina unghiul dintre doi vectori nenuli $\left(\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|}\right)$ şi pentru a stabili ortogonalitatea a doi vectori nenuli.

PRODUSUL VECTORIAL A DOI VECTORI LIBERI

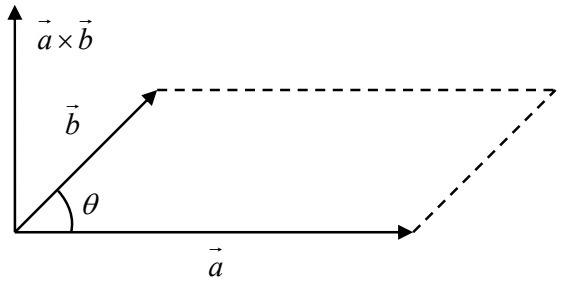
Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori liberi nenuli şi necoliniari şi $\theta \in (0, \pi)$ măsura unghiului dintre ei.

Definiţie. *Se numeşte* ***produsul vectorial*** *dintre vectorii* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ (*în această ordine*) *vectorul liber notat* $\vec{a} \times \vec{b}$, *definit astfel*:

i) *direcţia este perpendiculară pe direcţiile vectorilor* $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$

ii) *sensul este dat de „regula burghiului”, adică este sensul de înaintare a unui burghiu ce se roteşte de la* $\vec{a}$ *către* $\vec{b}$ *pe drumul cel mai scurt* (adică cu un unghi $\theta \in [0, \pi]$)

iii) *norma este dată de formula* $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\theta$.



Dacă vectorii $\vec{a}$ *şi* $\vec{b}$ *sunt coliniari sau cel puţin unul dintre ei este nul, atunci, prin definiţie, produsul vectorial este* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Observaţie. Prin paralelogramul construit pe doi vectori liberi nenuli şi necoliniari se înţelege paralelogramul determinat de reprezentanţii acestor vectori cu originea în acelaşi punct.

Proprietăţi geometrice ale produsului vectorial

1) Doi vectori liberi nenuli sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vectorial este egal cu vectorul nul.

În particular, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\ (\forall)\vec{a}\in V_3$. (9)

2) Norma $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|$ a produsului vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ a doi vectori liberi şi necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ reprezintă aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, adică

$$S_{\square}=\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|. \tag{10}$$

Proprietăţi algebrice ale produsului vectorial

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\ (\forall)\vec{a},\vec{b}\in V_3$ (anticomutativitatea produsului vectorial).

2) $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\lambda\vec{b},\ (\forall)\vec{a},\vec{b}\in V_3,\ (\forall)\lambda\in\mathbb{R}$.

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ şi $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},\ (\forall)\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$

(distributivitatea produsului vectorial faţă de adunarea vectorilor liberi).

4) $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2=\left\|\vec{a}\right\|^2\left\|\vec{b}\right\|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2,\ (\forall)\vec{a},\vec{b}\in V_3$ (identitatea lui Lagrange).

Expresia analitică a produsului vectorial

Fie $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ şi $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ expresiile analitice ale vectorilor liberi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Expresia analitică a produsului vectorial se obţine dezvoltând după prima linie următorul determinant formal:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}. \tag{11}$$

Observaţie. Aria triunghiului determinat de trei puncte necoliniare A, B, C este dată prin formula:

$$S_{ABC} = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{2}. \tag{12}$$

Observaţie. În aplicaţii practice produsul vectorial se utilizează pentru: a stabili coliniaritatea a trei puncte A, B, C $\left(A, B, C \text{ coliniare } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}\right)$, pentru a stabili coliniaritatea a doi vectori nenuli $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ ($\vec{a}$ şi $\vec{b}$ coliniari $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$), pentru a calcula aria unui triunghi ABC $\left(S_{ABC} = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{2} \right)$, pentru a calcula aria unui paralelogram construit pe vectorii nenuli şi necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ $\left(S_{\square} = \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| \right)$.

PRODUSUL MIXT A TREI VECTORI LIBERI

Definiţie. *Se numeşte* ***produsul mixt*** *dintre vectorii liberi* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (*în această ordine*) *numărul real notat* $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, *definit astfel*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}. \tag{13}$$

Observaţie. Prin paralelipipedul construit pe trei vectori liberi nenuli, necoliniari doi câte doi şi necoplanari se înţelege paralelipipedul determinat de reprezentanţii acestor vectori cu originea în acelaşi punct.

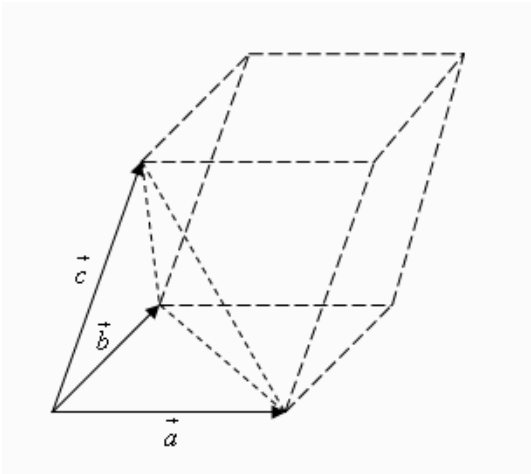
Proprietăţi geometrice ale produsului mixt

1) Trei vectori liberi nenuli sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt este zero, adică

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ coplanari } \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0. \tag{14}$$

2) Dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sunt vectori liberi nenuli şi necoliniari doi câte doi, atunci modulul produsului mixt $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ reprezintă volumul paralelipipedului oblic construit pe cei trei vectori, adică

$$V = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|. \tag{15}$$



Proprietăţi algebrice ale produsului mixt

1) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right)$, $(\forall)\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$.

2) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right) = -\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right), (\forall)\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ (dacă în produsul mixt se schimbă ordinea a doi termeni, acesta îşi schimbă semnul).

3) $\lambda\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}\right)$, $(\forall)\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3, (\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}$.

4) $\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}\right), (\forall)\, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$.

Expresia analitică a produsului mixt

Fie $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ trei vectori liberi.

Expresia analitică a produsului mixt a vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Observaţie. Volumul tetraedrului determinat de patru puncte necoplanare A, B, C, D este dat prin formula:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|. \tag{17}$$

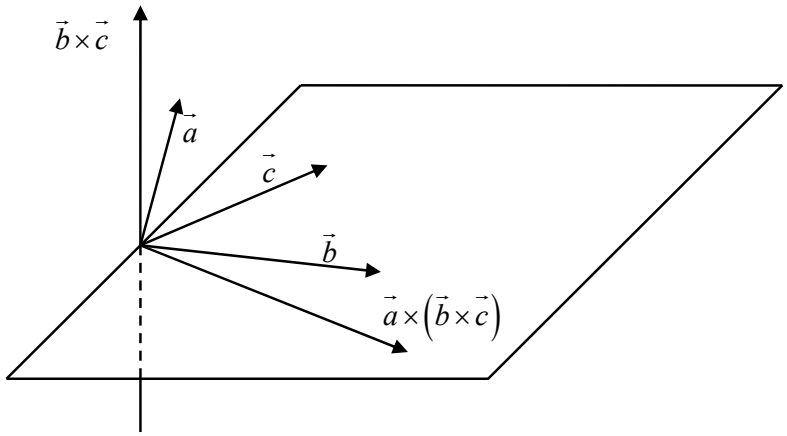
Observaţie. În aplicaţii practice, produsul mixt se utilizează pentru: a arăta că patru puncte A, B, C, D sunt coplanare $\left(A, B, C, D \text{ coplanare } \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0\right)$, a arăta că trei vectori nenuli sunt coplanari $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ coplanari } \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0\right)$, a determina volumul unui tetraedru $ABCD$ $\left(V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|\right)$, a determina volumul unui paralelipiped construit pe vectorii nenuli şi necoliniari doi câte doi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\left(V = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|\right)$.

DUBLUL PRODUS VECTORIAL A TREI VECTORI LIBERI

Definiţie. *Se numeşte* ***dublul produs vectorial*** *dintre vectorii liberi* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *vectorul notat* $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ *definit prin formula*

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Observaţie. Dublul produs vectorial $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este un vector situat în planul determinat de vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ (deci coplanar cu vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{c}$).



Proprietăţi

1) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}, (\forall)\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ (dublul produs vectorial nu este asociativ).

2) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0},\ (\forall)\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$ (identitatea lui Jacobi).

3) $$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{a) cel puţin un vector este nul sau}\\ \text{b) } \vec{b} \text{ şi } \vec{c} \text{ sunt coliniari sau}\\ \text{c) } \vec{a} \text{ este ortogonal pe } \vec{b} \text{ şi } \vec{c}.\end{cases} \tag{19}$$

4) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix},\ (\forall)\ \vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in V_3$ (identitatea lui Lagrange).

5) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]=-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right),\ (\forall)\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$.

6) $\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2,\ (\forall)\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$.

CAPITOLUL 1

PLANUL ŞI DREAPTA ÎN SPAŢIU

Pe parcursul întregului capitol se va admite că spaţiul vectorilor liberi V_3 este raportat la baza canonică $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, spaţiul geometriei euclidiene E_3 la reperul cartezian $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ şi spaţiul vectorial tridimensional $\mathbb{R}^3$ la sistemul ortogonal de axe $Oxyz$.

1.1. ECUAŢII ALE PLANULUI ÎN SPAŢIU

Rezultatul de bază stabileşte că ecuaţia unui plan este o ecuaţie algebrică de gradul I, adică de forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Mai precis, avem:

Teorema 1.1.1. *Pentru orice plan π din spaţiu, există $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, cu A, B, C nu toate nule $\left(A^2 + B^2 + C^2 > 0\right)$, astfel încât* ***ecuaţia carteziană generală*** *a planului π este*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.1}$$

Reciproc, mulţimea punctelor din spaţiu $M(x, y, z)$ care verifică o ecuaţie de forma $Ax + By + Cz + D = 0$, cu $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ este un plan.

Demonstraţie.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat din planul π şi fie $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ un vector fixat nenul (deci $A^2 + B^2 + C^2 > 0$) perpendicular pe planul π. Fie, de asemenea, $M(x, y, z)$ un punct oarecare din planul π, diferit de punctul M_0.

Cum $\vec{n}$ este perpendicular pe planul π, deci este perpendicular pe vectorul

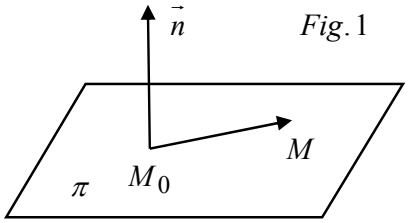


Fig. 1

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k},$$

rezultă că produsul lor scalar este 0, deci:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ sau}$$

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Dacă notăm $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, atunci obţinem ecuaţia generală a planului π:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Evident, ecuaţia (1.1) este verificată şi în cazul când $M = M_0$.

Aşadar, coordonatele oricărui punct din planul π verifică ecuaţia (1.1). Dacă $M'(x', y', z') \notin \pi$, atunci $\overrightarrow{M_0M'}$ nu este ortogonal pe $\vec{n}$, deci (x', y', z') nu verifică ecuaţia (1.1).

Reciproc, fie $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 > 0\right\}$.

Vom arăta că mulţimea S reprezintă un plan. Într-adevăr, dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ şi $M(x, y, z) \in S$, atunci rezultă

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1.2}$$

Fie vectorul $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Evident $\vec{n}$ este nenul, iar din (1.2) rezultă că $\overrightarrow{M_0M}$ este perpendicular pe $\vec{n}$, oricare ar fi $M \in S$.

Aşadar, S reprezintă planul ce trece prin M_0 şi este perpendicular pe vectorul $\vec{n}$.

Reamintim că prin direcţia unei drepte se înţelege orice dreaptă care este paralelă sau care coincide cu dreapta respectivă.

Definiţia 1.1.1. *Vectorul* $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ *se numeşte* ***vectorul normal*** *al planului* π *definit prin ecuaţia* (1.1), *iar dreapta a cărei direcţie este dată de vectorul normal* $\vec{n}$ *se numeşte* ***normala*** *la plan.*

Observaţia 1.1.1. Ecuaţia generală a unui plan ce trece prin origine este

$$Ax + By + Cz = 0 \text{, cu } A, B, C \in \mathbb{R},\ A^2 + B^2 + C^2 > 0. \tag{1.3}$$

Într-adevăr, dacă punem condiţia ca punctul $O(0,0,0)$ să verifice ecuaţia generală $Ax + By + Cz + D = 0$ a planului, rezultă $D = 0$.

Observaţia 1.1.2. Ecuaţiile planelor de coordonate sunt:

$z = 0$, pentru planul xOy;

$y = 0$, pentru planul xOz;

$x = 0$, pentru planul yOz.

Într-adevăr, planul xOy trece prin origine, deci $D = 0$ şi are ca versor normal $\vec{n} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k} = \vec{k}$, deci $A = 0, B = 0, C = 1$.

Observaţia 1.1.3. Dacă în ecuaţia generală a unui plan lipseşte una din variabile, atunci planul este paralel cu axa sistemului de coordonate corespunzătoare variabilei care lipseşte; de exemplu, planul de ecuaţie $Ax + By + D = 0$ este paralel cu axa Oz.

Observaţia 1.1.4. Ecuaţia $x = \alpha, \alpha \neq 0$ reprezintă ecuaţia unui plan paralel cu planul de coordonate yOz. Analog, $y = \beta, \beta \neq 0$ este ecuaţia unui plan paralel cu xOz şi $z = \gamma, \gamma \neq 0$ este ecuaţia unui plan paralel cu xOy.

Propoziţia 1.1.1. *Ecuaţia planului ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular pe vectorul nenul $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ este*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1.4}$$

Demonstraţie.

Într-adevăr, dacă $M(x, y, z)$ este un punct oarecare din acest plan, atunci vectorul

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

este perpendicular pe vectorul $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, de unde rezultă ecuaţia

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Propoziţia 1.1.2. *Ecuaţia planului ce trece prin punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *şi este paralel cu vectorii nenuli şi necoliniari* $\overrightarrow{v_1} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ şi $\overrightarrow{v_2} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ *este*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 . \tag{1.5}$$

Demonstraţie.

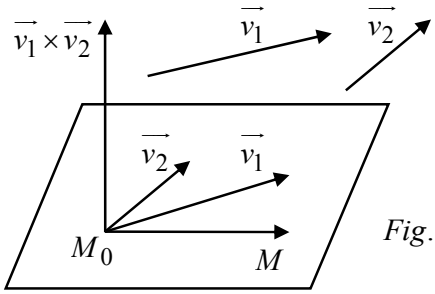


Fig. 2

Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare din acest plan. Atunci vectorii $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coplanari, ceea ce implică faptul că produsul mixt $\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = 0$, de unde se obţine ecuaţia (1.5).

Observaţia 1.1.5. În cazul planului definit prin ecuaţia (1.5) vectorul normal este

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \vec{k} .$$

Propoziţia 1.1.3. *Ecuaţiile parametrice ale planului ce trece prin punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *şi este paralel cu vectorii nenuli şi necoliniari* $\overrightarrow{v_1} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$ *şi* $\overrightarrow{v_2} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ *sunt*

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l_1 + \mu l_2 \\ y = y_0 + \lambda m_1 + \mu m_2 , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} . \\ z = z_0 + \lambda n_1 + \mu n_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

Demonstraţie.

Într-adevăr, dacă $M(x, y, z)$ este un punct oarecare din acest plan, atunci, din coplanaritatea vectorilor $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$, rezultă că vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ se poate descompune după direcţiile vectorilor $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$, deci există scalarii $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_2} . \tag{1.7}$$

Înlocuind în (1.7) expresiile analitice ale vectorilor $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ şi ţinând cont că scrierea unui vector într-o bază este unică se obţin relaţiile (1.6).

Reciproc, prin intermediul relaţiei (1.7) putem face ca fiecărei perechi de numere reale (λ, μ) să îi corespundă un punct M situat în planul considerat.

Propoziţia 1.1.4. *Ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare* $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ *este*

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.8}$$

sau

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 . \tag{1.9}$$

Demonstraţie.

Afirmaţia rezultă din Propoziţia 1.1.2. pentru $M_0 = M_1$ şi vectorii necoliniari

$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ şi

$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}$.

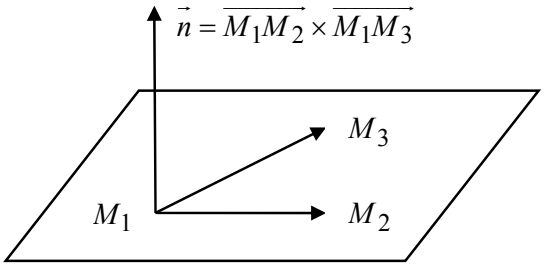


Fig. 3

Observaţia 1.1.6. Se poate remarca faptul că a determina planul ce trece prin trei puncte necoliniare M_1, M_2, M_3 este echivalent cu a determina planul ce trece prin punctul M_1 şi este perpendicular pe vectorul $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

Observaţia 1.1.7. Ecuaţia (1.9) este echivalentă cu condiţia ca patru puncte să fie coplanare:

$$M_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 2, 3, 4 \text{ sunt coplanare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.10)$$

Propoziţia 1.1.5. *Planul determinat de trei puncte distincte fiecare situat pe câte o axă de coordonate*: $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ *şi* $C(0,0,c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ *are ecuaţia*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \qquad (1.11)$$

Ecuaţia (1.11) poartă numele de ***ecuaţia planului prin tăieturi***.

Demonstraţie.

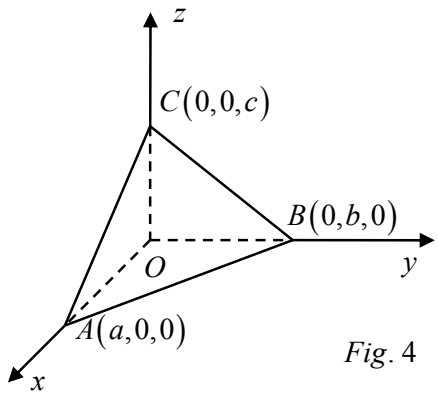


Fig. 4

Conform formulei (1.9), ecuaţia planului determinat de punctele A, B, C este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul după prima linie se obţine ecuaţia:

$$bcx + acy + abz - abc = 0,$$

care, prin împărţirea cu produsul abc, devine

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Propoziţia 1.1.6. *Ecuaţia planului ce trece prin punctele* $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ *şi este paralel cu vectorul nenul* $\vec{v}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ *este*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0. \qquad (1.12)$$

Demonstraţie.

Fie $M(x,y,z)$ un punct oarecare din acest plan. Atunci vectorii $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\vec{v}$ sunt coplanari, adică

$$\left(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}\right)=0,$$

de unde, folosind expresia analitică a produsului mixt, se obţine ecuaţia (1.12).

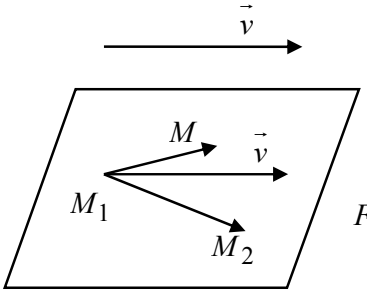


Fig. 5

Observaţia 1.1.8. În cazul planului definit prin ecuaţia (1.12) vectorul său normal este

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ l & n \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ l & m \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Exemplul 1.1.1. Să se scrie ecuaţia planului care:

a) trece prin punctul $M(-1,5,1)$ şi este perpendicular pe vectorul $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

b) trece prin punctele $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,-1)$.

c) trece prin punctele $A(-2,2,1)$, $B(3,-1,1)$, $C(4,0,-1)$.

d) trece prin punctul $M(1,3,-7)$ şi este paralel cu direcţiile vectorilor neparaleli $\overrightarrow{v_1}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ şi $\overrightarrow{v_2}=-2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

e) trece prin punctele $M_1(4,-3,1)$, $M_2(1,-1,6)$ şi este paralel cu vectorul $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$.

Soluţie.

a) Conform ecuaţiei (1.4) rezultă: $3(x+1)-(y-5)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-y+4z+4=0$.

b) Conform ecuaţiei (1.11) rezultă: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-1}-1=0 \Leftrightarrow 3x+2y-6z-6=0$.

c) Conform ecuaţiei (1.8) rezultă: $\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ 3+2 & -1-2 & 1-1 \\ 4+2 & 0-2 & -1-1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3x+5y+4z-8=0$.

d) Conform ecuaţiei (1.5) rezultă: $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+7 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x+11y+5z=0$.

e) Conform ecuaţiei (1.12) rezultă: $\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ 1-4 & -1+3 & 6-1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x+4y-z+9=0$.

1.2. DREAPTA ÎN SPAŢIU

Teorema 1.2.1. *Ecuaţiile dreptei în spaţiu ce trece prin punctul* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *şi are direcţia vectorului nenul* $\vec{v}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ *sunt*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{1.13}$$

Ecuaţiile (1.13) se numesc ***ecuaţiile canonice*** (***carteziene***) ale dreptei în spaţiu.

Demonstraţie.

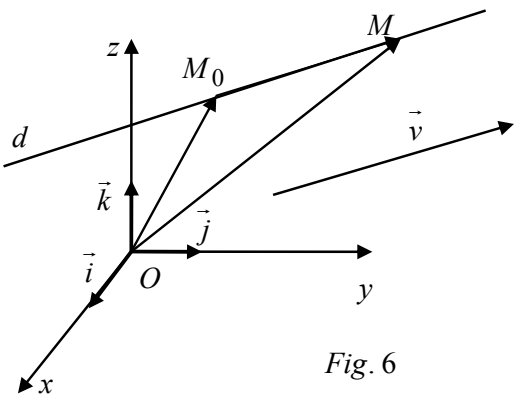


Fig. 6

Fie d dreapta în spaţiu ce trece prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi are direcţia vectorului $\vec{v}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$.

Fie $M(x,y,z)$ un punct oarecare pe dreapta d, diferit de M_0. Atunci vectorul

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$$

este coliniar cu $\vec{v}$, adică $\overrightarrow{MM_0}\times\vec{v}=\vec{0}$.

Deoarece componentele scalare a doi vectori coliniari sunt proporţionale, rezultă că ecuaţiile dreptei d sunt

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Definiţia 1.2.1. *Vectorul* $\vec{v}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ *se numeşte* ***vectorul director*** *al dreptei* d, *iar numerele* (l,m,n) *se numesc* ***parametrii directori*** *ai dreptei* d.

Observaţia 1.2.1. De remarcat că, folosind convenţia de scriere (1.13) pentru ecuaţiile unei drepte, sunt acceptate fracţii cu numitori zero, subînţelegând că de câte ori avem o asemenea fracţie, numărătorul ei trebuie să fie nul; de exemplu ecuaţiile $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{0}$ definesc dreapta ce trece prin punctul $M(1,0,-7)$ şi are vectorul director $\vec{v}=5\vec{i}-2\vec{j}$.

Propoziţia 1.2.1. ***Ecuaţiile parametrice*** *ale dreptei în spaţiu ce trece prin punctul* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *şi are direcţia vectorului nenul* $\vec{v}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ *sunt*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \ t\in\mathbb{R}. \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{1.14}$$

Demonstraţie.

Fie $M(x,y,z)$ un punct oarecare de pe dreaptă. Atunci vectorul

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$$

este coliniar cu $\vec{v}$, adică există parametrul $t\in\mathbb{R}, t\neq 0$ astfel încât $\overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{v}$. Exprimând analitic vectorii rezultă egalitatea

$$(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}=tl\,\vec{i}+tm\vec{j}+tn\vec{k}$$

şi ţinând cont că $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ este bază se obţin relaţiile:

$$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt, \ t\in\mathbb{R}, \\ z - z_0 = nt \end{cases}$$

de unde rezultă ecuaţiile parametrice (1.14).

Observaţia 1.2.2. Dacă notăm cu α, β, respectiv γ unghiurile pe care vectorul director $\vec{v}$ le face cu direcţiile pozitive ale axelor de coordonate Ox, Oy, respectiv Oz, adică

$$\alpha = \sphericalangle\left(\vec{v}, \vec{i}\right),\ \beta = \sphericalangle\left(\vec{v}, \vec{j}\right),\ \gamma = \sphericalangle\left(\vec{v}, \vec{k}\right),$$

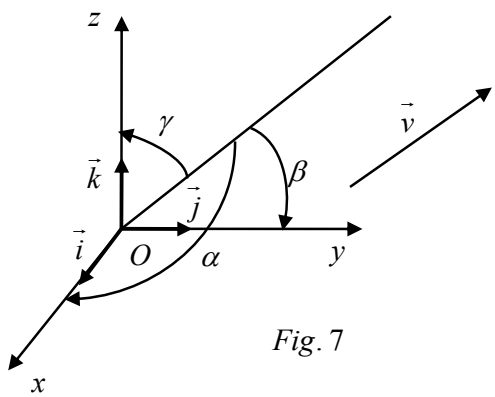


Fig. 7

rezultă relaţiile

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{i}\right\|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{j}\right\|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{k}\right\|} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$ şi deci

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$\left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$ se numesc ***cosinusurile directoare*** ale direcţiei date de vectorul $\vec{v}$.

Exemplul 1.2.1. Să se scrie ecuaţiile canonice şi ecuaţiile parametrice ale dreptei ce trece prin punctul $M_0\left(1,-7,3\right)$ şi este paralelă cu vectorul $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Soluţie. Avem $x_0 = 1,\ y_0 = -7,\ z_0 = 3$; $l = 4,\ m = 1,\ n = -2$.

Conform (1.13), ecuaţiile canonice ale dreptei sunt: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+7}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$.

Conform (1.14), ecuaţiile parametrice ale dreptei sunt: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -7 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

Pentru $t = 0$ se obţine punctul $M_0\left(1,-7,3\right)$, pentru $t = 1$ se obţine punctul $M_1\left(5,-6,1\right)$, etc.

Propoziţia 1.2.2. *Ecuaţiile canonice ale dreptei determinată de două puncte distincte* $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ *şi* $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ *sunt*

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1.15}$$

Demonstraţie.

În acest caz vectorul director al dreptei este

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

Afirmaţia rezultă din Teorema 1.2.1. pentru punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi vectorul director $\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Exemplul 1.2.2. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei ce trece prin punctele $M_1(-1,2,9)$ şi $M_2(-2,-6,0)$.

Soluţie. Conform (1.15), ecuaţiile canonice ale dreptei sunt: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-9}{-9}$.

Este evident că intersecţia a două plane neparalele şi neconfundate este o dreaptă. Se pune problema cum se scriu ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie.

Fie $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ şi $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

două plane neparalele şi neconfundate, adică $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$.

Definiţia 1.2.2. *Mulţimea punctelor* $M(x, y, z)$ *ale căror coordonate verifică sistemul*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{1.16}$$

determină o dreaptă unică d, *numită* ***dreapta de intersecţie*** a *planelor* π_1 *şi* π_2.

Sistemul de ecuaţii (1.16) reprezintă ***ecuaţiile generale*** ale dreptei de intersecţie $d = \pi_1 \cap \pi_2$.

Dacă notăm cu $\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ vectorul normal al planului π_1, respectiv cu $\overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ vectorul normal al planului π_2, atunci $\overrightarrow{n_1}$ şi $\overrightarrow{n_2}$ nu sunt coliniari, adică $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} \neq \vec{0}$, deoarece planele nu sunt paralele. Atunci sistemul de ecuaţii liniare (1.16) este compatibil simplu nedeterminat şi soluţia sa, ce depinde de un parametru real t, reprezintă ecuaţiile parametrice ale dreptei d.

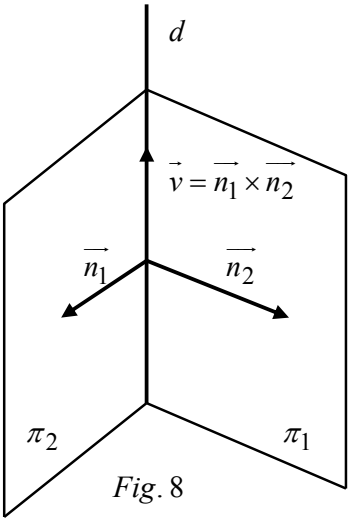


Fig. 8

Pe de altă parte, d fiind conţinută în ambele plane, este perpendiculară şi pe $\overrightarrow{n_1}$ şi pe $\overrightarrow{n_2}$, deci $\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ are aceeaşi direcţie cu d, adică este vectorul director al dreptei d.

Rezultă că parametrii directori ai dreptei d sunt componentele vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$. Cum

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

deducem că parametrii directori ai dreptei d sunt:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{1.17}$$

Din cele de mai sus rezultă:

Propoziţia 1.2.3. *Ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a planelor neparalele şi neconfundate* $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *şi* $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *sunt*

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \tag{1.18}$$

unde $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *este un punct oarecare fixat de pe această dreaptă, adică o soluţie particulară a sistemului* (1.16).

Exemplul 1.2.3. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei $d : \begin{cases} 2x - y + 11z + 3 = 0 \\ x + 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

Soluţie. Avem $A_1 = 2, B_1 = -1, C_1 = 11$ şi $A_2 = 1, B_2 = 2, C_2 = -3$. Deoarece

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 11 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -19\vec{i} + 17\vec{j} + 5\vec{k}$$

este vectorul director al dreptei d, atunci parametrii directori sunt: $l = -19, m = 17, n = 5$.

Pentru a găsi un punct particular pe dreapta d se face $z = 0$ în sistemul format de

ecuaţiile celor două plane şi apoi se rezolvă sistemul astfel obţinut. În acest caz sistemul devine $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ şi soluţia sa este $x_0 = -1, y_0 = 1$. Aşadar, punctul $M_0(-1, 1, 0)$ aparţine dreptei d.

Ecuaţiile canonice ale dreptei d sunt: $\frac{x+1}{-19} = \frac{y-1}{17} = \frac{z}{5}$.

1.3. FASCICULE DE PLANE

Am văzut că două plane neparalele şi neconfundate se intersectează după o unică dreaptă. Reciproc, dacă se dă o dreaptă în spaţiu, atunci prin ea trece o infinitate de plane.

Definiţia 1.3.1. *Se numeşte* ***fascicul de plane de axă*** d *mulţimea tuturor planelor care conţin dreapta dată* d.

Fie d dreapta de intersecţie a două plane neparalele şi neconfundate π_1 şi π_2, adică

$$d: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Teorema 1.3.1. *Ecuaţia oricărui plan din fasciculul de plane de axă* $d = \pi_1 \cap \pi_2$ *este de forma*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \ \lambda \in \mathbb{R} \cup \infty. \qquad (1.19)$$

Reciproc, orice ecuaţie de forma (1.19) *reprezintă ecuaţia unui plan din fasciculul de plane de axă* d.

Ecuaţia (1.19) se numeşte ***ecuaţia fasciculului de plane***, dreapta d se numeşte ***axa fasciculului***, iar planele π_1 şi π_2 se numesc ***plane de bază*** (***fundamentale***) ale fasciculului.

Demonstraţie.

Pentru $\lambda = 0$ obţinem ecuaţia planului π_1. Pe de altă parte, dacă $\lambda \neq 0$ şi împărţim ecuaţia (1.19) cu λ, obţinem ecuaţia echivalentă

$$\frac{1}{\lambda}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (1.20)$$

Pentru $\lambda = \infty$, din ecuaţia (1.20) se obţine ecuaţia planului π_2.

În continuare, considerăm $\lambda \neq 0$ şi $\lambda \neq \infty$ şi arătăm că pentru orice λ ecuaţia (1.19) reprezintă un plan ce trece prin d. Efectuând calcule în ecuaţia (1.19) obţinem ecuaţia echivalentă

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0 \qquad (1.21)$$

care reprezintă un plan, deoarece coeficienţii $A_1 + \lambda A_2$, $B_1 + \lambda B_2$ şi $C_1 + \lambda C_2$ nu se pot anula simultan. Într-adevăr, dacă acest lucru s-ar întâmpla, ar rezulta că $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = -\lambda$, ceea ce contrazice ipoteza că planele π_1 şi π_2 nu sunt paralele.

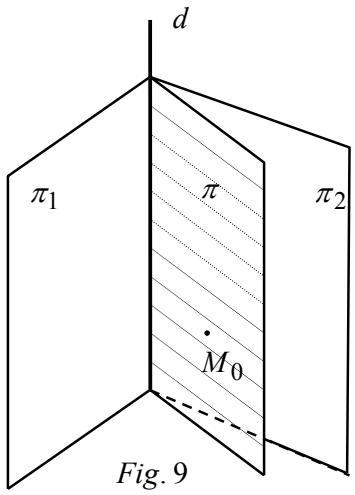


Fig. 9

Pe de altă parte este evident că planul de ecuaţie (1.21) conţine dreapta d, deoarece coordonatele oricărui punct al dreptei d verifică ecuaţia (1.21).

Reciproc, fie π un plan care trece prin d şi fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct în planul π care nu aparţine dreptei d. Evident, putem presupune în plus că

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 \neq 0$$

şi fie

$$\lambda_0 = -\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2}.$$

Observăm că planul de ecuaţie

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda_0(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

face parte din fasciculul de axă d şi conţine punctul M_0, deci coincide cu planul π.

Definiţia 1.3.2. *Mulţimea tuturor planelor paralele cu un plan dat* $Ax + By + Cz + D = 0$ *are ecuaţia* $Ax + By + Cz + D = \lambda$, *cu* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi se numeşte* ***fascicul de plane paralele***.

Exemplul 1.3.1. Să se determine ecuaţia planului ce trece prin punctul $M_0(2, 1, 3)$ şi conţine dreapta $d: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ x - 4y + 5z - 12 = 0 \end{cases}$.

Soluţie. Conform Teoremei 1.3.1. orice plan ce trece prin dreapta d are o ecuaţie de forma

$$2x + y - 3z + 2 + \lambda(x - 4y + 5z - 12) = 0 \text{ sau}$$

$$(2+\lambda)x + (1-4\lambda)y + (-3+5\lambda)z + 2 - 12\lambda = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Punând condiţia ca acest plan să treacă prin punctul $M_0(2,1,3)$, rezultă ecuaţia

$$2(2+\lambda) + 1 - 4\lambda + 3(-3+5\lambda) + 2 - 12\lambda = 0,$$

deci $\lambda = 2$. Ecuaţia planului cerut se obţine înlocuind $\lambda = 2$ în ecuaţia fasciculului, deci se găseşte ecuaţia:

$$4x - 7y + 7z - 22 = 0.$$

1.4. UNGHIURI ŞI DISTANŢE

Fie d_1 şi d_2 două drepte oarecare în spaţiu care au ecuaţiile canonice

$$d_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ şi}$$

$$d_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

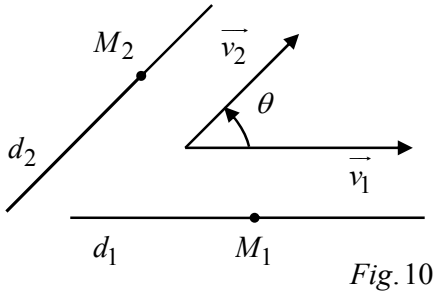


Fig. 10

Dreapta d_1 trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi are vectorul director $\vec{v_1} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$, iar dreapta d_2 trece prin punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi are vectorul director $\vec{v_2} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$.

Unghiul dintre dreptele d_1 şi d_2 este unghiul $\theta \in [0, \pi]$ dintre vectorii directori $\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$ ai dreptelor, adică unghiul definit prin formula

$$\cos\theta = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\|\|\vec{v_2}\|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\ \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{1.22}$$

Observaţia 1.4.1. Dreptele d_1 şi d_2 sunt:

1) ***perpendiculare*** dacă vectorii directori $\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$ sunt perpendiculari, adică

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 . \tag{1.23}$$

2) ***paralele*** dacă vectorii directori $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari şi $M_1 \notin d_2$ sau $M_2 \notin d_1$, adică

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ şi } M_1 \notin d_2 . \tag{1.24}$$

Exemplul 1.4.1. Să se determine unghiul dintre dreptele definite prin ecuaţiile generale:

$$d_1 : \begin{cases} x + y - z + 6 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \text{ şi } d_2 : \begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Soluţie. Conform formulei (1.17), $\overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 4\vec{k}$ este vectorul director al dreptei d_1, cu norma $\left\|\overrightarrow{v_1}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$ şi $\overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$ este vectorul director al dreptei d_2, cu norma $\left\|\overrightarrow{v_2}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Folosind formula (1.22), rezultă

$$\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \frac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\left\|\overrightarrow{v_1}\right\| \left\|\overrightarrow{v_2}\right\|} = \frac{(-4)\cdot(-3) + 0\cdot 3 + (-4)\cdot 0}{4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ deci } \sphericalangle(d_1, d_2) = \frac{\pi}{3} .$$

Fie π_1 şi π_2 două plane neparalele şi neconfundate definite prin ecuaţiile generale:

$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ şi

$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

Planul π_1 are vectorul normal $\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, iar planul π_2 are vectorul normal $\overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$.

Planele π_1 şi π_2 se intersectează după o dreaptă d şi determină un unghi diedru ce se măsoară prin unghiul plan θ ce se obţine secţionând planele π_1 şi π_2 cu un plan π perpendicular pe dreapta d.

Unghiul dintre planele π_1 şi π_2 este unghiul $\theta \in (0, \pi)$ dintre vectorii normali $\overrightarrow{n_1}$ şi $\overrightarrow{n_2}$ ai planelor, adică unghiul definit prin formula

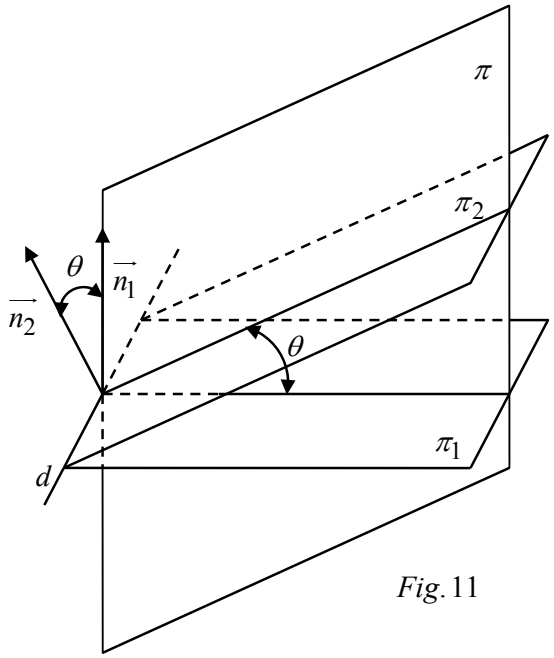


Fig. 11

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left\|\overrightarrow{n_1}\right\| \left\|\overrightarrow{n_2}\right\|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{1.25}$$

Observaţia 1.4.2. Planele π_1 şi π_2 sunt:

1) ***perpendiculare*** dacă vectorii normali $\overrightarrow{n_1}$ şi $\overrightarrow{n_2}$ sunt perpendiculari, adică

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{1.26}$$

2) ***paralele*** dacă vectorii normali $\overrightarrow{n_1}$ şi $\overrightarrow{n_2}$ sunt coliniari, adică

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \tag{1.27}$$

3) ***confundate*** dacă coeficienţii celor două ecuaţii ale planelor sunt proporţionali, adică

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{1.28}$$

Exemplul 1.4.2. Să se determine unghiul dintre planele:

$$\pi_1 : 3x + y + z - 1 = 0 \text{ şi } \pi_2 : x - 2y + 2z - 3 = 0 .$$

Soluţie. Vectorii normali ai planelor π_1 şi π_2 sunt:

$$\overrightarrow{n_1} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \text{ şi } \overrightarrow{n_1} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Conform formulei (1.25), unghiul dintre cele două plane este

$$\cos\theta = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 1\cdot 2}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}\,\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{3}{3\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}}, \text{ deci } \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right).$$

Fie π un plan şi d o dreaptă care intersectează planul, definite prin ecuaţiile:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \text{ şi } d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} .$$

Planul π are vectorul normal $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, iar dreapta d are vectorul director $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$.

Fie N punctul de intersecţie dintre dreapta d şi planul π şi fie $M(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare pe dreapta d, diferit de N. Se duce prin M o dreaptă paralelă cu $\vec{n}$ şi se notează cu M' punctul de intersecţia dintre această dreaptă şi planul π. Dreapta NM' se numeşte ***proiecţia ortogonală*** a dreptei d pe planul π şi se notează cu d'.

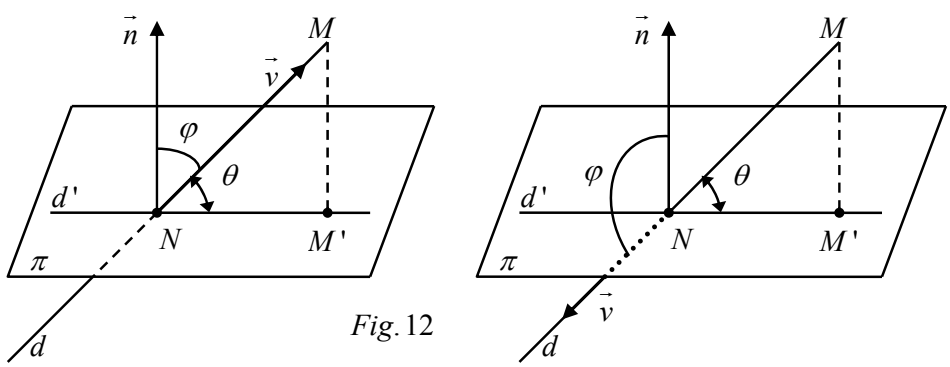


Fig. 12

Unghiul dintre dreapta d ***şi planul*** π este unghiul ascuţit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dintre dreapta d şi proiecţia ei ortogonală d' pe planul π. Dacă φ este unghiului făcut de vectorul

director $\vec{v}$ al dreptei d cu vectorul normal $\vec{n}$ al planului π, atunci $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ sau $\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$, deci θ este definit prin formula

$$\sin\theta = |\cos\varphi| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (1.29)$$

Observaţia 1.4.3. Dacă dreapta d este conţinută în planul π sau paralelă cu planul π, atunci unghiul θ este 0; dacă dreapta d este perpendiculară pe planul π, atunci unghiul θ este $\frac{\pi}{2}$.

Observaţia 1.4.4. Dreapta d şi planul π sunt:

1) ***perpendiculare*** dacă vectorul director $\vec{v}$ şi vectorul normal $\vec{n}$ sunt coliniari, adică

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}. \qquad (1.30)$$

2) ***paralele*** dacă vectorul director $\vec{v}$ şi vectorul normal $\vec{n}$ sunt perpendiculari şi $M(x_0, y_0, z_0) \notin \pi$, adică

$$Al + Bm + Cn = 0 \text{ şi } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \qquad (1.31)$$

Observaţia 1.4.5. Dreapta d este ***conţinută*** în planul π dacă vectorul director $\vec{v}$ şi vectorul normal $\vec{n}$ sunt perpendiculari şi $M(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, adică

$$Al + Bm + Cn = 0 \text{ şi } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (1.32)$$

Exemplul 1.4.3. Să se determine unghiul dintre dreapta $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ şi planul $\pi: 3x + 2y + 6z - 7 = 0$.

Soluţie. Vectorul director al dreptei d este $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, iar vectorul normal al planului π este $\vec{n} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$. Conform formulei (1.29) rezultă

$$\sin\theta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{|1\cdot 3 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}\,\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{1}{7\sqrt{6}}, \text{ deci } \theta = \arcsin\left(\frac{1}{7\sqrt{6}}\right).$$

Fie $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ un plan şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat ce nu aparţine planului (i.e. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$).

Propoziţia 1.4.1. *Distanţa de la punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *la planul* $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ *este dată de formula*

$$\operatorname{dist}(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.33}$$

Demonstraţie.

Distanţa de la punctul M_0 la planul π este distanţa de la punctul M_0 la proiecţia sa ortogonală pe planul π. Fie $M_0'(x_0', y_0', z_0')$ proiecţia punctului M_0 pe planul π. Punctul M_0' se găseşte la intersecţia planului π cu dreapta M_0M_0', dreaptă ce trece prin M_0 şi este perpendiculară pe plan.

Ecuaţiile canonice ale dreptei M_0M_0' sunt $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$, iar ecuaţiile sale parametrice sunt

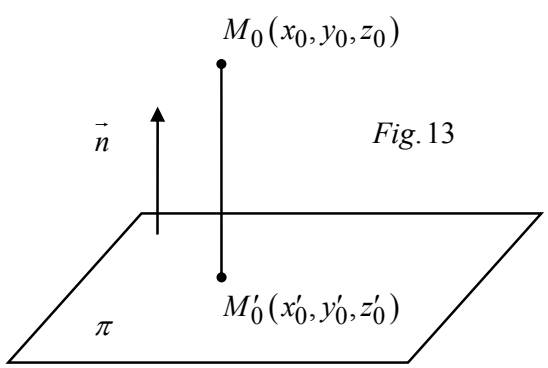


Fig. 13

$$\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

Pentru a afla coordonatele punctului M_0' se rezolvă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \end{cases}.$$

Dacă se introduc în ecuaţia planului π ecuaţiile parametrice ale dreptei M_0M_0' se obţine relaţia

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0,$$

de unde rezultă soluţia acestei ecuaţii notată cu t_0:

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Introducând valoarea t_0 în ecuaţiile parametrice ale dreptei M_0M_0' se găsesc coordonatele punctului M_0':

$$\begin{cases} x_0' = x_0 + At_0 \\ y_0' = y_0 + Bt_0 \\ z_0' = z_0 + Ct_0 \end{cases},$$

deci $M_0'(x_0 + At_0, y_0 + Bt_0, z_0 + Ct_0)$ este proiecţia punctului M_0 pe planul π.

Pe de altă parte, distanţa de la M_0 la planul π este egală cu distanţa de la M_0 la M_0', deci rezultă

$$\operatorname{dist}(M_0, \pi) = \operatorname{dist}(M_0, M_0') = \sqrt{(x_0' - x_0)^2 + (y_0' - y_0)^2 + (z_0' - z_0)^2} =$$

$$= \sqrt{t_0^2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)} = |t_0|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Observaţia 1.4.6. Dacă punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ (i.e. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$), atunci $\operatorname{dist}(M_0, \pi) = 0$ (deoarece $M_0 \equiv M_0'$).

Exemplul 1.4.4. Să se afle distanţa de la punctul $M(1, -1, 4)$ la planul $\pi: 2x - y + 3z - 7 = 0$.

Soluţie. Conform formulei (1.33), rezultă: $\operatorname{dist}(M_0, \pi) = \dfrac{|2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

Fie $d: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ o dreaptă şi $M_1(x_1, y_1, z_1)$ un punct fixat ce nu aparţine dreptei (i.e. coordonatele sale nu verifică ecuaţiile dreptei).

Propoziţia 1.4.2. *Distanţa de la punctul* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *la dreapta* $d: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ *este dată de formula*

$$\operatorname{dist}(M_1, d) = \frac{\left\|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{v}\right\|}{\left\|\vec{v}\right\|}, \tag{1.34}$$

unde $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *este un punct situat pe dreapta* d şi $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ *este vectorul director al dreptei* d.

Demonstraţie.

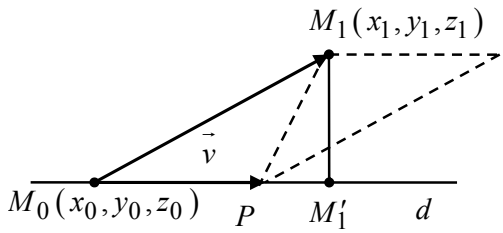


Fig. 14

Distanţa de la punctul M_1 la dreapta d este distanţa de la punctul M_1 la proiecţia sa ortogonală pe dreapta d. Fie M_1' proiecţia punctului M_1 pe dreapta d (punctul M_1' se găseşte la intersecţia dreptei d cu planul ce trece prin M_1 şi este perpendicular pe dreapta d).

Atunci $\operatorname{dist}(M_1, d) = \left\| \overrightarrow{M_1M_1'} \right\|$.

Aria triunghiului M_0PM_1 este egală, pe de o parte cu $\dfrac{\|\vec{v}\| \cdot \left\| \overrightarrow{M_1M_1'} \right\|}{2}$, iar pe de altă parte cu $\dfrac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{v} \right\|$. Egalând cele două evaluări obţinem:

$\|\vec{v}\| \cdot \operatorname{dist}(M_1, d) = \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{v} \right\|$, de unde rezultă formula (1.34).

Observaţia 1.4.7. Dacă punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ se află pe dreapta d, atunci $\operatorname{dist}(M_1, d) = 0$ (deoarece $M_1 \equiv M_1'$).

Exemplul 1.4.5. Să se determine distanţa de la punctul $M_1(3, -2, 1)$ la dreapta de ecuaţii $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$.

Soluţie. Fie $M_0(1, -2, 3)$ un punct de pe dreapta d şi fie $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ vectorul director al dreptei d. Facem calculele

$$\overrightarrow{M_0M_1} = 2\vec{i} - 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k} = -4\left(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{v} \right\| = 4\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = 4\sqrt{6} \text{ şi } \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Conform formulei (1.34), distanţa de la M_1 la dreapta d este

$$\operatorname{dist}(M_1, d) = \frac{\left\| \overrightarrow{M_0 M_1} \times \vec{v} \right\|}{\left\| \vec{v} \right\|} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

Observaţia 1.4.8. Perpendiculara dusă din punctul M_1 pe dreapta d se poate determina ca dreapta ce trece prin două puncte: prin punctul M_1 şi prin proiecţia sa ortogonală M_1' pe dreapta d (punctul M_1' se găseşte la intersecţia dreptei d cu planul ce trece prin M_1 şi este perpendicular pe dreapta d).

Exemplul 1.4.6. Să se determine ecuaţiile perpendicularei duse din punctul $M(-1,-1,2)$ pe dreapta $d: \frac{x+12}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Soluţie. Se determină proiecţia punctului M pe dreapta d.

Fie $M_0(-12,-1,1)$ un punct situat pe dreapta d şi $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ vectorul director al dreptei d.

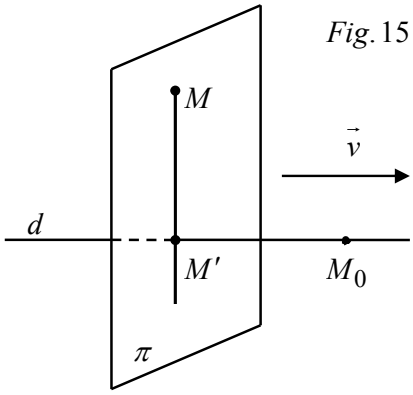


Fig. 15

Se notează cu $M'(x', y', z')$ proiecţia punctului M pe dreapta d; M' este punctul de intersecţie dintre dreapta d cu planul π, plan dus prin M şi perpendicular pe d. Cum dreapta d este perpendiculară pe planul π, rezultă că vectorul director $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ al dreptei d este vectorul normal al planului π. Conform formulei (1.4), ecuaţia planului π este:

$$\pi: 1 \cdot (x+1) + 2 \cdot (y+1) + 3 \cdot (z-2) = 0 \Leftrightarrow \pi: x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

Pentru găsirea coordonatelor punctului M' se rezolvă sistemul format din ecuaţiile dreptei d şi ecuaţia planului π:

$$\begin{cases} \frac{x+12}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3} \\ x + 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Se trece la ecuaţiile parametrice ale dreptei $d: \begin{cases} x = -12 + t \\ y = -1 + 2t, \\ z = 1 + 3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ şi înlocuind

aceste valori în ecuaţia planului π se obţine ecuaţia:

$$-12+t+2(-1+2t)+3(1+3t)-3=0 \Leftrightarrow 14t-14=0,$$

ce admite soluţia $t=1$.

Înlocuind $t=1$ în ecuaţiile parametrice ale dreptei d se determină coordonatele punctului M':

$$\begin{cases} x' = -11 \\ y' = 1 \\ z' = 4 \end{cases}, \text{ deci } M'(-11,1,4) \text{ este proiecţia punctului } M(-1,-1,2) \text{ pe } d.$$

Perpendiculara dusă din M pe dreapta d este dreapta MM'. Conform relaţiei (1.15) ecuaţiile canonice ale dreptei MM' sunt:

$$MM': \frac{x+1}{-11+1}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-2}{4-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{-10}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-1}.$$

Fie d_1 şi d_2 două drepte definite prin ecuaţiile canonice

$$d_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ şi } d_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Dreapta d_1 trece prin punctul $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{v_1}=l_1\vec{i}+m_1\vec{j}+n_1\vec{k}$, iar dreapta d_2 trece prin punctul $M_2(x_2,y_2,z_2)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{v_2}=l_2\vec{i}+m_2\vec{j}+n_2\vec{k}$.

Admitem cazul când dreptele d_1 şi d_2 sunt oarecare în spaţiu sau neconcurente.

Definiţia 1.4.1. *Există o dreaptă unică, care se sprijină simultan pe cele două drepte şi este perpendiculară pe cele două drepte şi care se numeşte* ***perpendiculara comună*** *a dreptelor* d_1 *şi* d_2.

Notăm cu d perpendiculara comună a dreptelor d_1 şi d_2.

Dreapta d se obţine ca intersecţia a două plane: planul π_1 ce conţine dreapta d_1 şi este perpendicular pe dreapta d_2 şi planul π_2 ce conţine dreapta d_2 şi este perpendicular pe dreapta d_1. Este evident că aceste plane sunt paralele cu vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$, deoarece π_1 este perpendicular pe $\overrightarrow{v_2}$ şi π_2 este perpendicular pe $\overrightarrow{v_1}$, unde se face notaţia

$$\vec{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\vec{k}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}.$$

Deoarece planul π_1 trece prin dreapta d_1 şi este paralel cu vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$, atunci π_1 trece prin punctul M_1 şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\vec{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$.

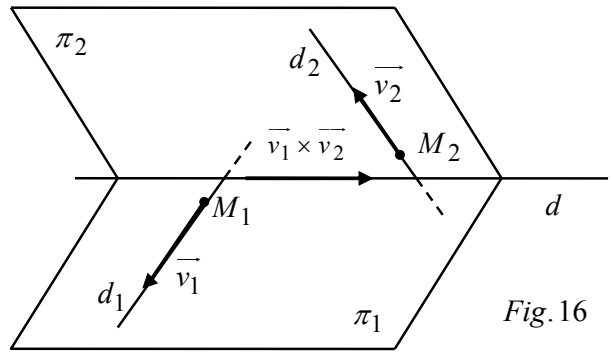


Fig. 16

Conform formulei (1.5), ecuaţia planului π_1 este:

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Analog, planul π_2 trece prin punctul M_2 şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{v_2}$ şi $\vec{v}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$. Conform formulei (1.5), ecuaţia planului π_2 este:

$$\pi_2:\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

Atunci ecuaţiile generale ale perpendiculare comune sunt:

$$d:\begin{cases}(\pi_1) & = & 0\\ (\pi_2) & = & 0\end{cases}\Leftrightarrow d:\begin{cases}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} & = & 0\\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} & = & 0\end{cases}, \qquad (1.35)$$

unde $l=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$, $m=-\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}$, $n=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$.

Observaţia 1.4.9. Vectorul director al perpendicularei comune a dreptelor d_1 şi d_2 este $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.

Exemplul 1.4.7. Să se determine ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor:

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1} \text{ şi } d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}.$$

Soluţie. Dreapta d_1 trece prin punctul $M_1(1,-1,1)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{v_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, iar dreapta d_2 trece prin punctul $M_2(-1,0,1)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{v_2} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

Fie d perpendiculara comună a dreptelor d_1 şi d_2. Conform celor de mai sus, dreapta d se găseşte la intersecţia planelor π_1 şi π_2, unde π_1 este planul ce trece prin M_1 şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$, iar π_2 este planul ce trece prin M_2 şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{v_2}$ şi $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ (vezi Figura 16). Calculăm vectorul director al dreptei d:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}.$$

Ecuaţia planului π_1 este

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + 3z - 2 = 0,$$

iar ecuaţia planului π_2 este

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x + 18y + 29z - 24 = 0.$$

Conform formulei (1.35), ecuaţiile generale ale perpendicularei comune d sunt:

$$d : \begin{cases} (\pi_1) = 0 \\ (\pi_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3z - 2 = 0 \\ 5x + 18y + 29z - 24 = 0 \end{cases}.$$

Fie d_1 şi d_2 două drepte necoplanare în spaţiu definite prin ecuaţiile canonice

$$d_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ şi } d_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Dreapta d_1 trece prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{v_1} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$, iar dreapta d_2 trece prin punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{v_2} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$.

Definiţia 1.4.2. *Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt necoplanare, atunci prin* ***distanţa*** *dintre dreptele d_1 şi d_2 se înţelege lungimea segmentului perpendicularei comune cuprins între drepte.*

Propoziţia 1.4.3. *Distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 este dată prin formula*

$$\operatorname{dist}(d_1, d_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \quad (1.36)$$

Demonstraţie.

Prin punctul M_1 se construieşte dreapta d_3 paralelă cu dreapta d_2. Se constată că distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 se poate determina ca distanţa de la punctul $M_2 \in d_2$ la planul π, unde π este determinat de dreptele d_1 şi d_3 (dreapta d_2 este paralelă cu planul π deoarece este paralelă cu dreapta d_3 conţinută în π).

Se construieşte paralelipipedul pe suportul vectorilor necoplanari $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ şi lungimea înălţimii acestui paralelipiped, considerând ca bază paralelogramul construit pe vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$, este distanţa căutată.

Se evaluează volumul acestui paralelipiped în două moduri: o dată folosind formula uzuală (ca volumul unei prisme) şi a doua oară folosind interpretarea geometrică a produsului mixt. Se obţine relaţia

$\left\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right\| \cdot \operatorname{dist}(d_1, d_2) = \left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)\right|$, de unde rezultă formula (1.36).

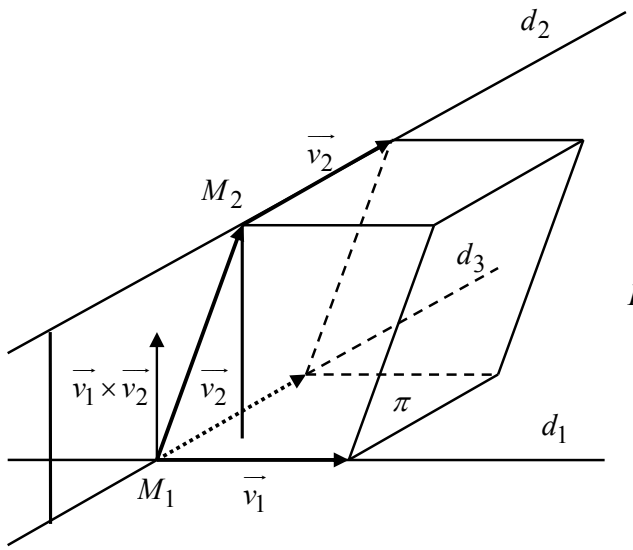


Fig. 17

Observaţia 1.4.10. Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt concurente, atunci $\operatorname{dist}(d_1, d_2) = 0$; dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele, atunci distanţa dintre ele este egală cu distanţa de la un punct de pe d_1 la d_2 (se fixează un punct pe d_1, de exemplu M_1, şi $\operatorname{dist}(d_1, d_2) = \operatorname{dist}(M_1, d_2)$).

Exemplul 1.4.8. Să se determine distanţa dintre dreptele:

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1} \text{ şi } d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}.$$

Soluţie. Dreapta d_1 trece prin punctul $M_1(1,-1,1)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{v_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, iar dreapta d_2 trece prin punctul $M_2(-1,0,1)$ şi are vectorul director $\overrightarrow{v_2} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

Se fac următoarele calcule:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -2\vec{i} + \vec{j}, \ \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k},$$

$$\left\| \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{35} \text{ şi}$$

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \right) = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \left(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \right) = (-2) \cdot (-5) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = 13.$$

Conform formulei (1.36), distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 este:

$$\operatorname{dist}(d_1,d_2)=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right\|}=\frac{13}{\sqrt{35}}.$$

Exemplul 1.4.9. Să se afle coordonatele simetricului punctului $M(-1,-1,2)$ faţă de dreapta $d:\dfrac{x+12}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

Soluţie. Conform Exemplului 1.4.6., $M'(-11,1,4)$ este proiecţia punctului M pe dreapta d (punctul M' se găseşte la intersecţia dreptei d cu planul π ce trece prin M şi este perpendicular pe dreapta d).

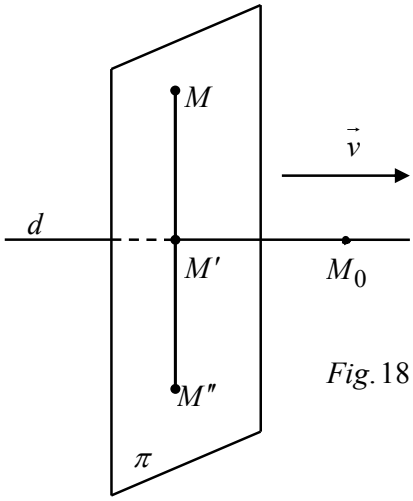


Fig. 18

Fie $M''(x'',y'',z'')$ simetricul punctului M faţă de dreapta d; punctul M'' se află în planul π şi punctul M' este mijlocul segmentului $[MM'']$. Rezultă relaţiile:

$$\frac{-1+x''}{2}=-11,\ \frac{-1+y''}{2}=1,\ \frac{2+z''}{2}=4,$$

de unde se obţin coordonatele: $x''=-21,\ y''=3,\ z''=6$.

Atunci $M''(-21,3,6)$ este simetricul punctului M faţă de dreapta d.

Exemplul 1.4.10. Să se determine coordonatele simetricul punctului $M(3,1,-1)$ faţă de planul $\pi: 22x+4y-20z-45=0$.

Soluţie. Se stabileşte poziţia punctului M faţa de planul π:

$$22\cdot 3+4\cdot 1-20\cdot(-1)-45=45\neq 0,$$

deci $M\notin\pi$. Fie $\vec{n}=22\vec{i}+4\vec{j}-20\vec{k}$ vectorul normal al planului π.

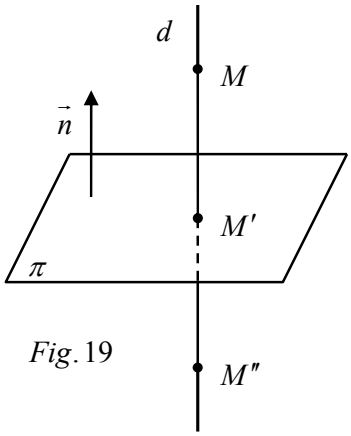


Fig. 19

Se notează cu $M'(x',y',z')$ proiecţia punctului M pe planul π; M' este punctul de intersecţie dintre planul π şi dreapta perpendiculară d dusă prin M pe planul π. Deoarece

planul π este perpendicular pe dreapta d, rezultă că vectorul normal $\vec{n} = 22\vec{i} + 4\vec{j} - 20\vec{k}$ al planului π este vectorul director al dreptei d. Conform formulei (1.13), ecuaţiile canonice ale perpendicularei d sunt :

$$d : \frac{x-3}{22} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-20} \Leftrightarrow \frac{x-3}{11} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-10}.$$

Coordonatele punctului M' se obţin rezolvând sistemul format din ecuaţiile dreptei d şi ecuaţia planului π:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{11} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-10} \\ 22x + 4y - 20z - 45 = 0 \end{cases}.$$

Se trece la ecuaţiile parametrice ale dreptei $d : \begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 10t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ şi, înlocuind aceste valori în ecuaţia planului π, se obţine ecuaţia:

$$22(3+11t) + 4(1+2t) - 20(-1-10t) - 45 = 0 \Leftrightarrow 450t + 45 = 0,$$

ce admite soluţia $t = -\dfrac{1}{10}$.

Înlocuind $t = -\dfrac{1}{10}$ în ecuaţiile parametrice ale dreptei d se obţin coordonatele proiecţiei $M' : \begin{cases} x' = \dfrac{19}{10} \\ y' = \dfrac{4}{5} \\ z' = 0 \end{cases}$, deci $M'\left(\dfrac{19}{10}, \dfrac{4}{5}, 0\right)$ este proiecţia punctului $M(3,1,-1)$ pe π.

Fie $M''(x'', y'', z'')$ simetricul punctului M faţă de planul π; punctul M'' se află pe dreapta d, iar punctul M' este mijlocul segmentului $[MM'']$. Rezultă relaţiile:

$$\frac{3 + x''}{2} = \frac{19}{10}, \quad \frac{1 + y''}{2} = \frac{4}{5}, \quad \frac{-1 + z''}{2} = 0,$$

deci se obţin coordonatele: $x'' = \dfrac{4}{5}$, $y'' = \dfrac{3}{5}$, $z'' = 1$.

Atunci $M''\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},1\right)$ este simetricul punctului M faţă de planul π.

Probleme propuse

1. Să se scrie ecuaţia unui plan care trece:

a) prin punctul $M_1(7,-4,4)$ şi este perpendicular pe M_1M_2, unde $M_2(1,3,-2)$;

b) prin tăieturile $A(8,0,0)$, $B(0,-6,0)$, $C(0,0,4)$;

c) prin punctele $A(-1,-2,3), B(3,-2,1), C(5,4,1)$;

d) prin punctul $M(-2,3,4)$ şi este paralel cu direcţiile vectorilor neparaleli $\overrightarrow{v_1}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ şi $\overrightarrow{v_2}=3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$;

e) prin punctele $M_1(1,0,-2), M_2(4,5,1)$ şi este paralel cu vectorul $\vec{v}=6\vec{j}-\vec{k}$.

Răspuns: a) $6x-7y+6z-94=0$; b) $3x-4y+6z-24=0$; c) $3x-y+6z-17=0$;

d) $10x+y-8z+49=0$; e) $23x-3y-18z-59=0$.

2. Să se scrie ecuaţia unui plan care

a) trece prin punctele $M_1(2,2,3)$ şi $M_2(1,1,1)$ şi care este perpendicular pe planul $x+y-z=0$;

b) trece prin punctul $M(1,-1,1)$ şi care este perpendicular pe planele $x-y+z-1=0$ şi $2x+y+z+1=0$;

c) trece prin punctul $M(2,-5,3)$ şi este paralel cu planul de coordonate xOz;

d) trece prin mijlocul segmentului determinat de punctele $M_1(-4,16,2)$ şi $M_2(0,-2,4)$ şi este paralel cu planul $x-4y+5z-1=0$;

e) trece prin punctele $M_1(5,1,7)$ şi $M_2(4,0,-2)$ şi este paralel cu Ox;

f) trece prin punctul $M(2,1,-1)$ şi taie pe axele de coordonate Ox şi Oz segmente egale de lungime 2, respectiv 1.

Răspuns: a) $x-y=0$; b) $2x-y-3z=0$; c) $y+5=0$; d) $x-4y+5z+15=0$;

e) $9y-z-2=0$; f) $x+2y+2z-2=0$.

3. Să se scrie ecuaţia unui plan ştiind că punctul $P(5,2,-3)$ este piciorul perpendicularei duse din origine pe acest plan.

Răspuns: $5x+2y-3z-38=0$.

4. Să se determine ecuaţia planului mediator al segmentului AB, unde $A(4,2,3)$ şi $B(2,6,5)$.

Răspuns: $x-2y-z+9=0$.

5. Să se scrie ecuaţiile feţelor tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(0,0,2), B(3,0,5), C(1,1,0)$ şi $D(4,1,2)$.

Răspuns: $(ABC): x-3y-z+2=0$; $(ABD): x-4y-z+2=0$; $(ACD): 2x-8y-3z+6=0$;

$(BCD): 2x-11y-3z+9=0$.

6. Să se determine ecuaţiile canonice şi ecuaţiile parametrice ale dreptei ce trece prin punctul $M(4,-3,1)$ şi este paralelă cu vectorul $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$.

Răspuns: $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-1}{5}$; $\begin{cases} x = 2t+4 \\ y = -3t-3, \ t\in\mathbb{R}. \\ z = 5t+1 \end{cases}$

7. Să se scrie dreapta de ecuaţii canonice $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-7}{1}$ ca intersecţie a două plane.

Răspuns: $\begin{cases} x+2y = 0 \\ x - 4z+26=0 \end{cases}$.

8. Să se determine ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a planelor $x-2y+z+3=0$ şi

$2x-3y-3z-9=0$.

Răspuns: $\frac{x-27}{9}=\frac{y-15}{5}=\frac{z}{1}$.

9. Să se determine ecuaţiile unei drepte:

a) ce trece prin punctul $M(0,-7,5)$ şi este paralelă cu dreapta $\begin{cases} x+\ \ y-2z-1=0 \\ x+2y-\ \ z+1=0 \end{cases}$;

b) ce trece prin punctele $M_1(-4,1,5)$ şi $M_2(6,0,-1)$;

c) ce trece prin punctul $M(11,4,-2)$ şi este perpendiculară pe planul $3x-y-13z+1=0$;

d) ce trece prin punctul $M(2,1,1)$ şi este paralelă cu planele $x-y+z+2=0$ şi $x+y+2z-1=0$;

e) ce trece prin originea sistemului de axe, se află în planul xOz şi este perpendiculară pe dreapta $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$.

Răspuns: a) $\frac{x}{3}=\frac{y+7}{-1}=\frac{z-5}{1}$; b) $\frac{x+4}{10}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{-6}$; c) $\frac{x-11}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{-13}$;

d) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$; e) $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$.

10. Să se scrie ecuaţia planului

a) ce trece prin originea sistemului de coordonate şi este perpendicular pe dreapta de ecuaţii $\frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{8}=\frac{z-1}{-3}$;

b) ce trece prin punctul $M(4,-3,1)$ şi este paralel cu dreptele $(d_1):\frac{x}{5}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+2}{2}$ şi $(d_2):\frac{x-8}{6}=\frac{y+6}{2}=\frac{z+1}{-3}$;

c) determinat de dreptele $(d_1):\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ şi $(d_2):\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$;

d) determinat de dreptele paralele $(d_1): \frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$ şi $(d_2): \frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{5}$;

e) trece prin punctele $M_1(0,0,1)$ şi $M_2(3,0,0)$ şi formează un unghi de 60° cu planul de coordonate xOy;

f) trece prin punctul $M(\frac{5}{2}, -2, \frac{3}{2})$, este perpendicular pe planul $x-2y-z-1=0$ şi este paralel cu dreapta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$.

Răspuns: a) $x+8y-3z=0$; b) $16x-27y+14z-159=0$; c) $5x+3y-z-1=0$;

d) $17x-13y-16z-10=0$; e) $x \pm \sqrt{26}\, y+3z-3=0$; f) $x-3y+7z-19=0$.

11. Să se stabilească poziţia următoarelor perechi de plane:

a) $x-11y+2z-5=0$ şi $7x+y+2z+1=0$;

b) $3x-6y-3z+9=0$ şi $x-2y-z+3=0$;

c) $x+3y-z-10=0$ şi $5x+6y-7=0$;

d) $2x-y+z-7=0$ şi $4x-2y+2z+1=0$.

Răspuns: a) Plane perpendiculare; b) Plane confundate; c) Plane oarecare (se intersectează după o dreaptă); d) Plane paralele.

12. Precizaţi dacă următoarele plane au puncte comune: $x+y+z-6=0$, $2x-y+z-3=0$ şi $x+2y-z-2=0$.

Răspuns: $M(1,2,3)$.

13. Să se calculeze unghiurile următoarelor perechi de plane:

a) $3x-y+2z+5=0$ şi $5x+9y-3z+1=0$;

b) $6x-2y+4z+8=0$ şi $9x-3y+6z+11=0$;

c) $x+2y+2z-3=0$ şi $16x+12y-15z-1=0$.

Răspuns: a) $\theta = \frac{\pi}{2}$, plane perpendiculare; b) $\theta = 0$, plane paralele; c) $\theta = \arccos\frac{2}{15}$.

14. Să se stabilească poziţia următoarelor drepte în spaţiu:

a) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{5}$ şi $\frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-8}{5}$;

b) $\begin{cases} x - y - 3z + 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ şi $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+3}{-1}$;

c) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{-2}$ şi $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$;

d) $\begin{cases} x = -t - 3 \\ y = 2t + 5, t \in \mathbb{R} \\ z = t - 2 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = 2t + 4, t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 8 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$ şi $\frac{x}{1} = \frac{y+10}{7} = \frac{z-7}{-5}$.

Răspuns: a) Drepte concurente în $M(1,2,3)$; b) Drepte paralele; c) Drepte necoplanare (oarecare în spaţiu); d) Drepte perpendiculare; e) Drepte confundate.

15. Să se afle unghiul dintre dreptele:

a) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ şi $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{7}$;

b) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{3}$ şi $\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = 6t - 3, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 9t + 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$;

d) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ şi $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$.

Răspuns: a) $\theta = \frac{\pi}{2}$, drepte perpendiculare; b) $\theta = 0$, drepte paralele; c) $\theta = \frac{\pi}{3}$; d) $\cos\theta = \frac{72}{77}$.

16. Să se stabilească poziţia dreptei (d) faţă de planul (π), unde

a) $(d): \dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ şi $(\pi): x - y - z + 2 = 0$;

b) $(d): \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{1}$ şi $(\pi): 2x - 5y + 4z + 15 = 0$;

c) $(d): \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ şi $(\pi): 2x - y + z - 3 = 0$;

d) $(d): \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-11}{-8} = \dfrac{z+1}{20}$ şi $(\pi): x - 2y + 5z + 9 = 0$.

Răspuns: a) Dreapta şi planul sunt paralele; b) Dreapta este conţinută în plan; c) Dreapta şi planul se intersectează în punctul $A\left(\dfrac{2}{7}, -\dfrac{16}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$; d) Dreapta şi planul sunt perpendiculare.

17. Să se calculeze unghiul dintre dreapta (d) şi planul (π), unde

a) $(d): \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ şi $(\pi): x - y - z + 1 = 0$;

b) $(d): \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$ şi $(\pi): x + 2y + 2z + 1 = 0$;

c) $(d): \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-11}{-8} = \dfrac{z+1}{20}$ şi $(\pi): x - 2y + 5z + 9 = 0$.

Răspuns: a) $\theta = 0$, dreapta şi planul sunt paralele; b) $\theta = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{9}$; c) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

18. Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ şi trece prin punctul $M(2,1,1)$.

Răspuns: $x - 5y + 5z - 2 = 0$.

19. Să se scrie ecuaţia unui plan ce trece prin dreapta $\begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$ şi care:

a) trece prin punctul $M(1,1,1)$;

b) este paralel cu axa de coordonate Oy;

c) este perpendicular pe planul $2x - y + 5z - 3 = 0$.

Răspuns: a) $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; b) $21x + 14z - 3 = 0$; c) $7x + 14y + 5 = 0$.

20. Să se determine ecuaţia planului ce trece prin dreapta $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ şi este paralel cu dreapta $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-3}$.

Răspuns: $3y - z = 0$.

21. Să se determine ecuaţia planului ce trece prin dreapta $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ şi este perpendicular pe dreapta $\frac{x+8}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{-1}$.

Răspuns: $x + y - z + 1 = 0$.

22. Să se scrie ecuaţia planului ce trece prin dreapta $d: \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ şi este perpendicular pe planul $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

Răspuns: $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.

23. Să se scrie ecuaţia planului ce trece prin dreapta $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ şi este paralel cu planul $x + y - z - 11 = 0$.

Răspuns: $x + y - z + 3 = 0$.

24. Să se determine ecuaţia planului ce conţine dreapta $\begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ şi care formează un unghi de 45° cu planul $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

Răspuns: $x + 20y + 7z - 12 = 0$.

25. Să se determine coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $A(-1,3,-2)$ pe planul $(\pi): 3x-3y+z-1=0$.

Răspuns: $A'\left(\frac{26}{19},\frac{12}{19},-\frac{23}{19}\right)$.

26. Se consideră punctul $A(4,-3,1)$ şi planul $(\pi): x+2y-z-3=0$.

a) Să se stabilească poziţia punctului A faţă de planul (π);

b) Să se determine coordonatele proiecţiei punctului A pe planul (π);

c) Să se determine coordonatele simetricului punctului A faţă de planul (π);

d) Să se determine distanţa de la punctul A la planul (π).

Răspuns: a) $A \notin (\pi)$; b) $A'(5,-1,0)$; c) $A''(6,1,-1)$; d) $\text{dist}(A,(d)) = \sqrt{6}$.

27. Se consideră punctul $A(4,3,10)$ şi dreapta $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

a) Să se stabilească poziţia punctului A faţă de dreapta (d);

b) Să se determine coordonatele proiecţiei punctului A pe dreapta (d);

c) Să se determine coordonatele simetricului punctului A faţă de dreapta (d);

d) Să se determine distanţa de la punctul A la dreapta (d);

e) Să se determine ecuaţiile perpendicularei din punctul A pe dreapta (d).

Răspuns: a) $A \notin (d)$; b) $A'(3,6,8)$; c) $A''(2,9,6)$; d) $\text{dist}(A,(d)) = \sqrt{14}$;

e) $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-10}{-2}$.

28. Să se determine coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului $A(5,0,-2)$ pe dreapta

$$(d): \begin{cases} x = 3t+2 \\ y = 2t+1, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 4t+3 \end{cases}.$$

Răspuns: $A'\left(\frac{19}{29},\frac{3}{29},\frac{35}{29}\right)$.

29. Să se calculeze coordonatele punctului de intersecţie al dreptei $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ cu planul $3x+5y-z-2=0$.

Răspuns: $A(0,0,-2)$.

30. Să se determine ecuaţii proiecţiei dreptei $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ pe planul $x-y+3z+8=0$.

Răspuns: $\begin{cases} x-\ \ y+3z+8=0 \\ x-2y-\ \ z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+9}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-1}$.

31. Se dau dreapta $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ şi planul $x+y+z-3=0$. Să se găsească:

a) ecuaţii proiecţiei dreptei pe plan;

b) ecuaţiile simetricei dreptei faţă de plan.

Răspuns: a) $\begin{cases} x+\ \ y+z-3=0 \\ x-2y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-1}$; b) $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}$.

32. Să se calculeze următoarele distanţe:

a) de la punctul $M(3,1,-1)$ la planul $(\pi): 22x+4y-20z-45=0$;

b) de la punctul $M(2,4,7)$ la planul $(\pi): x-2y+2z+2=0$;

c) de la punctul $M(7,9,7)$ la dreapta $(d): \frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$;

d) de la punctul $M(1,1,1)$ la dreapta $(d): \begin{cases} x-y+z\ \ \ \ \ =0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$;

e) de la planul $(\pi_1): 3x+2y-z-7=0$ la planul $(\pi_2): 3x+2y-z+7=0$;

f) de la dreapta $(d_1): \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$ la dreapta $(d_2): \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$;

g) de la dreapta $(d_1): \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$ la dreapta $(d_2): \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$;

h) de la dreapta $(d_1): \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ la dreapta $(d_2): \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$.

Răspuns: a) $\text{dist}(M,(\pi)) = \frac{3}{2}$; b) $\text{dist}(M,(\pi)) = \frac{10}{3}$; c) $\text{dist}(M,(d)) = \sqrt{22}$;

d) $\text{dist}(M,(d)) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; e) $\text{dist}((\pi_1),(\pi_2)) = \sqrt{14}$; f) $\text{dist}((d_1),(d_2)) = 3$;

g) $\text{dist}((d_1),(d_2)) = 7$; h) $\text{dist}((d_1),(d_2)) = 13$.

33. Să se determine ecuaţia unui plan aflat la distanţă egală faţă de planele

$(\pi_1): x - y + 3z + 2 = 0$ şi $(\pi_1): x - y + 3z - 6 = 0$.

Răspuns: $x - y + 3z - 2 = 0$.

34. Să se determine ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor $(d_1): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ şi $(d_2): \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Răspuns: $\begin{cases} 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \end{cases}$.

CAPITOLUL 2

CONICE

2.1. ECUAŢIILE CANONICE ALE CONICELOR

Familia de curbe numite generic „conice” este formată din elipse, hiperbole şi parabole. Termenul de conice provine din faptul că aceste curbe se obţin ca intersecţii ale unui con circular drept cu un plan.

Fie α unghiul format de axa conului cu generatoarele sale şi fie φ unghiul dintre planul secant şi axa conului. Dacă unghiul φ este de 90^0, adică planul secant este perpendicular pe axa conului, curba de intersecţie este un cerc. Dacă $\alpha < \varphi < 90^0$, curba de intersecţie este o elipsă. Dacă $\varphi = \alpha$, atunci curba de intersecţie este o parabolă, iar dacă $0 < \varphi < \alpha$, curba de intersecţie este o hiperbolă.

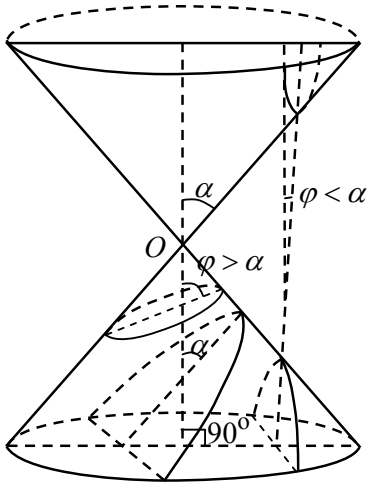


Fig. 1

În continuare vom da o definiţie unitară, ca loc geometric, a celor trei tipuri de conice: elipsă, hiperbolă şi parabolă.

Definiţia 2.1.1. *Fie F un punct din plan şi D o dreaptă care nu trece prin F. Se numeşte* ***conică****, mulţimea punctelor M din plan care au proprietatea că raportul distanţelor faţă de F şi faţă de dreapta D este constant. Dacă notăm cu ε acest raport, atunci în cazul $\varepsilon < 1$ conica se numeşte* ***elipsă****, în cazul $\varepsilon > 1$ conica se numeşte* ***hiperbolă****, iar dacă $\varepsilon = 1$ conica se numeşte* ***parabolă****. Punctul F se numeşte* ***focar****, dreapta D se numeşte* ***directoare****, iar raportul ε se numeşte* ***excentricitate****.*

a) ELIPSA

Pentru a stabili ecuaţia elipsei alegem un sistem de coordonate în felul următor. Drept axa xx' alegem dreapta care trece prin F şi este perpendiculară pe dreapta D. Fie K piciorul perpendicularei duse din F pe D. Punctul O (originea sistemului de coordonate) se alege pe axa xx' astfel încât să avem relaţiile:

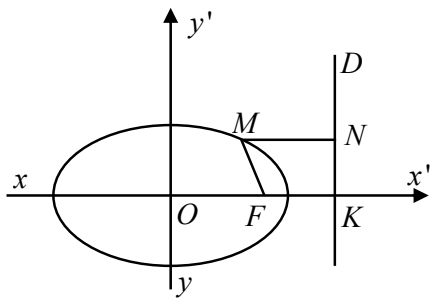


*Fig.*2

$\left\|\overrightarrow{OF}\right\| = a\varepsilon$ şi $\left\|\overrightarrow{OK}\right\| = \dfrac{a}{\varepsilon}$, unde a este o constantă pozitivă pe care urmează să o determinăm. Deoarece în cazul elipsei $\varepsilon < 1$, punctele O, F şi K vor fi dispuse ca în Figura 2.

Dacă notăm cu l lungimea segmentului FK, atunci avem:

$$l = \left\|\overrightarrow{FK}\right\| = \left\|\overrightarrow{OK}\right\| - \left\|\overrightarrow{OF}\right\| = \frac{a}{\varepsilon} - a\varepsilon = a\,\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}$$, de unde deducem că

$$a = \frac{l\varepsilon}{1-\varepsilon^2}. \tag{2.1}$$

Evident dreapta yy' este perpendiculară în O pe axa xx'. Prin urmare, în raport cu acest sistem de coordonate focarul F are coordonatele $(a\varepsilon, 0)$ şi dreapta D are ecuaţia $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, unde constanta a este dată de (2.1).

Dacă $M(x, y)$ este un punct pe elipsă şi N este proiecţia sa ortogonală pe D, atunci conform Definiţiei 2.1.1. avem:

$$\frac{\left\|\overrightarrow{MF}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = \varepsilon$$ şi mai departe

$$\frac{\sqrt{(x-a\varepsilon)^2 + y^2}}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon.$$

Efectuând calculele obţinem:

$$x^2\left(1-\varepsilon^2\right)+y^2=a^2\left(1-\varepsilon^2\right) \text{ sau}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\left(1-\varepsilon^2\right)}=1.$$

Dacă notăm cu $b^2=a^2\left(1-\varepsilon^2\right)$, atunci rezultă:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{2.2}$$

Ecuaţia (2.2) este ecuaţia elipsei, deoarece coordonatele oricărui punct de pe elipsă verifică această ecuaţie şi coordonatele oricărui punct care nu este pe elipsă nu o verifică.

În mod uzual, abscisa focarului F se notează cu c şi se numeşte ***distanţă focală***, iar a şi b se numesc ***semiaxele elipsei***.

Aşadar, în cazul elipsei relaţiile dintre distanţa focală, semiaxe şi excentricitate sunt:

$$c=a\varepsilon<a \tag{2.3}$$

$$b^2=a^2-c^2 \text{ sau}$$

$$a^2=b^2+c^2. \tag{2.4}$$

Ecuaţia directoarei este:

$$x=\frac{a}{\varepsilon}\Leftrightarrow x=\frac{a^2}{c}>a. \tag{2.5}$$

Exemplul 2.1.1. În cazul elipsei $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-1=0$ avem:

$$a=5;\ b=4;\ c=3;\ \varepsilon=\frac{3}{5}.$$

Observaţia 2.1.1. Dacă excentricitatea $\varepsilon=0$, atunci $a=b=r$ şi elipsa degenerează în cercul de ecuaţie:

$$x^2+y^2=r^2.$$

O ***reprezentare parametrică*** a elipsei este:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\,,\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Într-adevăr, din (2.6) deducem imediat că:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,\ \ \forall t \in [0, 2\pi].$$

Ecuaţiile parametrice (2.6) permit o reprezentare grafică simplă a elipsei: se construiesc două cercuri concentrice de raze a şi b.

Fie P un punct oarecare pe cercul mare (de rază a) şi fie Q punctul în care OP intersectează cercul mic (de rază b). Dacă notăm cu P' proiecţia punctului P de axa xx' şi cu M piciorul perpendicularei duse din Q pe PP', atunci M se află pe elipsa de semiaxe a şi b.

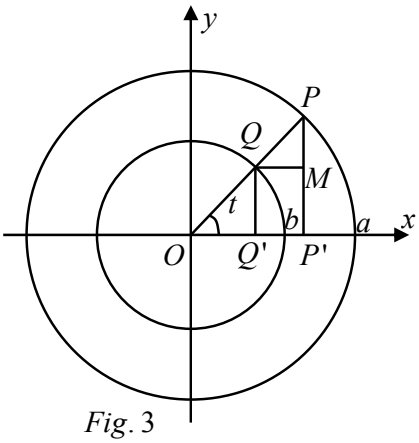


Fig. 3

Într-adevăr, fie t măsura unghiului POP'. Atunci coordonatele punctului M sunt:

$$\begin{cases} x = \left\|\overrightarrow{OP'}\right\| = a\cos t \\ y = \left\|\overrightarrow{MP'}\right\| = \left\|\overrightarrow{QQ'}\right\| = b\sin t\,,\ t \in [0, 2\pi], \text{ deci} \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

În continuare vom pune în evidenţă o altă proprietate geometrică importantă a elipsei, proprietate folosită în mod curent ca definiţie.

Fie elipsa de semiaxe a, b şi fie $F(c, 0)$ şi $F'(-c, 0)$ focarele sale. Vom arăta că orice punct M de pe elipsă are proprietatea că suma distanţelor sale faţă de cele două focare este constantă $\left(\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = \text{const.}\right)$.

Într-adevăr, fie $M(x, y)$ un punct oarecare de pe elipsă. Atunci există $t \in [0, 2\pi]$ astfel încât: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

În continuare avem:

$$\left\|\overrightarrow{MF}\right\| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(a\cos t - c)^2 + b^2\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2\cos^2 t - 2ac\cos t + c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2 - 2ac\cos t + c^2\cos^2 t} = \sqrt{(a - c\cos t)^2} =$$

$$= a - c\cos t.$$

În mod analog se arată că

$$\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + c\cos t,$$

de unde deducem că

$$\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = 2a \ (\text{constant}).$$

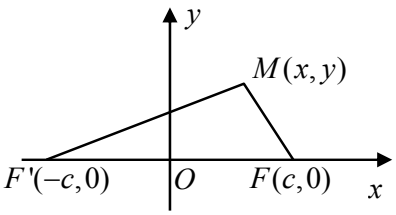


Fig. 4

Reciproc, se poate arăta că fiind date două puncte fixe F şi F' situate la distanţa $2c$ unul de celălalt, atunci coordonatele (x, y) ale oricărui punct M din plan care au proprietatea că suma distanţelor $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MF'}\right\| = 2a$, $a > c$ verifică o ecuaţie de forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ unde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Aşadar, elipsa se poate defini şi ca locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că suma distanţelor la două puncte fixe numite focare este constantă.

b) HIPERBOLA

Pentru a obţine ecuaţia hiperbolei alegem sistemul de coordonate de coordonate în acelaşi mod ca şi în cazul elipsei.

Deoarece la hiperbolă $\varepsilon > 1$, punctele O, K şi F vor fi dispuse ca în Figura 5 $\left(\left\|\overrightarrow{OF}\right\| = a\varepsilon > \frac{a}{\varepsilon} = \left\|\overrightarrow{OK}\right\|\right)$.

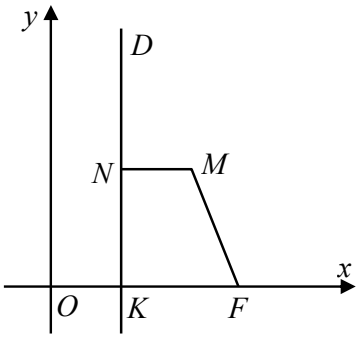


Fig. 5

Conform Definiţiei 2.1.1., dacă $M(x, y)$ este un punct oarecare de pe hiperbolă şi N este piciorul perpendicularei duse din M pe dreapta D, atunci

$$\frac{\left\|\overrightarrow{MF}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}=\varepsilon .$$

După calcule identice cu cele din cazul elipsei, în final obţinem ecuaţia

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\left(1-\varepsilon^2\right)}=1$. Cum $\varepsilon>1$, vom nota cu $b^2=a^2\left(\varepsilon^2-1\right)$ şi ecuaţia devine:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 . \qquad (2.7)$$

Aşadar, ecuaţia canonică a hiperbolei este dată de (2.7).

În cazul hiperbolei între semiaxele sale a,b, distanţa focală c şi excentricitate au loc relaţiile:

$c=a\varepsilon>a$

$b^2=c^2-a^2$ sau

$c^2=a^2+b^2$.

Ecuaţia directoarei este

$x=\frac{a^2}{c}<a$.

Pentru reprezentarea grafică a hiperbolei folosim mijloacele analizei matematice.

Mulţimea punctelor din plan care satisfac ecuaţia (2.7) este formată din reuniunea graficelor funcţiilor:

$f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ şi $f_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$.

Evident, este suficient să reprezentăm grafic funcţia f_1, deoarece cele două grafice sunt simetrice faţă de axa Ox.

Avem succesiv:

$f_1'(x)=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ şi

$$f_1''(x) = -\frac{ab}{\left(x^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Asimptota oblică la $+\infty$ este $y = \frac{b}{a}x$ şi asimptota oblică la $-\infty$ este $y = -\frac{b}{a}x$.

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
f_1'		$-$ $-$				$+$ $+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$
f_1''		$-$ $-$				$-$ $-$	

Graficul funcţiei f_1 este reprezentat în Figura 6 cu linie continuă, iar graficul funcţiei f_2 este reprezentat în Figura 6 cu linie întreruptă.

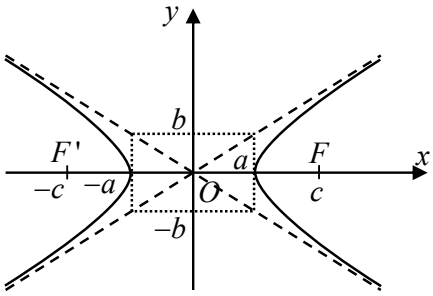


Fig. 6

Exemplul 2.1.2. Să se reprezinte grafic hiperbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0.$$

Semiaxele hiperbolei sunt $a = 3$, $b = 2$ iar distanţa focală este $c = \sqrt{13}$. Pentru început construim un dreptunghi cu centrul în origine de laturi $2a = 6$ şi $2b = 4$.

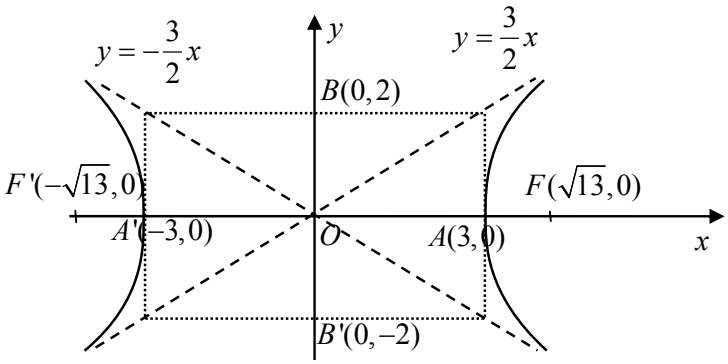


Fig. 7

Diagonalele acestui dreptunghi $y=\frac{3}{2}x$, respectiv $y=-\frac{3}{2}x$, sunt exact asimptotele oblice ale hiperbolei.

Graficul hiperbolei este tangent în punctele $A(3,0)$ şi $A'(-3,0)$ la muchiile verticale ale dreptunghiului.

O ***reprezentare parametrică*** a ramurii din dreapta a hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ este:

$$\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}t \\ y=b\,\mathrm{sh}t, \quad t\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{2.8}$$

unde ch este cosinusul hiperbolic, iar sh este sinusul hiperbolic $\left(\mathrm{ch}t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \mathrm{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$.

Deoarece, relaţia fundamentală pentru funcţiile hiperbolice este $\mathrm{ch}^2t-\mathrm{sh}^2t=1$, rezultă imediat că $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, deci (2.8) sunt ecuaţiile parametrice ale hiperbolei (ramura din dreapta).

Ecuaţiile parametrice ale ramurii din stânga sunt $\begin{cases} x=-a\,\mathrm{ch}t \\ y=\ \ b\,\mathrm{sh}t, \ t\in\mathbb{R} \end{cases}$.

Fie hiperbola de semiaxe a şi b şi fie $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$ focarele sale. Vom arăta că dacă M se află pe hiperbolă, atunci diferenţa distanţelor sale la cele două focare este constantă $\left(\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|-\left\|\overrightarrow{MF}\right\|=2a\ (\text{const.})\right)$.

Într-adevăr, dacă M se află pe ramura din dreapta, atunci există $t\in\mathbb{R}$ astfel încât $x=a\,\mathrm{ch}t,\ y=b\,\mathrm{sh}t$ şi avem:

$$\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=$$

$$=\sqrt{a^2\mathrm{ch}^2t+2ac\,\mathrm{ch}t+c^2+b^2\mathrm{sh}^2t}=$$

$$=\sqrt{a^2\mathrm{ch}^2t+2ac\,\mathrm{ch}t+c^2+\left(c^2-a^2\right)\mathrm{sh}^2t}=$$

$$= \sqrt{a^2\left(\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t\right) + 2ac\,\mathrm{ch}\,t + c^2\left(1 + \mathrm{sh}^2 t\right)} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 2ac\,\mathrm{ch}t + c^2\mathrm{ch}^2 t} = \left|a + c\,\mathrm{ch}\,t\right| = a + c\,\mathrm{ch}\,t.$$

În mod analog se arată că

$\left\|\overrightarrow{MF}\right\| = \left|a - c\,\mathrm{ch}\,t\right| = c\,\mathrm{ch}\,t - a$, deoarece $c\,\mathrm{ch}\,t > a$.

Aşadar, avem:

$\left\|\overrightarrow{MF'}\right\| - \left\|\overrightarrow{MF}\right\| = 2a\ (\text{constant})$.

Din cele de mai sus rezultă că hiperbola este locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că diferenţa distanţelor la două puncte fixe numite focare este constantă.

Observaţia 2.1.2. Dacă $a = b$ atunci hiperbola se numeşte ***echilateră*** şi are ecuaţia:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

În acest caz excentricitatea $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, iar asimptotele sunt $y = \pm x$, deci coincid cu prima, respectiv a doua bisectoare.

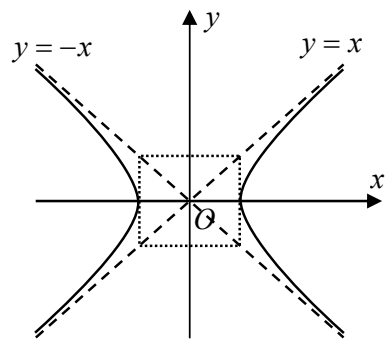


Fig. 8

c) PARABOLA

Pentru a stabili ecuaţia parabolei alegem sistemul de axe în felul următor: drept axă xx' se alege dreapta care trece prin F şi este perpendiculară pe dreapta D. Fie K punctul de intersecţie al celor două drepte. Dacă notăm cu $p = \left\|\overrightarrow{KF}\right\|$, atunci originea O se alege la jumătatea distanţei dintre K şi F. Rezultă că în raport cu acest sistem de axe focarul F va avea coordonatele $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, iar ecuaţia directoarei este $x = -\frac{p}{2}$.

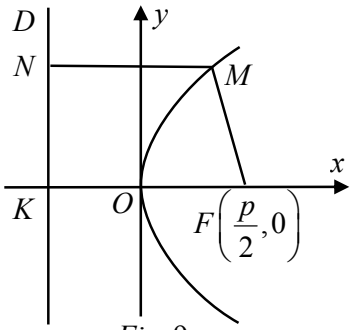


Fig. 9

Fie $M(x, y)$ un punct de pe parabolă şi fie N proiecţia sa pe directoarea D. Avem:

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = x + \frac{p}{2} \text{ şi } \left\|\overrightarrow{MF}\right\| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\ .$$

Conform definiţiei parabolei rezultă:

$$\frac{\left\|\overrightarrow{MF}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = \varepsilon = 1 \text{ sau } \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Efectuând calculele obţinem ecuaţia canonică a parabolei

$$y^2 = 2px. \tag{2.9}$$

Pentru a reprezenta parabola observăm că mulţimea punctelor din plan care satisfac ecuaţia (2.9) se compune din graficele funcţiilor:

$$f_1(x) = \sqrt{2px} \text{ şi } f_2(x) = -\sqrt{2px},\ x \in [0, \infty).$$

Este suficient să reprezentăm grafic funcţia f_1, deoarece graficul funcţiei f_2 este simetricul graficului funcţiei f_1 faţă de Ox.

Avem succesiv:

$$f_1'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}} > 0 \text{ şi } f_1''(x) = -\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} < 0,\ \forall x > 0.$$

x	0				$+\infty$
f_1'		$+$	$+$	$+$	
f_1	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$
f_1''		$-$	$-$	$-$	

Graficul funcţiei f_1 este prezentat în Figura 10 cu linie continuă, iar graficul funcţiei f_2 cu linie întreruptă.

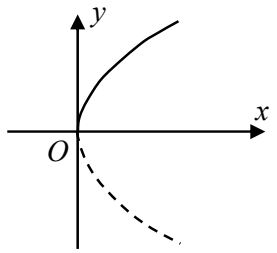


Fig. 10

Observaţia 2.1.3. Dacă focarul este situat în stânga directoarei D, atunci focarul F are coordonatele $\left(-\frac{p}{2},0\right)$ şi K are coordonatele $\left(\frac{p}{2},0\right)$.

Ecuaţia care se obţine este

$$y^2=-2px\text{, unde } p=\left\|\overrightarrow{FK}\right\|.$$

O astfel de parabolă este reprezentată în Figura 11.

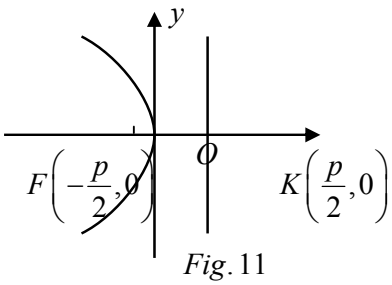


Fig. 11

În concluzie, ecuaţia unei parabole este

$$y^2=2px\text{, cu } p\in\mathbb{R}.$$

2.2. REDUCEREA LA FORMA CANONICĂ A CONICELOR

Să presupunem că în raport cu un sistem rectangular de coordonate este dată următoarea ecuaţie:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (2.10)$$

Observăm că această ecuaţie conţine şase termeni, în loc de trei, sau chiar doi, cum este cazul ecuaţiilor canonice ale elipsei, hiperbolei sau parabolei. Am putea crede că din punct de vedere geometric ecuaţiei (2.10) îi corespunde o curbă mai complicată. În realitate lucrurile nu stau aşa. Vom arăta că dacă sistemul de coordonate este convenabil ales, atunci ecuaţia (2.10) poate fi redusă întotdeauna la una din următoarele forme canonice, cărora le corespund curbele din paranteze:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (Elipsă)

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ (Elipsă imaginară)

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (Punct)

4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (Hiperbolă)

5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (Pereche de drepte concurente)

6) $y^2-2px=0$ (Parabolă)

7) $x^2-a^2=0$ (Pereche de drepte paralele)

8) $x^2+a^2=0$ (Pereche de drepte imaginare)

9) $x^2=0$ (Pereche de drepte confundate),

în care a, b şi p nu sunt nuli.

Ecuaţiile 1), 4) şi 6) au fost studiate în paragraful 2.1., fiind ecuaţiile elipsei, hiperbolei şi parabolei.

Ecuaţiile 2) şi 8) nu sunt satisfăcute de nici un punct, deci nu reprezintă nici o curbă reală.

Ecuaţia 3) este verificată numai de punctul $x=0,\ y=0$.

Ecuaţia 5) este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\end{cases} \tag{2.11}$$

care reprezintă, evident, o pereche de drepte concurente în O.

Ecuaţia 7) este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases}x+a=0\\ x-a=0\end{cases} \tag{2.12}$$

care reprezintă două drepte paralele.

Ecuaţia 9) corespunde cazului particular $a=0$ şi reprezintă din punct de vedere geometric două drepte confundate.

În concluzie, putem spune că ecuaţia (2.10) reprezintă ecuaţia generală a unei conice.

În cele ce urmează vom dovedi afirmaţia de mai sus. Fie reperul rectangular drept $\left\{O;\vec{i};\vec{j}\right\}$, unde $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versori. Dreapta absciselor este dreapta care trece prin O şi este paralelă cu $\vec{i}$, iar dreapta ordonatelor este dreapta care trece prin O şi este paralelă cu $\vec{j}$.

Să presupunem că în raport cu acest sistem de coordonate avem ecuaţia (2.10).

Introducem notaţiile (***invarianţii conicei***):

$$I = a_{11} + a_{22}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ şi}$$

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Vom analiza două cazuri:

I. Cazul $\delta \neq 0$ (al conicelor cu centru unic).

II. Cazul $\delta = 0$ (al conicelor fără centru sau cu o infinitate de centre).

I. CONICE CU CENTRU UNIC $(\delta \neq 0)$

Fie O' un punct din plan de coordonate (x_0, y_0) în raport cu reperul $\left\{O;\vec{i};\vec{j}\right\}$ şi fie $\left\{O';\vec{i};\vec{j}\right\}$ noul reper obţinut prin translaţia (paralelă) a reperului $\left\{O;\vec{i};\vec{j}\right\}$. Fie, de asemenea, M un punct de coordonate (x,y) în raport cu reperul $\left\{O;\vec{i};\vec{j}\right\}$, respectiv de coordonate (x',y') în raport cu noul reper $\left\{O';\vec{i};\vec{j}\right\}$.

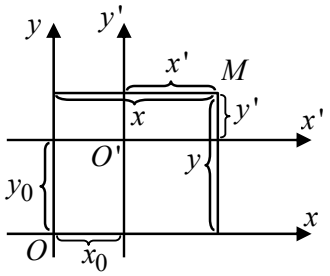


Fig. 12

Legătura dintre vechile coordonate şi noile coordonate este dată de formulele:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}. \tag{2.13}$$

În urma translaţiei (2.13) ecuaţia (2.10) devine:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0 \tag{2.10'}$$

unde:

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}; \quad a'_{12} = a_{12}; \quad a'_{22} = a_{22} \\ a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \\ a'_{33} = f(x_0, y_0). \end{cases} \tag{2.14}$$

În intenţia de a simplifica ecuaţia $(2.10')$ impunem condiţiile $a'_{13} = 0, a'_{23} = 0$. Se obţine astfel sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}. \tag{2.15}$$

Cum $\delta \neq 0$, sistemul (2.15) are soluţie unică, dată de regula lui Cramer:

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{\delta}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \\ y_0 = -\dfrac{1}{\delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} \end{cases}. \tag{2.16}$$

Dacă punctul O' este ales astfel încât coordonatele sale (x_0, y_0) şi fie date de (2.16), atunci ecuaţia $(2.10')$ devine:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + f(x_0, y_0) = 0.$$

Pe de altă parte avem:

$$f(x_0, y_0) = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x_0 + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y_0 + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}.$$

Ţinând seama că (x_0, y_0) este soluţia sistemului (2.15) rezultă că:

$$f\left(x_0, y_0\right) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = \frac{1}{\delta}\left(a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \right) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

În concluzie, printr-o translaţie a sistemului de coordonate de vector $\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, unde $\left(x_0, y_0\right)$ este soluţia sistemului (2.15), ecuaţia (2.10) capătă forma simplificată:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \qquad (2.17)$$

Observăm că dacă perechea $\left(x', y'\right)$ verifică ecuaţia (2.17), atunci şi perechea $\left(-x', -y'\right)$ o verifică. Cu alte cuvinte, dacă un punct M se află pe curba corespunzătoare ecuaţiei (2.17), atunci şi simetricul său faţă de O' se află pe această curbă. Rezultă că punctul O' de coordonate $\left(x_0, y_0\right)$, unde $\left(x_0, y_0\right)$ este soluţia (unică) a sistemului (2.15), este centrul de simetrie al curbei, adică ***centrul conicei***.

Aşadar, coordonatele centrului conicei sunt date de (2.16).

Dacă $a_{12} = 0$, ecuaţia (2.17) are deja una din formele canonice 1) – 9). Dacă $a_{12} \neq 0$, vom continua să simplificăm ecuaţia (2.17) printr-o nouă schimbare a reperului $\left\{O'; \vec{i}; \vec{j}\right\}$. Pentru aceasta să notăm cu $\varphi\left(x', y'\right) = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2$.

Evident $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică a cărei matrice în raport cu baza $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Conform unui cunoscut rezultat de algebră liniară, există o nouă bază ortonormată $\left\{\vec{u}, \vec{v}\right\}$ în raport cu care forma pătratică φ are forma canonică:

$$\varphi\left(X, Y\right) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2,$$

unde λ_1 şi λ_2 sunt valorile proprii ale matricei A, iar $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt vectori proprii corespunzători acestor valori proprii.

Aşadar, λ_1 şi λ_2 sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice:

$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$, ecuaţie echivalentă cu

$$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0. \tag{2.18}$$

Dacă notăm cu C matricea de trecere de la baza $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ la baza $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, atunci C este o matrice ortogonală de ordinul 2. Conform unui rezultat de algebră liniară (Vezi [9], pag. 182), matricea C are una din formele:

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, respectiv $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Schimbând, eventual, pe $\vec{v}$ cu $-\vec{v}$ putem presupune întotdeauna că:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad (\det C = 1).$$

Aşadar, avem:

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j} \\ \vec{v} = -\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j} \end{cases} \tag{2.19}$$

şi

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}, \tag{2.20}$$

unde (x', y') sunt coordonatele unui punct oarecare din plan în raport cu reperul $\{O'; \vec{i}; \vec{j}\}$, iar (X, Y) sunt coordonatele acestui punct în raport cu reperul $\{O'; \vec{u}; \vec{v}\}$.

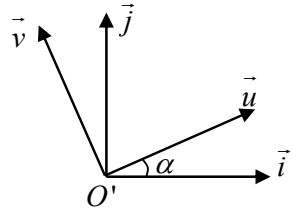


Fig. 13

Din (2.19) deducem că noua bază ortonormată $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ se obţine din vechea bază ortonormată $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ printr-o rotaţie de unghi α (Vezi Figura 13).

Formulele (2.20) exprimă legătura dintre vechile coordonate şi noile coordonate, în cazul unei rotaţii de unghi α a reperului $\left\{O'; \vec{i}; \vec{j}\right\}$.

În urma rotaţiei (2.20), ecuaţia (2.17) devine

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 . \qquad (2.21)$$

A) Analizăm mai întâi cazul $\delta = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. Înmulţind, eventual, ecuaţia (2.21) cu -1 şi schimbând, eventual, X cu Y, putem presupune că $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$.

Distingem următoarele subcazuri:

a) $\Delta < 0$

Împărţind ecuaţia (2.21) cu $-\frac{\Delta}{\delta}$ obţinem elipsa:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 ,$$

unde $a^2 = -\frac{\Delta}{\delta \lambda_1}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\delta \lambda_2}$, $\qquad a \geq b > 0$.

b) $\Delta > 0$

Împărţind ecuaţia (2.21) cu $\frac{\Delta}{\delta}$ obţinem ecuaţia

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0 ,$$

unde $a^2 = \frac{\Delta}{\delta \lambda_1}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\delta \lambda_2}$.

Evident, nu există nici un punct în plan care să verifice această ecuaţie. Se mai spune că ecuaţia reprezintă o „elipsă imaginară”.

c) $\Delta = 0$

Ecuaţia (2.21) devine

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0 , \ \lambda_2 \geq \lambda_1 > 0 .$$

Această ecuaţie este verificată numai de punctul

$X = 0$, $Y = 0$.

B) Să presupunem acum că $\delta = \lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Înmulţind (eventual) ecuaţia (2.21) cu -1 şi schimbând (eventual) X cu Y putem presupune că $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ şi $\frac{\Delta}{\delta} \le 0$.

Avem următoarele subcazuri:

a) $\Delta > 0$

Împărţind ecuaţia (2.21) cu $-\frac{\Delta}{\delta}$ obţinem ecuaţia hiperbolei:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}$.

b) $\Delta = 0$

Ecuaţia (2.21) devine:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0, \text{ unde } a^2 = \frac{1}{\lambda_1},\ b^2 = -\frac{1}{\lambda_2}.$$

Această ecuaţie este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} \frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0 \\ \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0 \end{cases}. \tag{2.22}$$

Din punct de vedere geometric, sistemul (2.22) reprezintă o pereche de drepte concurente.

În concluzie, în cazul $\delta \ne 0$, ecuaţia (2.10) poate fi redusă printr-o rototranslaţie la una din formele canonice 1) – 5), cărora le corespund următoarele curbe: elipsă, elipsă imaginară, un punct, hiperbolă, o pereche de drepte concurente.

Coordonatele centrului conicei se află rezolvând sistemul (2.15), iar direcţiile axelor $O'X$, $O'Y$ sunt date de vectorii proprii ai matricei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Exemplul 2.2.1. Să se reducă la forma canonică şi să se deseneze conica:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Avem: $a_{11} = 5,\ a_{12} = 4,\ a_{22} = 5,\ a_{13} = -9,\ a_{23} = -9,\ a_{33} = 9$

$$I = a_{11} + a_{22} = 10$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \end{vmatrix} = -81.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0,$$

iar valorile proprii sunt 9 şi 1.

Alegem valorile proprii astfel încât

$\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$, deci $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = 9$.

Forma canonică este

$X^2 + 9Y^2 - 9 = 0$ sau

$$\frac{X^2}{9} + Y^2 - 1 = 0.$$

Centrul conicei se află rezolvând sistemul (2.15)

$$\begin{cases} 5x + 4y - 9 = 0 \\ 4x + 5y - 9 = 0 \end{cases}.$$

Soluţia sistemului este $O'(1,1)$.

În urma translaţiei:

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

ecuaţia capătă forma redusă:

$$5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 - 9 = 0.$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$ sunt daţi de ecuaţia:

$4x + 4y = 0$ sau $y = -x$.

Alegem versorul $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Valorii proprii $\lambda_2 = 9$ îi corespund vectorii proprii

$-4x + 4y = 0$ sau $y = x$.

Alegem versorul $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Axa OX are direcţia lui $\vec{u}$, iar axa OY are direcţia lui $\vec{v}$. Matricea de trecere de la baza $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ la baza $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ este

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ cu } \det C = 1.$$

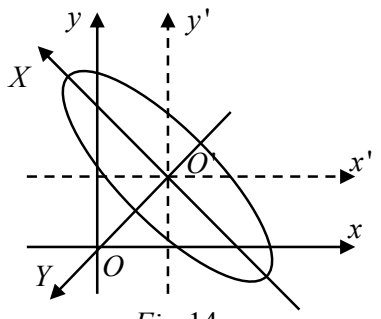


Fig. 14

Formulele rotaţiei sunt:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}.$$

Elipsa $\frac{X^2}{9} + Y^2 - 1 = 0$ este reprezentată în Figura 14.

Unghiul de rotaţie este $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Exemplul 2.2.2. Să se reducă la forma canonică şi să se deseneze conica:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Avem: $a_{11} = 3,\ a_{12} = 5,\ a_{22} = 3,\ a_{13} = -1,\ a_{23} = -7,\ a_{33} = -13$

$$I = 6;\ \delta = -16;\ \Delta = 128;\ \frac{\Delta}{\delta} = -8.$$

Ecuaţia caracteristică este:

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0.$$

Valorile proprii sunt 8 şi -2.

Alegem $\lambda_1 = 8 > 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$.

Forma canonică este

$8X^2 - 2Y^2 - 8 = 0$ sau

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} - 1 = 0.$$

Coordonatele centrului sunt date de sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 1 = 0 \\ 5x + 3y - 7 = 0 \end{cases},$$

a cărui soluţie este $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

Ecuaţiile translaţiei sunt:

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}.$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 8$ sunt daţi de ecuaţia

$-5x + 5y = 0$ sau $y = x$.

Alegem versorul $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Pentru valoarea proprie $\lambda_2 = -2$ obţinem ecuaţia

$5x + 5y = 0$ sau $y = -x$.

Alegem $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$.

Matricea de trecere este

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ cu } \det C = 1.$$

Formulele rotaţiei sunt:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}.$$

Unghiul de rotaţie este $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Hiperbola $X^2 - \frac{Y^2}{4} - 1 = 0$ este reprezentată în Figura 15.

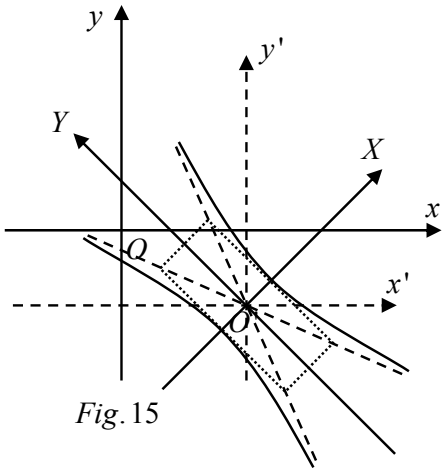


Fig. 15

Exemplul 2.2.3. Să se reducă la forma canonică şi să se deseneze conica:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 + 18x + 18y + 18 = 0.$$

Avem: $a_{11}=5,\ a_{12}=4,\ a_{22}=5,\ a_{13}=9,\ a_{23}=9,\ a_{33}=18$.

$I=10$; $\delta=9$; $\Delta=0$.

Valorile proprii sunt $\lambda_1=1$, $\lambda_2=9$.

Ecuaţia canonică este

$X^2+9Y^2=0$.

Imaginea geometrică este punctul $X=0$, $Y=0$, adică centrul conicei.

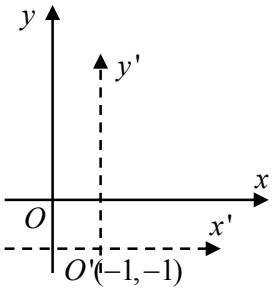


Fig. 16

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 5x+4y+9=0 \\ 4x+5y+9=0 \end{cases}$$

obţinem coordonatele centrului conicei $x_0=-1$, $y_0=-1$.

Exemplul 2.2.4. Să se aducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica:

$7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0$.

Avem: $a_{11}=7,\ a_{12}=30,\ a_{22}=32,\ a_{13}=-7,\ a_{23}=-30,\ a_{33}=7$.

$I=39$; $\delta=-676$; $\Delta=0$; $\lambda_1=52$; $\lambda_2=-13$.

Forma canonică este:

$52X^2-13Y^2=0$ sau $4X^2-Y^2=0$, ecuaţia echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} 2X-Y=0 \\ 2X+Y=0 \end{cases}.$$

Centrul conicei este $O'(1,0)$.

Formulele translaţiei sunt:

$$\begin{cases} x=x'+1 \\ y=y' \end{cases}. \qquad (2.23)$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1=52$ sunt daţi de ecuaţia:

$-3x+2y=0$.

Alegem $\vec{u}=\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2=-13$ sunt daţi de ecuaţia:

$2x+3y=0$.

Alegem $\vec{v}=-\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$. Matricea de trecere este

$$C=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}, \text{ cu } \det C=1.$$

Ecuaţiile rotaţiei sunt:

$$\begin{cases} x'=\frac{2}{\sqrt{13}}X-\frac{3}{\sqrt{13}}Y \\ y'=\frac{3}{\sqrt{13}}X+\frac{2}{\sqrt{13}}Y \end{cases}. \tag{2.24}$$

Axa $O'X$ are direcţia lui $\vec{u}$, iar axa $O'Y$ are direcţia versorului $\vec{v}$. Cele două drepte sunt reprezentate în Figura 17.

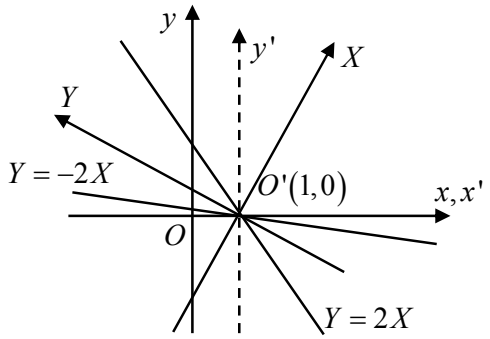


Fig. 17

Din (2.24) şi (2.23) deducem că:

$$\begin{cases} X=\frac{2}{\sqrt{13}}(x-1)+\frac{3}{\sqrt{13}}y \\ Y=\frac{3}{\sqrt{13}}(x-1)+\frac{2}{\sqrt{13}}y \end{cases}.$$

Ecuaţiile $2X-Y=0$ şi $2X+Y=0$ devin

$7x+4y-7=0$, respectiv $x+8y-1=0$ şi se puteau reprezenta de la început în sistemul de coordonate xOy.

La acelaşi rezultat ajungem mai simplu astfel: conform (2.17), în urma translaţiei

(2.23) ecuaţia conicei devine:

$$7x'^2 + 60x'y' + 32y'^2 = 0. \qquad (2.25)$$

Rezolvând ecuaţia în raport cu y' obţinem:

$$y_1' = -\frac{x'}{8} \text{ şi } y_2' = -\frac{7x'}{4}.$$

Înlocuind x' cu $x-1$ şi y' cu y obţinem dreptele $x+8y-1=0$, respectiv $7x+4y-7=0$.

II. CONICE FĂRĂ CENTRU $(\delta = 0, \Delta \neq 0)$ SAU CU O INFINITATE DE CENTRE $(\delta = 0, \Delta = 0)$

Considerăm din nou ecuaţia (2.10)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

şi presupunem că $\delta = 0$ şi $\Delta \neq 0$.

Pentru început observăm că $I = a_{11} + a_{22} \neq 0$.

Într-adevăr, în caz contrar, avem $a_{11} = -a_{22}$ şi cum $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, rezultă că $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$ şi deci că $\Delta = 0$, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Dacă $a_{11} \neq 0$, atunci folosind metoda eliminării a lui Gauss, vom avea succesiv:

$$\Delta = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}} \\ \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}} \end{vmatrix}$$

şi mai departe

$$\Delta = \frac{1}{a_{11}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

Deoarece $\delta = 0$ şi $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$ rezultă că

$$\Delta = -\frac{1}{a_{11}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}^2. \tag{2.26}$$

Dacă $a_{11} = 0$ şi $a_{22} \neq 0$ vom obţine

$$\Delta = -\frac{1}{a_{22}} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}^2. \tag{2.27}$$

Cum $\Delta \neq 0$, rezultă că cel puţin unul dintre minorii $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ este nenul.

În particular rezultă că rangul matricei $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ este 2 şi deci că sistemul (2.15) este incompatibil.

Aşadar, în acest caz, pentru simplificarea ecuaţiei (2.10) nu putem începe cu o translaţie ca în cazul $\delta \neq 0$, ci vom începe cu o rotaţie.

Fie forma pătratică

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

a cărei matrice în raport cu reperul $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ este $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Se ştie că există o nouă bază ortonormată $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ în raport cu care φ are forma canonică

$$\varphi(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

unde λ_1, λ_2 sunt valorile proprii ale matricei A, iar $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt vectori proprii corespunzători acestor valori proprii.

Cum $\delta = 0$, ecuaţia caracteristică este

$\lambda^2 - I\lambda = 0$ şi are rădăcinile 0 şi I.

Alegem $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = I \neq 0$. Rezultă că forma canonică este

$$\varphi(x', y') = I \cdot y'^2. \tag{2.28}$$

Matricea de trecere C de la baza ortonormată $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ la baza ortonormată $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ este ortogonală (vezi [9]). Schimbând, eventual, pe $\vec{v}$ cu $-\vec{v}$, putem presupune că

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{ cu } \det C = 1.$$

Avem:

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j} \\ \vec{v} = -\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j} \end{cases} \tag{2.29}$$

şi

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}. \tag{2.30}$$

Inversând relaţiile (2.30) obţinem

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}. \tag{2.30'}$$

Aşadar, în urma rotaţiei (2.30) ecuaţia (2.10) devine

$$I\, y'^2 + 2a'_{13}\, x' + 2a'_{23}\, y' + a_{33} = 0 \tag{2.31}$$

unde

$$\begin{cases} a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha \\ a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha \end{cases}. \tag{2.32}$$

Versorul $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ fiind vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$ verifică ecuaţia

$$a_{11}x + a_{12}y = 0.$$

Cum $\vec{u} = \cos\alpha\ \vec{i} + \sin\alpha\ \vec{j}$ rezultă că avem

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0. \tag{2.33}$$

Să observăm că dacă $a_{11} \neq 0$, atunci $a'_{13} \neq 0$.

Într-adevăr, în caz contrar ar rezulta:

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0 \\ a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha = 0 \end{cases}.$$

Cum acest sistem admite soluţii nebanale, rezultă că

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$ şi deci că $\Delta = 0$ conform (2.26).

În continuare vom arăta cum se exprimă coeficientul a'_{13} în funcţie de coeficienţii ecuaţiei iniţiale (2.10).

Pentru început observăm că

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Înlocuind x şi y cu formulele rotaţiei (2.30) obţinem

$$g(x',y') = f(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\ x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) = I\,y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} =$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & I & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, din (2.30) avem

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Înlocuind în (2.34) obţinem:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & I & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cum această egalitate are loc pentru orice x', y' rezultă următoarea egalitate de matrice:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & I & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Trecând la determinanţi obţinem:

$\Delta = -I \cdot a'^2_{13}$ sau

$$a'^2_{13} = -\frac{\Delta}{I}. \tag{2.35}$$

Din (2.26) deducem că $-\dfrac{\Delta}{I} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}^2}{a_{11} \cdot I}$.

Cum $a_{11}I = a_{11}^2 + a_{11}a_{22} = a_{11}^2 + a_{12}^2 > 0$, rezultă că $-\dfrac{\Delta}{I} > 0$.

Ecuaţia (2.31) se mai scrie:

$y'^2 + \frac{2a'_{23}}{I} y' + \frac{2a'_{13}}{I} x' + \frac{a_{33}}{I} = 0$ şi mai departe

$$\left(y' + \frac{a'_{23}}{I} \right)^2 + 2\frac{a'_{13}}{I} \left(x' - \frac{a'^2_{23}}{2Ia'_{13}} + \frac{a_{33}}{2a'_{13}} \right) = 0 .$$

Dacă notăm cu

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{a'^2_{23}}{2Ia'_{13}} + \dfrac{a_{33}}{2a'_{13}} \\ Y = y' + \dfrac{a'_{23}}{I} \end{cases} \tag{2.36}$$

ecuaţia devine

$$Y^2 + 2\frac{a'_{13}}{I} X = 0 .$$

Ţinând seama de (2.35) obţinem:

$Y^2 \pm 2\sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}}\, X = 0$ sau

$Y^2 \pm 2pX = 0$, unde $p = \sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}}$.

În concluzie, în urma rotaţiei (2.30) şi a translaţiei (2.36), ecuaţia (2.10) capătă forma canonică

$$Y^2 = \pm 2pX \text{, unde} \tag{2.37}$$

$$p = \sqrt{\frac{-\Delta}{I^3}} . \tag{2.38}$$

Evident, ecuaţia (2.37) este ecuaţia unei parabole.

Ecuaţia axei parabolei, în sistemul de coordonate (X, Y), este $Y = 0$ sau

$y' + \frac{a'_{23}}{I} = 0$, conform (2.36).

Ţinând seama de (2.30') şi (2.32) această ecuaţie se mai scrie:

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha + \frac{-a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha}{a_{11}+a_{22}} = 0. \tag{2.39}$$

Pe de altă parte, din (2.33) deducem că

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}}. \tag{2.40}$$

Precizăm că $a_{12} \neq 0$, deoarece în caz contrar, din (2.33) ar rezulta că $a_{11} = 0$, contrar ipotezei făcute.

Din (2.40) deducem:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{a_{12}}{\pm\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\dfrac{a_{11}}{\pm\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}} \end{cases}. \tag{2.41}$$

Înlocuind (2.41) în (2.39) obţinem:

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{a_{11}+a_{22}} = 0 \text{ sau}$$

$$\left(a_{11}+a_{22}\right)a_{11}x + \left(a_{11}+a_{22}\right)a_{12}y + a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} = 0.$$

Cum $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, mai departe avem:

$$\left(a_{11}^2 + a_{12}^2\right)x + \left(a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}\right)y + a_{11}a_{13} + a_{12}a_{13} = 0.$$

Observăm că această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia

$$a_{11}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + a_{12}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{2.42}$$

In concluzie, ecuaţia axei parabolei este dată de (2.42). Coordonatele vârfului parabolei verifică pe de o parte ecuaţia conicei, iar pe de altă parte ecuaţia axei. Aşadar, coordonatele vârfului parabolei se află rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ a_{11}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} + a_{12}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}. \tag{2.43}$$

În sfârşit, pentru alegerea semnului în forma canonică (2.37), intersectăm parabola cu axa $y=0$ şi determinăm orientarea deschiderii parabolei (spre partea pozitivă a axei Ox sau spre partea negativă a acesteia).

Exemplul 2.2.5. Să se aducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic conica:

$$x^2+2xy+y^2+2x-2y+4=0.$$

Avem:

$$a_{11}=a_{12}=a_{22}=1,\ \ a_{13}=1,\ \ a_{23}=-1,\ \ a_{33}=4$$

$$I=2,\ \ \delta=0,\ \ \Delta=-4,\ \ p=\sqrt{-\frac{\Delta}{I^3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Forma canonică este:

$$Y^2=\pm\sqrt{2}\,X.$$

Ecuaţia axei parabolei este:

$$a_{11}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+a_{12}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0\Leftrightarrow 2x+2y+2+2x+2y-2=0 \text{ sau}$$

$$x+y=0.$$

Vârful parabolei se află rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2+2x-2y+4=0 \\ x+y=0. \end{cases}$$

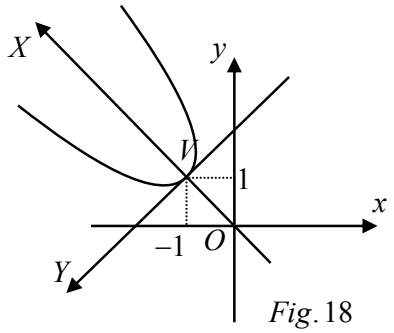


Fig. 18

Coordonatele vârfului parabolei sunt $(-1,1)$.

Unghiul de rotaţie este dat de:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-1, \text{deci}$$

$$\alpha=\frac{3\pi}{4}.$$

Intersectând conica cu axa $Ox\ (y=0)$ obţinem ecuaţia $x^2+2x+4=0$, care nu are rădăcini reale. Deducem că parabola nu intersectează axa Ox, deci că deschiderea sa este înspre partea pozitivă a axei OX. Rezultă că în (2.37) alegem semnul „+”. Prin urmare, ecuaţia canonică a parabolei este:

$$Y^2=\sqrt{2}\,X.$$

În sfârşit să analizăm şi cazul $\delta=0,\ \Delta=0.$

Dacă $a_{11}\neq 0,$ în ecuaţia (2.10) grupăm termenii astfel:

$$a_{11}x^2+2\left(a_{12}y+a_{13}\right)x+a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (2.10")$$

Am obţinut o ecuaţie de gradul doi în x, al cărei discriminant este:

$$\Delta'=4\left(a_{12}^2y^2+2a_{12}a_{13}y+a_{13}^2-a_{11}a_{22}y^2-2a_{11}a_{23}y-a_{11}a_{33}\right).$$

Cum $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$, mai departe avem:

$$\Delta'=8\left(a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}\right)y+4\left(a_{13}^2-a_{11}a_{33}\right).$$

Pe de altă parte, din (2.26) şi din ipoteza $\Delta=0$ deducem că $a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}=0$.

Aşadar, $\Delta'=4\left(a_{13}^2-a_{11}a_{33}\right)$ şi nu depinde de y.

Dacă $\Delta'>0,$ atunci ecuaţia $(2.10")$ are două soluţii distincte:

$$x=\frac{-2\left(a_{12}y+a_{13}\right)\pm\sqrt{\Delta'}}{2a_{11}}. \qquad (2.44)$$

Din punct de vedere geometric (2.44) reprezintă două drepte paralele.

Dacă $\Delta'=0$, atunci ecuaţia $(2.10")$ are două soluţii egale:

$$x=-\frac{a_{12}y+a_{13}}{a_{11}}$$

şi reprezintă două drepte confundate.

În sfârşit, dacă $\Delta'<0,$ ecuaţia $(2.10")$ are rădăcini complexe. În acest caz nici un punct din plan nu verifică această ecuaţie.

Exemplul 2.2.6. Să se reprezinte grafic conica:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0.$$

Avem $a_{11} = 4,\ a_{12} = -2,\ a_{22} = 1,\ a_{13} = 2,\ a_{23} = -1,\ a_{33} = -3$.

$$4x^2 - 4(y-1)x + y^2 - 2y - 3 = 0.$$

$$\Delta' = 16\left(y^2 - 2y + 1 - y^2 + 2y + 3\right) = 64.$$

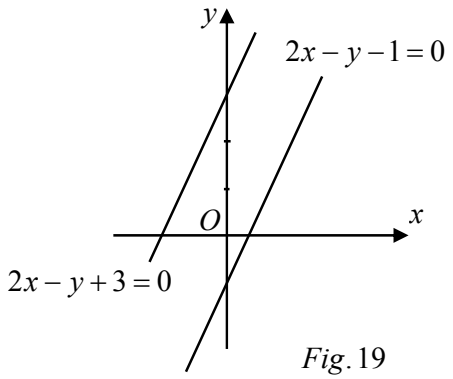


Fig. 19

$$x = \frac{4(y-1) \pm 8}{8}$$

$$x = \frac{y-1+2}{2} = \frac{y+1}{2}$$

$$x = \frac{y-1-2}{2} = \frac{y-3}{2} \text{ sau}$$

$$2x - y - 1 = 0,\ 2x - y + 3 = 0.$$

Probleme propuse

1. Să se determine semiaxele, excentricitatea şi ecuaţiile directoarelor pentru elipsa de ecuaţie $3x^2 + 7y^2 = 21$.

Răspuns: $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$; $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{3}, c = 2$; $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{7}} < 1$; $x \pm \frac{a^2}{c} = 0 \Leftrightarrow x \pm \frac{7}{2} = 0$.

2. Să se determine ecuaţia canonică a unei elipse ale cărei axe coincid cu axele de coordonate *Ox*, *Oy*, a cărei semiaxă mare este 25 şi excentricitate $e = 0{,}8$.

Răspuns: $\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} - 1 = 0$ sau $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{25^2} - 1 = 0$.

3. Să se găsească locul geometric al simetricului unui focar faţă de o tangentă variabilă la elipsa $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-1=0$.

Răspuns: Cercul de centru $C(-4,\ 0)$ şi rază $R=10$.

4. Să se determine semiaxele, excentricitatea, ecuaţiile directoarelor şi ecuaţiile asimptotelor pentru hiperbola $3x^2-7y^2=21$.

Răspuns: $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}-1=0$; $a=\sqrt{7}, b=\sqrt{3}, c=\sqrt{10}$; $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}>1$;

$x\pm\frac{a^2}{c}=0 \Leftrightarrow x\pm\frac{7}{\sqrt{10}}=0$; $y=\pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \sqrt{7}\,y=\pm\sqrt{3}\,x$.

5. Să se scrie ecuaţia canonică a unei hiperbole care trece prin punctul $M\left(6,\ -2\sqrt{2}\right)$, ale cărei asimptote sunt dreptele $x\pm\sqrt{3}y=0$ şi cu axele *Ox* şi *Oy*.

Răspuns: $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}-1=0$.

6. Să se determine ecuaţia canonică a unei hiperbole ale cărei axe coincid cu *Ox* şi *Oy* şi pentru care dreptele $(d_1): x+y-3=0$ şi $(d_2): 2\sqrt{2}x+\sqrt{5}y+3\sqrt{10}=0$ sunt tangente. Să se determine coordonatele punctelor de tangenţă dintre hiperbolă şi dreptele (d_1) şi (d_2).

Răspuns: $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}-1=0$; $M_1(5,\ -2)$, $M_2\left(-2\sqrt{5},\ \sqrt{2}\right)$.

7. Fie elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}-1=0$. Să se afle ecuaţia canonică a unei hiperbole cu axele *Ox* şi *Oy*, care are aceleaşi focare ca şi elipsa şi asimptotele $4x\pm3y=0$.

Răspuns: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-1=0$.

8. Să se determine punctele de intersecţie ale elipsei (E) cu dreapta (d), unde

a) $(E): x^2 + 4y^2 - 25 = 0$ şi $(d): x + 2y - 7 = 0$;

b) $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ şi $(d): 3x + 10y - 25 = 0$;

a) $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ şi $(d): 3x - 4y - 40 = 0$.

Răspuns: a) Dreapta şi elipsa sunt secante în punctele $M_1(3,2)$ şi $M_2\left(4,\frac{3}{2}\right)$; b) Dreapta şi elipsa sunt tangente în punctul $M\left(3,\frac{8}{5}\right)$; c) Dreapta este exterioară elipsei.

9. Să se determine punctele de intersecţie ale hiperbolei (H) cu dreapta (d), unde

a) $(H): 4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ şi $(d): 2x - y + 1 = 0$;

b) $(H): \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} - 1 = 0$ şi $(d): 2x - y - 10 = 0$;

a) $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ şi $(d): 4x - 3y - 16 = 0$.

Răspuns: a) Dreapta este exterioară hiperbolei; b) Dreapta şi hiperbola sunt secante în punctele $M_1(6,2)$ şi $M_2\left(\frac{14}{3},-\frac{2}{3}\right)$; c) Dreapta şi hiperbola sunt tangente în punctul $M\left(\frac{25}{4},3\right)$.

10. Să se determine ecuaţiile tangentelor la hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = 16$ care trec prin punctul $M(-1,7)$.

Răspuns: $5x + 3y - 16 = 0$ şi $13x - 5y + 48 = 0$.

11. Să se stabilească natura conicelor, să se găsească semiaxele acestora, coordonatele centrului, excentricitatea, cât şi ecuaţiile directoarelor:

a) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$;

b) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;

c) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

d) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.

Răspuns: a) Elipsă; $a=2\sqrt{3}$, $b=4$, $C(1,-2)$, $e=\frac{1}{2}$, Directoare: $\begin{cases} y=6 \\ y=-10 \end{cases}$;

b) Elipsă; $a=5$, $b=4$, $C(-1,2)$, $e=\frac{3}{5}$, Directoare: $\begin{cases} 3x-22=0 \\ 3x+28=0 \end{cases}$;

c) Hiperbolă; $a=3$, $b=4$, $C(2,-3)$, $e=\frac{5}{3}$, Directoare: $\begin{cases} 5x-1=0 \\ 5x-19=0 \end{cases}$;

Asimptote: $\begin{cases} 4x+3y+1=0 \\ 4x-3y-17=0 \end{cases}$;

d) Hiperbolă; $a=8$, $b=6$, $C(-5,1)$, $e=\frac{5}{4}$, Directoare: $\begin{cases} 5x+57=0 \\ 5x-7=0 \end{cases}$;

Asimptote: $\begin{cases} 3x+4y+11=0 \\ 3x-4y+19=0 \end{cases}$.

12. Să se determine ecuaţia canonică a unei parabole cu axa parabolei *Ox* în cazurile:

a) are focarul $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\ 0\right)$;

b) dreapta $4x+11=0$ este directoarea;

c) distanţa de la focar la vârf este egală cu $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

d) trece prin punctul $M\left(-\frac{12}{5},\ 2\right)$.

Răspuns: a) $y^2=-\sqrt{2}x$; b) $y^2=11x$; c) $y^2=\pm 2\sqrt{5}x$; d) $y^2=-\frac{5}{3}x$.

13. Să se determine ecuaţia tangentei la parabola $y^2 - 2x = 0$:

a) în punctul cu ordonata $y = 4$;

b) paralelă cu dreapta $x - 2y + 3 = 0$;

c) perpendiculară pe dreapta $2x + 3y - 5 = 0$.

Răspuns: a) $x - 4y + 8 = 0$; b) $x - 2y + 2 = 0$; c) $9x - 6y + 2 = 0$.

14. Să se stabilească natura conicelor, să se reducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic:

a) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$;

b) $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 36x - 36y - 36 = 0$;

c) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$;

d) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;

e) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 16x - 16y = 0$;

f) $7x^2 - 6xy - y^2 - 2x + 10y - 1 = 0$;

g) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

h) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

i) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$;

j) $2x^2 - 8xy + 8y^2 + 4x + 2y - 2 = 0$;

k) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;

l) $2x^2 - xy - y^2 + 11x - 5y + 14 = 0$;

m) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 9x - 27y - 22 = 0$;

n) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 9 = 0$;

o) $4x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3 = 0$;

p) $9x^2+4xy+6y^2+10x+3=0$.

Răspuns: a) Elipsă: $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}-1=0,\ C(-1,3),\ \theta=0$; Axe: $x+1=0,\ y-3=0$;

b) Elipsă: $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}-1=0,\ C(1,1),\ \theta=\frac{\pi}{4}$; Axe: $x-y=0,\ x+y-2=0$;

c) Elipsă: $\frac{X^2}{8}+\frac{Y^2}{4}-1=0,\ C(1,2),\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; Axe: $x-2y+3=0,\ 2x+y-4=0$;

d) Elipsă: $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}-1=0,\ C(2,3),\ \theta=\operatorname{arctg}2$; Axe: $2x-y-1=0,\ x+2y-8=0$;

e) Hiperbolă: $\frac{X^2}{32}-\frac{Y^2}{8}-1=0,\ C(-4,-4),\ \theta=\frac{\pi}{4}$; Axe: $x-y=0,\ x+y+8=0$;

f) Hiperbolă: $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{1}-1=0,\ C(1,2),\ \theta=\operatorname{arctg}3$, Axe: $3x-y-1=0,\ x+3y-7=0$;

g) Hiperbolă: $\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{4}-1=0,\ C(2,-1),\ \theta=\frac{\pi}{4}$, Axe: $x-y-3=0,\ x+y-1=0$;

h) Parabolă: $Y^2=4\sqrt{2}X$, axa: $x-y-1=0$, $V(2,1),\ \theta=\frac{\pi}{4}$;

i) Parabolă: $Y^2=-2\sqrt{2}X$, axa: $x+y-2=0$, $V(1,1),\ \theta=\frac{3\pi}{4}$;

j) Parabolă: $Y^2=-\frac{1}{\sqrt{5}}X$, axa: $x-2y=0$, $V\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right),\ \theta=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

k) Parabolă: $Y^2=2X$, axa: $3x+4y=0$, $V(0,0),\ \theta=-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$;

l) Hiperbolă degenerată în drepte concurente: $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 2x+y+7=0 \end{cases}$;

m) Parabolă degenerată în drepte paralele distincte: $\begin{cases} x-3y+11=0 \\ x-3y-\ 2=0 \end{cases}$;

n) Parabolă degenerată în drepte paralele imaginare; o) Elipsă imaginară;

p) Elipsă degenerată în drepte concurente imaginare, adică degenerată în punctul $C\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

15. Se consideră familia de conice $\lambda x^2+4xy+(\lambda-3)y^2+10x+3=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

a) Să se discute natura conicelor familiei în funcţie de parametrul real λ.

b) Să se afle locul geometric al centrelor conicelor din familie şi să se reprezinte grafic.

c) Să se aducă la forma canonică şi să se reprezinte grafic hiperbola echilateră din familie.

d) Să se afle conicele degenerate din familie.

Răspuns: a) $\lambda\in(-\infty,-1)\cup(4,9)$ elipse reale; $\lambda\in\{-1,4\}$ parabole; $\lambda=\frac{3}{2}$ o hiperbolă echilateră; $\lambda\in\left(-1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\frac{7}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{3},4\right)$ hiperbole; $\lambda=\frac{7}{3}$ două drepte secante reale; $\lambda=9$ două drepte secante imaginare; $\lambda\in(9,+\infty)$ elipse imaginare; b) Locul geometric este o hiperbolă echilateră: $2x^2-3xy-2y^2-5y=0$; c) $\lambda=\frac{3}{2}$; hiperbolă echilateră de ecuaţie generală $3x^2+8xy-3y^2+20x+6=0$; ecuaţia canonică: $X^2-Y^2=\frac{\sqrt{30}}{5}$; $C\left(-\frac{6}{5},-\frac{8}{5}\right)$; $\theta=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; d) $\lambda=\frac{7}{3}$, conica $7x^2+12xy-2y^2+30x+9=0$ degenerează în două drepte secante reale $\begin{cases}\left(6-5\sqrt{2}\right)x-2y-3\sqrt{2}=0\\ \left(6+5\sqrt{2}\right)x-2y+3\sqrt{2}=0\end{cases}$; $\lambda=9$, conica $9x^2+4xy+6y^2+10x+3=0$ degenerează în două drepte secante imaginare, adică degenerează în punctul $C\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

16. Se consideră conicele (Γ_1) şi (Γ_2) de ecuaţii generale $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$, respectiv $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$. Se cere:

a) Să se stabilească natura conicelor şi centrele lor.

b) Să se scrie ecuaţia fasciculului de conice determinat de (Γ_1) şi (Γ_2).

c) Să se determine locul geometric al centrelor conicelor fasciculului şi natura lui.

d) Să se determine ecuaţia hiperbolei echilatere din fascicul.

e) Să se determine conica din fascicul care trece prin originea axelor de coordonate.

f) Să se determine ecuaţia cercului din fascicul.

Răspuns: a) (Γ_1): hiperbolă cu centrul $C_1(0,-1)$; (Γ_2): elipsă reală cu centrul $C_2(-1,-1)$;

b) $(1+3\lambda)x^2+(6-2\lambda)xy+(1+3\lambda)y^2+(6+4\lambda)x+(2+4\lambda)y-1-4\lambda=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$;

c) Locul geometric este hiperbola echilateră: $5x^2-5y^2+5x-7y-2=0$;

d) $20xy+14x+2y+1=0$; e) $x^2+26xy+y^2+20x+4y=0$;

f) Cercul: $10x^2+10y^2+18x+14y-13=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{9}{10}\right)^2+\left(y+\frac{7}{10}\right)^2=\frac{13}{5}$.

17. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica $x^2-5xy+3y^2+5x+3y-6=0$ în punctele de intersecţie cu axele de coordonate.

Răspuns: Tangenta în $M_1(-6,0)$: $7x-33y+42=0$; Tangenta în $M_2(1,0)$: $7x-2y-7=0$; Tangenta în $M_3(0,-2)$: $15x-9y-18=0$; Tangenta în $M_4(0,1)$: $y-1=0$.

18. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ duse din punctul $M(-2,1)$.

Răspuns: $7x+4y+10-0$.

19. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la conica $x^2+xy+y^2+2x+3y-3=0$ paralele cu dreapta $3x+3y-5=0$. Să se afle coordonatele punctelor de contact.

Răspuns: Tangentele: $x+y+6=0$ şi $3x+3y+2=0$; Punctele de contact: $M_1\left(-\frac{5}{3},-\frac{8}{3}\right)$ şi $M_2(1,0)$.

C A P I T O L U L 3

C U A D R I C E

Cuadricile sunt suprafeţele din spaţiu analoage conicelor din plan. Mai precis, sunt suprafeţele care în raport cu un sistem ortogonal de coordonate $Oxyz$ au o ecuaţie de forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (3.1)$$

unde cel puţin unul din coeficienţii $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ este nenul.

Se poate arăta, printr-un raţionament analog cu cel făcut la reducerea la forma canonică a conicelor, că printr-o rotaţie în jurul originii şi o translaţie a axelor de coordonate, ecuaţia (3.1) capătă în cele din urmă una din formele canonice de mai jos:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (Elipsoid)

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ (Elipsoid imaginar)

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (Hiperboloid cu o pânză)

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ (Hiperboloid cu două pânze)

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (Con)

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ (Con imaginar)

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ (Paraboloid eliptic)

8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ (Paraboloid hiperbolic)

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (Cilindru eliptic)

10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ (Cilindru eliptic imaginar)

11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (Axa Oz)

12) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (Cilindru hiperbolic)

13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (Pereche de plane secante)

14) $y^2-2px=0$ (Cilindru parabolic)

15) $x^2-a^2=0$ (Pereche de plane paralele)

16) $x^2+a^2=0$ (Pereche de plane paralele imaginare)

17) $x^2=0$. (Pereche de plane confundate)

După cum observăm, ultimele nouă ecuaţii, 9) – 17), nu conţin z. Dacă punctul de coordonate $(x,y,0)$ verifică o asemenea ecuaţie, atunci şi punctul (x,y,z) o verifică, oricare ar fi z.

În spaţiu, aceste ecuaţii reprezintă cilindri cu generatoarele paralele cu Oz şi curbe directoare, conicele din planul xOy ale căror ecuaţii canonice sunt ecuaţiile 9) – 17).

De asemenea, observăm că dintre ecuaţiile 1) – 8), ecuaţia 2) nu e satisfăcută de nici un punct din plan, iar ecuaţia 6) este satisfăcută numai de punctul $(0,0,0)$, adică originea sistemului de coordonate. Rămâne să ne ocupăm de ecuaţiile 1), 3), 4), 5), 7) şi 8).

3.1. ELIPSOIDUL

Elipsoidul este suprafaţa a cărei ecuaţie în sistemul ortogonal de coordonate $Oxyz$ este:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{3.2}$$

unde $a \geq b \geq c > 0$.

Pentru început observăm că dacă punctul de coordonate (x,y,z) verifică ecuaţia (3.2), atunci şi punctele $(-x,y,z)$, $(x,-y,z)$, $(x,y,-z)$, $(-x,-y,z)$, $(-x,y,-z)$, $(x,-y,-z)$, $(-x,-y,-z)$ o verifică.

Rezultă că elipsoidul este simetric în raport cu planele de coordonate, axele de coordonate şi originea axelor.

De asemenea, din ecuaţia (3.2) deducem că $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$, deci că elipsoidul este o suprafaţă mărginită, inclusă în paralelipipedul dreptunghic de laturi $2a, 2b, 2c,$ paralele cu axele de coordonate.

Pentru a preciza forma elipsoidului folosim metoda „secţiunilor paralele”.

Pentru început intersectăm elipsoidul cu plane paralele cu planul xOy, adică cu plane de ecuaţie $z=h$. Curba de intersecţie va avea ecuaţiile:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases}. \tag{3.3}$$

Observăm că dacă $|h|<c$, ecuaţiile (3.3) reprezintă o elipsă reală, conţinută în planul $z=h$, de semiaxe:

$$a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \text{ şi } b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}. \tag{3.4}$$

Semiaxele a^*, b^* au valori maxime pentru $h=0$ şi se micşorează pe măsură ce h creşte. Când $h=\pm c$, elipsa de intersecţie se reduce la un punct. Rezultă că planele $z=\pm c$ sunt tangente elipsoidului.

Dacă $|h| > c$, elipsa de intersecţie (3.3) este imaginară, deci planul $z = h$ nu întâlneşte suprafaţa.

O analiză absolut analoagă se poate face pentru intersecţiile elipsoidului cu plane paralele cu xOz $(y = h)$, respectiv yOz $(x = h)$.

În rezumat, putem spune că elipsoidul este o suprafaţă mărginită, înscrisă în paralelipipedul de laturi $2a$, $2b$ şi $2c$, paralele cu axele de coordonate, simetrică în raport cu planele de coordonate, axele de coordonate şi originea axelor.

Orice intersecţie cu plane paralele cu planele de coordonate este o elipsă reală sau imaginară.

Reprezentarea grafică este dată în Figura 1.

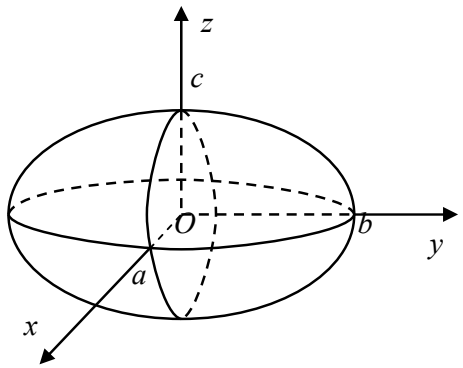


Fig. 1

Dacă $a = b$, ecuaţiile (3.3) reprezintă un cerc cu centrul pe axa Oz. În acest caz elipsoidul se numeşte ***de rotaţie*** şi se obţine prin rotaţia elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ în jurul axei Oz.

Tot elipsoizi de rotaţie avem şi în cazurile $a = c$ şi $b = c$.

În sfârşit, dacă $a = b = c = r$, ecuaţia (3.2) devine:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{3.5}$$

şi reprezintă ***ecuaţia sferei cu centrul în origine şi de rază*** r.

Ecuaţia sferei cu centrul în punctul (x_0, y_0, z_0) şi de rază r este:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ sau

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0 \tag{3.6}$$

unde $m = -2x_0$, $n = -2y_0$, $p = -2z_0$ şi $q = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$.

Exemplul 3.1.1. Să se afle coordonatele centrului şi raza sferei:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0.$$

Avem $m = -4$, $n = 2$, $p = -6$ şi $q = -2$.

Coordonatele centrului sunt:

$$x_0 = -\frac{m}{2} = 2;\ y_0 = -\frac{n}{2} = -1;\ z_0 = -\frac{p}{2} = 3.$$

Raza sferei se determină din relaţia:

$r^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - q = 4 + 1 + 9 + 2 = 16$, deci $r = 4$.

3.2. HIPERBOLOIDUL CU O PÂNZĂ

Hiperboloidul cu o pânză este suprafaţa a cărei ecuaţie în sistemul ortogonal de coordonate $Oxyz$ are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{3.7}$$

unde $a \geq b > 0$, $c > 0$.

Ca şi în cazul elipsoidului, observăm că hiperboloidul cu o pânză este o suprafaţă simetrică în raport cu planele de coordonate, cu axele de coordonate şi cu originea sistemului de coordonate.

Curba de intersecţie a hiperboloidului cu o pânză cu planul $z = h$, paralel cu xOy, este

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}. \tag{3.8}$$

Ecuaţiile (3.8) sunt ecuaţiile unei elipse reale de semiaxe:

$$a^* = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\ b^* = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \tag{3.9}$$

Observăm că semiaxele a^* şi b^* sunt minime pentru $h=0$ şi cresc nedefinit pe măsură ce h creşte. Cu alte cuvinte, „cea mai mică elipsă" corespunde intersecţiei hiperboloidului cu o pânză cu planul xOy $(z=0)$. Această elipsă poartă numele de „***elipsa colier***".

Intersecţiile suprafeţei cu plane $x=h$, paralele cu yOz, sunt hiperbole de semiaxe:

$b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$, dacă $|h|<a$, respectiv

$b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$, $c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$, dacă $|h|>a$.

Dacă $|h|=a$, intersecţia reprezintă perechea de drepte concurente:

$$\begin{cases} \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0 \\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \end{cases}. \tag{3.10}$$

În mod analog, intersecţiile suprafeţei cu plane $y=h$, paralele cu xOz, sunt hiperbole de semiaxe:

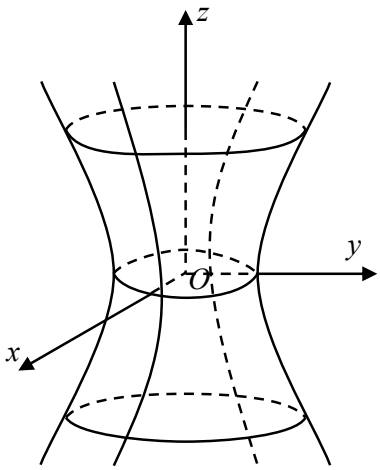


Fig. 2

$a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$, dacă $|h|<b$, respectiv

$a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}$, $c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}-1}$, dacă $|h|>b$.

Dacă $|h|=b$, intersecţia este perechea de drepte concurente:

$$\begin{cases} \frac{y}{a}-\frac{z}{c}=0 \\ \frac{y}{a}+\frac{z}{c}=0 \end{cases}. \tag{3.11}$$

Reprezentarea grafică a hiperboloidului cu o pânză este prezentată în Figura 2.

3.3. GENERATOARELE RECTILINII ALE HIPERBOLOIDULUI CU O PÂNZĂ

O suprafaţă se numeşte riglată dacă este generată de o familie de drepte. Mai precis:

Definiţia 3.3.1. *O suprafaţă S se numeşte* ***riglată****, dacă există o familie de drepte situate* (*în întregime*) *pe suprafaţa S şi prin orice punct al suprafeţei S trece o dreaptă din această familie.*

Aceste drepte se numesc ***generatoarele rectilinii*** *ale suprafeţei S.*

În cele ce urmează vom arăta că hiperboloidul cu o pânză este o suprafaţă riglată.

Teorema 3.3.1. *Prin fiecare punct al hiperboloidului cu o pânză trec două şi numai două generatoare rectilinii.*

Demonstraţie.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare pe hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0. \tag{3.12}$$

O dreaptă oarecare care trece prin punctul M_0 are ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{3.13}$$

Evident, această dreaptă se află pe hiperboloid dacă şi numai dacă verifică ecuaţia (3.12), adică

$$\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}-\frac{(z_0+nt)^2}{c^2}=1,\ \ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Efectuând calculele şi ţinând seama că

$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$, obţinem:

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0 l}{a^2}+\frac{y_0 m}{b^2}-\frac{z_0 n}{c^2}\right)t=0. \tag{3.14}$$

Pentru ca relaţia (3.14) să fie adevărată pentru orice $t \in \mathbb{R}$ este necesar ca:

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{x_0 l}{a^2} + \frac{y_0 m}{b^2} - \frac{z_0 n}{c^2} = 0 . \tag{3.16}$$

Aşadar, dreapta (3.13) se află pe hiperboloidul cu o pânză (3.12) dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile (3.15) şi (3.16).

Din (3.15) deducem că $n \neq 0$, pentru că în caz contrar $l = m = n = 0$ şi dreapta (3.13) nu e definită.

Cum parametrii directori ai unei drepte sunt determinaţi în afara unui factor de proporţionalitate, putem presupune că $n = c$, de unde rezultă că:

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1 \tag{3.15'}$$

$$\frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} = \frac{z_0}{c} . \tag{3.16'}$$

În continuare ne propunem să rezolvăm sistemul format din ecuaţiile (3.15') şi (3.16').

Din (3.15') deducem că există $\varphi \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$l = a\cos\varphi \text{ şi } m = b\sin\varphi . \tag{3.17}$$

Înlocuind (3.17) în (3.16') rezultă

$$\frac{x_0}{a} \cdot \cos\varphi + \frac{y_0}{b} \cdot \sin\varphi = \frac{z_0}{c} . \tag{3.18}$$

Trecând al doilea termen din membrul stâng în membrul drept şi ridicând la pătrat obţinem:

$$\frac{x_0^2}{a^2}\cos^2\varphi = \frac{z_0^2}{c^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\sin^2\varphi - 2\frac{y_0 z_0}{bc}\sin\varphi \text{ şi mai departe}$$

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)\sin^2\varphi - 2\frac{y_0 z_0}{bc}\sin\varphi - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 0 . \tag{3.19}$$

Ecuaţiile (3.19) au două soluţii, anume:

$$\sin\varphi = \frac{\dfrac{y_0 z_0}{bc} \pm \dfrac{x_0}{a}}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}. \tag{3.20}$$

Înlocuind (3.20) în (3.18) găsim:

$$\cos\varphi = \frac{\dfrac{x_0 z_0}{ac} \mp \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}. \tag{3.21}$$

Rezultă că există două generatoare rectilinii care trec prin punctul M_0, anume:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \dfrac{\dfrac{x_0 z_0}{ac} - \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}\, t \\ y = y_0 + b \cdot \dfrac{\dfrac{y_0 z_0}{bc} + \dfrac{x_0}{a}}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}\, t \\ z = z_0 + ct \qquad\qquad , \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.22}$$

respectiv

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \dfrac{\dfrac{x_0 z_0}{ac} + \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}\, t \\ y = y_0 + b \cdot \dfrac{\dfrac{y_0 z_0}{bc} - \dfrac{x_0}{a}}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}\, t \\ z = z_0 + ct \qquad\qquad , \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Exemplul 3.3.1. Să se determine generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1,$$

care trec prin punctul $M_0(5,-4,2)$.

Se verifică imediat că punctul M_0 se află pe hiperboloid.

Avem $a=5,\ b=4,\ c=2,\ x_0=5,\ y_0=-4,\ z_0=2$.

Ecuaţiile generatoarelor rectilinii sunt:

$$\begin{cases} x = 5+5\cdot\dfrac{\dfrac{5\cdot 2}{5\cdot 2}-\dfrac{-4}{4}}{\dfrac{25}{25}+\dfrac{16}{16}}\,t = 5+5t \\ y = -4+4\cdot\dfrac{\dfrac{-4\cdot 2}{4\cdot 2}+\dfrac{5}{5}}{\dfrac{25}{25}+\dfrac{16}{16}}\,t = -4 \\ z = 2+2t, \qquad t\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{3.24}$$

respectiv

$$\begin{cases} x = 5+5\cdot\dfrac{\dfrac{5\cdot 2}{5\cdot 2}+\dfrac{-4}{4}}{\dfrac{25}{25}+\dfrac{16}{16}}\,t = 5 \\ y = -4+4\cdot\dfrac{\dfrac{-4\cdot 2}{4\cdot 2}-\dfrac{5}{5}}{\dfrac{25}{25}+\dfrac{16}{16}}\,t = -4-4t \\ z = 2+2t, \qquad t\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Ecuaţiile (3.24) se pot pune sub forma echivalentă:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{5}=\dfrac{z-2}{2} \\ y=-4 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 2x-5z=0 \\ y+4=0 \end{cases} \tag{3.24'}$$

Ecuaţiile (3.25) se mai scriu:

$$\begin{cases} x=5 \\ \dfrac{y+4}{-4}=\dfrac{z-2}{2} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x-5=0 \\ y+2z=0 \end{cases}. \tag{3.25'}$$

Observaţia 3.3.1. Orice generatoare rectilinie a hiperboloidului cu o pânză intersectează elipsa colier.

Într-adevăr, orice generatoare rectilinie a hiperboloidului cu o pânză intersectează planul xOy, deoarece al treilea parametru director al său este $n = c \neq 0$.

Punctul de intersecţie $M_1(x_1, y_1, 0)$ se află evident pe hiperboloid, deci pe elipsa colier. Punctul M_1 de intersecţie dintre generatoarea rectilinie (3.22) şi elipsa colier se află astfel:

În ultima ecuaţie din (3.22) facem $z = 0$ şi deducem că $t = -\frac{z_0}{c}$. Introducând această valoare a lui t în primele două ecuaţii din (3.22) obţinem:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_0 + \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{z_0}{c} y_0}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}} \\ y_1 = \dfrac{y_0 - \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{z_0}{c} x_0}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}. \end{cases}$$

Un rezultat analog se obţine şi în cazul generatoarei (3.23).

Pe de altă parte, scriind ecuaţiile parametrice ale generatoarelor (3.22) şi (3.23) care trec prin punctul $M_1(x_1, y_1, 0)$ de pe elipsa colier obţinem:

$$\begin{cases} x = x_1 - \dfrac{a y_1}{b} t \\ y = y_1 + \dfrac{b x_1}{a} t \\ z = ct \qquad , \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.26}$$

respectiv

$$\begin{cases} x = x_1 + \dfrac{a y_1}{b} t \\ y = y_1 - \dfrac{b x_1}{a} t \\ z = ct \qquad , \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Din discuţia de mai sus rezultă că orice generatoare rectilinie a hiperboloidului cu o pânză este de forma (3.26) sau de forma (3.27).

Împărţim generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză în două clase.

În prima clasă intră generatoarele rectilinii (3.26), iar în a doua clasă generatoarele rectilinii (3.27), unde $(x_1, y_1, 0)$ este un punct oarecare de pe elipsa colier.

Cu aceste precizări Teorema 3.3.1. se poate reformula astfel:

Teorema 3.3.2. *Prin orice punct al hiperboloidului cu o pânză trece o pereche de generatoare rectilinii, una din prima clasă* (3.26) *şi cealaltă din a doua clasă* (3.27).

Teorema 3.3.3. *Orice două generatoare rectilinii din clase diferite sunt coplanare. Ele sunt paralele dacă şi numai dacă punctele în care intersectează elipsa colier sunt simetrice faţă de origine.*

Demonstraţie.

Fie două generatoare rectilinii din clase diferite:

$$\begin{cases} x = x_1 - \dfrac{ay_1}{b}t \\ y = y_1 + \dfrac{bx_1}{a}t \\ z = ct \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = x_2 + \dfrac{ay_2}{b}t \\ y = y_2 - \dfrac{bx_2}{a}t \\ z = ct \end{cases}$$

unde $M_1(x_1, y_1, 0)$ şi $M_2(x_2, y_2, 0)$ sunt puncte pe elipsa colier.

Dacă vom arăta că vectorii

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$\vec{u}_1 = -\frac{ay_1}{b}\vec{i} + \frac{bx_1}{a}\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{ay_2}{b}\vec{i} - \frac{bx_2}{a}\vec{j} + c\vec{k}$$

sunt coplanari, va rezulta că cele două generatoare se află în acelaşi plan.

Acest lucru rezultă din următorul calcul:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ -\dfrac{ay_1}{b} & \dfrac{bx_1}{a} & c \\ \dfrac{ay_2}{b} & -\dfrac{bx_2}{a} & c \end{vmatrix} = c\left[\frac{b}{a}\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \frac{a}{b}\left(y_2^2 - y_1^2\right)\right] = abc\left[\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right) - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)\right] =$$

$$= abc \cdot (1-1) = 0.$$

Pe de altă parte, cele două generatoare sunt paralele dacă şi numai dacă

$$\frac{-\dfrac{ay_1}{b}}{\dfrac{ay_2}{b}} = \frac{\dfrac{bx_1}{a}}{-\dfrac{bx_2}{a}} = \frac{c}{c}, \text{ adică dacă}$$

$x_1 = -x_2$ şi $y_1 = -y_2$.

Teorema 3.3.3. *Orice două generatoare rectilinii din aceeaşi clasă nu se intersectează.*

Demonstraţie.

Fie două generatoare rectilinii oarecare din aceeaşi clasă, de exemplu

$$\begin{cases} x = x_1 - \dfrac{ay_1}{b}\, t \\ y = y_1 + \dfrac{bx_1}{a}\, t \\ z = ct \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = x_2 - \dfrac{ay_2}{b}\, t \\ y = y_2 + \dfrac{bx_2}{a}\, t \\ z = ct, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Deoarece:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ -\dfrac{ay_2}{b} & \dfrac{bx_2}{a} & c \\ -\dfrac{ay_1}{b} & \dfrac{bx_1}{a} & c \end{vmatrix} = -c\left[\frac{b}{a}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{a}{b}\left(y_2 - y_1\right)^2\right] \neq 0,$$

rezultă că cele două generatoare nu se întâlnesc.

3.4. HIPERBOLOIDUL CU DOUĂ PÂNZE

Hiperboloidul cu două pânze este suprafaţa a cărei ecuaţie în raport cu sistemul ortogonal de coordonate $Oxyz$ este:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0, \tag{3.28}$$

unde $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Se observă imediat că hiperboloidul ce două pânze este o suprafaţă simetrică în raport cu planele de coordonate, cu axele de coordonate şi cu originea sistemului de coordonate.

Intersecţia suprafeţei cu planul $z=h$ este elipsa de ecuaţii:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{cases}. \tag{3.29}$$

Dacă $|h|>c$, ecuaţiile (3.29) reprezintă o elipsă reală de semiaxe:

$$a^*=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\ b^*=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

Când h creşte, semiaxele elipsei cresc nedefinit, deci hiperboloidul cu două pânze este suprafaţă nemărginită.

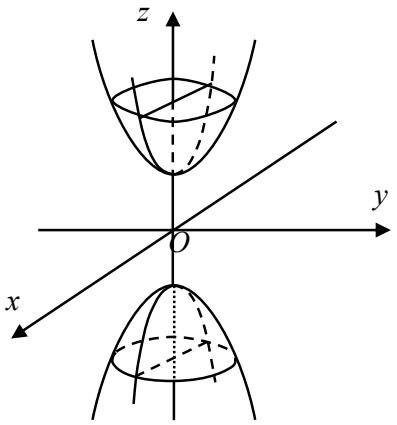


Fig. 3

Dacă $h=c$, elipsa (3.29) se reduce la punctul $(0,0,c)$.

Rezultă că planul $z=c$ este tangent la suprafaţă.

Aceeaşi situaţie are loc şi pentru $h=-c$.

Dacă $|h|<c$, ecuaţiile (3.29) reprezintă o elipsă imaginară. Cu alte cuvinte, planul $z=h$, cu $|h|<c$, nu întâlneşte suprafaţa.

Intersecţiile suprafeţei cu plane $x=h$, respectiv $y=h$ sunt hiperbole. Reprezentarea grafică a hiperboloidul ce două pânze este prezentată în Figura 3.

3.5. CONUL

Conul este suprafaţa a cărei ecuaţie în raport cu sistemul de coordonate $Oxyz$ este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{3.30}$$

unde $a \geq b > 0$, $c > 0$.

Este evident că suprafaţa este simetrică în raport cu planele de coordonate, cu axele de coordonate şi cu originea sistemului de coordonate.

De asemenea observăm că dacă punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ se află pe suprafaţă, $M_0 \neq O$, atunci şi punctul $M(tx_0, ty_0, tz_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ se află pe suprafaţă. Într-adevăr,

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tz_0)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)=0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Aşadar, dacă punctul M_0 se află pe con, atunci şi dreapta OM_0 se află pe con. Cu alte cuvinte, conul este o suprafaţă riglată, generată de o familie de drepte ce trec prin origine (generatoarele conului).

Intersecţiile conului cu plane $z = h$ sunt elipsele reale:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \tag{3.31}$$

de semiaxe $a^* = \dfrac{a|h|}{c}$, $b^* = \dfrac{b|h|}{c}$.

Evident, semiaxele a^*, b^* cresc pe măsură ce $|h|$ creşte, de unde rezultă că suprafaţa este nemărginită.

Intersecţia conului cu planul $z = 0$ se reduce la punctul $O(0,0,0)$.

Curbele de intersecţie ale conului cu planele $x = h$, respectiv $y = h$ sunt hiperbole. Dacă $a = b$, elipsele (3.31) devin cercuri şi conul se numeşte ***de rotaţie***.

Reprezentarea grafică este prezentată în Figura 4.

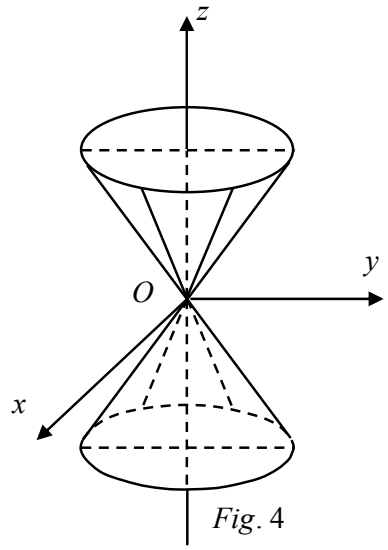


Fig. 4

3.6. PARABOLOIDUL ELIPTIC

Paraboloidul eliptic este suprafaţa care în raport cu sistemul ortogonal de coordonate $Oxyz$ are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z\,, \tag{3.32}$$

unde $a \geq b > 0$.

Suprafaţa este simetrică în raport cu planele Oxz şi Oyz şi cu axa Oz.

Dacă intersectăm suprafaţa cu planul $z=h$ obţinem elipsa:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2h \\ z=h \end{cases}. \tag{3.33}$$

Dacă $h>0$, (3.33) reprezintă o elipsă reală de semiaxe $a^*=a\sqrt{2h}$, $b^*=b\sqrt{2h}$. Se observă că pe măsură ce h creşte, semiaxele elipsei de intersecţie cresc. Prin urmare suprafaţa este nemărginită.

Dacă $h=0$, elipsa (3.33) se reduce la un punct, anume originea $O(0,0,0)$ a sistemului de coordonate. Rezultă că planul xOy este tangent în origine la suprafaţă.

Dacă, $h<0$ elipsa (3.33) este imaginară. Rezultă că planele $z=h,\ \ h<0$ nu intersectează suprafaţa, deci că suprafaţa se află deasupra planului xOy.

Curba de intersecţie a suprafeţei cu planul $x=h$ este parabola:

$$\begin{cases} y^2 = 2b^2 z - \dfrac{b^2}{a^2}h^2 \\ x = h. \end{cases} \tag{3.34}$$

În mod analog, intersecţiile paraboloidului eliptic cu plane $y=h$ sunt parabole.

În sfârşit, dacă $a=b$, paraboloidul se numeşte ***de rotaţie*** şi se obţine prin rotirea în jurul axei Oz a parabolei $x^2=2a^2z$.

Reprezentarea grafică a paraboloidului eliptic este prezentată în Figura 5.

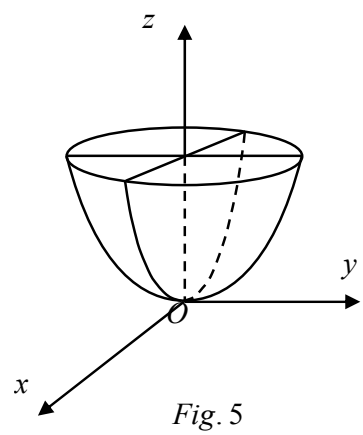


Fig. 5

3.7. PARABOLOIDUL HIPERBOLIC

Paraboloidul hiperbolic este suprafaţa a cărei ecuaţie în raport cu sistemul ortogonal de coordonate $Oxyz$ este

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, \tag{3.35}$$

unde $a>0, b>0$.

Suprafaţa este simetrică în raport cu planele Oxz şi Oyz şi cu axa Oz.

Intersecţia suprafeţei cu planul $z=h$ este hiperbola:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h \\ z=h \end{cases} \tag{3.36}$$

de semiaxe $a\sqrt{2h}$, $b\sqrt{2h}$, dacă $h>0$, respectiv $a\sqrt{-2h}$, $b\sqrt{-2h}$, dacă $h<0$.

În primul caz, semiaxele hiperbolei de intersecţie cresc de la 0 la ∞ pe măsură ce h creşte de la 0 la ∞, iar în al doilea caz, descresc de la ∞ la 0, când h creşte de la $-\infty$ la 0.

Intersecţia suprafeţei cu planul $x = h$ este parabola:

$$\begin{cases} y^2 = b^2\left(\dfrac{h^2}{a^2} - 2z\right) \\ x = h \end{cases}. \tag{3.37}$$

Această parabolă are axa de simetrie paralelă cu Oz, vârful de coordonate $\left(h, 0, \dfrac{b^2h^2}{2a^2}\right)$ şi deschiderea spre valorile negative ale lui z.

În particular, pentru $h = 0$ obţinem parabola

$$\begin{cases} y^2 = -2b^2z \\ x = 0 \end{cases}. \tag{3.38}$$

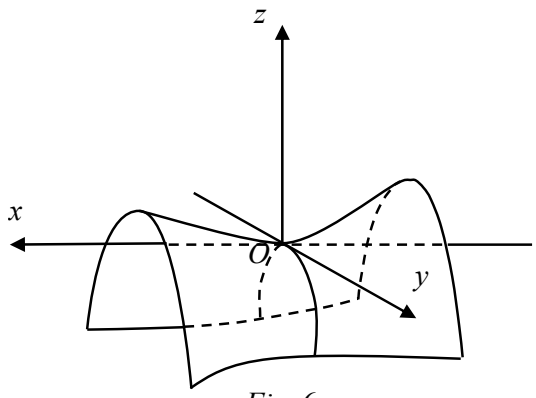


Fig. 6

În mod analog, constatăm că intersecţiile paraboloidului hiperbolic cu plane $y = h$ sunt parabole.

Reprezentarea grafică este prezentată în Figura 6.

3.8. GENERATOARELE RECTILINII ALE PARABOLOIDULUI HIPERBOLIC

În cele ce urmează vom arăta că paraboloidul hiperbolic este o suprafaţă riglată.

Teorema 3.8.1. *Prin fiecare punct al paraboloidului hiperbolic trec două şi numai două generatoare rectilinii.*

Demonstraţie.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare de pe paraboloidul hiperbolic (3.35) şi fie

$$\begin{cases} x = x_0 + \ \ lt \\ y = y_0 + mt, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + \ nt \end{cases} \qquad (3.39$$

o dreaptă oarecare care trece prin M_0. Pentru ca dreapta (3.39) să se afle pe paraboloidul hiperbolic trebuie ca:

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} = 2(z_0 + nt), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Efectuând calculele şi ţinând seama că $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 2z_0$, rezultă:

$$\left(\frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0 l}{a^2} - \frac{y_0 m}{b^2} - n\right)t = 0.$$

Cum această relaţie este verificată pentru orice $\forall t \in \mathbb{R}$, deducem că:

$$\begin{cases} \frac{l^2}{a^2} - \frac{m^2}{b^2} = 0 \\ \frac{x_0 l}{a^2} - \frac{y_0 m}{b^2} - n = 0 \end{cases}. \qquad (3.40)$$

Din prima ecuaţie rezultă $m = \pm \frac{b}{a} l$ şi din a doua ecuaţie rezultă $n = \left(\frac{x_0}{a^2} \mp \frac{y_0}{ab}\right) l$.

Cum parametrii directori ai unei drepte sunt determinaţi în afara unui factor de proporţionalitate, alegând $l_1 = a$, obţinem direcţiile

$$\begin{cases} l_1 = a, \quad m_1 = \ \ b, \quad n_1 = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \\ l_2 = a, \quad m_2 = -b, \quad n_2 = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \end{cases}. \qquad (3.41)$$

Aşadar, prin punctul M_0 trec dreptele:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}. & (3.42) \\ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{-b} = \frac{z - z_0}{\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}}. & (3.43) \end{cases}$$

Ecuaţiile (3.42) şi (3.43) sunt ecuaţiile canonice ale generatoarelor rectilinii care trec prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Exemplul 3.8.1. Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z,$$

care trec prin punctul $M_0(8,2,3)$.

Avem $a = 4;\ b = 2;\ x_0 = 8;\ y_0 = 2;\ z_0 = 3$.

Ecuaţiile canonice ale generatoarelor sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{x-8}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1} \\ \dfrac{x-8}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3} \end{cases}.$$

Ca şi în cazul hiperboloidului cu o pânză împărţim generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic în două clase.

În prima clasă intră generatoarele (3.42), iar în a doua clasă generatoarele (3.43).

Teorema 3.8.2. *Orice două generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic din clase diferite se intersectează.*

Demonstraţie.

Fie $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}}$ o generatoare din prima clasă. Cum $a \neq 0$, această dreaptă intersectează planul yOz.

Fie $(0, y_1, z_1)$ punctul de intersecţie. Evident, ecuaţiile generatoarei se mai pot scrie acum sub forma

$$\frac{x}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{-\dfrac{y_1}{b}}.$$

În mod analog o generatoare din a doua clasă va avea ecuaţiile:

$$\frac{x}{a}=\frac{y-y_2}{-b}=\frac{z-z_2}{\frac{y_2}{b}},$$

unde $(0, y_2, z_2)$ este punctul său de intersecţie cu planul yOz.

În continuare avem:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & -\frac{y_1}{b} \\ a & -b & \frac{y_2}{b} \end{vmatrix} = -ab\left[\left(\frac{y_2^2}{b^2}+2z_2\right)-\left(\frac{y_1^2}{b^2}+2z_1\right)\right]=0.$$

Din acest calcul rezultă că cele două generatoare fac parte din acelaşi plan. Cum ele, evident, nu sunt paralele, rezultă că se intersectează.

Teorema 3.8.3. *Orice două generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic, din aceeaşi clasă, nu se intersectează.*

Demonstraţie.

Fie $\frac{x}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{-\frac{y_1}{b}}$ Şi $\frac{x}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{-\frac{y_2}{b}}$, două generatoare din aceeaşi clasă.

Deoarece:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & -\frac{y_1}{b} \\ a & b & -\frac{y_2}{b} \end{vmatrix} = \frac{a}{b}(y_1-y_2)^2 \neq 0,$$ rezultă că cele două drepte nu fac parte din acelaşi plan, deci că nu se intersectează.

3.9. CILINDRI

Cilindrul drept este suprafaţa a cărei ecuaţie în raport cu sistemul ortogonal de coordonate $Oxyz$ este:

$$F(x, y)=0, \tag{3.44}$$

unde F o funcţie polinomială de gradul 2.

Deoarece în ecuaţia suprafeţei lipseşte variabila z, rezultă că dacă un punct $(x, y, 0)$ verifică ecuaţia suprafeţei, atunci şi punctul (x, y, z) o verifică, oricare ar fi $z \in \mathbb{R}$. Din punct de vedere geometric această suprafaţă reprezintă un cilindru cu generatoarele paralele cu Oz şi curba directoare conica din planul xOy de ecuaţie $F(x, y) = 0$. În continuare prezentăm următoarele cazuri particulare şi reprezentările lor grafice.

3.9.1. CILINDRUL ELIPTIC

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{3.45}$$

unde $a \geq b > 0$.

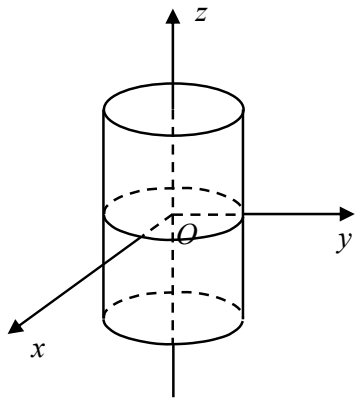


Fig. 7

3.9.2. CILINDRUL HIPERBOLIC

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{3.46}$$

unde $a > 0,\ b > 0$.

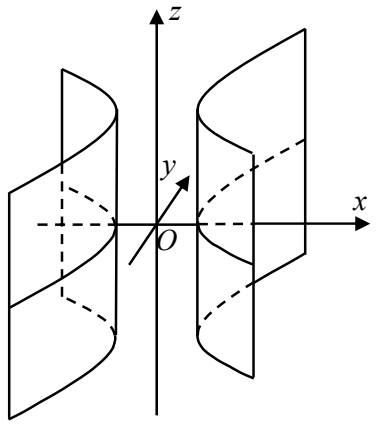


Fig. 8

3.9.3. CILINDRUL PARABOLIC

$$y^2 = 2px, \tag{3.47}$$

unde $p > 0$.

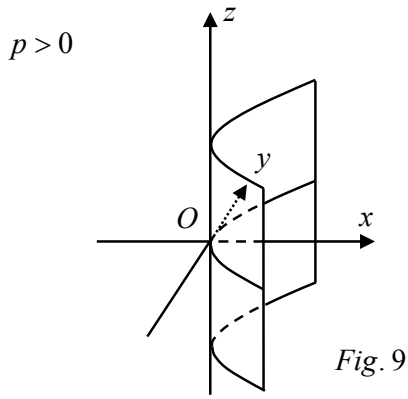


Fig. 9

3.9.4. PERECHE DE PLANE CONCURENTE

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{3.48}$$

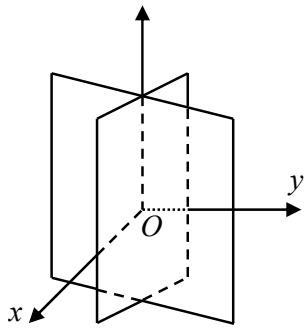


Fig. 10

3.9.5. PERECHE DE PLANE PARALELE SAU CONFUNDATE

$$y^2 - b^2 = 0 \ \left(y^2 = 0\right). \tag{3.49}$$

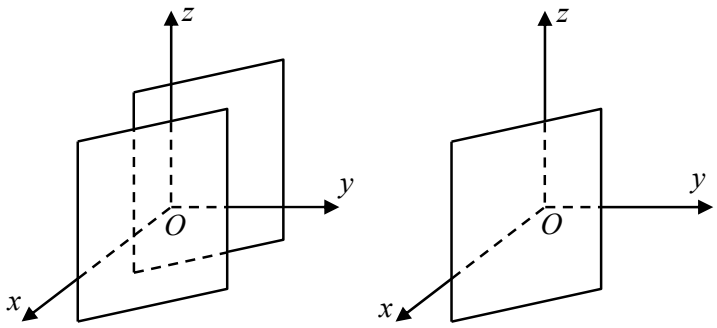


Fig. 11

În sfârşit mai putem aminti cilindrul imaginar de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ (care nu are imagine geometrică) şi cilindrul care se reduce la axa Oz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0.$$

3.10. REDUCEREA LA FORMA CANONICĂ A CUADRICELOR

Pentru început remarcăm că termenii de ordinul doi din ecuaţia (3.1) (ecuaţia generală a unei cuadrice) definesc o formă pătratică, anume:

$$\varphi(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz.$$

Matricea asociată acestei forme pătratice în raport baza canonică $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ este

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Fie $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ o nouă bază ortonormată în raport cu care forma pătratică φ are forma canonică:

$$\varphi(x',y',z')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2.$$

Precizăm că $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sunt valorile proprii ale matricei A, iar $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ sunt vectori proprii (normalizaţi) corespunzători acestor valori proprii.

Prin trecerea de la reperul $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, la reperul $\{O;\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\}$, ecuaţia (3.1) devine:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a_{44}=0. \qquad (3.50)$$

Distingem următoarele trei cazuri:

Cazul 1. Toate cele 3 valori proprii $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sunt nenule

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\neq 0 \quad (\det A\neq 0).$$

Cazul 2. O singură valoare proprie este nulă (de exemplu, $\lambda_3 = 0$).

Cazul 3. Două valori proprii sunt nule (de exemplu, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$).

Precizăm că situaţia $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ nu este posibilă, deoarece, prin ipoteză, cel puţin unul din coeficienţii matricei A este diferit de zero.

Cazul 1. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$.

Printr-o translaţie de forma:

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{14}}{\lambda_1} \\ Y = y' + \dfrac{a'_{24}}{\lambda_2} \\ Z = z' + \dfrac{a'_{34}}{\lambda_3} \end{cases} \tag{3.51}$$

ecuaţia (3.59) devine:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + a'_{44} = 0, \tag{3.52}$$

A) Dacă $a'_{44} \neq 0$ avem următoarele situaţii:

a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ au acelaşi semn şi anume semnul opus termenului liber a'_{44}. Atunci ecuaţia (3.52) se poate pune sub forma echivalentă:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{3.53}$$

unde $a^2 = -\dfrac{a'_{44}}{\lambda_1}$, $b^2 = -\dfrac{a'_{44}}{\lambda_2}$, $c^2 = -\dfrac{a'_{44}}{\lambda_3}$ şi reprezintă ecuaţia unui elipsoid.

b) λ_1 şi λ_2 au semne contrare termenului liber a'_{44}, iar λ_3 are acelaşi semn cu a'_{44}. Atunci ecuaţia (3.52) se poate pune sub forma echivalentă

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{3.54}$$

unde $a^2 = -\dfrac{a'_{44}}{\lambda_1}$, $b^2 = -\dfrac{a'_{44}}{\lambda_2}$, $c^2 = \dfrac{a'_{44}}{\lambda_3}$ şi reprezintă un hiperboloid cu o pânză.

c) λ_1 şi λ_2 au acelaşi semn cu a'_{44}, iar λ_3 are semn opus acestuia. Atunci ecuaţia (3.52) se poate pune sub forma echivalentă

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}+1=0, \tag{3.55}$$

unde $a^2=\frac{a'_{44}}{\lambda_1}$, $b^2=\frac{a'_{44}}{\lambda_2}$, $c^2=-\frac{a'_{44}}{\lambda_3}$ şi reprezintă un hiperboloid cu două pânze.

B) Dacă $a'_{44}=0$ avem următoarele situaţii:

a) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ au acelaşi semn.

În acest caz ecuaţia (3.52) este verificată doar de punctul $(0,0,0)$, deci suprafaţa se reduce la un punct.

b) Două valori proprii (dintre cele trei) au acelaşi semn, iar cea de-a treia are semn opus acestora.

În acest caz ecuaţia (3.52) se mai scrie

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \tag{3.56}$$

şi reprezintă ecuaţia unui con.

Cazul 2. $\lambda_1\cdot\lambda_2\neq 0,\ \lambda_3=0$.

Printr-o translaţie de forma

$$\begin{cases} X=x'+\dfrac{a'_{14}}{\lambda_1} \\ Y=y'+\dfrac{a'_{24}}{\lambda_2} \\ Z=z' \end{cases} \tag{3.57}$$

ecuaţia (3.50) devine:

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+2a'_{34}Z+a'_{44}=0. \tag{3.58}$$

A) Dacă $a'_{34}\neq 0$, efectuăm o nouă translaţie:

$$\begin{cases} \widetilde{X} = X \\ \widetilde{Y} = Y \\ \widetilde{Z} = Z + \dfrac{a'_{44}}{2a'_{34}}, \end{cases} \tag{3.59}$$

obţinem ecuaţia (3.58) devine:

$$\lambda_1 \widetilde{X}^2 + \lambda_2 \widetilde{Y}^2 + 2a'_{34}\widetilde{Z} = 0 . \tag{3.60}$$

Sunt posibile următoarele situaţii:

a) λ_1 şi λ_2 au acelaşi semn, opus semnului lui a'_{34}. Atunci ecuaţia (3.60) se mai scrie

$$\frac{\widetilde{X}^2}{a^2} + \frac{\widetilde{Y}^2}{b^2} = 2z , \tag{3.61}$$

unde $a^2 = -\dfrac{a'_{34}}{\lambda_1} > 0$ şi $b^2 = -\dfrac{a'_{34}}{\lambda_2} > 0$ şi reprezintă un paraboloid eliptic.

b) λ_1 şi λ_2 au semne opuse.

Atunci ecuaţia (3.60) se poate scrie sub forma

$$\frac{\widetilde{X}^2}{a^2} - \frac{\widetilde{Y}^2}{b^2} = 2\tilde{z} , \tag{3.62}$$

unde $a^2 = -\dfrac{a'_{34}}{\lambda_1} > 0$ şi $b^2 = \dfrac{a'_{34}}{\lambda_2} > 0$ şi reprezintă un paraboloid hiperbolic.

B) Dacă $a'_{34} = 0$, atunci ecuaţia (3.58) devine

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_{44} = 0 \tag{3.63}$$

şi reprezintă un cilindru eliptic sau hiperbolic, dacă $a'_{44} \neq 0$, respectiv o pereche de plane concurente sau o dreaptă, dacă $a'_{44} = 0$.

Cazul 3. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ecuaţia (3.50) devine:

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_{14} x' + 2a'_{24} y' + 2a'_{34} z' + a_{44} = 0 .$$

Efectuând translaţia:

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{14}}{\lambda_1} \\ Y = y' \\ Z = z' \end{cases} \tag{3.64}$$

obţinem ecuaţia

$$\lambda_1 X^2 + 2a'_{24} Y + 2a'_{34} Z + a'_{44} = 0 . \tag{3.65}$$

A) Dacă $a'_{24} \cdot a'_{34} \neq 0,$ atunci efectuând translaţia

$$\begin{cases} \widetilde{X} = X \\ \widetilde{Y} = \dfrac{a'_{24} Y + a'_{34} Z}{\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}}} \\ \widetilde{Z} = \dfrac{-a'_{34} Y + a'_{24} Z}{\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}}}, \end{cases} \tag{3.66}$$

obţinem ecuaţia

$$\lambda_1 \widetilde{X}^2 + 2\alpha \widetilde{Y} + a'_{44} = 0 , \tag{3.67}$$

unde $\alpha = \sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{34}} > 0$.

În urma unei noi translaţii

$$\begin{cases} u = \widetilde{X} \\ v = \widetilde{Y} + \dfrac{a'_{44}}{2\alpha} \\ w = \widetilde{Z}, \end{cases} \tag{3.68}$$

ecuaţia (3.67) devine

$\lambda_1 u^2 + 2\alpha v = 0,$ care se mai poate scrie sub forma:

$$u^2 = 2pv \tag{3.69}$$

şi reprezintă ecuaţia unui cilindru parabolic.

B) $a'_{24} = a'_{34} = 0$.

Ecuaţia (3.65) devine

$$\lambda_1 X^2 + a'_{44} = 0 \tag{3.70}$$

şi reprezintă, fie două plane paralele (sau imaginare) dacă $a'_{44} \neq 0$, fie două plane confundate dacă $a'_{44} = 0$.

Exemplul 3.10.1. Să se aducă la forma canonică cuadrica:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y - 18z + 40 = 0.$$

Avem: $a_{11} = 7,\ a_{22} = 6,\ a_{33} = 5,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 0,\ a_{23} = -2,$

$a_{14} = -3,\ a_{24} = -12,\ a_{34} = -9,\ a_{44} = 40.$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau}$$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 9.$

Fie $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ noua bază formată din vectori proprii (normalizaţi) corespunzători acestor valori proprii.

Atunci $\vec{i}' = \frac{1}{3}\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

$$\vec{j}' = \frac{1}{3}\left(2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right)$$

$$\vec{k}' = \frac{1}{3}\left(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right).$$

Matricea de trecere de la baza $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ la baza $\left\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\right\}$ este

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Legătura dintre vechile coordonate (x, y, z) şi noile coordonate (x', y', z') este:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z') \\ y = \frac{1}{3}(2x' + y' - 2z') \\ z = \frac{1}{3}(2x' - 2y' + z'). \end{cases}$$

În urma acestei schimbări de variabile, ecuaţia cuadricii devine

$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 30x' + 6z' + 40 = 0$ sau

$$3\left(x'^2 - 10x'\right) + 6y'^2 + 9\left(z'^2 + \frac{2}{3}z'\right) + 40 = 0.$$

În urma translaţiei

$$\begin{cases} X = x' - 5 \\ Y = y' \\ Z = z' + \frac{1}{3}, \end{cases}$$

ecuaţia devine

$3X^2 + 6Y^2 + 9Z^2 - 36 = 0$ sau

$$\frac{X^2}{12} + \frac{Y^2}{6} + \frac{Z^2}{4} - 1 = 0.$$

Am obţinut ecuaţia unui elipsoid de semiaxe

$a = 2\sqrt{3},\ b = \sqrt{6},\ c = 2.$

Exemplul 3.10.2. Să se reducă la forma canonică cuadrica:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 2y + z = 0.$$

Avem: $a_{11} = 1,\ a_{22} = 1,\ a_{33} = 4,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 2,\ a_{23} = 2,$

$a_{14} = 0,\ a_{24} = -1,\ a_{34} = \frac{1}{2},\ a_{44} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{sau} \qquad \lambda^2(\lambda - 6) = 0.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Noua bază ortonormată formată din vectori proprii este

$$\begin{cases} \vec{i}\,' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,\ 2) \\ \vec{j}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 1,\ 0) \\ \vec{k}\,' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1) \end{cases}.$$

Matricea de trecere este:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Dacă facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' + \frac{1}{\sqrt{3}} z' \\ z = \frac{2}{\sqrt{6}} x' \qquad\qquad - \frac{1}{\sqrt{3}} z' \end{cases}$$

ecuaţia cuadricei devine

$$6x'^2 - \sqrt{2}\, y' - \sqrt{3}\, z' = 0 .$$

Suntem în Cazul 3, subcazul A).

$$a'_{24} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ şi } a'_{34} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ a'_{44} = 0$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

În urma translaţiei:

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = \frac{-\sqrt{2}\, y' - \sqrt{3}\, z'}{\sqrt{5}} \\ Z = \frac{\sqrt{3}\, y' - \sqrt{2}\, z'}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

ecuaţia devine

$$6X^2 + \sqrt{5}\, Y = 0$$

şi reprezintă un cilindru parabolic.

Probleme propuse

1. Se dau punctele $M_1(0,-2,-3), M_2(4,1,-3), M_3(5,3,-2)$. Se cere:

a) ecuaţia sferei cu centrul M_1 care trece prin M_2;

b) ecuaţia sferei cu centrul M_2 care trece prin M_3;

c) ecuaţiile sferelor cu centrul M_3 tangente planelor *xOy*, respectiv *yOz*.

Răspuns: a) $x^2+y^2+z^2+4y+6z-12=0$; b) $x^2+y^2+z^2-8x-2y+6z+20=0$;

c) $x^2+y^2+z^2-10x-6y+4z+34=0$ şi $x^2+y^2+z^2-10x-6y+4z+13=0$.

2. Să se determine ecuaţia carteziană generală a unei sfere în condiţiile:

a) $O(0,\ 0,\ 0)$ este centrul şi $R=11$ este raza;

b) $C(0,\ -1,\ 9)$ este centrul şi trece prin punctul $A(4,\ 1,\ 5)$;

c) trece prin originea axelor de coordonate şi are centrul în punctul $C(6,\ -3,\ -2)$;

d) $A(7,\ -5,\ 2)$ şi $B(3,\ 1,\ 4)$ sunt extremităţile unui diametru;

e) $C(1,\ -2,\ -3)$ este centrul şi este tangentă planului $(\pi): x-3y-z+1=0$;

f) sfera este tangentă exterioară sferei $x^2+y^2+z^2-6x-8y+2z+10=0$ şi $C_1(-1,\ 0,\ 1)$ este centrul sferei.

Răspuns:a) $x^2+y^2+z^2-121=0$; b) $x^2+y^2+z^2+2y-18z+46=0$;

c) $x^2+y^2+z^2-12x+6y+4z=0$; d) $x^2+y^2+z^2-10x+4y-6z+24=0$;

e) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+3=0$; f) $x^2+y^2+z^2+2x-2z-2=0$.

3. Să se arate că punctele $M(1,\ 1,\ 3)$, $N(2,\ -1,\ 1)$, $P(3,\ 0,\ 1)$, $Q(1,\ -1,\ 2)$, $T(2,1,0)$ sunt situate pe aceeaşi sferă şi să se determine ecuaţia acestei sfere.

Răspuns: $x^2+y^2+z^2-3x-y-3z+2=0$.

4. Să se determine coordonatele centrului C_1 şi raza r pentru următoarele cercuri:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-6y+8z-13=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x+8y+4z=0 \\ 4x-2y+z-1=0 \end{cases}$.

Răspuns: a) $C_1(-2,2,-2)$, $r=5$; e) $C_1(0,-2,-3)$, $r=\sqrt{15}$.

5. Să se determine ecuaţiile planelor tangente la sfera $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z=0$ în punctele de intersecţie cu axele de coordonate *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Răspuns: Planul tangent în $O(0,0,0)$: $2x-3y+4z=0$; planul tangent în $A(4,0,0)$: $2x+3y-4z-8=0$; planul tangent în $B(0,-6,0)$: $2x+3y+4z+18=0$; planul tangent în $C(0,0,8)$: $2x-3y-4z+32=0$.

6. Să se precizeze poziţia planului (π) faţă de sfera $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z-22=0$ în fiecare din cazurile:

a) $(\pi): 4x-4y+2z+14=0$;

b) $(\pi): 2x-2y-z+6=0$;

c) $(\pi): 4x-3y+17=0$.

Răspuns: a) $C(3,-2,1)$, $R=6$, $\text{dist}(\text{C},(\pi))=6=R$, planul este tangent sferei;

b) $\text{dist}(\text{C},(\pi))=5<R$, planul este secant sferei; c) $\text{dist}(\text{C},(\pi))=7>R$, planul şi sfera nu se intersectează.

7. Să se precizeze poziţia dreptei (d) faţă de sfera $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+2=0$, dacă:

a) $(d): \begin{cases} x+2y-14=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$;

b) $(d): \dfrac{x+5}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$;

c) $(d): \begin{cases} x = \ \ t \\ y = -t+5, \ t \in \mathbb{R} \\ z = \ \ t-3 \end{cases}$.

Indicaţie: Se rezolvă sistemul format din ecuaţia sferei şi ecuaţiile dreptei.

a) Sistemul admite o unică soluţie, deci dreapta este tangentă sferei în $M(4, 5, -3)$;

b) Sistemul nu admite soluţii, deci dreapta nu intersectează sferei;

c) Sistemul admite două soluţii, deci dreapta este secantă sferei în $A(4, 1, 1)$ şi $B(0, 5, -3)$.

8. Să se determine curbele de intersecţie ale următoarelor cuadrice cu planele de coordonate:

a) $16x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 144 = 0$;

b) $x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 144 = 0$;

c) $9x^2 + 4y^2 - z^2 + 36 = 0$;

d) $x^2 + 16y^2 - 32z = 0$;

e) $16x^2 - 9z^2 - 288y = 0$;

f) $36x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$.

Pentru fiecare cuadrică, să se scrie ecuaţiile parametrice şi să se reprezinte grafic.

Răspuns: a) Elipsoid; b) Hiperboloid cu o pânză; c) Hiperboloid cu două pânze; d) Paraboloid eliptic; e) Paraboloid hiperbolic; f) Con.

9. a) Să se arate că planul $x - 6 = 0$ intersectează elipsoidul $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{20} + \dfrac{z^2}{5} - 1 = 0$ după o elipsă reală şi să se găsească semiaxele şi coordonatele vârfurilor acesteia.

b) Să se arate că planul $z = 2$ intersectează hiperboloidul cu o pânză $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} - 1 = 0$ după un cerc spaţial şi să se găsească coordonatele centrului şi raza acestuia.

c) Să se determine semiaxele şi coordonatele vârfurilor elipsei reale obţinută prin intersecţia planului $y=3$ cu hiperboloidul cu două pânze $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{14}+1=0$.

d) Să se arate că planul $z=\lambda^2, \lambda>0$ intersectează paraboloidul eliptic $x^2+y^2=4z$ după un cerc spaţial şi să se găsească coordonatele centrului şi raza acestuia.

e) Să se arate că planul $y=-6$ intersectează paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ după o parabolă şi să se găsească parametrul şi coordonatele vârfului acesteia.

Răspuns: a) $\begin{cases}\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}-1=0\\ x=6\end{cases}$; $b=2, c=1$; $B(6,2,0), B'(6,-2,0), C(6,0,1), C'(6,0,-1)$;

b) $\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\ z=2\end{cases}$; $C(0,0,2), R=\sqrt{2}$;

c) $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{7}-1=0\\ y=3\end{cases}$; $a=2, c=\sqrt{7}$; $A(2,3,0), A'(-2,3,0)$, $C(0,3,\sqrt{7}), C'(0,3,-\sqrt{7})$;

d) $\begin{cases}x^2+y^2=4\lambda^2\\ z=\lambda^2, \lambda>0\end{cases}$; $C(0,0,\lambda^2), R=2\lambda$; e) $\begin{cases}x^2=5(6z+9)\\ y=-6\end{cases}$; $p=15$; $V\left(0,-6,-\frac{3}{2}\right)$.

10. Să se determine punctele de intersecţie ale cuadricilor următoare cu dreptele date:

a) $(E): \frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}-1=0$ şi $(d): \frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+6}{-4}$;

b) $(H_1): -\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{21}+\frac{z^2}{14}-1=0$ şi $(d): \frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{8}$;

c) $(H_2): \frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}+1=0$ şi $(d): \begin{cases}x=t+3\\ y=t+1, t\in\mathbb{R}\\ z=3t+6\end{cases}$;

d) $(PE): \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ şi $(d): \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$;

e) $(PH): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ şi $(d): \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$.

Răspuns: a) Dreapta este secantă elipsoidului în $M_1(-3, 1, 2), M_2(0, 2, -2)$; b) Dreapta este secantă hiperboloidului cu o pânză în $M_1(1, 0, 4), M_2(2, -3, -4)$; c) Dreapta este tangentă hiperboloidului cu două pânze în $M(4, 2, 9)$; d) Dreapta este exterioară paraboloidului eliptic; e) Dreapta este inclusă în paraboloidul hiperbolic.

11. Să se determine ecuaţiile planelor tangente la cuadricele:

a) $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$;

b) $(H_1): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$;

c) $(H_2): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} + 1 = 0$;

d) $(PE): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$;

e) $(PH): \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 2x$;

în punctele lor de intersecţie cu axele de coordonate.

Răspuns: a) (E) intersectează axele *Ox*, *Oy*, *Oz* în vârfurile $A(3,0,0), A'(-3,0,0), B(0,2,0)$, $B'(0,-2,0), C(0,0,5), C'(0,0,-5)$. Planele tangente sunt $x \mp 3 = 0,\ y \mp 2 = 0,\ z \mp 5 = 0$;

b) (H_1) intersectează axele *Ox* şi *Oz* în vârfurile A, A', C, C'. Planele tangente sunt $x \mp 3 = 0$ şi $z \mp 5 = 0$;

c) (H_2) intersectează axa *Oy* în vârfurile B, B'. Planele tangente sunt $y \mp 2 = 0$;

d) (PE) intersectează axele *Ox*, *Oy*, *Oz* în vârful $O(0,0,0)$. Planul tangent este $z = 0$;

e) (PH) intersectează axele *Ox*, *Oy*, *Oz* în vârful $O(0,0,0)$. Planul tangent este $x = 0$.

12. Să se găsească coordonatele punctelor de pe elipsoidul $3x^2+2y^2+z^2-9=0$ ale căror normale la suprafaţă sunt perpendiculare pe planul $(\pi): 3x-2y-2z+7=0$, precum şi ecuaţiile normalelor în aceste puncte.

Răspuns: Punctele sunt $M_1(-1,1,2), M_2(1,-1,-2)$; Normala în $M_1: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-2}$;

Normala în $M_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{-2}$.

13. Să se arate că punctul $M(6,2,8)$ aparţine hiperboloidului cu o pânză $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}-1=0$ şi să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului ce trec prin acest punct.

Răspuns: $\frac{x-6}{9}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-8}{20}$, $\frac{x-6}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-8}{4}$.

14. Să se determine ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză $x^2+4y^2-4z^2-4=0$ ce trec prin punctul $M(2,1,1)$.

Răspuns: $\begin{cases} x+2y-2z-2=0 \\ x-2y+2z-2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x-2z=0 \\ y-1=0 \end{cases}$.

15. Se dau paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=y$ şi punctul $M(3,1,0)$. Se cere:

a) ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic ce trec prin punctul *M*;

b) unghiul ascuţit format de generatoarele rectilinii determinate la punctul a);

c) ecuaţia planului tangent la paraboloidul hiperbolic ce trece prin punctul *M*.

Răspuns: a) $\begin{cases} 2x-3z-6=0 \\ 2x-6y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$; $\begin{cases} 2x-6y-3z=0 \\ 2x+3z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}$

b) $\arccos\left(\frac{9}{17}\right)$; c) $2x-3y-3=0$.

16. Să se arate că punctul $M(3\sqrt{2},2,1)$ aparţine paraboloidului hiperbolic $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ şi să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului ce trec prin acest punct.

Răspuns: $\begin{cases} 2x+3y-6\left(\sqrt{2}+1\right)z & =0 \\ 2x-3y & -6\left(\sqrt{2}-1\right)=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+3y & -6\left(\sqrt{2}+1\right)=0 \\ 2x-3y-6\left(\sqrt{2}-1\right)z & =0 \end{cases}$.

17. Să se determine forma canonică a cuadricelor şi să se pună în evidenţă noul reperul ortonormat:

a) $5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4yz-10x+8y+14z-6=0$;

b) $2x^2+5y^2+11z^2-20xy+4xz+16yz-24x-6y-6z-18=0$;

c) $z^2-4xy+4x+4y+4=0$.

Răspuns: a) Elipsoid real: $\frac{X^2}{6}+\frac{Y^2}{3}+\frac{Z^2}{2}-1=0$;

$\vec{i}\,'=\frac{1}{3}\left(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\right), \vec{j}\,'=\frac{1}{3}\left(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right), \vec{k}\,'=\frac{1}{3}\left(\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}\right)$;

b) Hiperboloid cu o pânză: $\frac{X^2}{2}+Y^2-\frac{Z^2}{2}-1=0$;

$\vec{i}\,'=\frac{1}{3}\left(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right), \vec{j}\,'=\frac{1}{3}\left(\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}\right), \vec{k}\,'=\frac{1}{3}\left(2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\right)$;

c) Hiperboloid cu două pânze: $-\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{8}+\frac{Z^2}{4}-1=0$;

$\vec{i}\,'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right), \vec{j}\,'=\vec{k}, \vec{k}\,'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$.

CAPITOLUL 4

CURBE

4.1. DRUMURI PARAMETRIZATE. DEFINIŢIA CURBEI

Definiţia 4.1.1. *Prin* ***drum parametrizat de clasă*** $C^k\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ *se înţelege orice funcţie vectorială* r, *de clasă* C^k, *definită pe un interval* I *din* $\mathbb{R}$, *cu valori în* $\mathbb{R}^3$. *Dacă notăm cu* x,y,z *componentele scalare ale lui* r, *atunci*

$$r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right),\ \forall t\in I.$$

Faptul că funcţia vectorială $r:I\to\mathbb{R}^3$ este de clasă C^k este echivalent cu faptul că funcţiile scalare x,y,z sunt de clasă C^k pe intervalul I, adică sunt de k ori derivabile şi derivatele sunt continue pe I.

Ecuaţiile $x=x(t),y=y(t),z=z(t),\ t\in I$ se numesc ***ecuaţiile parametrice*** ale drumului sau o ***reprezentare parametrică*** a drumului, iar t se numeşte ***parametru***.

Atragem atenţia asupra faptului că în conformitate cu Definiţia 4.1.1., un drum parametrizat este o funcţie (aplicaţie) vectorială şi nu o mulţime de puncte. Pentru a marca mai bine acest lucru vom nota un drum parametrizat cu (I,r) sau $\left(I,r=r(t)\right)$.

Imaginea directă $r(I)$ a intervalului I prin funcţia vectorială r, adică mulţimea $\left\{x(t),y(t),z(t)\,\middle|\,t\in I\right\}\subset\mathbb{R}^3$, se numeşte ***suportul*** (***urma***) drumului parametrizat r.

Dacă I este un interval compact $\left(I=[a,b]\right)$, atunci suportul său $r(I)$ este o mulţime compactă şi conexă din $\mathbb{R}^3$. În acest caz punctele $r(a)$ şi $r(b)$ se numesc ***capetele***

(***extremităţile***) drumului. Dacă $r(a)=r(b)$ drumul se numeşte ***închis***.

Fie $Oxyz$ un sistem ortogonal de coordonate şi fie $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ versorii axelor Ox, Oy, respectiv Oz. Dacă identificăm orice punct $M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ cu vectorul său de poziţie $\overrightarrow{OM}$, atunci avem:

$$r(t)=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},\ t\in I.$$

Exemplul 4.1.1. Fie drumul $r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ definit prin

$$\vec{r}(t)=R\cos t\,\vec{i}+R\sin t\,\vec{j},\ t\in[0,2\pi].$$

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t\ , \\ z=0 \end{cases}\ t\in[0,2\pi].$$

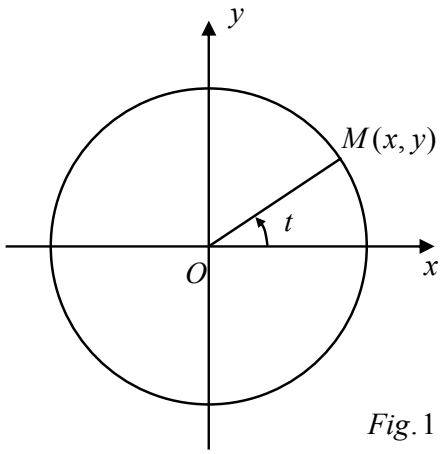


Fig. 1

Observăm că pentru orice $t\in[0,2\pi]$, punctul $(x(t),y(t),0)$ verifică ecuaţia cercului $x^2+y^2=R^2$, $z=0$. Rezultă că suportul drumului este cercul cu centrul în origine şi de rază R situat în planul xOy. Parametrul t are o interpretare geometrică evidentă, anume este unghiul dintre raza corespunzătoare punctului $M(x,y)$ şi axa Ox. Observăm, de asemenea, că drumul este închis: $r(0)=r(2\pi)=R$.

Exemplul 4.1.2. Fie drumul $r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$, definit astfel:

$$\vec{r}(t)=R\cos t\,\vec{i}+R\sin t\,\vec{j}+ht\vec{k},\ t\in[0,2\pi].$$

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t\ , \\ z=ht \end{cases}\ t\in[0,2\pi].$$

Observăm că $x^2 + y^2 = R^2$, de unde rezultă că suportul acestui drum se află pe cilindrul circular drept, de axă Oz şi rază R.

Suportul acestui drum este spira AB din elicea circulară de pas h, unde capetele sunt $A(R,0,0)$ şi $B(R,0,2\pi h)$.

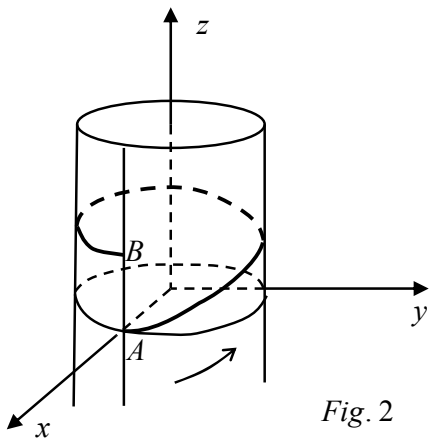


Fig. 2

Exemplul 4.1.3. Fie drumul $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definit prin

$\vec{r}(t) = (x_0 + lt)\vec{i} + (y_0 + mt)\vec{j} + (z_0 + nt)\vec{k},\ t \in \mathbb{R}$, unde x_0, y_0, z_0, l, m, n sunt nişte constante reale.

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z + nt \end{cases}$$

Suportul acestui drum este dreapta care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are parametrii directori l, m, n. Cu alte cuvinte dreapta are aceeaşi direcţie cu $\vec{v}$, unde:

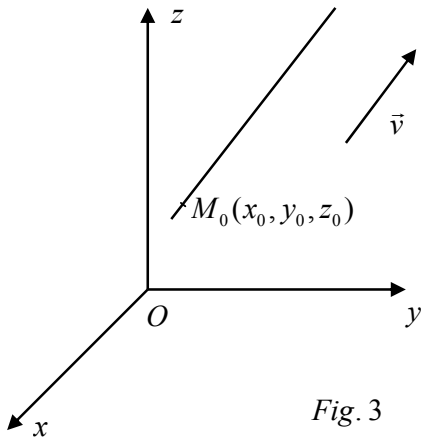


Fig. 3

$$\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}.$$

Definiţia 4.1.2. *Un drum* (I, r) *se numeşte* ***simplu*** (***fără puncte multiple***) *dacă funcţia vectorială* r *este injectivă.*

În cazul unui drum închis, acesta este simplu dacă egalitatea $r(t_1) = r(t_2)$ implică sau că $t_1 = t_2$ sau că $t_1 = a$ şi $t_2 = b$, respectiv $t_1 = b$ şi $t_2 = a$, unde cu a şi b am notat capetele intervalului I.

Drumurile prezentate în Exemplele 4.1.1., 4.1.2. şi 4.1.3. sunt drumuri simple.

Un exemplu de drum care are puncte multiple este *foliul lui Descartes*.

Exemplul 4.1.4.

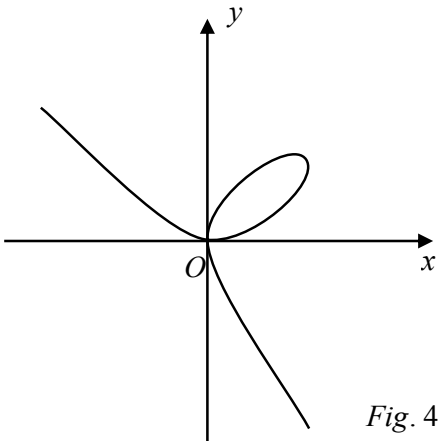


Fig. 4

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \\ z = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suportul acestui drum este prezentat în Figura 4. Observăm că acesta trece prin origine, care este un punct multiplu (dublu).

Definiţia 4.1.3. *Fie* (I,r) *un drum parametrizat de clasă* C^1. *Un punct* $t_0 \in I$ *se numeşte* ***singular*** *pentru drumul* (I,r) *dacă* $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$. *Un drum se numeşte* ***regulat*** (***neted***) *dacă este de clasă* C^1 *şi nu are puncte singulare, deci dacă*

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0, \ \forall t \in I.$$

Un drum se consideră orientat în sensul creşterii parametrului. De pildă, în Exemplul 4.1.2. drumul este orientat de la A către B.

Definiţia 4.1.4. *Două drumuri* (I_1,r_1) *şi* (I_2,r_2) *se numesc* ***echivalente*** *dacă există o funcţie* $\lambda : I_1 \to I_2$ *de clasă* C^k *bijectivă, cu inversa* $\lambda^{-1} : I_2 \to I_1$ *de clasă* C^k *şi* $\lambda'(t_1) \neq 0, \ \forall t_1 \in I_1$, *astfel încât*

$$r_2(\lambda(t_1)) = r_1(t_1), \ \forall t_1 \in I_1.$$

O astfel de funcţie λ se mai numeşte şi ***schimbare de parametru***. Cum λ' este continuă pe I_1 şi $\lambda' \neq 0$ pe I_1, rezultă că $\lambda' > 0$ pe I_1 sau $\lambda' < 0$ pe I_1.

Dacă $\lambda' > 0$ pe I_1, deci λ este strict crescătoare, atunci spunem că drumurile sunt echivalente ***cu aceeaşi orientare***.

În caz contrar, spunem că drumurile sunt echivalente ***cu orientare schimbată***.

Este evident că două drumuri echivalente au acelaşi suport.

Exemplul 4.1.5. Fie drumurile: $\vec{r}_1(t_1) = R\sin t_1\vec{i} + R\cos t_1\vec{j},\ t_1 \in I_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi

$$\vec{r}_2(t_2) = t_2\vec{i} + \sqrt{R^2 - t_2^2}\,\vec{j}, \qquad t_2 \in I_2 = (0, R).$$

Aceste drumuri au acelaşi suport şi anume arcul $\widehat{AB}$ al cercului cu centrul în origine şi de rază R.

Observăm că funcţia $\lambda : I_1 \to I_2$ definită prin $\lambda(t_1) = R\sin t_1,\ \forall t_1 \in I_1$ este bijectivă, de clasă C^∞ şi $\lambda'(t_1) = R\cos t_1 > 0,\ \forall t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Mai mult, observăm că

$$\vec{r}_2(\lambda(t_1)) = \lambda(t_1)\vec{i} + \sqrt{R^2 - \lambda^2(t_1)}\,\vec{j} = R\sin t_1\vec{i} + R\cos t_1\vec{j} = \vec{r}_1(t_1),\ \forall t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Rezultă că λ este o schimbare de parametru şi deci că cele două drumuri sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

Considerăm acum drumul:

$$\vec{r}_3(t_3) = R\cos t_3\vec{i} + R\sin t_3\vec{j},\ \forall t_3 \in I_3 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că funcţia $\mu : I_3 \to I_2$, definită prin $\mu_3(t_3) = R\cos t_3$, este o schimbare de parametru. Cum $\mu'(t_3) = -R\sin t_3 < 0,\ \forall t_3 \in I_3$, rezultă că μ este strict descrescătoare.

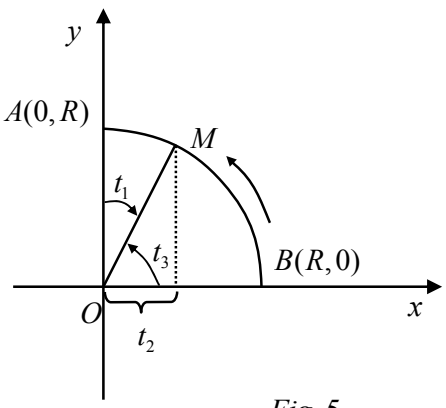


Fig. 5

Rezultă că drumurile (I_3, r_3) şi (I_2, r_2), respectiv drumurile (I_3, r_3) şi (I_1, r_1) sunt echivalente cu orientare schimbată. Orientarea drumurilor (I_1, r_1) şi (I_2, r_2) este de la A către B, în timp ce orientarea drumului (I_3, r_3) este de la B către A.

Semnificaţia parametrilor t_1, t_2 şi t_3 este prezentată în Figura 5.

Reamintim următorul rezultat de Analiză Matematică:

Teorema 4.1.1. *Fie* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t \in I = [a, b]$ *un drum parametrizat regulat. Atunci acest drum este rectificabil* (*are lungime*) *şi lungimea sa este*

$$L = L_{AB} = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt .$$

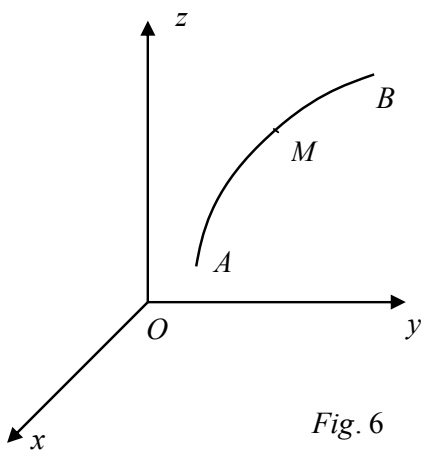


Fig. 6

Geometric, L_{AB} este lungimea arcului $\widehat{AB}$ (suportul drumului), unde $A(x(a), y(a), z(a))$ şi $B(x(b), y(b), z(b))$.

Pentru orice $a < t < b$ notăm cu

$$s = \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, du .$$

Dacă M este punctul de coordonate $(x(t), y(t), z(t))$, atunci $s = \lambda(t)$ reprezintă lungimea arcului $\widehat{AM}$.

Deoarece $\lambda'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} > 0,\ \forall t \in [a,b],\ \lambda(a) = 0$ şi $\lambda(b) = L$, rezultă că $\lambda : [a,b] \to [0,L]$ este o funcţie de clasă C^1, bijectivă şi strict crescătoare.

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[rr, shift left, "\lambda"] \arrow[dr, "r"'] & & {[0,L]} \arrow[ll, shift left, "\lambda^{-1}"] \arrow[dl, "\rho"] \\
& \mathbb{R}^3 &
\end{tikzcd}$$

Inversa sa $\lambda^{-1} : [0,L] \to [a,b]$ este, de asemenea, de clasă C^1.

Fie $\rho(s) = r(\lambda^{-1}(s)),\ s \in [0,L]$.

Cum $\rho(\lambda(t)) = r(t),\ \forall t \in [a,b]$, rezultă că drumurile:

$([a,b], r)$ şi $([0,L], \rho)$ sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

Definiţia 4.1.5. *Fie*

$$\tilde{x}(s) = x(\lambda^{-1}(s)),\ \tilde{y}(s) = y(\lambda^{-1}(s)),\ \tilde{z}(s) = z(\lambda^{-1}(s)),\ \forall s \in [0,L].$$

Ecuaţiile parametrice $x = \tilde{x}(s),\ y = \tilde{y}(s),\ z = \tilde{z}(s),\ s \in [0,L]$ *poartă numele de* ***reprezentarea parametrică normală*** *a drumului* (I, r).

În scriere vectorială avem:

$$\vec{\rho}(s)=\tilde{x}(s)\vec{i}+\tilde{y}(s)\vec{j}+\tilde{z}(s)\vec{k},\ s\in J=[0,L].$$

Drumurile $(I,\vec{r})$ si $(J,\vec{\rho})$ sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

Exemplul 4.1.6. Fie drumul:

$$\vec{r}(t)=R\sin t\,\vec{i}+R\cos t\,\vec{j},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

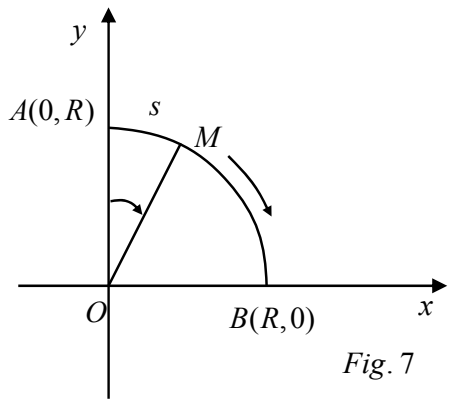


Fig. 7

Suportul acestui drum este arcul $\widehat{AB}$ al cercului cu centrul în origine şi de rază R. Lungimea sa este:

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t}\,dt=\frac{\pi R}{2}.$$

Dacă $\overrightarrow{OM}=\vec{r}(t)$, atunci lungimea arcului $\widehat{AM}$ pe care o notăm cu s este:

$$s=\lambda(t)=\int_0^t\sqrt{R^2\cos^2 u+R^2\sin^2 u}\,du=Rt,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Evident, λ este strict crescătoare. Rezultă că

$\lambda:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\left[0,\frac{\pi R}{2}\right]$ este bijectivă şi inversa sa $\lambda^{-1}:\left[0,\frac{\pi R}{2}\right]\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ este definită prin:

$$t=\lambda^{-1}(s)=\frac{s}{R},\ s\in\left[0,\frac{\pi R}{2}\right].$$

Reprezentarea normală a acestui drum este:

$$\vec{\rho}(s)=\tilde{x}(s)\vec{i}+\tilde{y}(s)\vec{j}=R\sin\frac{s}{R}\vec{i}+R\cos\frac{s}{R}\vec{j},\ s\in\left[0,\frac{\pi R}{2}\right].$$

Exemplul 4.1.7. Fie *elicea circulară*:

$\vec{r}_3(t)=R\cos t\,\vec{i}+R\sin t\,\vec{j}+ht\,\vec{k},\ t\in I=(0,2\pi)$. Avem:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t+h^2}\,dt=2\pi\sqrt{R^2+h^2}\ \text{şi}$$

$$s=\lambda(t)=\int_0^t\sqrt{R^2\sin^2 u+R^2\cos^2 u+h^2}\ du=t\sqrt{R^2+h^2},\ t\in[0,2\pi].$$

Funcţia inversă este $\lambda^{-1}:\left[0,\ 2\pi\sqrt{R^2+h^2}\right]\to[0,2\pi]$, $\lambda^{-1}(s)=\dfrac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}$, iar reprezentarea normală a elicei circulare este:

$$\vec{\rho}(s)=R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\vec{i}+R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\vec{j}+h\frac{s}{\sqrt{R^2+h^2}}\vec{k},\ s\in\left[0,\ 2\pi\sqrt{R^2+h^2}\right].$$

Teorema 4.1.2. *Fie* $\vec{\rho}(s)=\tilde{x}(s)\vec{i}+\tilde{y}(s)\vec{j}+\tilde{z}(s)\vec{k},\ s\in[0,L]$ *reprezentarea normală a drumului* (I,r), *unde* $I=[a,b]$.

Atunci $\left\|\dfrac{d\vec{\rho}}{ds}\right\|=1$ *şi* $\left(\tilde{x}'(s)\right)^2+\left(\tilde{y}'(s)\right)^2+\left(\tilde{z}'(s)\right)^2=1$.

Demonstraţie.

Prin definiţie $\vec{\rho}(s)=\vec{r}\left(\lambda^{-1}(s)\right),\ s\in[0,L]$ şi

$$\frac{d\vec{\rho}}{ds}=\frac{d\vec{r}\left(\lambda^{-1}(s)\right)}{d\left(\lambda^{-1}(s)\right)}\cdot\frac{d\left(\lambda^{-1}(s)\right)}{ds}.$$

Pe de altă parte, din Teorema de Inversiune Locală avem:

$$\frac{d\left(\lambda^{-1}(s)\right)}{ds}=\frac{1}{\lambda'(t)},\ \text{unde}\ t=\lambda^{-1}(s).$$

Ţinând seama şi de faptul că $\lambda'(t)=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)},\ t\in I$, rezultă:

$$\frac{d\vec{\rho}}{ds}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot\frac{1}{\lambda'(t)}=\frac{1}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}\cdot\left(x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}\right),\ \text{deci}$$

$$\left\|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right\|=\frac{1}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}=1.$$

Cum $\dfrac{d\vec{\rho}}{ds}=\tilde{x}'(s)\vec{i}+\tilde{y}'(s)\vec{j}+\tilde{z}'(s)\vec{k}$, rezultă că

$$\left(\tilde{x}'(s)\right)^2+\left(\tilde{y}'(s)\right)^2+\left(\tilde{z}'(s)\right)^2=1.$$

Definiţia 4.1.6. *O submulţime* $C\subset\mathbb{R}^3$ *se numeşte* ***curbă*** *dacă pentru orice* $M\in C$, *există un drum parametrizat regulat* (I,r), *unde* $I\subset\mathbb{R}$ *este un interval deschis şi există o vecinătate deschisă* V *a punctului* M *astfel încât*:

a) $r(I)=V\cap C$

b) *aplicaţia* $r:I\to r(I)$ *este un homeomorfism* (*adică* r *este bijectivă continuă şi inversa sa este continuă*).

Dacă $C=r(I)$, *atunci curba* C *se numeşte* ***simplă***.

Drumul (I,r) din Definiţia 4.1.6. se numeşte o ***parametrizare locală*** a curbei C.

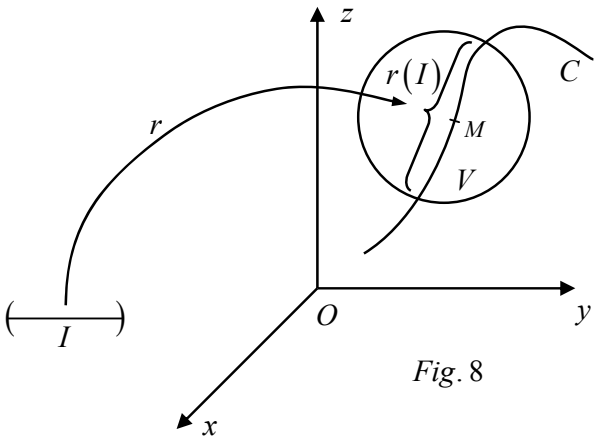


Fig. 8

Observaţia 4.1.1. Se poate demonstra că orice două parametrizări locale ale unei curbe sunt echivalente.

Observaţia 4.1.2. Din Definiţia 4.1.6. rezultă că orice curbă coincide local, adică în vecinătatea oricărui punct al său, cu suportul unui drum parametrizat regulat simplu. Se poate demonstra şi afirmaţia reciprocă, anume că local, suportul unui drum parametrizat regulat este o curbă simplă. Mai precis, are loc următorul rezultat:

Teorema 4.1.3. *Dacă* (I,r) *este un drum parametrizat regulat, atunci pentru orice punct interior* $t_0\in I$, *există o vecinătate deschisă* U *a punctului* t_0, $U\subset I$, a*stfel încât* $r(U)$ *este o curbă simplă.*

Demonstraţie.

Fie $t_0\in I$. Cum drumul (I,r) este regulat, rezultă $r'(t_0)\neq 0$ şi, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $x'(t_0)\neq 0$. Din *T. I. L.* (Teorema de Inversiune Locală)

pentru funcţia $t \to x(t): I \to \mathbb{R}$, rezultă că există o vecinătate deschisă U a punctului t_0, $t_0 \in U \subset I$ şi o vecinătate deschisă V a punctului $x_0 = x(t_0)$ astfel încât $\varphi = x|_U : U \to V$ (restricţia funcţiei x la U) este difeomorfism (adică φ este bijectivă, $\varphi \in C^1(U)$ şi $\varphi^{-1} \in C^1(V)$). Faptul că $r: U \to r(U)$ este bijectivă rezultă din observaţia că aplicaţia

$$t \to r(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in U$$

este compunerea următoarelor aplicaţii bijective:

$$t \to \varphi(t): U \to V \text{ şi } x(t) \to (x(t), y(t), z(t)): V \to r(U).$$

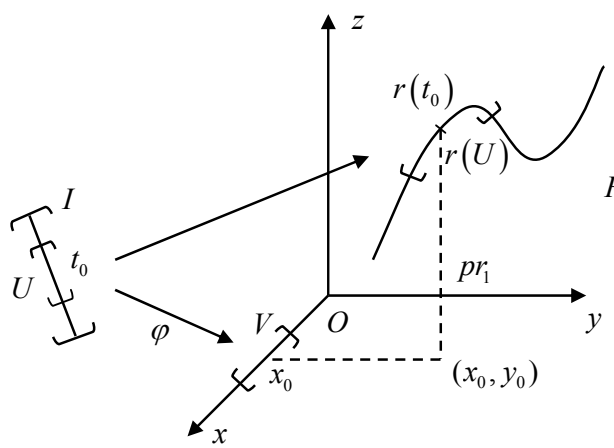


Fig. 9

Pe de altă parte, $r^{-1}: r(U) \to U$ este continuă fiind o compunere de funcţii continue, anume $r^{-1} = \varphi^{-1} \circ pr_1|_{r(U)}$, unde cu pr_1 am notat operatorul de proiecţie pe axa Ox (mai precis $pr_1(x, y, z) = x, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).

Cum $r: U \to r(U)$ este homeomorfism, rezultă că $r(U)$ este o vecinătate deschisă a punctului $M_0(x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0))$, deci există o vecinătate W a punctului M_0, $W \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât $r(U) = W \cap r(I)$. Aşadar, $C = r(I)$ este o curbă în sensul Definiţiei 4.1.6.

Din Teorema 4.1.3. rezultă că un prim exemplu de curbă în sensul Definiţiei 4.1.6. este suportul unui drum parametrizat regulat.

Definiţia 4.1.7. *O curbă C se numeşte* ***plană*** *dacă este inclusă într-un plan. Cum întotdeauna se poate alege un sistem de coordonate astfel încât planul în care se găseşte curba să coincidă cu planul xOy putem presupune că $C \subset \mathbb{R}^2$.*

Principalele moduri de reprezentare a curbelor plane sunt:

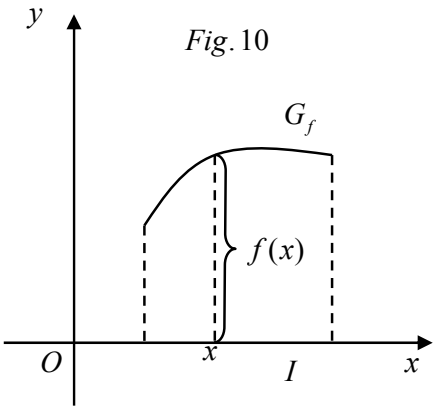
a) Reprezentarea parametrică

Aşa cum decurge din Teorema 4.1.3. suportul oricărui drum parametrizat regulat (I, r), unde $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},\ t \in I$, este o curbă plană.

b) Reprezentarea explicită

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi fie $G_f = \{(x, f(x));\ x \in I\}$ graficul său. Evident, G_f este o curbă plană simplă, fiind suportul drumului parametrizat regulat simplu:

$$\vec{r}(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j},\ x \in I.$$



c) Reprezentarea implicită

Fie $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, unde D este o mulţime deschisă şi fie $C = \{(x, y) \in D;\ F(x, y) = 0\}$.

În general, mulţimea $C \subset \mathbb{R}^2$ nu este o curbă.

Dacă presupunem însă că $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ în orice punct din C, atunci C este o curbă.

Într-adevăr, să presupunem că $(a, b) \in C$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Atunci, din Teorema Funcţiilor Implicite (*T. F. I.*), rezultă că există un interval deschis I care-l conţine pe a şi un interval deschis J care-l conţine pe b şi o funcţie implicită unică de clasă C^1

$y = f(x) : I \to J$ cu proprietăţile:

$$f(a) = b,\ F(x, f(x)) = 0,\ \forall\, x \in I.$$

Evident, $V = I \times J$ este o vecinătate deschisă a punctului (a,b).

Observăm că $V \bigcap C = G_f = \{(x, f(x)); x \in I\}$. Într-adevăr, $G_f \subset V \bigcap C$, deoarece $f(I) \subset J$. Pe de altă parte, dacă $(x,y) \in V \bigcap C$, atunci $x \in I$ şi $F(x,y) = 0$. Cum şi $F(x, f(x)) = 0$ din definiţia funcţiei implicite, rezultă că $y = f(x)$, deci că $V \bigcap C \subset G_f$. Rezultă că, local, curba C este graficul funcţiei f de clasă C^1, deci că C este o curbă plană.

Exemplul 4.1.8. Fie $F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$ şi fie $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; F(x,y) = 0\}$.

Deoarece $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 4(x^2 + y^2) = 4R^2 \neq 0, \ \forall (x,y) \in C$, rezultă că C este o curbă plană. Se ştie, de la cursul de Geometrie Analitică, că C reprezintă cercul cu centrul în origine şi de rază R.

Alte exemple de curbe plane date sub formă implicită sunt:

elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$,

hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ şi

parabola: $y^2 - 2px = 0$.

Fie acum $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime, $F, G : D \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă C^1 şi $C = \{(x,y,z) \in D; F(x,y,z) = 0, G(x,y,z) = 0\}$.

Fie $\frac{D(F,G)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$, $\frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$, $\frac{D(F,G)}{D(z,x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}$.

Dacă presupunem că în orice punct din C, cel puţin unul din aceşti determinanţi funcţionali este diferit de zero, rezultă că C este o curbă în spaţiu.

Intr-adevăr, să presupunem că $(a,b,c) \in C$ şi $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(a,b,c) \neq 0$.

Atunci, din *T. F. I.* rezultă că există un interval deschis I care-l conţine pe a, un interval deschis J care-l conţine pe b şi un interval deschis L care-l conţine pe c şi două funcţii implicite de clasă C^1, $x \to y(x): I \to J$ şi $x \to z(x): I \to L$ cu proprietăţile:

i) $y(a) = b,\ z(a) = c$

ii) $\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0, \ \forall x \in I. \end{cases}$

Dacă notăm cu $V = I \times J \times L$, atunci V este o vecinătate deschisă a punctului $(a,b,c) \in C$ şi

$$V \cap C = \{(x, y(x), z(x));\ x \in I\}.$$

Aşadar, local, C este suportul drumului parametrizat regulat $(I, r(x))$, unde $r(x) = (x, y(x), z(x)),\ x \in I$, deci C este o curbă în spaţiu.

Exemplul 4.1.9. Fie $F(x,y,z) = x + y + z - 1$ şi $G(x,y,z) = x - y + 2z + 2$.

Deoarece $\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, oricare ar fi $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, rezultă că

$D = \{(x,y,z); x + y + z - 1 = 0, x - y + 2z + 2 = 0\}$ reprezintă o curbă în spaţiu.

Se ştie că D este o dreaptă în spaţiu obţinută prin intersecţia planelor $x + y + z - 1 = 0$ şi $x - y + 2z + 2 = 0$.

4.2. TANGENTĂ. PLAN OSCULATOR. TRIEDRUL LUI FRENET

Fie $C \subset \mathbb{R}^3$ o curbă şi fie $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t \in I$ o parametrizare locală a sa.

Fie $M(x(t), y(t), z(t)) \in C$ şi fie $M'(x(t+h), y(t+h), z(t+h)) \in C,\ \ h > 0$ un punct vecin cu M. Ţinând seama de regula de adunare a vectorilor avem:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t+h) - \vec{r}(t).$$

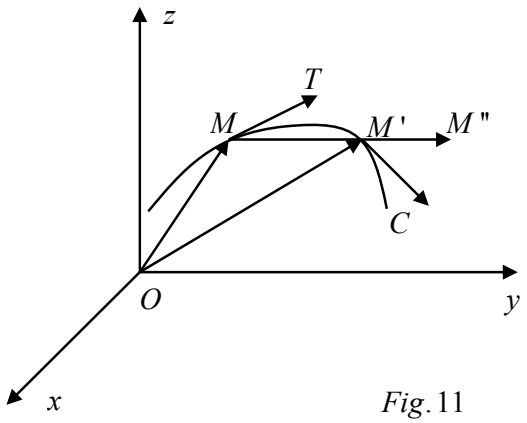


Fig. 11

Evident, vectorul

$$\overrightarrow{MM''} = \frac{1}{h} \cdot \overrightarrow{MM'} = \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

este colinear cu $\overrightarrow{MM'}$ şi are aceeaşi orientare cu acesta.

Deoarece drumul $(I, \vec{r})$ este regulat rezultă că $x, y, z \in C^1(I)$, deci că există

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}, \ t \in I.$$

Definiţia 4.2.1. *Dreapta care trece prin M şi este colineară cu $\vec{r}'(t) = \overrightarrow{MT}$ se numeşte* ***tangenta*** *în M la curba C.*

Observaţia 4.2.1. Definiţia tangentei într-un punct la o curbă nu depinde de parametrizarea locală a acesteia.

Într-adevăr, fie (I_1, r_1) un drum parametrizat regulat echivalent cu (I, r) şi fie $\lambda : I \to I_1$ schimbarea de parametru.

Atunci $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(\lambda(t)), \ \forall t \in I$ şi $\vec{r}'(t) = \vec{r}'_1(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)$, de unde deducem că vectorii $\vec{r}'(t)$ şi $\vec{r}'_1(u)$ sunt colineari, unde $u = \lambda(t)$. Rezultă că dreptele tangente definite de $\vec{r}'(t)$, respectiv $\vec{r}'_1(u)$ coincid. Aşadar, dreapta tangentă într-un punct la o curbă este bine definită şi nu depinde de reprezentarea locală a acesteia.

Fie $M \in C$ şi (I, r) o reprezentare locală a curbei C, unde

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \ t \in I.$$

Conform Definiţiei 4.2.1., tangenta în M la curba C este dreapta care trece prin $M(x(t), y(t), z(t))$ şi este colineară cu $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$. Rezultă că ecuaţiile canonice ale tangentei în M la curba C sunt:

$$\frac{X-x(t)}{x'(t)}=\frac{Y-y(t)}{y'(t)}=\frac{Z-z(t)}{z'(t)}. \tag{4.1}$$

Observaţia 4.2.2. Dacă notăm cu $\vec{\tau}=\vec{\tau}(t)$ ***versorul tangentei*** în M la curba C, orientat în sensul creşterii parametrului, atunci

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}. \tag{4.2}$$

Fie $\vec{\rho}(s)=\vec{r}\left(\lambda^{-1}(s)\right),\ s\in J$, reprezentarea normală a curbei C, unde

$$s=\lambda(t)=\int_a^t\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,du=\int_a^t\left\|\vec{r}'(u)\right\|du.$$

Din Teorema 4.1.2. deducem că:

$$\left\|\vec{\rho}'(s)\right\|=1 \text{ şi } \vec{\rho}'(s)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}=\vec{\tau}. \tag{4.3}$$

Definiţia 4.2.2. *Planul care trece prin M şi este perpendicular pe tangenta în M la curba C se numeşte* ***planul normal*** *în M la curba C.*

Ecuaţia planului normal este:

$$x'(t)\big(X-x(t)\big)+y'(t)\big(Y-y(t)\big)+z'(t)\big(Z-z(t)\big)=0. \tag{4.4}$$

Exemplul 4.2.1. Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal în punctul $M\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$ la curba $\vec{r}(t)=\frac{t^2}{2}\vec{i}+\frac{2t^3}{3}\vec{j}+\frac{t^4}{2}\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$.

Avem $x(t)=\frac{t^2}{2};\ y(t)=\frac{2t^3}{3};\ z(t)=\frac{t^4}{2}$ şi $x'(t)=t;\ y'(t)=2t^2;\ z'(t)=2t^3$.

Evident punctul M corespunde valorii $t=1$ a parametrului, deci ecuaţiile tangentei la curbă în M sunt:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{2}{3}}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2},$$

iar ecuaţia planului normal este:

$$1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ sau } x+2y+2z-\frac{17}{6}=0.$$

Vectorul tangent în M la curbă este $\vec{r}'(1)=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ şi $\left\|\vec{r}'(1)\right\|=\sqrt{1+4+4}=3$.

Versorul tangentei în M la curbă este $\vec{\tau}(1)=\dfrac{\vec{r}'(1)}{\left\|\vec{r}'(1)\right\|}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right)$.

Dacă curba C este dată implicit adică:

$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0\right\}$, unde

$F,G\in C^1$ şi $\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}\neq 0$ pe C, atunci C admite reprezentarea parametrică locală:

$\vec{r}(t)=x\vec{i}+y(x)\vec{j}+z(x)\vec{k}$, unde $y=y(x)$ şi $z=z(x), x\in I$ sunt funcţiile implicite definite de sistemul

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

Deoarece:

$$y'(x)=-\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(x,z)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}}=\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}} \text{ şi } z'(x)=-\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(y,x)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}}=\frac{\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}},$$

rezultă că ecuaţiile canonice ale tangentei sunt:

$$\frac{X-x}{\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}}=\frac{Y-y(x)}{\dfrac{D(F,G)}{D(z,x)}}=\frac{Z-z(x)}{\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}}, \tag{4.5}$$

iar ecuaţia planului normal este:

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}(X-x)+\frac{D(F,G)}{D(z,x)}\left(Y-y(x)\right)+\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\left(Z-z(x)\right)=0. \tag{4.6}$$

Exemplul 4.2.2. Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ecuaţia planului normal în punctul $M(-1,-2,-1)$ la curba $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^3-y^2+z+6=0,\ x-y^2+z^3+6=0\right\}$.

Avem $F(x,y,z)=x^3-y^2+z+6$ şi $G(x,y,z)=x-y^2+z^3+6$.

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2y & 1\\ -2y & 3z^2\end{vmatrix}; \qquad \frac{D(F,G)}{D(y,z)}(-1,-2,-1)=8$$

$$\frac{D(F,G)}{D(z,x)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3x^2\\ 3z^2 & 1\end{vmatrix} \qquad \frac{D(F,G)}{D(z,x)}(-1,-2,-1)=-8$$

$$\frac{D(F,G)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3x^2 & -2y\\ 1 & -2y\end{vmatrix} \qquad \frac{D(F,G)}{D(z,x)}(-1,-2,-1)=8.$$

Cum parametrii directori ai unei drepte sunt determinanţi în afara unui factor de proporţionalitate, rezultă că putem alege drept parametrii directori ai tangentei în M la curba C numerele $(1,-1,1)$.

Prin urmare, ecuaţiile canonice ale tangentei în M la curba C sunt:

$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{1}$, iar ecuaţia planului normal în M la C este:

$(x+1)-(y+2)+(z+1)=0$ sau $x-y+z=0$.

Vectorul tangent în M la curbă este $\overrightarrow{MT}=\vec{r}\,'(-1)=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, iar versorul tangentei este $\vec{\tau}(-1)=\frac{\vec{r}\,'(-1)}{\left\|\vec{r}\,'(-1)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)$.

În cazul unei curbe plane dată sub formă implicită:

$C=\left\{(x,y)\,\middle|\, F(x,y)=0\right\}$, $F\in C^1$, $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$, avem

$\vec{r}(x) = x\vec{i} + y(x)\vec{j}$, unde $y'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$, $x \in I$.

Ecuaţia tangentei într-un punct curent al curbei este:

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y(x)}{-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}} \text{ sau}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) \cdot (X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot (Y - y(x)) = 0. \tag{4.7}$$

Ecuaţia normalei la curbă în acel punct curent este:

$$Y - y(x) = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))} \cdot (X - x) \text{ sau}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot (X - x) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) \cdot (Y - y(x)) = 0. \tag{4.8}$$

Exemplul 4.2.3. Să se scrie ecuaţia tangentei într-un punct curent al elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Dacă notăm cu $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, atunci $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{2x}{a^2}$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{2y}{b^2}$.

Conform relaţiei (4.7), ecuaţia tangentei la elipsă în punctul $M_0(x_0, y_0)$ va fi:

$$\frac{2x_0}{a^2} \cdot (x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2} \cdot (y - y_0) = 0 \text{ sau } \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$

Deoarece coordonatele (x_0, y_0) ale punctului M_0 verifică ecuaţia elipsei, rezultă că

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Aşadar, ecuaţia tangentei în $M_0(x_0, y_0)$ la elipsă este:

$$\frac{x\,x_0}{a^2}+\frac{y\,y_0}{b^2}-1=0\,. \tag{4.9}$$

Definiţia 4.2.3. *Un drum parametrizat* $(I,\vec{r})$ *de clasă* C^2 *se numeşte* ***biregulat*** *dacă*

$$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\neq\vec{0}\,,$$

deci dacă vectorii $\vec{r}\,'(t)$ *şi* $\vec{r}\,''(t)$ *nu sunt colineari şi determină un plan.*

Planul determinat de vectorii $\vec{r}\,'(t)$ *şi* $\vec{r}\,''(t)$ *se numeşte* ***planul osculator*** *în punctul* $M(x(t),y(t),z(t))$ *al drumului* $(I,\vec{r})$.

Observaţia 4.2.3. Planul osculator într-un punct la o curbă C nu depinde de reprezentarea locală a curbei.

Într-adevăr, fie $M\in C$ şi fie $(I,\vec{r})$ o reprezentare locală a curbei C biregulată.

Dacă (I_1,r_1) este o reprezentare parametrică echivalentă, atunci $\vec{r}(t)=\vec{r_1}(\lambda(t))$, unde $\lambda: I\to I_1$ este schimbarea de parametru. Ţinând seama de regula de derivare a funcţiilor compuse şi a produsului a două funcţii, rezultă:

$\vec{r}\,'(t)=\vec{r_1}\,'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)$ şi

$$\vec{r}\,''(t)=\vec{r_1}\,''(\lambda(t))\cdot(\lambda'(t))^2+\vec{r_1}\,'(\lambda(t))\cdot\lambda''(t)\,. \tag{4.10}$$

Din relaţiile (4.10) deducem că $\vec{r}\,'(t)$ este colinear cu $\vec{r}\,'_1(u)$ şi că $\vec{r}\,''(t)$ aparţine planului determinat de $\vec{r}\,'_1(u)$ şi $\vec{r}\,''_1(u)$, unde $u=\lambda(t)$.

Aşadar, planele definite de $\vec{r}\,'(t)$ şi $\vec{r}\,''(t)$, respectiv de $\vec{r}\,'_1(u)$ şi $\vec{r}\,''_1(u)$ coincid, deci planul osculator într-un punct la o curbă este bine definit şi nu depinde de parametrizarea locală a acesteia.

Fie $M\in C$ şi (I,r) o reprezentare locală biregulată a curbei C, unde

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k},\ t \in I.$$

Conform Definiţiei 4.2.3., planul osculator în M la C este planul determinat de vectorii $\vec{r}'(t)$ şi $\vec{r}''(t)$. Rezultă că ecuaţia planului osculator în punctul $M(x(t), y(t), z(t))$ la curba C este :

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \tag{4.11}$$

Dacă notăm cu

$$A(t) = \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix},\quad B(t) = -\begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix},\quad C(t) = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix},$$

atunci ecuaţia planului osculator este:

$$A(t)(X - x(t)) + B(t)(Y - y(t)) + C(t)(Z - z(t)) = 0. \tag{4.12}$$

Definiţia 4.2.4. *Se numeşte* ***binormala*** *în M la C perpendiculara în M pe planul osculator.*

Ecuaţiile canonice ale binormalei în M la curbă sunt:

$$\frac{X - x(t)}{A(t)} = \frac{Y - y(t)}{B(t)} = \frac{Z - z(t)}{C(t)}. \tag{4.13}$$

Definiţia 4.2.5. *Se numeşte* ***normala principală*** *în M la C dreapta din planul osculator care trece prin M şi este perpendiculară pe tangenta în M la curba C.*

Din definiţie rezultă că ***normala principală*** este dreapta de intersecţie dintre planul normal şi planul osculator. Rezultă că ecuaţiile generale ale normalei principale sunt:

$$\begin{cases} x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0 \\ A(t)(X - x(t)) + B(t)(Y - y(t)) + C(t)(Z - z(t)) = 0. \end{cases}$$

Dacă notăm cu

$$l(t) = \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ B(t) & C(t) \end{vmatrix},\quad m(t) = -\begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ A(t) & C(t) \end{vmatrix},\quad n(t) = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ A(t) & B(t) \end{vmatrix},$$

atunci ecuaţiile canonice ale normalei principale sunt:

$$\frac{X-x(t)}{l(t)}=\frac{Y-y(t)}{m(t)}=\frac{Z-z(t)}{n(t)}. \tag{4.14}$$

Definiţia 4.2.6. *Se numeşte* ***planul rectifiant*** *în M la curba C planul determinat de tangenta şi binormala în M la C.*

Deoarece normala principală este perpendiculară şi pe tangentă şi pe binormală, rezultă că normala principală este perpendiculară pe planul rectificant, deci ecuaţia planului rectificant este:

$$l(t)\big(X-x(t)\big)+m(t)\big(Y-y(t)\big)+n(t)\big(Z-z(t)\big)=0. \tag{4.15}$$

Definiţia 4.2.7. *Fie $C\subset\mathbb{R}^3$ o curbă biregulată. Se numeşte* ***triedrul Frenet*** *în punctul M al curbei C, triedrul format din planul normal, planul osculator şi planul rectificant în acest punct al curbei.*

Observaţia 4.2.4. Planele triedrului lui Frenet sunt perpendiculare două câte două.

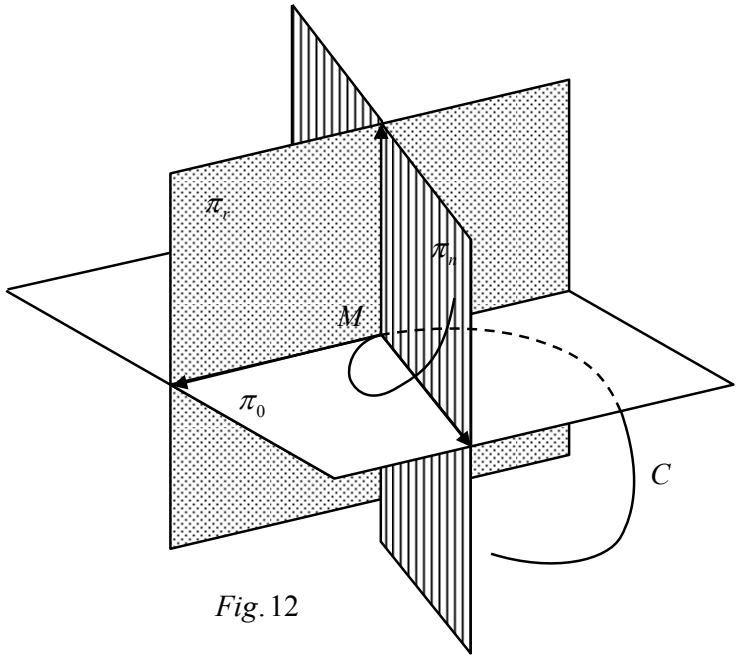


Fig. 12

Într-adevăr, normala la planul normal este colineară cu $\vec{r}'(t)$, normala la planul osculator este colineară cu $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$, iar normala la planul rectifiant este colineară cu

$$\vec{r}'(t)\times\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right).$$

Muchiile triedrului Frenet, adică dreptele de intersecţie ale planelor triedrului Frenet (tangenta, normala principală şi binormala) sunt, de asemenea, perpendiculare două câte două.

Exemplul 4.2.4. Să se scie ecuaţiile planelor (feţelor) şi axelor (muchiilor) triedrului Frenet în punctul $M\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$ la curba $\vec{r}(t)=\frac{t^2}{2}\vec{i}+\frac{2t^3}{3}\vec{j}+\frac{t^4}{2}\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$.

Evident, punctul M corespunde valorii $t=1$ a parametrului.

Avem: $x(t)=\frac{t^2}{2};\ y(t)=\frac{2t^3}{3};\ z(t)=\frac{t^4}{2}$

$$x'(t)=t;\ y'(t)=2t^2;\ z'(t)=2t^3;\ x'(1)=1;\ y'(1)=2;\ z'(1)=2$$

$$x''(t)=1;\ y''(t)=4t;\ z''(t)=6t;\ x''(1)=1;\ y''(1)=4;\ z''(1)=6.$$

Ecuaţiile tangentei la curbă sunt:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{2}{3}}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2}.$$

Ecuaţia planului normal este:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\left(y-\frac{2}{3}\right)+2\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ sau } x+2y+2z-\frac{17}{6}=0.$$

Ecuaţia planului osculator este:

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{2}{3} & z-\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

În continuare avem:

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)-4\left(y-\frac{2}{3}\right)+2\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ sau } 2x-2y+z-\frac{1}{6}=0.$$

Ecuaţiile canonice ale binormalei sunt:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}.$$

$$l(1)=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=6;\quad m(1)=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3;\quad n(1)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6.$$

Cum parametrii directori sunt determinanţi în afara unui factor de proporţionalitate putem lua:

$$l(1)=2;\quad m(1)=1;\quad n(1)=-2.$$

Ecuaţiile canonice ale normalei principale sunt:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y-\frac{2}{3}}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-2},$$

iar ecuaţia planului rectifiant este:

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{2}{3}\right)-2\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ sau } 2x+y-2z-\frac{2}{3}=0.$$

Exemplul 4.2.5. Să se scrie ecuaţiile feţelor şi muchiilor triedrului lui Frenet în punctul $M(-1,-2,-1)$ al curbei

$$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^3-y^2+z+6=0,\ x-y^2+z^3+6=0\right\}.$$

Dacă notăm cu $F(x,y,z)=x^3-y^2+z+6=0$ şi cu $G(x,y,z)=x-y^2+z^3+6=0$, atunci $\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}-2y & 1\\ -2y & 3z^2\end{vmatrix}=-6yz^2+2y$ şi $\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}(M)=\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}(-1,-2,-1)=8\neq 0$.

Din Teorema Funcţiilor Implicite pentru sisteme rezultă că există o vecinătate deschisă U a lui -1, o vecinătate deschisă V a lui -2, o vecinătate deschisă W a lui -1 şi două funcţii implicite

$x \to y(x) : U \to V$ şi

$x \to z(x) : U \to W$ cu proprietăţile:

$$\begin{cases} y(-1) = -2 \\ z(-1) = -1 \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\begin{cases} x^3 - y(x)^2 + z(x) + 6 = 0 \\ x - y(x)^2 + z^3(x) + 6 = 0 \end{cases}, \ \forall x \in U . \tag{4.17}$$

Cum F, G sunt indefinit derivabile pe $\mathbb{R}^3$, rezultă că funcţiile implicite y şi z sunt de asemenea indefinit derivabile.

Derivând relaţiile (4.17) în raport cu x obţinem

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y(x)y'(x) + z'(x) = 0 \\ 1 - 2y(x)y'(x) + 3z^2(x)z'(x) = 0 \end{cases}, \ x \in U . \tag{4.18}$$

Ţinând seama de (4.16) în (4.18), pentru $x = -1$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} 3 + 4y'(-1) + z'(-1) = 0 \\ 1 + 4y'(-1) + 3z'(-1) = 0. \end{cases}$$

a cărui soluţie este:

$$\begin{cases} y'(-1) = -1 \\ z'(-1) = 1 \end{cases}. \tag{4.19}$$

Derivând relaţiile (4.18) în raport cu x obţinem:

$$\begin{cases} 6x - 2(y'(x))^2 - 2y(x)y''(x) + z''(x) = 0 \\ -2(y'(x))^2 - 2y(x)y''(x) + 6z(x)(z'(x))^2 + 3z^2(x)z''(x) = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Punând $x = -1$ în (4.20) şi ţinând seama de (4.16) şi (4.19) rezultă sistemul:

$$\begin{cases} -6 - 2 + 4y''(-1) + z''(-1) = 0 \\ -2 + 4y''(-1) - 6 + 3z''(-1) = 0 \end{cases}$$

a cărui soluţie este:

$$\begin{cases} y''(-1) = 2 \\ z''(-1) = 0. \end{cases}$$

Deoarece o parametrizare locală a curbei C în vecinătatea punctului M este

$$\vec{r}(x) = x\vec{i} + y(x)\vec{j} + z(x)\vec{k},\ x \in U,$$

rezultă că parametrii directori ai tangentei în M la curba C sunt

$$(1, y'(-1), z'(-1)) = (1, -1, 1).$$

Ecuaţiile canonice ale tangentei în $M(-1,-2,-1)$ la curba C sunt:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1},$$

iar ecuaţia planului normal în M la C este:

$$1\cdot(x+1) - (y+2) + 1\cdot(z+1) = 0 \text{ sau } x - y + z = 0.$$

Ecuaţia planului osculator în M la curba C este:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } x - z = 0.$$

Ecuaţiile canonice ale binormalei în M la C sunt:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{-1}.$$

Cum $x'(-1) = 1;\ y'(-1) = -1;\ z'(-1) = 1$ şi $A = -2;\ B = 0;\ C = 2$, rezultă:

$$l = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;\ m = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4;\ n = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Deoarece parametrii directori se determină în afara unui factor de proporţionalitate, putem lua:

$l = 1;\ m = 2;\ n = 1$ şi ecuaţiile canonice ale normalei principale în M la C vor fi:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

Ecuaţia planului rectifiant în M la C este:

$1\cdot(x+1)+2(y+2)+1\cdot(z+1)=0$ sau $x+2y+z+6=0$.

Revenim la cazul general al unei curbe biregulate C şi fie

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},\ t\in I$ o parametrizare locală a sa. Reamintim că am notat cu $\vec{\tau}$ ***versorul tangentei*** în punctul M la curba C şi că $\vec{\tau}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}$.

Fie $\vec{\beta}=\dfrac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|}$. (4.21)

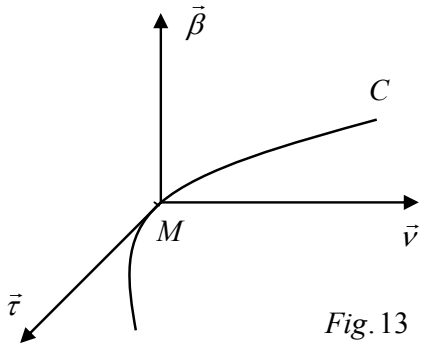


Fig. 13

Evident $\vec{\beta}$ este un versor colinear cu binormala. În continuare $\vec{\beta}$ se va numi ***versorul binormalei*** în punctul M la curba C.

Fie $\vec{\nu}=\vec{\beta}\times\vec{\tau}$. (4.22)

Evident $\vec{\nu}$ este un versor colinear cu normala principală şi poartă numele de ***versorul normalei principale***.

Aşadar, am asociat oricărui punct $M\in C$, un reper rectangular drept $\left\{M;\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}\right\}$, numit ***reperul lui Frenet***, format din versorii tangentei $\vec{\tau}$, normalei principale $\vec{\nu}$ şi binormalei $\vec{\beta}$.

Exemplul 4.2.6. Să se determine reperul lui Frenet în punctul $M(1,1,0)$ la curba $C:\ \vec{r}(t)=e^{t}\,\vec{i}+e^{-t}\,\vec{j}+\sqrt{2}\,t\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$.

Evident punctul M corespunde valorii $t=0$ a parametrului.

Avem: $\vec{r}'(t)=e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\,\vec{k}$

$\vec{r}''(t)=e^{t}\,\vec{i}+e^{-t}\,\vec{j}$

$$\vec{r}''(t) = e^{t}\,\vec{i} + e^{-t}\,\vec{j}$$

$$\vec{r}'(0) = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k},\ \left\|\vec{r}'(0)\right\| = 2\,.$$

$$\vec{\tau}(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{\left\|\vec{r}'(0)\right\|} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\,.$$

$$\vec{r}''(0) = \vec{i} + \vec{j} \text{ şi } \vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0) = -\sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\,,$$

$$\left\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\right\| = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{\beta}(0) = \frac{\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)}{\left\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\right\|} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\,.$$

În sfârşit, $\vec{\nu}(0) = \vec{\beta}(0)\times\vec{\tau}(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

Exemplul 4.2.7. Să se afle reperul lui Frenet în punctul $M(-1,-2,-1)$ la curba C dată sub formă implicită:

$$C = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^3 - y^2 + z + 6 = 0,\quad x - y^2 + z^3 + 6 = 0\right\}.$$

Aşa cum am văzut în Exemplul 4.2.5., curba C admite în vecinătatea punctului M reprezentarea parametrică

$$\vec{r}(x) = x\,\vec{i} + y(x)\vec{j} + z(x)\vec{k},\ x\in I \text{ şi}$$

$$x'(-1) = 1;\ y'(-1) = -1;\ z'(-1) = 1$$

$$x''(-1) = 0;\ y''(-1) = 2;\ z''(-1) = 0\,.$$

Prin urmare avem

$$\vec{r}'(-1) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k},\ \left\|\vec{r}'(-1)\right\| = \sqrt{3}\text{, deci}$$

$$\vec{\tau}(-1) = \frac{\vec{r}'(-1)}{\left\|\vec{r}'(-1)\right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

$\vec{r}''(-1) = 2\vec{j}$ şi $\vec{r}'(-1) \times \vec{r}''(-1) = -2\vec{i} + 2\vec{k}$; $\left\|\vec{r}'(-1) \times \vec{r}''(-1)\right\| = 2\sqrt{2}$

$$\vec{\beta}(-1) = \frac{\vec{r}'(-1) \times \vec{r}''(-1)}{\left\|\vec{r}'(-1) \times \vec{r}''(-1)\right\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\vec{\nu}(-1) = \vec{\beta}(-1) \times \vec{\tau}(-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}.$$

4.3. CURBURA UNEI CURBE

Fie C o curbă biregulată, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)j + z(t)\vec{k},\ t \in I = (a,b)$ o reprezentare parametrică locală a sa şi fie $\vec{\rho}(s) = \vec{r}\left(\lambda^{-1}(s)\right),\ s \in J = (0, L)$ reprezentarea normală locală a curbei C.

Reamintim că $s = \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, du = \int_a^t \left\|\vec{r}'(u)\right\| du$.

Conform Teoremei 4.1.2. avem:

$\left\|\vec{\rho}'(s)\right\| = 1$ şi $\vec{\rho}'(s) = \vec{\tau}$.

Derivând relaţia $1 = \vec{\rho}'(s) \cdot \vec{\rho}'(s)$ obţinem:

$0 = 2\vec{\rho}'(s) \cdot \vec{\rho}''(s)$,

de unde deducem că vectorii $\vec{\rho}'(s)$ şi $\vec{\rho}''(s)$ sunt ortogonali, deci că $\vec{\rho}''(s)$ aparţine planului normal.

Pe de altă parte, derivând relaţia:

$$\vec{\rho}'(s) = \vec{r}'\left(\lambda^{-1}(s)\right) \cdot \left(\lambda^{-1}(s)\right)' = \frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}, \tag{4.23}$$

rezultă

$$\vec{\rho}''(s) = \vec{r}''\left(\lambda^{-1}(s)\right) \cdot \left(\left(\lambda^{-1}(s)\right)'\right)^2 + \vec{r}'\left(\lambda^{-1}(s)\right) \cdot \left(\lambda^{-1}(s)\right)'' \tag{4.24}$$

sau $$\vec{\rho}''(s)=\frac{\vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^2}+\vec{r}'(t)\left(\lambda^{-1}(s)\right)'', \tag{4.25}$$

unde $s=\lambda(t)$.

Din (4.23) şi (4.25) deducem că:

$$\vec{\rho}'(s)\times\vec{\rho}''(s)=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3}. \tag{4.26}$$

Din (4.26) rezultă că $\vec{\rho}''(s)$ aparţine planului osculator. Cum $\vec{\rho}''(s)$ aparţine şi planului normal, deducem că $\vec{\rho}''(s)$ este colinear cu normala principală, deci că există $k_1(s)\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\vec{\rho}''(s)=k_1(s)\vec{\nu}. \tag{4.27}$$

Din (4.27) deducem $k_1(s)=\left\|\vec{\rho}''(s)\right\|$.

Definiţia 4.3.1. *Fie $M\in C$ astfel încât $\overrightarrow{OM}=\vec{\rho}(s)$. Se numeşte* ***curbura*** *curbei C în punctul M numărul*

$$k_1(s)=\left\|\vec{\rho}''(s)\right\|.$$

Inversul acestui număr se notează cu $R(s)$ şi se numeşte ***raza de curbură*** *în $M\in C$. Aşadar $R(s)=\dfrac{1}{k_1(s)}$.*

Ţinând seama că $\left\|\vec{\rho}'(s)\right\|=1$ şi vectorul $\vec{\rho}''(s)$ este perpendicular pe $\vec{\rho}'(s)$, rezultă că $\left\|\vec{\rho}''(s)\right\|=\left\|\vec{\rho}'(s)\times\vec{\rho}''(s)\right\|=\dfrac{\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3}$, conform (4.26). Am obţinut astfel expresia analitică a curburii:

$$k_1=\frac{\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3}=\frac{\sqrt{A^2(t)+B^2(t)+C^2(t)}}{\left(x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\right)^{3/2}}, \tag{4.28}$$

unde reamintim că

$$A(t)=\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix},\quad B(t)=-\begin{vmatrix} x'(t) & z'(t) \\ x''(t) & z''(t) \end{vmatrix},\quad C(t)=\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}.$$

În cazul unei curbe plane expresia curburii devine:

$$k_1=\frac{\left|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)\right|}{\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)^{3/2}}. \tag{4.29}$$

În sfârşit, dacă curba plană este dată sub formă explicită $y=y(x),\ x\in I$, atunci

$$k_1=\frac{\left|y''(x)\right|}{\left(1+y'^2(x)\right)^{3/2}}. \tag{4.30}$$

Pentru interpretarea geometrică a curburii considerăm un punct $M\in C$ corespunzător valorii s a parametrului din reprezentarea locală normală a curbei C, adică $\overrightarrow{OM}=\vec{\rho}(s)$ şi un punct vecin M', corespunzător valorii $s+\Delta s$ a parametrului, deci $\overrightarrow{OM'}=\vec{\rho}(s+\Delta s)$. Evident, Δs reprezintă lungimea arcului $\widehat{MM'}$.

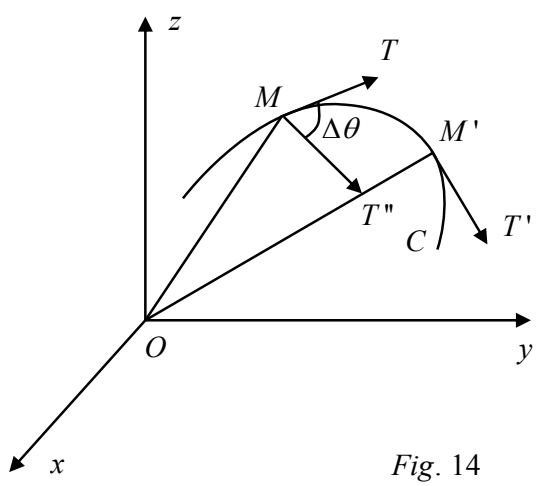


Fig. 14

Fie $\overrightarrow{MT}=\vec{\tau}(s)$, $\overrightarrow{M'T'}=\vec{\tau}(s+\Delta s)$ şi $\overrightarrow{MT''}$ un vector echivalent cu $\overrightarrow{M'T'}$.

Notăm cu $\Delta\theta$ unghiul dintre tangentele în M şi M' la curba C. Avem:

$$k_1(s)=\left\|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right\|=\lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)}{\Delta s}\right\|=\lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\overrightarrow{M'T'}-\overrightarrow{MT}}{\Delta s}\right\|=\lim_{\Delta s\to 0}\left\|\frac{\overrightarrow{TT''}}{\Delta s}\right\|.$$

Pe de altă parte, din Teorema cosinusului rezultă

$$\left\|\overrightarrow{TT''}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MT}\right\|+\left\|\overrightarrow{MT''}\right\|-2\left\|\overrightarrow{MT}\right\|\left\|\overrightarrow{MT''}\right\|\cos\Delta\theta=2(1-\cos\Delta\theta)=4\sin^2\frac{\Delta\theta}{2}.$$

În continuare avem:

$$k_1(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|.$$

Cum $\Delta s \to 0$ implică $\Delta\theta \to 0$ şi $\lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \dfrac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1$, deducem că

$$k_1(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|.$$

Aşadar, curbura măsoară viteza de variaţie a unghiului tangentei la curbă. Dacă curba este o dreaptă, unghiul $\Delta\theta$ dintre tangentele în orice două puncte vecine este 0, deci curbura unei drepte este egală cu 0 în orice punct al său.

O altă curbă care are curbura constantă în fiecare punct al său este cercul.

Într-adevăr, observăm că unghiul $\Delta\theta$ dintre tangentele $\overrightarrow{MT}$ şi $\overrightarrow{M'T'}$ este egal cu unghiul dintre razele OM şi OM', ca unghiuri cu laturile perpendiculare. Pe de altă parte avem că lungimea arcului $MM' = \Delta s = R \cdot \Delta\theta$, unde R este raza cercului, deci $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s} = \dfrac{1}{R} = \text{constant}$.

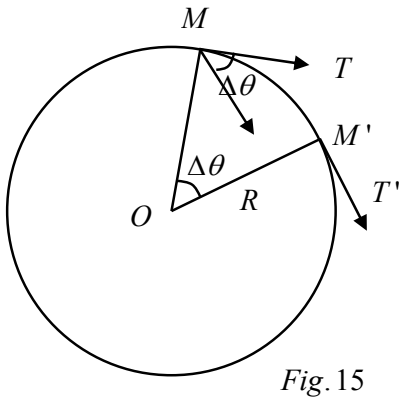


Fig. 15

Aşadar, curbura într-un punct oarecare al cercului de rază R este constantă şi este egală cu $\dfrac{1}{R}$.

La o curbă oarecare, curbura nu este în general constantă, ea modificându-se când se trece de la un punct la altul.

Exemplul 4.3.1. Să se afle curbura şi raza de curbură în punctele $M_1(0,0,0)$ şi $M_2\left(1,1,\dfrac{2}{3}\right)$ pentru curba:

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + \frac{2t^3}{3}\,\vec{k},\ t \in \mathbb{R}.$$

Avem: $x(t)=t;\ y(t)=t^2;\ z(t)=\dfrac{2t^3}{3}$

$x'(t)=1;\ y'(t)=2t;\ z'(t)=2t^2$

$x''(t)=0;\ y''(t)=2;\ z''(t)=4t$

$$A(t)=\begin{vmatrix}2t & 2t^2\\ 2 & 4t\end{vmatrix}=4t^2;\ B(t)=-\begin{vmatrix}1 & 2t^2\\ 0 & 4t\end{vmatrix}=-4t;\ C(t)=\begin{vmatrix}1 & 2t\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Din (4.28) rezultă:

$$k_1(t)=\frac{\sqrt{16t^4+16t^2+4}}{\left(1+4t^2+4t^4\right)^{3/2}}=\frac{2}{\left(1+2t^2\right)^2}.$$

Punctul M_1 corespunde valorii $t=0$ a parametrului, iar punctul M_2 corespunde valorii $t=1$ a acestuia.

Avem $k_1(M_1)=2$ şi $R(M_1)=\dfrac{1}{2}$

$k_1(M_2)=\dfrac{2}{9}$ şi $R(M_2)=\dfrac{9}{2}$.

Exemplul 4.3.2. Să se afle curbura şi raza de curbură în punctul $M(1,1,1)$ al curbei

$$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2-y^2+z^2-1=0,\ y^2-2x+z=0\right\}.$$

Fie $F(x,y,z)=x^2-y^2+z^2-1$ şi $G(x,y,z)=y^2-2x+z$.

Avem $\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}-2y & 2z\\ 2y & 1\end{vmatrix}=-2y-4yz$ şi $\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}(1,1,1)=-6\neq 0$.

Din Teorema Funcţiilor Implicite rezultă că există vecinătăţile U,V şi W ale punctului 1 şi două funcţii implicite

$x\to y(x):U\to V$

$x\to z(x):U\to W$

cu proprietăţile:

$$y(1)=1;\ z(1)=1$$

$$\begin{cases} x^2-y^2(x)+z^2(x)-1 &= 0 \\ y^2(x)-2x+z(x) &= 0 \end{cases},\ \forall x\in U\ . \tag{4.31}$$

În plus, funcţiile $y=y(x)$ şi $z=z(x)$ sunt indefinit derivabile pe U .

Derivând sistemul (4.31) rezultă

$$\begin{cases} 2x-2y(x)y'(x)+2z(x)z'(x) &= 0 \\ -2+2y(x)y'(x)+z'(x) &= 0. \end{cases} \tag{4.32}$$

Pentru $x=1$ obţinem sistemul:

$$\begin{cases} 2-2y'(1)+2z'(1) &= 0 \\ -2+2y'(1)+z'(1) &= 0 \end{cases}$$

a cărui soluţie este

$$\begin{cases} y'(1) &= 1 \\ z'(1) &= 0. \end{cases} \tag{4.33}$$

Derivând sistemul (4.32) rezultă:

$$\begin{cases} 2-2\left(y'(x)\right)^2-2y(x)y''(x)+2\left(z'(x)\right)^2+2z(x)z''(x) &= 0 \\ 2\left(y'(x)\right)^2+2y(x)y''(x)+z''(x) &= 0. \end{cases}$$

Făcând $x=1$ şi ţinând seama de (4.33) obţinem sistemul:

$$\begin{cases} 2-2-2y''(1)+2z''(1) &= 0 \\ 2+2y''(1)+z''(1) &= 0 \end{cases}$$

a cărui soluţie este:

$$y''(1)=z''(1)=-\frac{2}{3}\ .$$

În continuare avem

$$A(1)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=-\frac{2}{3};\quad B(1)=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=\frac{2}{3};\quad C(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=-\frac{2}{3}.$$

$$k_1(M)=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \text{şi} \qquad R(M)=\sqrt{6}.$$

4.4. TORSIUNEA UNEI CURBE. FORMULELE LUI FRENET

Prima formulă a lui Frenet se deduce imediat din (4.27) şi din faptul că $\vec{\tau}=\vec{\rho}\,'(s)$, conform Observaţiei 4.2.2.

Aşadar, ***prima formulă a lui Frenet*** este:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k_1(s)\vec{\nu}=\frac{1}{R(s)}\vec{\nu}. \tag{4.34}$$

Derivând relaţia $\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}$ şi ţinând seama de (4.34), obţinem

$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\times\vec{\nu}+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds}=k_1\left(\vec{\nu}\times\vec{\nu}\right)+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds}=\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds}$, de unde deducem că $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ este perpendicular pe $\vec{\tau}$.

Pe de altă parte, derivând relaţia $1=\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}$, rezultă

$0=2\vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{ds}$, deci $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ este perpendicular pe $\vec{\beta}$.

Deoarece $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ este perpendicular şi pe $\vec{\tau}$ şi pe $\vec{\beta}$, rezultă că $\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ este colinear cu $\vec{\nu}$. Fie $k_2(s)\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-k_2(s)\vec{\nu}. \tag{4.35}$$

Din (4.35) deducem că $k_2(s)=\left\|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right\|$.

Definiţia 4.4.1. *Fie* $M \in C$ *astfel încât* $\overrightarrow{OM} = \vec{\rho}(s)$. *Se numeşte* ***torsiunea*** *curbei* C *în punctul* M, *numărul*

$$k_2(s) = \left\| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right\|. \tag{4.36}$$

Inversul acestui număr se numeşte ***raza de torsiune*** *în* $M \in C$ *şi se notează cu* $T(s)$. *Aşadar* $T(s) = \dfrac{1}{k_2(s)}$.

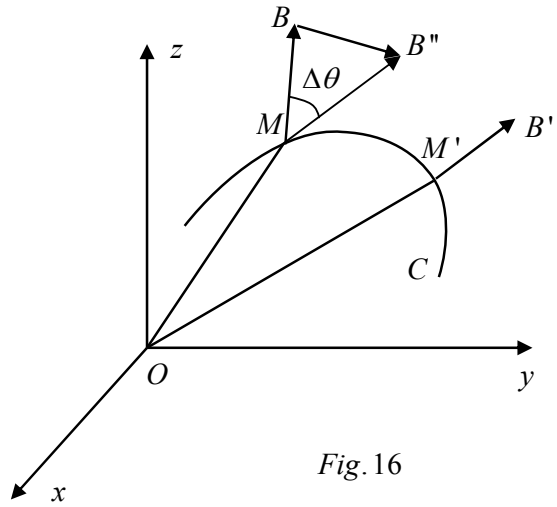


Fig. 16

Pentru interpretarea geometrică a torsiunii considerăm două puncte vecine M şi M' pe curba C astfel încât $\overrightarrow{OM} = \vec{\rho}(s)$ şi $\overrightarrow{OM'} = \vec{\rho}(s + \Delta(s))$.

Fie $\overrightarrow{MB} = \vec{\beta}(s)$ şi $\overrightarrow{M'B'} = \vec{\beta}(s + \Delta s)$ versorii binormalelor la curba C în punctele M, respectiv M' şi fie $\overrightarrow{MB''}$ un vector echivalent cu $\overrightarrow{M'B'}$.

Conform Definiţiei 4.4.1. avem:

$$k_2(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left\| \frac{\beta(s + \Delta s) - \beta(s)}{\Delta s} \right\| = \lim_{\Delta s \to 0} \left\| \frac{\overrightarrow{BB''}}{\Delta s} \right\|.$$

Pe de altă parte, din Teorema cosinusului rezultă:

$\left\| \overrightarrow{BB''} \right\|^2 = 1 + 1 - 2\cos\Delta\theta = 2(1 - \cos\Delta\theta) = 4\sin^2 \dfrac{\Delta\theta}{2}$ şi mai departe:

$$k_2(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|.$$

Aşadar, torsiunea măsoară viteza de rotaţie a binormalei la curbă. Dacă curba este plană, binormalele în toate punctele curbei sunt colineare, deci unghiul $\Delta\theta$ dintre două binormale vecine este 0. Rezultă că torsiunea unei curbe plane este 0 şi reciproc.

Formula (4.35) se numeşte a ***treia formulă a lui Frenet***.

Aşadar a treia formulă a lui Frenet este:

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = -k_2(s)\vec{\nu} = -\frac{1}{T(s)}\vec{\nu}. \tag{4.37}$$

Pentru a stabili a doua formulă a lui Frenet, plecăm de la observaţia că vectorii $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ şi $\vec{\nu}$ sunt ortogonali, observaţie care rezultă imediat prin derivarea relaţiei $1 = \vec{\nu}(s)\cdot\vec{\nu}(s)$.

Vectorul $\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ fiind ortogonal pe $\vec{\nu}$, rezultă că aparţine planului rectifiant, deci că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = a\vec{\tau} + b\vec{\beta}. \tag{4.38}$$

Amplificând (scalar) relaţia (4.38) cu $\vec{\tau}$ obţinem:

$$a = \vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\nu}}{ds}.$$

Pe de altă parte, derivând relaţia $0 = \vec{\tau}\cdot\vec{\nu}$ deducem că

$$\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\nu}}{ds} + \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\vec{\nu} = 0, \text{ deci că}$$

$$\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\vec{\nu}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Mai departe, ţinând seama de prima formulă a lui Frenet obţinem

$$\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\vec{\nu}\cdot k_1(s)\cdot\vec{\nu} = -k_1(s), \text{ deci } a = -k_1(s).$$

Aşadar $\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k_1(s)\vec{\tau} + b\vec{\beta}$.

În sfârşit, derivând relaţia $\vec{\beta} = \vec{\tau}\times\vec{\nu}$ şi folosind prima formulă a lui Frenet deducem

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\times\vec{\nu}+\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\nu}}{ds}=\left(k_1(s)\vec{\nu}\right)\times\vec{\nu}+\vec{\tau}\times\left(-k_1(s)\vec{\tau}+b\vec{\beta}\right)=b\left(\vec{\tau}\times\vec{\beta}\right)=-b\vec{\nu}.$$

Cum $\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-k_2(s)\vec{\nu}$, conform celei de a treia formulă a lui Frenet, rezultă că $b=k_2(s)$. Am obţinut astfel cea de ***a doua formulă a lui Frenet***, anume:

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds}=-k_1(s)\vec{\tau}+k_2(s)\vec{\beta}=-\frac{1}{R}\vec{\tau}+\frac{1}{T}\vec{\beta}. \tag{4.39}$$

În concluzie, formulele lui Frenet exprimă derivatele versorilor $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$ ai reperului lui Frenet în funcţie de aceşti versori, anume:

$$\begin{cases}\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k_1(s)\vec{\nu}=\frac{1}{R(s)}\vec{\nu}\\ \frac{d\vec{\nu}}{ds}=k_1(s)\vec{\tau}+k_2(s)\vec{\beta}=-\frac{1}{R(s)}\vec{\tau}+\frac{1}{T(s)}\vec{\beta}\\ \frac{d\vec{\beta}}{ds}=-k_2(s)\vec{\nu}=-\frac{1}{T(s)}\vec{\nu}.\end{cases} \tag{4.40}$$

Pentru calculul torsiunii procedăm astfel:

Amplificăm (scalar) cu $\vec{\beta}$ în formula a doua a lui Frenet şi obţinem:

$$k_2(s)=\vec{\beta}\cdot\frac{d\vec{\nu}}{ds}. \tag{4.41}$$

Pe de altă parte, din prima formulă a lui Frenet avem

$$\vec{\nu}=R(s)\frac{d\vec{\tau}}{ds}. \tag{4.42}$$

Ţinând seama de (4.42) în (4.41) şi de faptul că $\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}$, deducem că:

$$k_2(s)=\left(\vec{\tau}\times R(s)\,\vec{\tau}'(s)\right)\cdot\left(R'(s)\,\vec{\tau}'(s)+R(s)\,\vec{\tau}''(s)\right)=$$

$$=R^2(s)\left(\vec{\tau}\times\vec{\tau}'(s)\right)\cdot\vec{\tau}''(s)=\frac{\left(\vec{\rho}'(s)\times\vec{\rho}''(s)\right)\cdot\vec{\rho}'''(s)}{k_1^2(s)}$$

sau

$$k_2(s)=\frac{\left(\vec{\rho}'(s),\vec{\rho}''(s),\vec{\rho}'''(s)\right)}{k_1^2(s)}. \tag{4.43}$$

Dacă cunoaştem reprezentarea normală a curbei, calculul torsiunii se poate face cu formula (4.43). Pentru calculul torsiunii în cazul unei reprezentări parametrice oarecare

$$\vec{r}=\vec{r}(t)\ ,\ t\in I$$

derivăm relaţia (4.24) şi obţinem:

$$\vec{\rho}'''(s)=\vec{r}'''\left(\lambda^{-1}(s)\right)\left(\left(\lambda^{-1}(s)\right)'\right)^3+\vec{r}''\left(\lambda^{-1}(s)\right)\cdot 2\left(\lambda^{-1}(s)\right)'\left(\lambda^{-1}(s)\right)''+$$

$$+\vec{r}''\left(\lambda^{-1}(s)\right)\left(\lambda^{-1}(s)\right)'\left(\lambda^{-1}(s)\right)''+\vec{r}'\left(\lambda^{-1}(s)\right)\left(\lambda^{-1}(s)\right)'''$$

sau

$$\vec{\rho}'''(s)=\frac{\vec{r}'''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3}+3\cdot\frac{\vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}\cdot\left(\lambda^{-1}(s)\right)''+\vec{r}'(t)\left(\lambda^{-1}(s)\right)'''. \tag{4.44}$$

Din (4.44) şi (4.24) deducem că:

$$\left(\vec{\rho}',\vec{\rho}'',\vec{\rho}'''\right)=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3}\cdot\frac{\vec{r}'''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3}=\frac{\left(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t)\right)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^6}. \tag{4.45}$$

În sfârşit, ţinând seama şi de expresia curburii (4.28), din (4.43) şi (4.45) obţinem expresia analitică a torsiunii:

$$k_2(s)=\frac{\left(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t)\right)}{\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|^2} \tag{4.46}$$

sau $$k_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t)\\ x''(t) & y''(t) & z''(t)\\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t)\end{vmatrix}}{A^2(t)+B^2(t)+C^2(t)}. \tag{4.47}$$

Exemplul 4.4.1. Să se afle torsiunea şi raza de torsiune în punctul $M\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$ la curba

$$\vec{r}(t)=\frac{t^2}{2}\vec{i}+\frac{2t^3}{3}\vec{j}+\frac{t^4}{2}\vec{k}\ .$$

Observăm că punctul M corespunde valorii $t=1$ a parametrului .

În continuare avem:

$$x(t)=\frac{t^2}{2};\ y(t)=\frac{2t^3}{3};\ z(t)=\frac{t^4}{2}$$

$$x'(t)=t;\ y'(t)=2t^2;\ z'(t)=2t^3$$

$$x''(t)=1;\ y''(t)=4t;\ z''(t)=6t^2$$

$$x'''(t)=0;\ y'''(t)=4;\ z'''(t)=12t$$

$$A(1)=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=4;\ B(1)=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-4;\ C(1)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2$$

$$k_2(1)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 4 & 6\\ 0 & 4 & 12\end{vmatrix}}{16+16+4}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9};\ T(1)=\frac{9}{2}.$$

Exemplul 4.4.2. Să se afle torsiunea şi raza de torsiune în punctul $M(1,1,1)$ al curbei

$$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,x^2-y^2+z^2-1=0,\ y^2-2x+z=0\right\}.$$

Din Exemplul 4.3.2. avem:

$$y(1)=1;\ z(1)=1$$

$$y'(1)=1;\ z'(1)=0$$

$$y''(-1)=-\frac{2}{3};\ z''(1)=-\frac{2}{3}.$$

Pe de altă parte derivând sistemul:

$$\begin{cases} 2-2\left(y'(x)\right)^2-2y(x)y''(x)+2\left(z'(x)\right)^2+2z(x)z''(x) &= 0 \\ 2\left(y'(x)\right)^2+2y(x)y''(x)+z''(x) &= 0 \end{cases}$$

obţinem

$$\begin{cases} -4y'(x)y''(x)-2y'(x)y''(x)-2y(x)y'''(x)+4z'(x)z''(x)+2z'(x)z''(x)+2z(x)z'''(x) &= 0 \\ 4y'(x)y''(x)+2y'(x)y''(x)+2y(x)y'''(x)+z'''(x) &= 0 \end{cases}$$

şi mai departe, pentru $x=1$, se găseşte

$$\begin{cases} -4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-2y'''(1)+2z'''(1) &= 0 \\ 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2y'''(1)+z'''(1) &= 0. \end{cases}$$

Acest sistem are soluţia:

$$y'''(1)=2 \text{ şi } z'''(1)=0.$$

De asemenea, din Exemplul 4.3.2. avem:

$$A(1)=-\frac{2}{3};\ B(1)=\frac{2}{3};\ C(1)=-\frac{2}{3}.$$

Aşadar avem:

$$k_2(1)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=1 \qquad \text{şi} \qquad T(1)=1.$$

Observaţia 4.4.1. O curbă biregulată este o dreaptă dacă şi numai dacă are curbura zero în fiecare punct al său. Necesitatea rezultă din definiţia curburii şi a fost prezentată în 4.3.

Fie $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},\ t\in I$ o reprezentare parametrică locală a curbei C şi fie $\vec{\rho}(s)=\vec{r}\left(\lambda^{-1}(s)\right),\ s\in J=(0,L)$ reprezentarea parametrică normală echivalentă. Dacă notăm cu

$\tilde{x}(s)=x\left(\lambda^{-1}(s)\right),\ \tilde{y}(s)=y\left(\lambda^{-1}(s)\right),\ \tilde{z}(s)=z\left(\lambda^{-1}(s)\right),\ s\in J$, atunci

$\vec{\rho}(s)=\tilde{x}(s)\vec{i}+\tilde{y}(s)\vec{j}+\tilde{z}(s)\vec{k},\ s\in J$.

Dacă curbura $k_1(s)=0$, atunci, din prima formulă a lui Frenet, deducem că $\vec{\rho}''(s)=\vec{\tau}'(s)=\vec{0}$ şi mai departe că $\vec{\rho}'(s)$ este un vector constant, deci:

$\vec{\rho}'(s)=l\,\vec{i}+m\,\vec{j}+n\,\vec{k}$. Aşadar avem

$\tilde{x}'(s)=l,\ \tilde{y}'(s)=m,\ \tilde{z}'(s)=n$ şi mai departe,

$\tilde{x}(s)=ls+x_0,\ \tilde{y}(s)=ms+y_0,\ \tilde{z}(s)=ns+z_0$. Rezultă că:

$$\frac{\tilde{x}(s)-x_0}{l}=\frac{\tilde{y}(s)-y_0}{m}=\frac{\tilde{z}(s)-z_0}{n}. \tag{4.48}$$

Am arătat că orice punct al curbei C verifică ecuaţiile canonice ale dreptei $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, deci curba C coincide cu această dreaptă.

Observaţia 4.4.2. Fie C o curbă biregulată şi fie $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},\ t\in I$ o reprezentare normală a sa. Presupunem, în plus, că $x,y,z\in C^3(I)$. Curba C este plană (conţinută într-un plan) dacă şi numai dacă torsiunea sa este zero în fiecare punct.

Necesitatea rezultă din Definiţia 4.4.1. Reciproc, dacă torsiunea $k_2(s)=0$, atunci, din formula a treia a lui Frenet, rezultă că $\vec{\beta}'(s)=\vec{0}$ şi mai departe că

$\vec{\beta}(s)=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}+c\,\vec{k}$ (un vector constant).

Pe de altă parte $\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}$, de unde deducem că $\vec{\beta}$ este perpendicular pe $\vec{\tau}(s)=\vec{\rho}'(s)=\tilde{x}'(s)\vec{i}+\tilde{y}'(s)\vec{j}+\tilde{z}'(s)\vec{k}$ (vezi notaţiile din Observaţia 4.4.1.).

Aşadar avem:

$0=\vec{\beta}\cdot\vec{\rho}'=a\tilde{x}'(s)+b\tilde{y}'(s)+c\tilde{z}'(s),\ \forall s\in J$.

Prin integrare obţinem:

$a\tilde{x}(s)+b\tilde{y}(s)+c\tilde{z}(s)=d$ (o constantă reală).

Am arătat că orice punct al curbei C verifică ecuaţia planului $ax+by+cz+d=0$, deci curba C se află în acest plan.

4.5. ÎNFĂŞURĂTOAREA UNEI FAMILII DE CURBE PLANE. EVOLUTA UNEI CURBE PLANE

Fie o familie de curbe plane $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, unde

$$C_\lambda=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, F(x,y,\lambda)=0\right\}.$$

Presupunem că F este de clasă C^1 pe domeniul său de definiţie şi că $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)\neq 0$, oricare ar fi $(x,y)\in C_\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Definiţia 4.5.1. *Se numeşte* ***înfăşurătoarea*** *familiei de curbe plane* $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ *o curbă plană cu proprietatea că în fiecare punct al său este tangentă la o curbă* C_λ *din familia de curbe dată.*

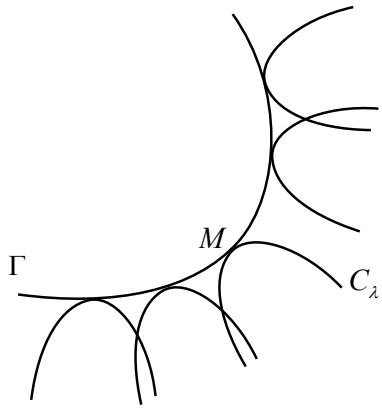


Fig. 17

Teorema 4.5.1. *Dacă notăm cu* Γ *înfăşurătoarea familiei* $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, *atunci*

$$\Gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, F(x,y,\lambda)=0,\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}(x,y,\lambda)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Demonstraţie.

Deoarece pentru orice punct $M(x,y)\in\Gamma$, există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $M\in\Gamma\bigcap C_\lambda$, rezultă că putem alege λ ca parametru în reprezentarea curbei Γ, deci Γ are reprezentarea parametrică $\vec{r}(\lambda)=x(\lambda)\vec{i}+y(\lambda)\vec{j},\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Pe de altă parte, $M(x(\lambda),y(\lambda))\in C_\lambda$, deci avem:

$$F(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}. \tag{4.49}$$

Ecuaţia tangentei în M la Γ este:

$$\frac{x-x(\lambda)}{x'(\lambda)}=\frac{y-y(\lambda)}{y'(\lambda)} \text{ sau } y-y(\lambda)=\frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)}(x-x(\lambda)). \tag{4.50}$$

Pentru $\lambda\in\mathbb{R}$ fixat, din Teorema Funcţiilor Implicite rezultă că ecuaţia $F(x,y,\lambda)=0$ defineşte, într-o vecinătate $U\times V$ a punctului $M(x(\lambda),y(\lambda))$, funcţia implicită $x\to y(x):U\to V$ cu proprietăţile:

$$y(x(\lambda))=y(\lambda) \text{ şi } y'(x(\lambda))=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)}.$$

Ecuaţia tangentei în M la C_λ este:

$$y-y(\lambda)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)}(x-x(\lambda)). \tag{4.51}$$

Deoarece tangentele în M la Γ şi C_λ coincid, rezultă că

$$\frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)} \text{ sau}$$

$$x'(\lambda)\frac{\partial F}{\partial x}(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)+y'(\lambda)\frac{\partial F}{\partial y}(x(\lambda),y(\lambda),\lambda)=0. \tag{4.52}$$

Pe de altă parte derivând relaţia (4.49) obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x(\lambda),y(\lambda),\lambda\right)x'(\lambda)+\frac{\partial F}{\partial y}\left(x(\lambda),y(\lambda),\lambda\right)y'(\lambda)+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(x(\lambda),y(\lambda),\lambda\right)=0. \tag{4.53}$$

Din (4.52) şi (4.53) rezultă:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\left(x(\lambda),y(\lambda),\lambda\right)=0. \tag{4.54}$$

Aşadar orice punct $M\left(x(\lambda),y(\lambda)\right)$ al înfăşurătoarei Γ verifică ecuaţiile:

$$\begin{cases} F(x,y,\lambda) &= 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= 0 \end{cases}$$

şi astfel demonstraţie este încheiată.

Exemplul 4.5.1. Să se afle înfăşurătoarea familiei de drepte:

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda - 1 = 0,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Avem $F(x,y,\lambda)=x\cos\lambda+y\sin\lambda-1$ şi

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-x\sin\lambda+y\cos\lambda.$$

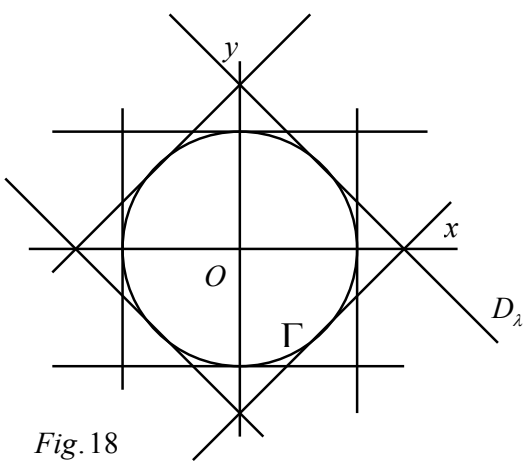


Fig. 18

Aşadar un punct curent $M(x,y)$ de pe înfăşurătoare verifică ecuaţiile

$$\begin{cases} F(x,y,\lambda) &= 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cos\lambda + y\sin\lambda = 1 \\ -x\sin\lambda + y\cos\lambda = 0. \end{cases}$$

Ridicând la pătrat aceste relaţii şi adunându-le membru cu membru obţinem

$$x^2+y^2=1.$$

Rezultă că înfăşurătoarea acestei familii de drepte este cercul cu centrul în origine şi de rază 1.

Definiţia 4.5.2. *Fie C o curbă plană parametrizată netedă de clasă 2. Se numeşte* ***evoluta curbei*** *C înfăşurătoarea normalelor la curba C.*

Dacă $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ este o reprezentare parametrică locală a curbei C, atunci ecuaţia normalei la curbă într-un punct $M\left(x(t),y(t)\right)$ este:

$$y-y(t)=-\frac{x'(t)}{y'(t)}\left(x-x(t)\right) \text{ sau}$$

$$x'(t)\left(x-x(t)\right)+y'(t)\left(y-y(t)\right)=0. \tag{4.55}$$

Fie $F(x,y,t)=x'(t)\left(x-x(t)\right)+y'(t)\left(y-y(t)\right)$. Atunci

$$\frac{\partial F}{\partial t}=x''(t)\left(x-x(t)\right)-\left(x'(t)\right)^2+y''(t)\left(y-y(t)\right)-\left(y'(t)\right)^2.$$

Deoarece un punct curent $M(x,y)$ de pe înfăşurătoare verifică ecuaţiile $F(x,y,t)=0,\ \frac{\partial F}{\partial t}(x,y,t)=0$ rezultă:

$$\begin{cases} x'(t)\left(x-x(t)\right)+y'(t)\left(y-y(t)\right)=0 \\ x''(t)\left(x-x(t)\right)+y''(t)\left(y-y(t)\right)=\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2. \end{cases} \tag{4.56}$$

Rezolvând sistemul (4.56) obţinem ecuaţiile parametrice ale evolutei:

$$\begin{cases} x=x(t)-\dfrac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}\cdot y'(t) \\ y=y(t)+\dfrac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}\cdot x'(t). \end{cases} \tag{4.57}$$

Exemplul 4.5.2. Să se afle evoluta *astroidei*:

$$\vec{r}(t)=a\cos^3 t\,\vec{i}+a\sin^3 t\,\vec{j},\ t\in[0,2\pi],\ a>0.$$

Avem $\quad x(t)=a\cos^3 t,\ y(t)=a\sin^3 t$

$$x'(t)=-3a\cos^2 t\,\sin t,\ y'(t)=3a\sin^2 t\cos t$$

$$x''(t) = -3a\left(\cos^3 t - 2\cos t \sin^2 t\right),\ y''(t) = 3a\left(2\sin t \cos^2 t - \sin^3 t\right)$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t \text{ şi}$$

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$$

Aşadar ecuaţiile parametrice ale evolutei astroidei sunt:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t + 3a\sin^2 t \cos t \\ y = a\sin^3 t + 3a\cos^2 t \sin t. \end{cases}$$

Observaţia 4.5.1. Pentru o curbă plană definită sub forma explicită $y = y(x),\ x \in I$, ecuaţiile parametrice ale evolutei sunt:

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{1 + y'^2(x)}{y''(x)} \cdot y'(x) \\ Y = y(x) + \dfrac{1 + y'^2(x)}{y''(x)}. \end{cases} \tag{4.58}$$

Probleme propuse

1. Fie curba plană definită prin ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = t^2 - 4 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine coordonatele punctelor curbei A şi B corespunzătoare valorilor $t = -1$ şi $t = 0$;

b) Să se stabilească dacă punctele $M_1(15,5),\ M_2(1,-2),\ M_3(-1,0)$ aparţin curbei;

c) Să se determine punctele de intersecţie ale curbei cu axele de coordonate şi cu prima bisectoare;

d) Să se determine ecuaţia carteziană implicită a curbei.

Răspuns: a) $A(3,-3)$, $B(0,-4)$; b) M_1 aparţine curbei (corespunzător $t=3$); M_2 şi M_3 nu aparţin curbei; c) Axa Ox intersectează curba în două puncte confundata în $O(0,0)$; Axa Oy intersectează curba în două puncte confundate în $O(0,0)$ şi în punctul $B(0,-4)$; Prima bisectoare intersectează curba în două puncte confundate în $O(0,0)$ şi în punctul $C(-3,-3)$;

d) $x^2-y^3-4y^2=0$.

2. Să se determine ecuaţiile tangentelor şi normalelor la curbele plane următoare în punctele indicate:

a) $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3a\,t^2}{1+t^3} \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $a>0$ (*foliul lui Descartes*) în $A(t=1)$;

b) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$, $a>0$ (*cicloida*) în $A\left(t=\dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$, $a>0$ (*astroida*) în $A\left(t=\dfrac{\pi}{4}\right)$;

d) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$, $a,b>0$ (*elipsa*) în $A(t=0), B\left(t=\dfrac{\pi}{2}\right)$;

e) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ în $A(x=0)$;

f) $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$ (*curba lănţişor*) în $A(x=0)$;

g) $y=\ln(1-2\cos x)$, $x\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$ în $A\left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$;

h) $y=x\,e^{\frac{1}{x}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ în $A(x=1)$;

i) $x^3-y^3+3xy-y^2-2x+4=0$ în $A(1,-1)$;

j) $x^3+y^3-3axy=0,\ a>0$ (*foliul lui Descartes*) în $A\left(a\sqrt[3]{2},a\sqrt[3]{4}\right)$, $B\left(a\sqrt[3]{4},a\sqrt[3]{2}\right)$;

k) $\left(x^2+y^2\right)x+\left(x^2-y^2\right)a=0,\ a>0$ (*strofoida dreaptă*) în $A(-a,0)$;

l) $\left(x^2+y^2\right)x-ay^2=0,\ a>0$ (*cisoida lui Diocles*) în $A\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$.

Răspuns: a) Tangenta în $A: x+y-3a=0$; Normala în $A: x-y=0$; b) Tangenta în A: $x-y-\frac{a\pi}{2}+2a=0$; Normala în $A: x+y-\frac{a\pi}{2}=0$; c) Tangenta în $A: x+y-\frac{a\sqrt{2}}{2}=0$; Normala în $A: x-y=0$; d) Tangenta în $A: x-a=0$; Normala în $A: y=0$; Tangenta în $B: y-b=0$; Normala în $B: x=0$; e) Tangenta în $A: y-1=0$; Normala în $A: x=0$;

f) Tangenta în $A: y-a=0$; Normala în $A: x=0$; g) Tangenta în $A: 2x-y-\pi=0$; Normala în $A: 2x+4y-\pi=0$; h) Tangenta în $A: y-e=0$; Normala în $A: x-1=0$; i) Tangenta în $A: x-y-2=0$; Normala în $A: x+y=0$; j) Tangenta în $A: y-a\sqrt[3]{4}=0$; Normala în $A: x-a\sqrt[3]{2}=0$; Tangenta în $B: x-a\sqrt[3]{4}=0$; Normala în $B: y-a\sqrt[3]{2}=0$; k) Tangenta în $A: x+a=0$; Normala în $A: y=0$; l) Tangenta în $A: 4x-2y-a=0$; Normala în A: $2x+4y-3a=0$.

3. Să se calculeze lungimea arcului de curbă plană:

a) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ a>0$ (primul arc al astroidei);

b) $y=\ln(\cos x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Răspuns: a) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t\,dt=\frac{3a}{2}$; b) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}} ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

4. Să se calculeze curbura şi raza de curbură pentru următoarele curbe plane în punctele indicate:

a) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ (*cicloida*) în $A(t = \pi)$;

b) $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ (*ramura dreaptă a hiperbolei*) în $A(t = 0)$;

c) $\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ (*cisoida lui Diocles*) în punctul $M(t = -1)$;

d) $y = x^4 - 4x^3 - x^2$ în $O(0,0)$;

e) $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ (*curba lănţişor*) în $A(x = 0)$;

f) $y = \ln(\sin x)$, $x \in (0, \pi)$ în $A\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$;

g) $x^6 - 4x^4 + 16y^2 = 0$ în $A(2,0)$;

h) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $a, b > 0$ în $B(0,b)$;

i) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{a}$, $a > 0$ în $A(a,a)$;

j) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ (*elipsa*) în $A(a,0), B(0,b)$;

Răspuns: a) $K = -\dfrac{1}{4a}$, $R = 4a$; b) a) $K = -\dfrac{a}{b^2}$, $R = \dfrac{b^2}{a}$; c) $K = \dfrac{6}{5\sqrt{5}\,a}$, $R = \dfrac{5\sqrt{5}\,a}{6}$;

d) $K = -2$, $R = \dfrac{1}{2}$; e) $K = \dfrac{1}{a}$, $R = a$; f) $K = -1$, $R = 1$; g) $K = -\dfrac{1}{2}$, $R = 2$;

h) $K = -\dfrac{3b}{a^2}$, $R = \dfrac{a^2}{3b}$; i) $K = \dfrac{\sqrt{2}}{4a}$, $R = \dfrac{4a}{\sqrt{2}}$; j) $K = -\dfrac{a}{b^2}$, $R = \dfrac{b^2}{a}$; $K = -\dfrac{b}{a^2}$, $R = \dfrac{a^2}{b}$.

5. Să se determine înfăşurătoarea următoarelor familii de curbe plane

a) $\left(1-\lambda^2\right)x+2\lambda y=1, \lambda\in\mathbb{R}$;

b) $\left(1-\lambda^2\right)x-6\lambda y-1=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$;

c) $\lambda^3\left(x-a\right)+3\lambda x-2y=0,\ \lambda\in\mathbb{R},\ a>0$;

d) $x-\lambda y+\lambda^3=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$;

e) $\lambda^2x^2+x-2\lambda y-1=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$;

f) $\lambda^2\left(x+y+1\right)+\lambda\left(x+2y\right)+x+3y+2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Răspuns: a) $x^2+y^2-x=0$; b) $x^2+9y^2-x=0$; c) $\left(x^2+y^2\right)x-ay^2=0,\ a>0$;

d) $27x^2=4y^3$; e) $x^3-x^2-y^2=0$; f) $4\left(x+y+1\right)\left(x+3y+2\right)=\left(x+2y\right)^2$.

6. Să se determine ecuaţia înfăşurătoarei cercurilor care au centrul pe o elipsă şi care trec prin centrul elipsei.

Răspuns: $\left(x^2+y^2\right)^2=4a^2x^2+4b^2y^2$, dacă se consideră elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$.

7. Să se determine evoluta următoarelor curbe plane:

a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0, a,b>0$ (*elipsa*);

b) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0,\ a,b>0$ (*hiperbola*);

c) $y^2=2px,\ p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (*parabola*);

d) $y=\ln x,\ x>0$.

Răspuns: a) Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x=\dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y=-\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, cu $c^2=a^2-b^2$; ecuaţia implicită:

$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$; b) Ecuaţiile parametrice: $\begin{cases} x=\dfrac{c^2}{a}\operatorname{ch}^3 t \\ y=-\dfrac{c^2}{b}\operatorname{sh}^3 t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, cu $c^2=a^2+b^2$; ecuaţia implicită: $(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$; c) $8(x-p)^3-27py^2=0$; d) $\begin{cases} x=2t+\dfrac{1}{t} \\ y=\ln t-t^2-1 \end{cases}$, $t>0$.

8. Să se determine intersecţiile dintre curba în spaţiu $\vec{r}(t)=(t^2-1)\vec{i}+2t\vec{j}+(t^3+1)\vec{k}$ şi planul $3x+5y-z-20=0$.

Răspuns: $A(8,-6,-26), B(3,4,9), C(15,8,65)$.

9. Fie curba în spaţiu (Γ) definită prin ecuaţiile implicite $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-25=0 \\ x+y+z-7=0 \end{cases}$.

a) Să se stabilească natura curbei (Γ);

b) Să se determine punctele de intersecţiile ale curbei (Γ) cu planele de coordonate.

Răspuns: a) Curba (Γ) este un cerc spaţial (fiind intersecţia dintre o sferă şi un plan);

b) Intersecţiile cu xOy: $A(3,4,0)$ şi $A'(4,3,0)$; Intersecţiile cu xOz: $B(3,0,4)$ şi $B'(4,0,3)$; Intersecţiile cu yOz: $C(0,3,4)$ şi $C'(0,4,3)$.

10. Să se determine versorii triedrului lui Frenet la următoarele curbe în spaţiu în puncte indicate:

a) $\vec{r}(t)=t\vec{i}+\dfrac{t^2}{2}\vec{j}+\dfrac{t^3}{6}\vec{k}$, $t\in\mathbb{R}$, în punctul $M(t=1)$;

b) $\vec{r}(t)=3t\,\vec{i}+3t^2\,\vec{j}+2t^3\,\vec{k}$, $t\in\mathbb{R}$, în punctul $M(t=1)$;

c) $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+(1-t^2)\,\vec{j}+\dfrac{2}{3}t^3\,\vec{k}$, $t\in\mathbb{R}$, în punctul $M(t=1)$;

d) $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+\left(\ln t+\dfrac{t^2}{8}\right)\vec{j}+\left(\ln t-\dfrac{t^2}{8}\right)\vec{k}$, $t>0$, în punctul $M(t=\sqrt{2})$;

e) $\vec{r}(t) = e^t \cos t\ \vec{i} + e^t \sin t\ \vec{j} + e^t\ \vec{k},\ t \in \mathbb{R}$, în punctul $M(t=0)$;

f) $\vec{r}(t) = \cos^2 t\ \vec{i} + \vec{j} + \sin^3 t\ \vec{k},\ t \in \mathbb{R}$, în punctul $M\left(t = \frac{\pi}{3}\right)$;

g) $\vec{r}(t) = t \sin t\ \vec{i} + t \cos t\ \vec{j} + t e^t\ \vec{k},\ t \in \mathbb{R}$, în punctul $M(t=0)$;

h) $\vec{r}(t) = \cos t\ \vec{i} + \sin t\ \vec{j} - \ln|\sin t|\ \vec{k},\ t \in \mathbb{R}$, în punctul $M\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$;

i) $\begin{cases} x^3 - 3y = 0 \\ 2xz - 1 = 0 \end{cases}$, în punctul $M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$;

j) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, în punctul $M(1,1,-2)$.

Răspuns: a) $\vec{\tau} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$, $\vec{\nu} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{\beta} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$;

b) $\vec{\tau} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{\nu} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{\beta} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$;

c) $\vec{\tau} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{\nu} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{\beta} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$;

d) $\vec{\tau} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{k}$, $\vec{\nu} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{k}$, $\vec{\beta} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{6}\vec{k}$;

e) $\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$, $\vec{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$, $\vec{\beta} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}$;

f) $\vec{\tau} = -\frac{4}{\sqrt{43}}\vec{i} + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\vec{k}$, $\vec{\nu} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{43}}\vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{j}$;

g) $\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{\nu} = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$, $\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$;

h) $\vec{\tau} = -\vec{i}$, $\vec{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$;

i) $\vec{\tau}=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}$, $\vec{\nu}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{\beta}=\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$;

j) $\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$, $\vec{\nu}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}$, $\vec{\beta}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$.

11. Să se determine versorii triedrului lui Frenet pentru *elicea circulară*

$$\vec{r}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R},\ a,b>0,$$

într-un punct curent al său.

Răspuns: $\vec{\tau}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,\vec{i}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,\vec{j}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k}$,

$\vec{\nu}=-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}$, $\vec{\beta}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,\vec{i}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,\vec{j}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k}$.

12. Să se determine ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului lui Frenet la următoarele curbe în spaţiu în puncte indicate:

a) $\vec{r}(t)=\left(t^4-1\right)\vec{i}+\left(t^3+1\right)\vec{j}-2t\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$, în punctul $M(t=-2)$;

b) $\vec{r}(t)=\frac{1}{t}\vec{i}+t\,\vec{j}+\left(2t^2-1\right)\vec{k},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, în punctul $M(t=-1)$;

c) $\vec{r}(t)=t\vec{i}+\frac{t^2}{2}\vec{j}+\frac{t^3}{3}\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$, în punctul $M(t=1)$;

d) $\vec{r}(t)=(1+\ln t)\vec{i}+t^2\,\vec{j}+(1-t)\vec{k},\ t>0$, în punctul $M(t=1)$;

e) $\vec{r}(t)=\frac{1}{t}\vec{i}+\ln t\,\vec{j}+t\,\vec{k},\ t>0$, în punctul $M(t=1)$;

f) $\vec{r}(t)=\frac{2}{t}\vec{i}+\ln t\,\vec{j}-t^2\,\vec{k},\ t>0$, în punctul $M(t=1)$;

g) $\vec{r}(t)=3\cos t\,\vec{i}+3\sin t\,\vec{j}+4t\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$ (*elicea cilindrică*), în punctul $M(t=\pi)$;

h) $\vec{r}(t)=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\sin t\,\vec{j}+e^t\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$, în punctul $M(t=0)$;

i) $\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\,\vec{i} + a(1 - \cos t)\,\vec{j} + 4a\cos\frac{t}{2}\,\vec{k},\ t \in \mathbb{R},\ a > 0$, în $M(t = 3\pi)$;

j) $\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$, în punctul $M(-1,1,2)$;

k) $\begin{cases} x^3 - 3y = 0 \\ 2xz - 1 = 0 \end{cases}$, în punctul $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{24}, 1\right)$;

l) $\begin{cases} x^2 - y^2 - z = 0 \\ 2x - 3y^2 = 0 \end{cases}$, în punctul $O(0,0,0)$;

m) $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy - z = 0 \end{cases}$, în punctul $M(-1,1,-1)$.

Răspuns:

a) $(\mathrm{TG}): \frac{x-15}{-16} = \frac{y+7}{6} = \frac{z-4}{-1}$, $(\mathrm{BN}): \frac{x-15}{-1} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z-4}{-8}$, $(\mathrm{NP}): \frac{x-15}{52} = \frac{y+7}{127} = \frac{z-4}{-70}$;

$(\mathrm{PN}): 16x - 6y + z - 286 = 0$, $(\mathrm{PO}): x + 4y + 8z - 19 = 0$, $(\mathrm{PR}): 52x + 127y - 70z + 389 = 0$;

b) $(\mathrm{TG}): \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-4}$, $(\mathrm{BN}): \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{1}$, $(\mathrm{NP}): \frac{x+1}{-25} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{8}$;

$(\mathrm{PN}): x - y + 4z - 4 = 0$, $(\mathrm{PO}): 2x + 6y + z + 7 = 0$, $(\mathrm{PR}): 25x - 7y - 8z + 26 = 0$;

c) $(\mathrm{TG}): \frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} = \frac{z-\frac{1}{3}}{1}$, $(\mathrm{BN}): \frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{3}}{1}$, $(\mathrm{NP}): \frac{x-1}{-1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{0} = \frac{z-\frac{1}{3}}{1}$;

$(\mathrm{PN}): x + y + z - \frac{11}{6} = 0$, $(\mathrm{PO}): x - 2y + z - \frac{1}{3} = 0$, $(\mathrm{PR}): x - z - \frac{2}{3} = 0$;

d) $(\mathrm{TG}): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$, $(\mathrm{BN}): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{4}$, $(\mathrm{NP}): \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$;

$(\mathrm{PN}): x + 2y - z - 3 = 0$, $(\mathrm{PO}): 2x + y + 4z - 3 = 0$, $(\mathrm{PR}): 3x - 2y - z - 1 = 0$;

e) $(\mathrm{TG}): \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $(\mathrm{BN}): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$, $(\mathrm{NP}): \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$;

$(\mathrm{PN}): x-y-z=0, (\mathrm{PO}): x+2y-z=0, (\mathrm{PR}): x+z-2=0$;

f) $(\mathrm{TG}): \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}, (\mathrm{BN}): \frac{x-2}{-2}=\frac{y}{-6}=\frac{z+1}{-1}, (\mathrm{NP}): \frac{x-2}{13}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-14}$;

$(\mathrm{PN}): 2x-y+2z-2=0, (\mathrm{PO}): 2x+6y+z-3=0, (\mathrm{PR}): 13x-2y-14z-40=0$;

g) $(\mathrm{TG}): \frac{x+3}{0}=\frac{y}{-3}=\frac{z-4\pi}{4}, (\mathrm{BN}): \frac{x+3}{0}=\frac{y}{4}=\frac{z-4\pi}{3}, (\mathrm{NP}): \frac{x+3}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-4\pi}{0}$;

$(\mathrm{PN}): 3y-4z+16\pi=0, (\mathrm{PO}): 4y+3z-12\pi=0, (\mathrm{PR}): x+3=0$;

h) $(\mathrm{TG}): \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}, (\mathrm{BN}): \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}, (\mathrm{NP}): \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$;

$(\mathrm{PN}): x+y+z-2=0, (\mathrm{PO}): x+y-2z+1=0, (\mathrm{PR}): x-y-1=0$;

i) $(\mathrm{TG}): \frac{x-3a\pi}{1}=\frac{y-2a}{0}=\frac{z}{1}, (\mathrm{BN}): \frac{x-3a\pi}{1}=\frac{y-2a}{0}=\frac{z}{-1}, (\mathrm{NP}): \frac{x-3a\pi}{0}=\frac{y-2a}{-1}=\frac{z}{0}$;

$(\mathrm{PN}): x+z-3a\pi=0, (\mathrm{PO}): x-z-3a\pi=0, (\mathrm{PR}): y-2a=0$;

j) $(\mathrm{TG}): \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-6}, (\mathrm{BN}): \frac{x+1}{-8}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-2}{1}, (\mathrm{NP}): \frac{x+1}{44}=\frac{y-1}{-47}=\frac{z-2}{23}$;

$(\mathrm{PN}): x-2y-6z+15=0, (\mathrm{PO}): 8x+7y-z+3=0, (\mathrm{PR}): 44x-47y+23z+45=0$;

k) $(\mathrm{TG}): \frac{x-\frac{1}{2}}{4}=\frac{y-\frac{1}{24}}{1}=\frac{z-1}{-8}, (\mathrm{BN}): \frac{x-\frac{1}{2}}{4}=\frac{y-\frac{1}{24}}{-8}=\frac{z-1}{1}, (\mathrm{NP}): \frac{x-\frac{1}{2}}{7}=\frac{y-\frac{1}{24}}{4}=\frac{z-1}{4}$;

$(\mathrm{PN}): 4x+y-8z+\frac{143}{24}=0, (\mathrm{PO}): 4x-8y+z-\frac{8}{3}=0, (\mathrm{PR}): 7x+4y+4z-\frac{23}{3}=0$;

l) $(\mathrm{TG}): \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}, (\mathrm{BN}): \frac{x}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}, (\mathrm{NP}): \frac{x}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-2}$;

$(\mathrm{PN}): y=0, (\mathrm{PO}): 2x+3z=0, (\mathrm{PR}): 3x-2z=0$;

m) $(\mathrm{TG}): \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}, (\mathrm{BN}): \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{1}, (\mathrm{NP}): \frac{x+1}{11}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z+1}{-9}$;

$(\mathrm{PN}): x-2y+3z+6=0, (\mathrm{PO}): 3x+3y+z+1=0, (\mathrm{PR}): 11x-8y-9z+10=0$.

13. Să se determine tangentele la curba în spaţiu $\vec{r}(t)=\frac{t^4}{2}\vec{i}-\frac{t^3}{3}\vec{j}+t^2\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$, care sunt paralele cu planul $3x-2y-2z-1=0$.

Răspuns: $\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y-\frac{1}{3}}{1}=\frac{z-1}{2}$ şi $\frac{x-\frac{8}{81}}{4}=\frac{y+\frac{8}{81}}{-3}=\frac{z-\frac{4}{9}}{9}$.

14. Să se demonstreze că normala principală în orice punct al curbei în spaţiu

$$\vec{r}(t)=2t\,\vec{i}+\ln t\,\vec{j}+t^2\,\vec{k},\ t>0$$

este paralelă cu planul $y+z=0$.

Indicaţie: Vectorul director al normalei principale este

$$\vec{v}=2\left(\frac{1}{t^3}-4t\right)\vec{i}-4\left(\frac{1}{t^2}+2\right)\vec{j}+4\left(\frac{1}{t^2}+2\right)\vec{k},$$

iar vectorul normal al planului este $\vec{n}=\vec{j}+\vec{k}$.

Deoarece $\vec{v}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{n}=0$, atunci normala principală şi planul sunt paralele.

15. Să se demonstreze că în orice punct al curbei

$$\vec{r}(t)=e^t\sin t\,\vec{i}+e^t\cos t\,\vec{j}+e^t\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$$

tangenta, normala principală şi binormala formează fiecare câte un unghi constant cu axa Oz.

Indicaţie: Vectorii directori ai tangentei, normalei principale şi binormalei în orice punct al curbei sunt:

$$\vec{\tau}=e^t(\cos t+\sin t)\vec{i}+e^t(\cos t-\sin t)\vec{j}+e^t\,\vec{k},$$

$$\vec{v}=3e^{3t}(\cos t-\sin t)\vec{i}-3e^{3t}(\cos t+\sin t)\vec{j},$$

$$\vec{\beta}=e^{2t}(\cos t+\sin t)\vec{i}+e^{2t}(\cos t-\sin t)\vec{j}-2e^{2t}\,\vec{k}.$$ Atunci

$$\cos\left(\widehat{(\mathrm{TG}),Oz}\right)=\cos\left(\vec{\tau},\vec{k}\right)=\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{k}}{\|\vec{\tau}\|\,\|\vec{k}\|}=\frac{e^t}{e^t\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{const.}$$

$$\cos\left(\widehat{(\mathrm{NP}),Oz}\right)=\cos\left(\vec{\nu},\vec{k}\right)=\frac{\vec{\nu}\cdot\vec{k}}{\left\|\vec{\nu}\right\|\left\|\vec{k}\right\|}=\frac{0}{3e^{3t}\sqrt{2}}=0=\text{const.}$$

$$\cos\left(\widehat{(\mathrm{BN}),Oz}\right)=\cos\left(\vec{\tau},\vec{k}\right)=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{k}}{\left\|\vec{\beta}\right\|\left\|\vec{k}\right\|}=\frac{-2e^{2t}}{e^{2t}\sqrt{6}}=-\frac{2}{\sqrt{6}}=\text{const.}$$

16. Să se calculeze curbura şi torsiunea pentru următoarele curbe în spaţiu în punctele indicate

a) $\vec{r}(t)=3\cos t\,\vec{i}+3\sin t\,\vec{j}+4t\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$ (*elicea cilindrică*), în punctul $M(t=\pi)$;

b) $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}-\ln\left|\cos t\right|\vec{k},\ t\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, în $M(t=0)$;

c) $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\operatorname{ch} t\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$, în $M(t=0)$;

d) $\vec{r}(t)=3t\,\vec{i}+3t^2\,\vec{j}+2t^3\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$, într-un punct oarecare $M(x,y,z)$ al curbei;

e) $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+\left(\ln t+\frac{t^2}{8}\right)\vec{j}+\left(\ln t-\frac{t^2}{8}\right)\vec{k},\ t>0$, în $M(t=1)$;

f) $\vec{r}(t)=\left(\frac{t^3}{3}+t^2-t\right)\vec{i}+\left(\frac{t^3}{3}-t^2-t\right)\vec{j}+\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\vec{k},\ t\in\mathbb{R}$, în $M(t=0)$;

g) $\vec{r}(t)=\left(t^2-1\right)\vec{i}+t^2\,\vec{j}-\ln t\,\vec{k},\ t>0$, în punctul $M(t=1)$;

h) $\begin{cases}x^3-3y=0\\2xz-1=0\end{cases}$, în punctul $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{24},1\right)$;

i) $\begin{cases}x^2-y=0\\2x^3-3z=0\end{cases}$, în punctul $M(3,9,18)$.

Răspuns: a) $k_1=\frac{3}{25},\ k_2=\frac{4}{25}$; b) $k_1=\sqrt{2},\ k_2=0$; c) $k_1=\sqrt{2},\ k_2=0$;

d) $k_1=\frac{2}{3\left(1+2t^2\right)^2},\ k_2=\frac{2}{3\left(1+2t^2\right)^2}$; e) $k_1=\frac{8}{25},\ k_2=\frac{8}{25}$; f) $k_1=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ k_2=\frac{2}{3}$;

g) $k_1 = \frac{4\sqrt{2}}{27}$, $k_2 = 0$; h) $k_1 = \frac{64}{81}$, $k_2 = -\frac{64}{81}$; i) $k_1 = \frac{2}{361}$, $k_2 = \frac{2}{361}$.

17. Să se arate că pentru *elicea circulară*

$$\vec{r}(t) = a\cos t\ \vec{i} + a\sin t\ \vec{j} + bt\ \vec{k},\ t \in \mathbb{R},\ a, b > 0,$$

curbura şi torsiunea sunt constante în orice punct curent al său.

Răspuns: $k_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $k_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$.

18. În fiecare dintre cazurile de mai jos, să se arate că următoarele curbe sunt plane şi să se găsească ecuaţia planului curbei:

a) $\vec{r}(t) = \left(2t^3 + t^2\right)\vec{i} + \left(t^2 - 2t\right)\vec{j} + \left(t^3 + t - 1\right)\vec{k},\ t \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = \ln t \end{cases},\ t > 0$;

c) $\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 - 2x - z = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x(t) = a\sin^2 t \\ y(t) = a\sin 2t \\ z(t) = a\cos^2 t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

Răspuns: a) $x - y - 2z - 2 = 0$; b) $x - y + 1 = 0$; c) $2x - y + z + 1 = 0$; d) $x + z - a = 0$.

CAPITOLUL 5

SUPRAFEŢE

5.1. PÂNZE PARAMETRIZATE. DEFINIŢIA SUPRAFEŢEI

Noţiunea de pânză parametrizată este generalizarea naturală a noţiunii de drum parametrizat.

Definiţia 5.1.1. *Fie* $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ *o mulţime deschisă şi conexă* (*domeniu*). *Se numeşte* ***pânză parametrizată*** *de clasă* C^1 *orice funcţie vectorială* $r : \Delta \to \mathbb{R}^3$ *de clasă* C^1.

Dacă notăm cu $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in \Delta$ componentele scalare ale funcţiei vectoriale r, atunci

$$r(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big),\ \forall (u,v) \in \Delta .$$

Ecuaţiile $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in \Delta$ se numesc ***ecuaţiile parametrice*** ale pânzei sau o ***reprezentare parametrică*** a pânzei, iar u şi v se numesc ***parametrii*** pânzei. Ca şi în cazul drumurilor parametrizate, vom nota cu $(\Delta,\ r)$ pânza parametrizată.

Imaginea directă $r(\Delta)$ a domeniului Δ prin funcţia vectorială r, adică

$r(\Delta) = \big\{\big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big) \big| (u,v) \in \Delta\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte ***suportul*** pânzei.

În continuare vom folosi câteva notaţii specifice geometriei diferenţiale şi anume:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k},\ (u,v) \in \Delta$$

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u},\ x_v = \frac{\partial x}{\partial v},\ y_u = \frac{\partial y}{\partial u},\ y_v = \frac{\partial y}{\partial v},\ z_u = \frac{\partial z}{\partial u},\ z_v = \frac{\partial z}{\partial v},\ \text{etc.}$$

$$A = A(u,v) = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix};\ B = B(u,v) = -\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix};\ C = C(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$$

$$\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$$

$$E = \left\|\vec{r}_u\right\|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$G = \left\|\vec{r}_v\right\|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Observăm că $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = A\,\vec{i} + B\,\vec{j} + C\,\vec{k}$ şi $\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Dacă notăm cu θ unghiul dintre vectorii $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$, atunci

$$EG - F^2 = \left\|\vec{r}_u\right\|^2 \left\|\vec{r}_v\right\|^2 - \left(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v\right)^2 = \left\|\vec{r}_u\right\|^2 \left\|\vec{r}_v\right\|^2 - \left\|\vec{r}_u\right\|^2 \left\|\vec{r}_v\right\|^2 \cos^2\theta =$$

$$= \left\|\vec{r}_u\right\|^2 \left\|\vec{r}_v\right\|^2 \sin^2\theta = \left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Aşadar avem următoarea identitate

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2. \tag{5.1}$$

Definiţia 5.1.2. *O pânză parametrizată de clasă* C^1 *se numeşte* ***netedă*** *dacă*

$$\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0,\ \forall (u,v) \in \Delta.$$

O pânză parametrizată se numeşte ***simplă*** *dacă funcţia vectorială* $r : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *este injectivă.*

Exemplul 5.1.1. Fie pânza parametrizată (Δ, r), unde

$$\Delta = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < u < \frac{\pi}{2},\ 0 < v < \frac{\pi}{2} \right\} \text{ şi}$$

$$\vec{r}(u,v) = R \sin u \cos v\, \vec{i} + R \sin u \sin v\, \vec{j} + R \cos u\, \vec{k},\ (u,v) \in \Delta.$$

Ecuaţiile parametrice sunt

$x = R\sin u\cos v$, $y = R\sin u\sin v$, $z = R\cos u$, $(u,v) \in \Delta$.

Observăm că pentru orice $(u,v) \in \Delta$, punctul $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ verifică ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Rezultă că suportul acestei pânze este porţiunea din sfera cu centrul în origine şi de rază R cuprinsă în primul octant $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

Cu notaţiile de mai sus avem:

$x_u = R\cos u\cos v \qquad x_v = -R\sin u\sin v$

$y_u = R\cos u\sin v \qquad y_v = R\sin u\cos v$

$z_u = -R\sin u \qquad z_v = 0$

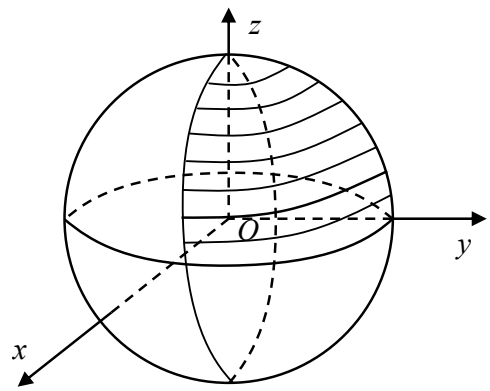


Fig. 1

şi mai departe

$A = R^2\sin^2 u\cos v$

$B = R^2\sin^2 u\sin v$

$C = R^2\sin u\cos u$

$E = R^2,\ F = 0,\ G = R^2\sin^2 u$, de unde deducem că

$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = R^4\sin^2 u > 0,\ \forall (u,v) \in \Delta$.

Rezultă că această pânză parametrizată este netedă.

Mai mult, este evident că pânza considerată este simplă.

Observaţia 5.1.1. Un caz particular foarte important de pânză parametrizată este cazul pânzei definită de o funcţie explicită.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu şi $f \in C^1(D)$. Acestei funcţii îi corespunde pânza parametrizată (D, r), unde

$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k},\ (x,y) \in D$.

Observăm că suportul acestei pânze este graficul funcţiei f, adică:

$$G_f = \{(x, y, f(x, y));\ (x, y) \in D\}.$$

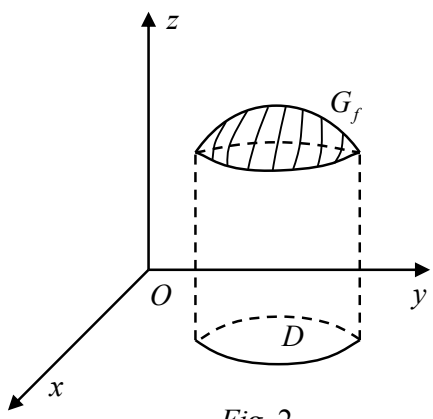


Fig. 2

Dacă notăm cu $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, atunci:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{vmatrix} = -p$$

$$B = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{vmatrix} = -q$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Rezultă că $A^2 + B^2 + C^2 = p^2 + q^2 + 1$.

Cum $A^2 + B^2 + C^2 = p^2 + q^2 + 1 > 0,\ \forall (x, y) \in D$, rezultă că această pânză este netedă. Pe de altă parte, este evident că această pânză este simplă.

Aşadar pânza parametrizată definită de o funcţie f este simplă şi netedă.

Definiţia 5.1.3. *Două pânze parametrizate de clasă* C^1, (Δ_1, r_1) *şi* (Δ_2, r_2) *se numesc* ***echivalente cu aceeaşi orientare***, dacă *există un difeomorfism* $\phi: \Delta_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$ *cu proprietăţile*:

$$\det J_\phi(u_1, v_1) > 0,\ \forall (u_1, v_1) \in \Delta_1 \text{ şi } r_1 = r_2 \circ \phi.$$

Reamintim că ϕ este difeomorfism dacă ϕ este aplicaţie bijectivă, $\phi \in C^1(\Delta_1)$ şi $\phi^{-1} \in C^1(\Delta_2)$.

Dacă notăm cu φ_1 şi φ_2 componentele scalare ale lui ϕ, atunci:

$$\det J_\phi(u_1, v_1) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u_1, v_1) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v_1}(u_1, v_1) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u_1, v_1) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v_1}(u_1, v_1) \end{vmatrix}.$$

Dacă $\det J_\phi < 0$ pe Δ_1, spunem că cele două pânze sunt echivalente cu orientări opuse. Funcţia ϕ se mai numeşte şi ***schimbare de parametri***. Avem următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_1 \subset \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\phi = (\varphi_1, \varphi_2)"] \arrow[dr, "r_1"'] & & \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2 \arrow[dl, "r_2"] \\
& S \subset \mathbb{R}^3 &
\end{tikzcd}$$

$r_1 = r_2 \circ \phi$ sau $r_1(u_1, v_1) = r_2(\varphi_1(u_1, v_1), \varphi_2(u_1, v_1)),\ \forall (u_1, v_1) \in \Delta_1$.

Folosim notaţia $(\Delta_1, r_1) \sim (\Delta_2, r_2)$ pentru două pânze parametrizate echivalente.

Observaţia 5.1.2. Din Definiţia 5.1.3. rezultă că două pânze parametrizate echivalente au acelaşi suport.

Exemplul 5.1.2. Fie pânzele (Δ_1, r_1) şi (Δ_2, r_2) unde:

$$\Delta_1 = \left\{ (u_1, v_1) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < u_1 < \frac{\pi}{2};\ 0 < v_1 < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Delta_2 = \left\{ (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u_2^2 + v_2^2 < R^2;\ u_2 > 0, v_2 > 0 \right\}$$

$\vec{r_1}(u_1, v_1) = R \sin u_1 \cos v_1\ \vec{i} + R \sin u_1 \sin v_1\ \vec{j} + R \cos u_1\ \vec{k},\ (u_1, v_1) \in \Delta_1$ şi

$\vec{r_2}(u_2, v_2) = u_2 \vec{i} + v_2 \vec{j} + \sqrt{R^2 - u_2^2 - v_2^2}\ \vec{k},\ (u_2, v_2) \in \Delta_2$.

Vom arăta că pânzele (Δ_1, r_1) şi (Δ_2, r_2) sunt echivalente.

Fie $\phi : \Delta_1 \to \Delta_2$, definită prin

$\phi(u_1, v_1) = (R \sin u_1 \cos v_1, R \sin u_1 \sin v_1),\ (u_1, v_1) \in \Delta_1$.

Rezultă că $\phi \in C^1(\Delta_1)$ şi

$$J_\phi(u_1, v_1) = \begin{vmatrix} R \cos u_1 \cos v_1 & -R \sin u_1 \sin v_1 \\ R \cos u_1 \sin v_1 & R \sin u_1 \cos v_1 \end{vmatrix} = R^2 \sin u_1 \cos u_1 > 0,\ \forall (u_1, v_1) \in \Delta_1.$$

Dacă presupunem că $\phi\left(u_1', v_1'\right) = \phi\left(u_1'', v_1''\right)$, atunci rezultă că $tg\, v_1' = tg\, v_1''$ şi mai departe $u_1' = u_1''$ şi $v_1' = v_1''$, deci ϕ este injectivă.

Pentru a arăta că ϕ este surjectivă, fie $u_2 > 0$ şi $v_2 > 0$ cu proprietatea $u_2^2 + v_2^2 < R^2$. Deoarece $0 < \frac{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}{R} < 1$, rezultă că există $u_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}{R} = \sin u_1$, relaţie echivalentă cu

$$\left(\frac{u_2}{R \sin u_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{R \sin u_1}\right)^2 = 1.$$

Atunci există $v_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât

$$\frac{u_2}{R \sin u_1} = \cos v_1 \text{ şi } \frac{v_2}{R \sin u_1} = \sin v_1.$$

Aşadar am arătat că există $\left(u_1, v_1\right) \in \Delta_1$ astfel încât

$u_2 = R \sin u_1 \cos v_1$ şi $v_2 = R \sin u_1 \sin v_1$, deci $\phi\left(u_1, v_1\right) = \left(u_2, v_2\right) \in \Delta_2$.

De asemenea, este uşor de observat că:

$$\phi^{-1}\left(u_2, v_2\right) = \left(\arcsin \frac{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}{R}, \operatorname{arctg} \frac{v_2}{u_2}\right), \left(u_2, v_2\right) \in \Delta_2, \text{ deci } \phi^{-1} \in C^1\left(\Delta_2\right).$$

Pe de altă parte avem:

$$\vec{r}_2\left(\phi\left(u_1, v_1\right)\right) = R \sin u_1 \cos v_1 \vec{i} + R \sin u_1 \sin v_1 \vec{j} + R \cos u_1 \vec{k} = \vec{r}_1\left(u_1, v_1\right), \ \forall \left(u_1, v_1\right) \in \Delta_1.$$

Aşadar $\left(\Delta_1, r_1\right) \sim \left(\Delta_2, r_2\right)$.

Observaţia 5.1.3. Orice pânză parametrizată echivalentă cu o pânză parametrizată simplă şi netedă este la rândul său simplă şi netedă.

Într-adevăr, fie $\left(\Delta_1, r_1\right) \sim \left(\Delta_2, r_2\right)$ şi fie $\phi = \left(\varphi_1, \varphi_2\right) : \Delta_1 \to \Delta_2$ schimbarea de parametrii astfel încât $r_1 = r_2 \circ \phi$.

Cum ϕ este bijectivă, rezultă că, dacă r_2 este injectivă, atunci şi r_1 este injectivă. Pe de altă parte avem:

$$\begin{cases} x_1(u_1,v_1) = x_2(\varphi_1(u_1,v_1),\varphi_2(u_1,v_1)) \\ y_1(u_1,v_1) = y_2(\varphi_1(u_1,v_1),\varphi_2(u_1,v_1)), \quad \forall (u_1,v_1) \in \Delta_1 . \\ z_1(u_1,v_1) = z_2(\varphi_1(u_1,v_1),\varphi_2(u_1,v_1)) \end{cases}$$

Ţinând seama de formulele de derivare ale funcţiilor compuse rezultă:

$$A_1 = \frac{D(y_1,z_1)}{D(u_1,v_1)} = \frac{D(y_2,z_2)}{D(\varphi_1,\varphi_2)} \cdot \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u_1,v_1)} = A_2 \cdot \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u_1,v_1)}$$

şi analog

$$B_1 = B_2 \cdot \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u_1,v_1)}, \quad C_1 = C_2 \cdot \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u_1,v_1)} .$$

Aşadar avem: $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = \left(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2\right)\left[\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u_1,v_1)}\right]^2$.

Cum $\left[\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u_1,v_1)}\right]^2 > 0$, rezultă că $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$, deci că dacă (Δ_2, r_2) este netedă, atunci şi (Δ_1, r_1) este netedă şi reciproc.

Definiţia 5.1.4. *O mulţime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte* ***suprafaţă*** *dacă pentru orice punct $M \in S$, există o pânză parametrizată (Δ, r) netedă şi o vecinătate deschisă V a punctului M astfel încât*:

a) $r(\Delta) = V \cap S$

b) *aplicaţia $r : \Delta \to r(\Delta)$ este un homeomorfism* (r *este bijectivă continuă şi inversa r^{-1} este continuă*).

Dacă $S = r(\Delta)$, atunci suprafaţa S se numeşte ***simplă***.

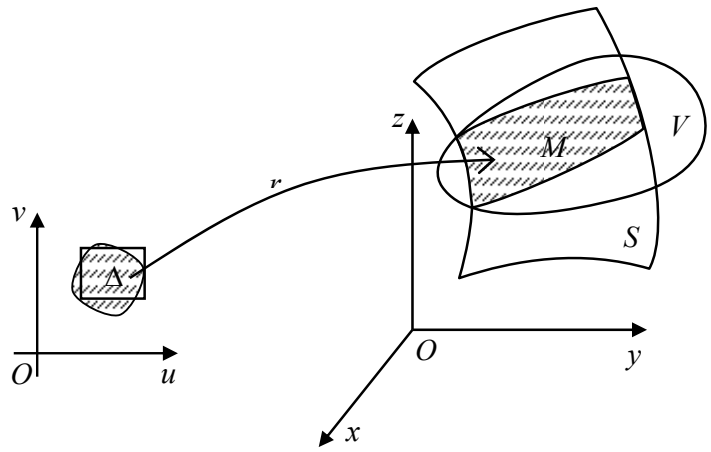


Fig. 3

Pânza parametrizată (Δ, r) se numeşte ***parametrizare locală*** a suprafeţei S.

Observaţia 5.1.4. Se poate arăta că orice două parametrizări locale ale unei suprafeţe sunt echivalente.

Observaţia 5.1.5. Din Definiţia 5.1.4. rezultă că o suprafaţă coincide local (într-o vecinătate a oricărui punct al său) cu suportul unei pânze parametrizate netedă şi simplă.

Reciproc, se poate arăta că, local, suportul unei pânze parametrizate netedă este o suprafaţă.

Mai precis, are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.1.1. *Fie* (Δ, r) *o pânză parametrizată netedă. Atunci pentru orice punct* $(u_0, v_0) \in \Delta$, *există o vecinătate deschisă* $U \subset \Delta$ *astfel încât* $r(U)$ *este o suprafaţă în sensul Definiţiei* 5.1.4.

Demonstraţie.

Fie $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ \forall (u,v) \in \Delta$ şi fie $(u_0, v_0) \in \Delta$.

Cum (Δ, r) este netedă, rezultă că $(A^2 + B^2 + C^2)(u_0, v_0) > 0$ şi, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că

$$C(u_0, v_0) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_0, v_0) \neq 0 .$$

Din Teorema de Inversiune Locală (*T. I. L.*) pentru funcţia

$$(u,v)\xrightarrow{\varphi}\big(x(u,v),y(u,v)\big):\Delta\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

rezultă că există o vecinătate deschisă U a punctului (u_0,v_0), $U\subset\Delta$ şi o vecinătate deschisă V a punctului $(x_0,y_0)=\big(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)\big)$ astfel încât $\varphi:U\to V$ este difeomorfism.

Observăm că $r\big|_U:U\to r(U)$ este injectivă.

Într-adevăr, dacă $\big(x(u_1,v_1),y(u_1,v_1),z(u_1,v_1)\big)=\big(x(u_2,v_2),y(u_2,v_2),z(u_2,v_2)\big)$, unde $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in U$, atunci

$$\varphi(u_1,v_1)=\big(x(u_1,v_1),y(u_1,v_1)\big)=\big(x(u_2,v_2),y(u_2,v_2)\big)=\varphi(u_2,v_2),$$

deci $(u_1,v_1)=(u_2,v_2)$, deoarece φ este injectivă.

Pe de altă parte $\big(r\big|_U\big)^{-1}:r(U)\to U$ este continuă, fiind compunerea funcţiilor continue:

$$(x,y,z)\xrightarrow{pr}(x,y):r(U)\to V \text{ şi } (x,y)\xrightarrow{\varphi^{-1}}(u,v):V\to U.$$

Aşadar $r\big|_U:U\to r(U)$ este un homeomorfism.

Cum U este o vecinătate deschisă a punctului (u_0,v_0) rezultă că $r(U)$ este o vecinătate deschisă a punctului $M_0\big(x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0),z_0=z(u_0,v_0)\big)$ în $r(\Delta)$, deci că există o vecinătate deschisă $W\subset\mathbb{R}^3$ a punctului M_0 astfel încât $W\bigcap r(\Delta)=r(U)$. Aşadar $r(\Delta)$ este o suprafaţă în sensul Definiţiei 5.1.4.

Teorema 5.1.1. ne furnizează primul exemplu de suprafaţă şi anume suportul unei pânze parametrizată netedă. Despre o astfel de suprafaţă se spune că este dată sub formă parametrică.

Un alt mod de reprezentare a unei suprafeţe este aşa-zisa reprezentare explicită.

Fie $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, unde D este un domeniu.

Atunci graficul acestei funcţii, $G_f = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\}$, este suportul pânzei parametrizată netedă

$$r(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}, \ \forall (x, y) \in D,$$

deci o suprafaţă în sensul Definiţiei 5.1.4.

În sfârşit, un alt mod de reprezentare a unei suprafeţe este reprezentarea implicită.

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi fie $F : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Dacă presupunem în plus că $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \neq 0$ pe D, atunci mulţimea

$$S = \{(x, y, z) \in D; F(x, y, z) = 0\} \text{ este o suprafaţă.}$$

Într-adevăr, fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Cum derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui F nu se anulează simultan în M_0, putem presupune că $\frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \neq 0$. Din *T. F. I.* rezultă că există o vecinătate deschisă $U \in \mathcal{V}(x_0)$, o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}(y_0)$, o vecinătate deschisă $W \in \mathcal{V}(z_0)$ şi o funcţie implicită unică $(x, y) \to f(x, y) : U \times V \to W$ de clasă C^1, cu proprietăţile:

a) $f(x_0, y_0) = z_0$

b) $F(x, y, f(x, y)) = 0, \ \forall (x, y) \in U \times V$.

Din b) rezultă că graficul funcţiei $f : U \times V \to W$ este inclus în S. Mai mult, observăm că $G_f = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in U \times V\} = (U \times V \times W) \cap S$.

Într-adevăr, $G_f \subset (U \times V \times W) \cap S$, deoarece $f(U \times V) \subset W$.

Pe de altă parte, dacă $(x, y, z) \in (U \times V \times W) \cap S$, atunci $(x, y) \in U \times V$, $z \in W$ şi $F(x, y, z) = 0$. Cum şi $F(x, y, f(x, y)) = 0$, din definiţia funcţiei implicite, rezultă că $f(x, y) = z$ şi deci că $(U \times V \times W) \cap S \subset G_f$.

Evident, $U \times V \times W$ este o vecinătate deschisă a punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi $(U \times V \times W) \cap S = G_f$. Rezultă că, local, S este suportul unei pânze parametrizate netedă, deci că S este o suprafaţă.

Exemplul 5.1.3. Cele mai cunoscute suprafeţe date printr-o reprezentare implicită sunt cuadricile:

Elipsoidul de semiaxe a, b, c de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Sfera cu centrul în origine şi de rază R de ecuaţie

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Hiperboloidul cu o pânză (cu două pânze) de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \right).$$

Paraboloidul eliptic (hiperbolic) de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0 \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0 \right).$$

Conul eliptic (hiperbolic) de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \right).$$

Cilindrul eliptic (hiperbolic) cu axa de simetrie Oz de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \right), \text{ etc.}$$

5.2. CURBE PE O SUPRAFAŢĂ. PLANUL TANGENT ŞI NORMALA LA O SUPRAFAŢĂ

Definiţia 5.2.1. *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă. Spunem că drumul parametrizat regulat (I, ρ) este* ***situat pe suprafaţa*** *S dacă suportul său $\rho(I) \subset S$.*

Fie S suportul unei pânze parametrizate netede (Δ, r). Conform Teoremei 5.1.1., S este o suprafaţă.

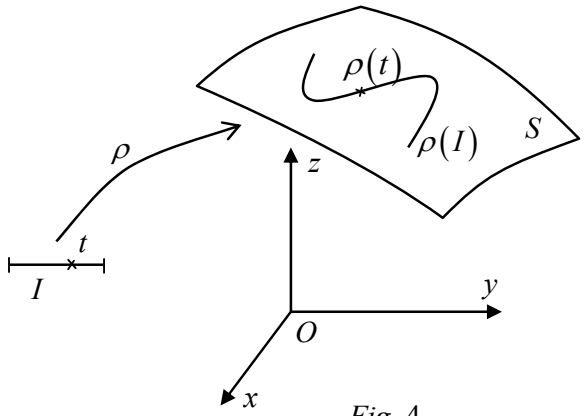


Fig. 4

Fie, de asemenea,

$$\tilde{\rho}(t) = (u(t), v(t)),\ t \in I,$$

un drum parametrizat regulat al cărui suport este inclus în Δ $(\tilde{\rho}(I) \subset \Delta)$

Dacă notăm cu

$$\rho(t) = r(\tilde{\rho}(t)) = r(u(t), v(t)),\ t \in I,$$

atunci (I, ρ) este un drum parametrizat regulat situat pe suprafaţa S.

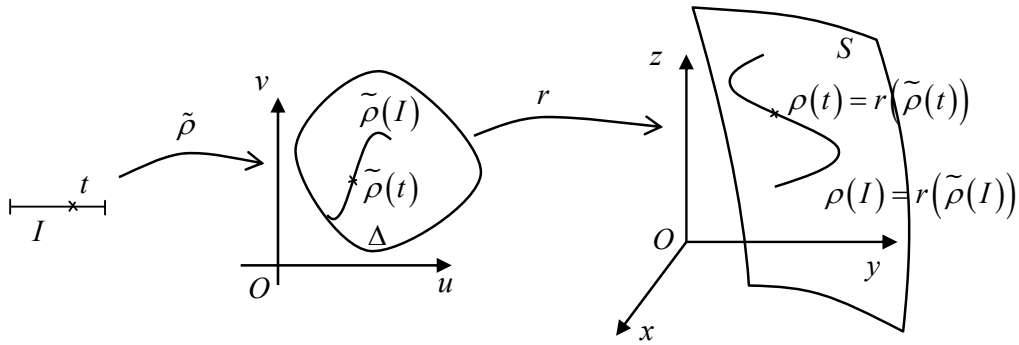


Fig. 5

Într-adevăr, $\rho'(t) = r_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + r_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$.

Cum $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0$, rezultă că $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sunt liniar independenţi, deci că $\rho'(t) = 0$ dacă şi numai dacă $u'(t) = v'(t) = 0$. Cum $u'^2(t) + v'^2(t) > 0$ rezultă că $\|\rho'(t)\|^2 > 0$, deci că (I, ρ) este regulat.

Se pune întrebarea naturală dacă este adevărată şi afirmaţia inversă, adică dacă pentru orice drum regulat (I, ρ) situat pe suprafaţa $S = r(\Delta)$, există un drum parametrizat regulat $(I, \tilde{\rho})$ situat în Δ astfel încât $\rho(t) = r(\tilde{\rho}(t))$, $\forall t \in I$.

Răspunsul este afirmativ, dar demonstraţia trece prin următoarea lemă:

Lema 5.2.1. *Fie* (Δ, r) *o parametrizare locală a suprafeţei* S. *Atunci pentru orice* $M \in D = r(\Delta)$, *rezultă că există o vecinătate* $W \subset \mathbb{R}^3$ *a punctului* M *şi o funcţie* $F : W \to \Delta$ *de clasă* C^1 *astfel încât*

$$r^{-1}\big|_{D\cap W} = F\big|_{D\cap W} .$$

Demonstraţie.

Fie $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ \forall (u,v) \in \Delta$ şi fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D \subset S$. Cum aplicaţia $r : \Delta \to D$ este homeomorfism, rezultă că există $(u_0, v_0) \in \Delta$ unic astfel încât $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0), z_0 = z(u_0, v_0)$.

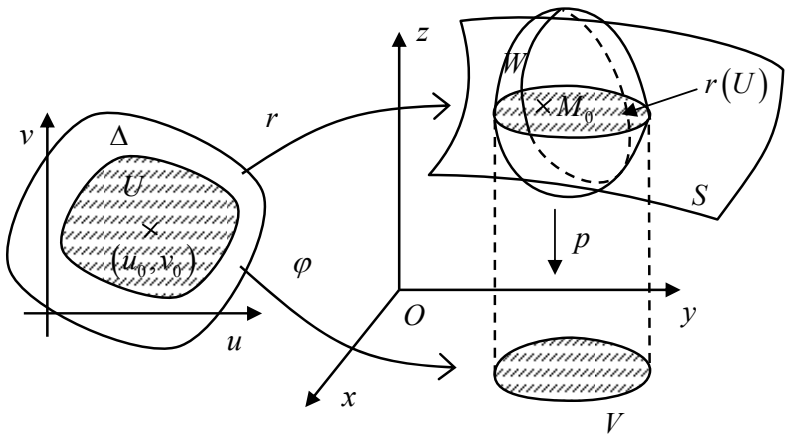


Fig. 6

Deoarece (Δ, r) este netedă, rezultă că $A^2 + B^2 + C^2 > 0,\ \forall (u,v) \in \Delta$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune $C(u_0, v_0) = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_0, v_0) \neq 0$. Din *T. I. L.* pentru funcţia $(u,v) \xrightarrow{\varphi} (x(u,v), y(u,v)) : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rezultă că există o vecinătate deschisă U a punctului (u_0, v_0) şi o vecinătate deschisă V a punctului (x_0, y_0) astfel încât $\varphi : U \to V$ este difeomorfism.

Pe de altă parte, $r : \Delta \to D \subset S$ este un homeomorfism, de unde rezultă că $r(U)$ este o

vecinătate a punctului M în S şi deci că există o vecinătate $W \subset \mathbb{R}^3$ a punctului M astfel încât $r(U) = W \cap S = W \cap D$.

Fie $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $p(x,y,z) = (x,y)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ operatorul de proiecţie pe planul xOy şi fie $F : W \to V$, definită prin $F(x,y,z) = \varphi^{-1}(p(x,y,z))$, $\forall (x,y,z) \in W$. Evident, F este de clasă C^1 pe W, fiind o compunere de funcţii de clasă C^1.

Să observăm că $F\big|_{D \cap W} = r^{-1}\big|_{D \cap W}$.

Într-adevăr, dacă $(x,y,z) \in D \cap W = r(U)$, atunci există $(u,v) \in U$ unic astfel încât $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. Mai departe avem

$$F(x,y,z) = \varphi^{-1}(p(x,y,z)) = \varphi^{-1}(x(u,v), y(u,v)) = (u,v),$$

pentru că $(x(u,v), y(u,v)) \in V = p(r(U))$.

Pe de altă parte, $r^{-1}(x,y,z) = (u,v)$, deci $F(x,y,z) = r^{-1}(x,y,z)$.

Teorema 5.2.1. *Fie (Δ, r) o parametrizare locală a suprafeţei S şi fie (I, ρ) un drum parametrizat regulat situat în $r(\Delta)$. Atunci există un drum regulat $(J, \tilde{\rho})$, $J \subset I$, situat în domeniul Δ astfel încât*

$$\rho(t) = r(\tilde{\rho}(t)), \forall t \in J.$$

Demonstraţie.

Aplicaţia $r : \Delta \to r(\Delta) = S$ este homeomorfism şi $\rho(I) \subset S$.

Atunci $\tilde{\rho} = r^{-1} \circ \rho : I \to \Delta$ este o funcţie continuă. Rămâne să arătăm că $\tilde{\rho}$ este de clasă C^1 şi $\|\tilde{\rho}'(t)\| > 0$ pe un interval $J \subset I$. Conform Lemei 5.2.1., există o vecinătate W a punctului $\rho(t) \in S$ şi o funcţie $F : W \to \Delta$ de clasă C^1 astfel încât $r^{-1}\big|_{W \cap r(\Delta)} = F\big|_{W \cap r(\Delta)}$.

Prin urmare, într-o vecinătate a punctului $\rho(t)$ avem $\tilde{\rho} = F \circ \rho$, deci $\tilde{\rho}$ este de clasă C^1 pe un interval $J \subset I \subset \Delta$. Pe de altă parte, dacă $\tilde{\rho}(t) = (u(t), v(t))$, atunci

$\rho(t) = r(u(t), v(t))$ şi $\rho'(t) = r_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + r_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$.

Cum $\|\rho'(t)\| > 0$ şi r_u şi r_v sunt liniar independenţi, rezultă că $u'^2(t) + v'^2(t) > 0$, $\forall t \in I$ şi deci că $(I, \tilde{\rho})$ este regulat.

Fie (Δ, r) o suprafaţă parametrizată netedă. Printre drumurile parametrizate regulate situate pe suprafaţa $S = r(\Delta)$ un rol special îl joacă aşa-zise curbele coordonate.

Fie $(u_0, v_0) \in \Delta$.

Definiţia 5.2.2. *Drumurile parametrizate regulate*:

$\Gamma_u : \rho_1(t) = r(u_0 + t, v_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $(u_0 + t, v_0) \in \Delta$ *şi*

$\Gamma_v : \rho_2(t) = r(u_0, v_0 + t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $(u_0, v_0 + t) \in \Delta$

sunt situate pe suprafaţa $S = r(\Delta)$ *şi poartă numele de* ***curbe coordonate****.*

Observăm că:

$\rho_1(0) = \rho_2(0) = r(u_0, v_0) = M_0$

$\rho_1'(0) = r_u(u_0, v_0)$ este un vector tangent în M_0 la Γ_u şi

$\rho_2'(0) = r_v(u_0, v_0)$ este un vector tangent în M_0 la Γ_v.

Cum suprafaţa (Δ, r) este netedă, rezultă că $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ şi deci că vectorii $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ determină un plan.

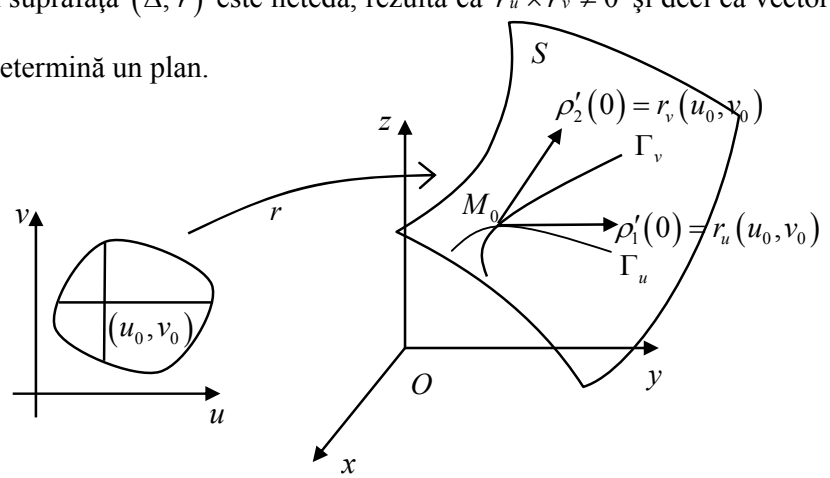


Fig. 7

Definiţia 5.2.3. *Fie S o suprafaţă şi $M_0 \in S$. Un vector $\overrightarrow{M_0T}$ se numeşte* ***vector tangent*** *în M_0 la suprafaţa S dacă există un drum parametrizat regulat $\rho = \rho(t), t \in I$ situat pe suprafaţa S şi un punct $t_0 \in I$ astfel încât $\rho(t_0) = M_0$ şi $\overrightarrow{\rho}'(t_0) = \overrightarrow{M_0T}$. Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi în M_0 la suprafaţa S se notează cu $T_{M_0}S$ şi se numeşte* ***spaţiul tangent*** *în M_0 la S.*

Exemplul 5.2.1. Fie (Δ, r) o suprafaţă parametrizată netedă şi fie $(u_0, v_0) \in \Delta$. Atunci vectorii $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ sunt vectorii tangenţi în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la suprafaţa $S = r(\Delta)$, unde $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$.

Definiţia 5.2.4. *Fie (Δ, r) o suprafaţă parametrizată netedă, $(u_0, v_0) \in \Delta$ şi $M_0 \in S = r(\Delta)$ punctul de coordonate $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$. Planul determinat de vectorii $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ se numeşte* ***planul tangent*** *în M_0 la suprafaţa S.*

Dreapta perpendiculară în M_0 pe planul tangent se numeşte ***normala*** *la suprafaţa S în M_0.*

Cu notaţiile din Definiţia 5.2.4. avem:

Teorema 5.2.2. *Planul tangent în M_0 la suprafaţa $S = r(\Delta)$ coincide cu $T_{M_0}S$ – spaţiul tangent în M_0 la suprafaţa S. În particular, rezultă că $T_{M_0}S$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune* 2.

Demonstraţie.

Fie $\overrightarrow{M_0T} = \lambda\, \vec{r}_u(u_0, v_0) + \mu\, \vec{r}_v(u_0, v_0)$ un vector oarecare din planul tangent în M_0 la suprafaţa $S = r(\Delta)$ şi fie

$$\overrightarrow{\rho}(t) = \vec{r}(u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t),\ t \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } (u_0 + \lambda t, v_0 + \mu t) \in \Delta.$$

Evident $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(t)$ este un drum parametrizat neted situat pe suprafaţa S, $\rho(0) = M_0$ şi $\overrightarrow{\rho}'(0) = \lambda\, \vec{r}_u(u_0, v_0) + \mu\, \vec{r}_v(u_0, v_0) = \overrightarrow{M_0T}$, deci $\overrightarrow{M_0T}$ aparţine spaţiului tangent în M_0 la S.

Reciproc, fie $\overrightarrow{M_0T} \in T_{M_0}S$. Atunci există un drum parametrizat regulat (I, ρ), situat pe suprafaţa S şi un punct $t_0 \in I$ astfel încât $\rho(t_0) = M_0$ şi $\vec{\rho}'(t_0) = \overrightarrow{M_0T}$.

Fie $\tilde{\rho}(t) = (u(t), v(t)),\ t \in I$ drumul parametrizat regulat situat în domeniul Δ astfel încât

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(\tilde{\rho}(t)) = \vec{r}(u(t), v(t)),\ \forall t \in I.$$

În continuare avem:

$\overrightarrow{M_0T} = \vec{\rho}'(t_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'(t_0)$, de unde rezultă că $\overrightarrow{M_0T}$ aparţine planului tangent în M_0 la S şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Teorema 5.2.3. *Fie* (Δ, r) *o suprafaţă parametrizată netedă,* $(u_0, v_0) \in \Delta$ *şi* M_0 *punctul corespunzător de pe suprafaţa* $S = r(\Delta)$ *de coordonate* $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$.

Ecuaţia planului tangent în M_0 *la suprafaţa* S *este*:

$$A(u_0, v_0)(x - x(u_0, v_0)) + B(u_0, v_0)(y - y(u_0, v_0)) + C(u_0, v_0)(z - z(u_0, v_0)) = 0. \quad (5.2)$$

Ecuaţiile canonice ale normalei în M_0 *la suprafaţa* S *sunt*:

$$\frac{x - x(u_0, v_0)}{A(u_0, v_0)} = \frac{y - y(u_0, v_0)}{B(u_0, v_0)} = \frac{z - z(u_0, v_0)}{C(u_0, v_0)}. \quad (5.3)$$

Demonstraţie.

Conform Definiţiei 5.2.4. planul tangent în M_0 la suprafaţa S este planul determinat de vectorii:

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) = x_u(u_0, v_0)\vec{i} + y_u(u_0, v_0)\vec{j} + z_u(u_0, v_0)\vec{k} \text{ şi}$$

$$\vec{r}_v(u_0, v_0) = x_v(u_0, v_0)\vec{i} + y_v(u_0, v_0)\vec{j} + z_v(u_0, v_0)\vec{k}.$$

Ţinând seama de forma generală a ecuaţiei unui plan ce trece printr-un punct şi este paralel cu doi vectori necolineari, rezultă că ecuaţia planului tangent la suprafaţa S în punctul M_0 va fi

$$\begin{vmatrix} x-x(u_0,v_0) & y-y(u_0,v_0) & z-z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{5.4}$$

Cu notaţiile obişnuite $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = -\dfrac{D(x,z)}{D(u,v)}$, $C = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, ecuaţia (5.4) se mai scrie

$$A(u_0,v_0)\big(x-x(u_0,v_0)\big) + B(u_0,v_0)\big(y-y(u_0,v_0)\big) + C(u_0,v_0)\big(z-z(u_0,v_0)\big) = 0.$$

Normala în M_0 la suprafaţa S va avea parametrii directori $A(u_0,v_0)$, $B(u_0,v_0)$ şi $C(u_0,v_0)$. Ecuaţiile sale canonice sunt:

$$\frac{x-x(u_0,v_0)}{A(u_0,v_0)} = \frac{y-y(u_0,v_0)}{B(u_0,v_0)} = \frac{z-z(u_0,v_0)}{C(u_0,v_0)}.$$

Exemplul 5.2.2. Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei în punctul $M_0(2,2,0)$ la suprafaţa:

$$\vec{r}(u,v) = u\,e^{v}\,\vec{i} + u\,e^{-v}\,\vec{j} + 4u\,v\,\vec{k},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Observăm că $M_0(2,2,0)$ corespunde parametrilor $u_0 = 2$, $v_0 = 0$.

Avem: $x(u,v) = u\,e^{v}$, $y(u,v) = u\,e^{-v}$, $z(u,v) = 4u\,v$

$x_u = e^{v}$, $y_u = e^{-v}$, $z_u = 4v$

$x_v = u\,e^{v}$, $y_v = -u\,e^{-v}$, $z_v = 4u$

$$A(2,0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 8,\ B(2,0) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -8,\ C(2,0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Ecuaţia planului tangent în M_0 este:

$8(x-2) - 8(y-2) - 4(z-0) = 0$ sau $2x - 2y - z = 0$.

Ecuaţiile canonice ale normalei în M_0 sunt:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-0}{-1}.$$

Corolarul 5.2.1. *Fie F o funcţie de clasă C^1 pe o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^3$ şi fie*

$$S = \{ (x, y, z);\ F(x, y, z) = 0 \}$$

suprafaţa definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ cu proprietatea $\frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \neq 0$. Atunci ecuaţia planului tangent în M_0 la suprafaţa S este:

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad (5.5)$$

şi ecuaţiile canonice ale normalei în M_0 la suprafaţa S sunt:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}. \qquad (5.6)$$

Demonstraţie.

Din Teorema Funcţiilor Implicite rezultă că, local, suprafaţa S poate fi privită ca suportul pânzei parametrizate netedă:

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k},$$

unde $z = z(x, y)$ este funcţia implicită definită de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$.

Mai mult avem:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \text{ şi } q = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Înlocuind $A = -p,\ B = -q$ şi $C = 1$ în ecuaţia (5.2) a planului tangent obţinem ecuaţia (5.5) din enunţ.

Exemplul 5.2.3. Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Avem $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$.

Ecuaţia planului tangent la sferă în $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este:

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

Ţinând seama că $x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2$, rezultă că ecuaţia planului tangent la sferă este:

$$xx_0+yy_0+zz_0-R^2=0.$$

Ecuaţiile normalei la sferă în M_0 sunt:

$$\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{z_0}.$$

Corolarul 5.2.2. *Fie $S\subset\mathbb{R}^3$ o suprafaţă dată printr-o reprezentare explicită*

$$S=\{(x,y,f(x,y));(x,y)\in D\},$$

unde $D\subset\mathbb{R}^2$ este un domeniu mărginit şi $f\in C^1(\overline{D})$.

Ecuaţia planului tangent în $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$ la suprafaţa S este:

$$-p_0(x-x_0)-q_0(y-y_0)+(z-z_0)=0,\ \textit{unde}\ p_0=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0),\ q_0=\frac{\partial f}{\partial y}(M_0). \tag{5.7}$$

Ecuaţiile canonice ale normalei la suprafaţa S în M_0 sunt:

$$\frac{x-x_0}{-p_0}=\frac{y-y_0}{-q_0}=\frac{z-z_0}{1}. \tag{5.8}$$

Afirmaţiile rezultă imediat din Teorema 5.2.3. şi din Observaţia 5.1.1.

Exemplul 5.2.4. Să se scrie ecuaţia planului tangent şi ecuaţiile normalei în punctul $M_0(2,3,2)$ la paraboloidul eliptic $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

Avem succesiv $p=\frac{x}{2},\ q=\frac{2y}{9},\ p_0=1,\ q_0=\frac{2}{3}$.

Ecuaţia planului tangent la paraboloidul eliptic în punctul M_0 este:

$$-(x-2)-\frac{2}{3}(y-3)+z-2=0 \text{ sau } 3x+2y-3z-6=0.$$

Ecuaţiile canonice ale normalei la paraboloidul eliptic în M_0 sunt:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-3}.$$

5.3. ORIENTAREA UNEI SUPRAFEŢE

Definiţia 5.3.1. *O suprafaţă S se numeşte* ***orientabilă*** *dacă în fiecare punct M al său se poate alege un versor $\vec{n}(M)$ perpendicular pe planul tangent în M la suprafaţa S astfel încât aplicaţia $M \to \vec{n}(M): S \to \mathbb{R}^3$ să fie continuă.*

Este evident că, dacă aplicaţia $M \to \vec{n}(M): S \to \mathbb{R}^3$ este continuă, atunci şi aplicaţia $M \to -\vec{n}(M): S \to \mathbb{R}^3$ este continuă. Aşadar orice suprafaţă orientabilă are cel puţin două orientări corespunzătoare versorilor: $\vec{n}(M),\ M \in S$ şi $-\vec{n}(M),\ M \in S$.

Dacă suprafaţa S este conexă, atunci acestea sunt singurele două orientări posibile ale sale. Într-adevăr, orice altă orientare este de forma $\vec{N}(M)=\lambda(M)\vec{n}(M)$, unde λ este o funcţie continuă pe S. Cum $\vec{N}(M)$ este un versor, rezultă că

$$1=\left\|\vec{N}(M)\right\|=\left|\lambda(M)\right|\left\|\vec{n}(M)\right\|=\left|\lambda(M)\right|,$$

deci că $\lambda(M)=\pm 1$. Pe de altă parte, S fiind conexă şi $\lambda: S \to \{-1,1\}$ fiind continuă, rezultă că λ este constantă pe S, deci că $\lambda(M)=1,\ \forall M \in S$ sau $\lambda(M)=-1,\ \forall M \in S$.

Notăm cu $S_+=\left(S,\vec{n}\right)$ orientarea suprafeţei S (sau faţa suprafeţei) care corespunde aplicaţiei continue $M \to \vec{n}(M): S \to \mathbb{R}^3$ şi cu $S_-=\left(S,-\vec{n}\right)$ orientarea (faţa) corespunzătoare aplicaţiei continue $M \to -\vec{n}(M): S \to \mathbb{R}^3$.

Observaţia 5.3.1. Proprietatea aplicaţiei $M \to \vec{n}(M): S \to \mathbb{R}^3$ de a fi continuă, în cazul unei suprafeţe orientabile, este o proprietate globală care se referă la întreaga suprafaţă S. Aceasta presupune, de pildă, următoarea proprietate:

Fie $M_0 \in S$ fixat şi fie C o curbă închisă pe suprafaţa S care trece prin M_0.

Deplasând versorul $\vec{n}(M)$ pe curba C, plecând din M_0, revenim în M_0 cu aceeaşi orientare a acestuia, adică

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in C}} \vec{n}(M) = \vec{n}(M_0).$$

Exemplul 5.3.1. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ are două feţe: faţa exterioară care corespunde versorului normalei orientate spre exterior şi faţa interioară corespunzătoare versorului normalei orientate spre interior. Într-adevăr, pentru fiecare punct M situat pe sferă, versorul normalei exterioare în M este $\vec{n}(M) = \frac{1}{R} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Exemplul 5.3.2. Fie (Δ, r) o pânză parametrizată netedă şi simplă. Atunci suportul său $S = r(\Delta)$ este o suprafaţă orientabilă.

Într-adevăr, aplicaţia $M \to \vec{n}(M) : S \to \mathbb{R}^3$, unde $\vec{n}(M) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|}(M)$, este continuă pe S, fiind compunerea funcţiilor continue $r^{-1} : S \to \Delta$ (r este homeomorfism în acest caz) şi $(u,v) \to \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|}(u,v) : \Delta \to \mathbb{R}^3$.

Exemplul 5.3.3. Orice suprafaţă netedă explicită definită de funcţia de clasă C^1 $z = f(x,y), (x,y) \in D$ este orientabilă şi are două feţe: faţa superioară, care corespunde versorului normalei orientată în sus (care face un unghi ascuţit cu direcţia pozitivă a axei Oz) şi faţa inferioară care corespunde versorului normalei orientate în jos.

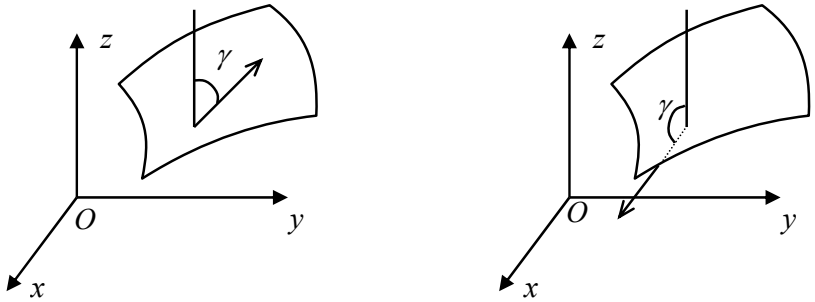


Fig. 8

Într-adevăr, o astfel de suprafaţă este un caz particular de suprafaţă parametrizată netedă şi simplă: $\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}, (x,y) \in D$.

Exemplul 5.3.4. Un exemplu clasic de suprafaţă neorientabilă (cu o singură faţă) este aşa-zisa *banda lui Möbius*. Un model al acestei suprafeţe se obţine dacă răsucim o bucată de hârtie dreptunghiulară $ABCD$ astfel încât punctul A să coincidă cu C şi punctul B cu D.

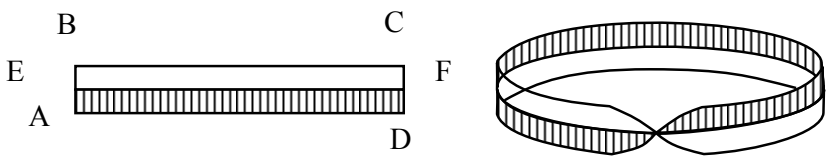


Fig. 9

Este uşor de observat că dacă deplasăm versorul normalei la suprafaţă plecând din *E* pe curba închisă corespunzătoare medianei *EF*, când revenim în *E*, orientarea versorului normalei va fi opusă orientării iniţiale a acestuia. Aşadar, nu este asigurată continuitatea globală a aplicaţiei $M \to \vec{n}(M) : S \to \mathbb{R}^3$, deci suprafaţa nu este orientabilă (în totalitatea ei). Evident, „porţiuni" ale sale sunt orientabile.

5.4. PRIMA FORMĂ FUNDAMENTALĂ A UNEI SUPRAFEŢE

O problemă importantă în geometria unei suprafeţe este calculul lungimii unui drum parametrizat regulat situat pe suprafaţă.

Fie S o suprafaţă, fie (Δ, r) o parametrizare locală a sa şi fie (I, ρ) un drum parametrizat regulat situat în $r(\Delta)$ $\big($adică $\rho(I) \subset r(\Delta)\big)$.

Din Teorema 5.2.1. rezultă că există un drum parametrizat regulat situat în $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, $\tilde{\rho}(t) = (u(t), v(t)), t \in [a,b]$ astfel încât $\rho(t) = r(\tilde{\rho}(t)), t \in [a,b]$.

Ţinând seama de regula de derivare a funcţiilor compuse avem:

$\vec{\rho}'(t) = \vec{r_u}\big(u(t), v(t)\big)u'(t) + \vec{r_v}\big(u(t), v(t)\big)v'(t)$ şi mai departe

$$\left\|\vec{\rho}'(t)\right\|^2 = \vec{\rho}'(t)\cdot\vec{\rho}'(t) = \left\|\vec{r_u}\right\|^2 u'^2(t) + 2\vec{r_u}\cdot\vec{r_v}u'(t)v'(t) + \left\|\vec{r_v}\right\|^2 v'^2(t) =$$

$$= E(t)u'^2(t) + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)v'^2(t),$$

unde am folosit notaţiile lui Gauss:

$$E = \left\|\vec{r_u}\right\|^2,\ \ F = \vec{r_u}\cdot\vec{r_v},\ \ G = \left\|\vec{r_v}\right\|^2.$$

Pe de altă parte, lungimea drumului (I, ρ) este

$$L_{\widehat{AB}} = \int_a^b \left\|\vec{\rho}'(t)\right\| dt = \int_a^b \sqrt{E(t)u'^2(t) + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)v'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

unde am notat cu $du = u'(t)dt$ şi $dv = v'(t)dt$.

Forma pătratică care apare sub radical se numeşte ***prima formă fundamentală*** a suprafeţei şi se notează cu $\Phi_{\mathbf{I}}$. Aşadar avem:

$$\Phi_{\mathbf{I}}(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{5.9}$$

Dacă notăm cu $s(t) = \int_0^t \left\|\vec{\rho}'(\xi)\right\| d\xi$, atunci

$ds(t) = \left\|\vec{\rho}'(t)\right\| dt = \left\|d\vec{\rho}(t)\right\|$ şi mai departe

$$ds^2 = \left\|d\vec{\rho}\right\|^2 = d\vec{\rho}\cdot d\vec{\rho} = \left(\vec{r_u}du + \vec{r_v}dv\right)\cdot\left(\vec{r_u}du + \vec{r_v}dv\right) =$$

$$= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \Phi_{\mathbf{I}}(du, dv).$$

Aşadar avem:

$$\Phi_{\mathbf{I}}(du, dv) = ds^2 \text{ şi } L_{\widehat{AB}} = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\Phi_{\mathbf{I}}(du, dv)}. \tag{5.10}$$

Exemplul 5.4.1. Fie suprafaţa parametrizată

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + v\vec{k},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se afle prima formă fundamentală a suprafeţei şi apoi să se calculeze lungimea drumului:

$$\Gamma : \vec{\rho}(t) = \vec{r}\big((1-t),t\big),\ t \in [0,1].$$

Avem: $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v$

$$x_u = \cos v,\ y_u = \sin v,\ z_u = 0$$

$$x_v = -u\sin v,\ y_v = u\cos v,\ z_v = 1$$

$$E = 1,\ F = 0,\ G = u^2 + 1.$$

$$\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv) = du^2 + \left(u^2+1\right)dv^2.$$

$$\tilde{\rho}(t) = (1-t)\,\vec{i} + t\,\vec{j},\ t \in I = [0,1].$$

Ecuaţiile parametrice ale drumului $\left(I,\vec{\rho}\right)$ din $\mathbb{R}^2$ sunt:

$$\begin{cases} u(t) = 1-t \\ v(t) = \quad t \end{cases},\ t \in I.$$

$$L_{\widehat{AB}} = \int_0^1 \sqrt{\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv)} = \int_0^1 \sqrt{u'^2(t) + \left(u^2(t)+1\right)v'^2(t)}\ dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2+(1-t)^2}\ dt = \int_0^1 \sqrt{2+\tau^2}\ d\tau = \frac{\tau}{2}\sqrt{2+\tau^2}\Big|_0^1 + \ln\left(\tau + \sqrt{2+\tau^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Acelaşi rezultat se poate obţine şi printr-un calcul direct.

Într-adevăr, $\Gamma : \vec{\rho}(t) = (1-t)\cos t\,\vec{i} + (1-t)\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k},\ t \in [0,1]$.

Ecuaţiile parametrice ale curbei Γ sunt:

$$x = (1-t)\cos t,\ y = (1-t)\sin t,\ z = t,\ t \in [0,1].$$

$$L_{\widehat{AB}} = \int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ dt = \int_0^1 \sqrt{2+(1-t)^2}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

În continuare ne propunem să calculăm ***unghiul dintre două curbe*** situate pe suprafaţa S. Fie drumurile Γ_1 şi Γ_2 situate pe suprafaţa S:

$$\Gamma_1 : \overrightarrow{\rho_1}(t) = \vec{r}\left(u_1(t), v_1(t)\right),\ t \in I$$

$$\Gamma_2 : \overrightarrow{\rho_2}(s) = \vec{r}\left(u_2(s), v_2(s)\right),\ s \in J.$$

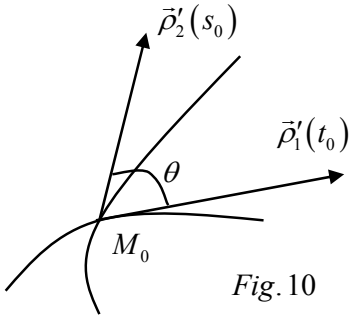


Fig. 10

Fie $t_0 \in I$ şi $s_0 \in J$ astfel încât $\overrightarrow{\rho_1}(t_0) = \overrightarrow{\rho_2}(s_0)$, $u_1(t_0) = u_2(s_0) = u_0$, $v_1(t_0) = v_2(s_0) = v_0$.

Unghiul dintre cele două curbe în punctul $M_0\left(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0)\right) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ este unghiul dintre vectorii $\vec{\rho}_1'(t_0)$ şi $\vec{\rho}_2'(s_0)$, care sunt tangenţi în M_0 la curbele Γ_1 şi Γ_2. Mai departe avem:

$$d\overrightarrow{\rho_1}(t_0) = \vec{\rho}_1'(t_0)dt = \overrightarrow{r_u}\left(u_1(t_0), v_1(t_0)\right)u_1'(t_0)dt + \overrightarrow{r_v}\left(u_1(t_0), v_1(t_0)\right)v_1'(t_0)dt =$$
$$= \overrightarrow{r_u}(u_0,v_0)du_1(t_0) + \overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)dv_1(t_0)$$

$$d\overrightarrow{\rho_2}(s_0) = \vec{\rho}_2'(s_0)ds = \overrightarrow{r_u}\left(u_2(s_0), v_2(s_0)\right)u_2'(s_0)ds + \overrightarrow{r_v}\left(u_2(s_0), v_2(s_0)\right)v_2'(s_0)ds =$$
$$= \overrightarrow{r_u}(u_0,v_0)du_2(s_0) + \overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)dv_2(s_0).$$

În continuare folosim notaţiile:

$$du = du_1(t_0),\ dv = dv_1(t_0),\ \delta u = du_2(s_0),\ \delta v = dv_2(s_0).$$

Dacă notăm cu θ unghiul dintre cele două curbe, atunci:

$$\cos\theta = \frac{d\overrightarrow{\rho_1}(t_0)\cdot d\overrightarrow{\rho_2}(s_0)}{\left\|d\overrightarrow{\rho_1}(t_0)\right\|\left\|d\overrightarrow{\rho_2}(s_0)\right\|} \text{ sau}$$

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \qquad (5.11)$$

În cazul particular al curbelor coordonate:

$\Gamma_1 : \overrightarrow{\rho_1}(t) = \vec{r}(u_0 + t, v_0)$ şi $\Gamma_2 : \overrightarrow{\rho_2}(s) = r(u_0, v_0 + s)$ avem

$$\begin{cases} u_1(t) = u_0 + t \\ v_1(t) = v_0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} u_2(s) = u_0 \\ v_2(s) = v_0 + s \end{cases} \quad \text{şi mai departe}$$

$$du = du_1(t_0) = dt,\ dv = dv_1(t_0) = 0,\ \delta u = du_2(s_0) = 0,\ \delta v = dv_2(s_0) = ds$$

$$\cos\theta = \frac{F\,dt\,ds}{\sqrt{E}\,dt\,\sqrt{G}\,ds} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{5.12}$$

Exemplul 5.4.2. Fie suprafaţa parametrizată S:

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + v\vec{k},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

şi fie curbele $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ situate în planul uOv:

$$\gamma_1 : \tilde{\rho}_1(t) = t\,\vec{i},\ \gamma_2 : \tilde{\rho}_2(s) = s\,\vec{j} \quad \text{şi}$$

$$\gamma_3 : \tilde{\rho}_3(w) = (1-w)\,\vec{i} + w\,\vec{j}.$$

Să se calculeze unghiurile dintre curbele corespunzătoare de pe suprafaţa S.

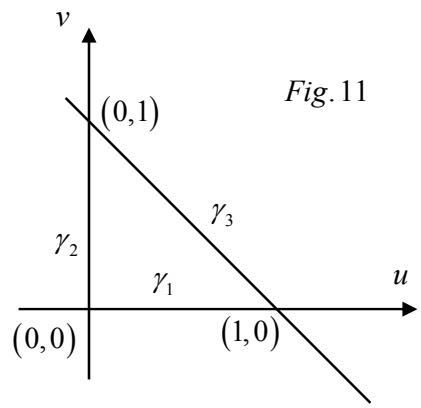


Fig. 11

Curbele corespunzătoare de pe suprafaţa S sunt:

$$\Gamma_1 : \vec{\rho}_1(t) = \vec{r}\left(\tilde{\rho}_1(t)\right) = t\,\vec{i},\ \Gamma_2 : \vec{\rho}_2(s) = \vec{r}\left(\tilde{\rho}_2(s)\right) = s\vec{k} \quad \text{şi}$$

$$\Gamma_3 : \vec{\rho}_3(w) = \vec{r}\left(\tilde{\rho}_3(w)\right) = (1-w)\cos w\,\vec{i} + (1-w)\sin w\,\vec{j} + w\,\vec{k}.$$

Dacă notăm cu: $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = O,\ \Gamma_1 \cap \Gamma_3 = M$ şi $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = N$, atunci:

$$\rho_1(0) = \rho_2(0) = r(0,0) = O(0,0,0)$$

$$\rho_1(1) = \rho_3(0) = r(1,0) = M(1,0,0)$$

$$\rho_2(1) = \rho_3(1) = r(0,1) = N(0,0,1).$$

Din Exemplul 5.4.1. ştim că $E = 1,\ F = 0$ şi $G = u^2 + 1$.

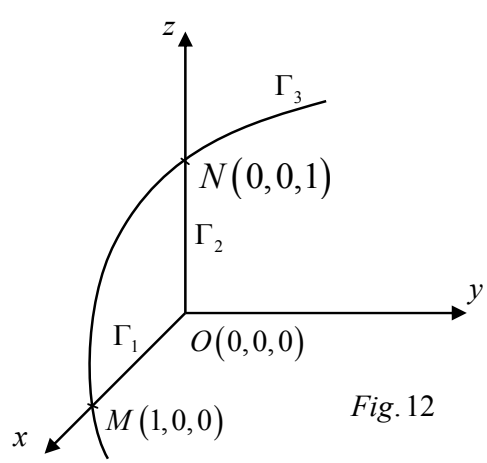


Fig. 12

Curbele Γ_1 şi Γ_2 fiind curbe coordonate, din formula (5.12) rezultă

$$\cos O = \frac{F}{\sqrt{EG}} = 0 \text{, deci } \sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sphericalangle O = \frac{\pi}{2}.$$

Ţinând seama că $G(1,0) = 2$, din (5.11) rezultă:

$$\cos M = \frac{du\,\delta u + 2dv\,\delta v}{\sqrt{du^2 + 2dv^2}\,\sqrt{\delta u^2 + 2\delta v^2}}.$$

Pe de altă parte avem:

$$u_1(t) = t,\ v_1(t) = 0,\ du = du_1(1) = dt,\ dv = dv_1(1) = 0$$

$$u_3(w) = 1 - w,\ v_3(w) = w,\ \delta u = du_3(0) = -dw,\ \delta v = dv_3(0) = dw$$

$$\cos M = \frac{-dt\,dw}{dt \cdot \sqrt{3}\,dw} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{, deci } \sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_3) = \sphericalangle M = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Cum $G(0,1) = 1$ rezultă:

$$\cos N = \frac{du\,\delta u + dv\,\delta v}{\sqrt{du^2 + dv^2}\,\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}}.$$

$$u_2(s) = 0,\ v_2(s) = s,\ du = du_2(1) = 0,\ dv = dv_2(1) = ds$$

$$u_3(w) = 1 - w,\ v_3(w) = w,\ \delta u = du_3(1) = -dw,\ \delta v = dv_3(1) = dw$$

$$\cos N = \frac{ds\,dw}{ds \cdot \sqrt{2}\,dw} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{, deci } \sphericalangle(\Gamma_2, \Gamma_3) = \sphericalangle N = \frac{\pi}{4}.$$

Acelaşi rezultat se obţine şi cu un calcul direct, anume:

$$\rho_1'(t) = (1,0,0),$$

$$\rho_2'(s) = (0,0,1),$$

$$\rho_3'(w) = \left(-\cos w - (1-w)\sin w, -\sin w + (1-w)\cos w, 1\right) \text{, deci}$$

$$\rho_3'(0) = (-1,1,1) \text{ şi } \rho_3'(1) = (-\cos 1, -\sin 1, 1).$$

Aşadar avem

$$\cos O = \frac{\vec{\rho}_1'(0)\cdot\vec{\rho}_2'(0)}{\|\vec{\rho}_1'(0)\|\,\|\vec{\rho}_2'(0)\|} = 0$$

$$\cos M = \frac{\vec{\rho}_1'(1)\cdot\vec{\rho}_3'(0)}{\|\vec{\rho}_1'(1)\|\,\|\vec{\rho}_3'(0)\|} = \frac{-1}{1\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos N = \frac{\vec{\rho}_2'(1)\cdot\vec{\rho}_3'(1)}{\|\vec{\rho}_2'(1)\|\,\|\vec{\rho}_3'(1)\|} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5.5. A DOUA FORMĂ FUNDAMENTALĂ A UNEI SUPRAFEŢE

Fie S o suprafaţă orientabilă, $P_0 \in S$ şi (Δ, r) o parametrizare locală a sa.

Presupunem că $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$ sunt coordonatele punctului P_0.

Fie de asemenea (I, ρ) un drum parametrizat regulat de clasă C^2, situat în $r(\Delta)$, cu proprietatea că suportul său γ trece prin punctul P_0. Din Teorema 5.2.1. rezultă că există un drum parametrizat regulat situat în Δ, de ecuaţii parametrice $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in J$ astfel încât $\rho(t) = r(u(t), v(t))$, $t \in J$.

Notăm cu $\vec{\tau}_0$ versorul tangentei în P_0 la curba γ şi cu $\vec{n}_0$ versorul normalei în P_0 la suprafaţa S.

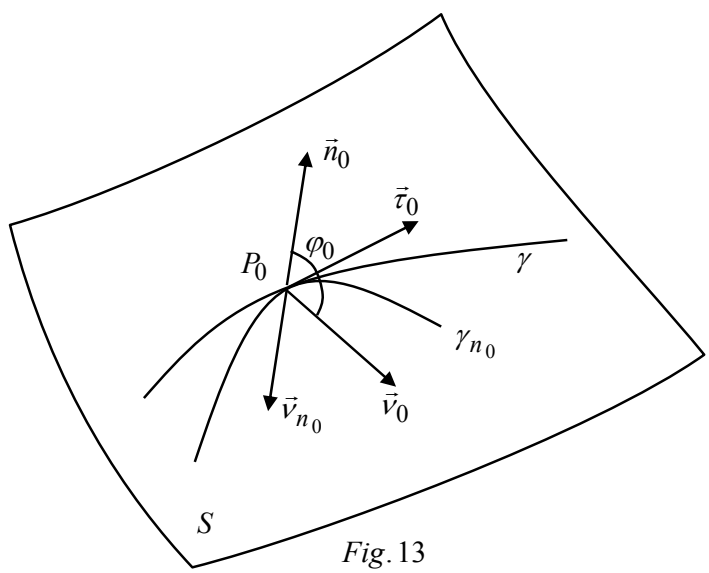


Fig. 13

Dacă $\rho_1(s) = \rho(u(s), v(s))$, $s \in [0, L]$ este reprezentarea normală a curbei γ, atunci versorul tangentei într-un punct oarecare al curbei γ este:

$$\vec{\tau}(s)=\frac{d\vec{\rho}_1}{ds}=\vec{r}_u\big(u(s),v(s)\big)\frac{du}{ds}+\vec{r}_v\big(u(s),v(s)\big)\frac{dv}{ds}, \tag{5.13}$$

iar

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_0=\vec{\tau}(0)&=\vec{r}_u\big(u(0),v(0)\big)u'(0)+\vec{r}_v\big(u(0),v(0)\big)v'(0)=\\&=\vec{r}_u(u_0,v_0)u'(0)+\vec{r}_v(u_0,v_0)v'(0).\end{aligned}$$

Pe de altă parte, din prima formulă a lui Frenet avem: $\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k_1\vec{\nu}$, unde k_1 este curbura curbei γ, iar $\vec{\nu}$ este versorul normalei principale într-un punct curent P al curbei γ.

Derivând relaţia (5.13) obţinem:

$$\begin{aligned}k_1\vec{\nu}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}&=\left(\vec{r}_{uu}\frac{du}{ds}+\vec{r}_{uv}\frac{dv}{ds}\right)\frac{du}{ds}+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\left(\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}+\vec{r}_{vv}\frac{dv}{ds}\right)\frac{dv}{ds}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}=\\&=\vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Precizăm că toate derivatele parţiale ale lui $\vec{r}$ sunt calculate în $\big(u(s),v(s)\big)$, deci $\vec{r}_{uu}=\vec{r}_{uu}\big(u(s),v(s)\big)$, etc.

Fie $(k_1)_0$ curbura curbei γ în P_0, $\vec{\nu}_0$ versorul normalei principale a curbei γ în P_0 şi φ_0 unghiul dintre $\vec{n}_0$ şi $\vec{\nu}_0$.

Atunci:

$$(k_1)_0\cos\varphi_0=(k_1)_0\,\vec{\nu}_0\cdot\vec{n}_0=\vec{n}_0\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}(0). \tag{5.15}$$

Cum $\vec{n}_0$ este perpendicular pe vectorii $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ şi $\vec{r}_v(u_0,v_0)$, din (5.14) şi (5.15) obţinem:

$$(k_1)_0\cos\varphi_0=\vec{n}_0\cdot\vec{r}_{uu}(u_0,v_0)u'(0)^2+2\vec{n}_0\cdot\vec{r}_{uv}(u_0,v_0)u'(0)v'(0)+\vec{n}_0\cdot\vec{r}_{vv}(u_0,v_0)v'(0)^2.$$

Notăm cu

$$L=\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu}(u,v),\ M=\vec{n}\cdot\vec{r}_{uv}(u,v),\ N=\vec{n}\cdot\vec{r}_{vv}(u,v)$$

şi cu

$$L_0 = \overrightarrow{n_0} \cdot \vec{r}_{uu}(u_0, v_0),\ M_0 = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_{uv}(u_0, v_0),\ N_0 = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_{vv}(u_0, v_0).$$

Dacă R_0 este raza de curbură a curbei γ în P_0, atunci

$$\frac{\cos\varphi_0}{R_0} = \frac{L_0\, du^2 + 2M_0\, du dv + N_0\, dv^2}{ds^2}, \text{ unde}$$

$du = u'(0)\, ds$ şi $dv = v'(0)\, ds$.

Definiţia 5.5.1. *Se numeşte* ***forma a doua fundamentală*** *a suprafeţei* S *şi se notează cu* $\Phi_{\mathbf{II}}$ *următoarea formă pătratică*:

$$\Phi_{\mathbf{II}}(du, dv) = L\, du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

Cum $ds^2 = \Phi_{\mathbf{I}}(du, dv)$, în continuare avem

$$\frac{\cos\varphi_0}{R_0} = \frac{L_0 du^2 + 2M_0 du dv + N_0 dv^2}{E_0 du^2 + 2F_0 du dv + G_0 dv^2} = \frac{\Phi_{\mathbf{II}}(du, dv)_0}{\Phi_{\mathbf{I}}(du, dv)_0}. \tag{5.16}$$

Observăm că membrul drept al egalităţii (5.16) depinde numai de $\vec{\tau}_0$. Într-adevăr, dacă notăm cu

$$\begin{aligned} d\vec{r}(u_0, v_0) &= \vec{\tau}_0 ds = \vec{r}_u(u_0, v_0) u'(0) ds + \vec{r}_v(u_0, v_0) v'(0) ds = \\ &= \vec{r}_u(u_0, v_0) du + \vec{r}_v(u_0, v_0) dv, \end{aligned}$$

atunci (du, dv) sunt coordonatele vectorului $d\vec{r}(u_0, v_0)$ în raport cu baza $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ din spaţiul $T_{P_0}S$ – spaţiul tangent în P_0 la S.

Cum membrul drept al egalităţii (5.16) depinde numai de coordonatele (du, dv), rezultă că acesta depinde de $d\vec{r}(u_0, v_0)$ care este colinear cu $\vec{\tau}_0$, deci depinde de $\vec{\tau}_0$.

Aşadar pentru toate curbele de pe suprafaţa S care sunt tangente în P_0 la $\vec{\tau}_0$, raportul $\dfrac{\Phi_{\mathbf{II}}(du, dv)_0}{\Phi_{\mathbf{I}}(du, dv)_0}$ este constant. Vom nota această constantă cu $(k_n)_0$.

(Precizăm că toţi coeficienţii celor două forme pătratice sunt calculaţi în (u_0, v_0)).

Printre curbele de pe suprafaţa S tangente în P_0 la $\vec{\tau}_0$ se află şi curba γ_{n_0}, care reprezintă intersecţia dintre suprafaţa S şi planul determinat de $\vec{n}_0$ şi $\vec{\tau}_0$.

Această curbă este evident o curbă plană şi poartă numele de secţiunea normală a suprafeţei S în P_0 asociată direcţiei versorului $\vec{\tau}_0$.

Pe de altă parte, versorul $\vec{\nu}_{n_0}$ al normalei principale în P_0 la γ_{n_0} este colinear cu $\vec{n}_0$, deci unghiul dintre cei doi versori este 0 sau π.

Rezultă că:

$$\pm\frac{1}{R_{n_0}}=\frac{\Phi_{\mathbf{II}}(du,dv)_0}{\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv)_0},$$

unde cu R_{n_0} am notat raza de curbură a secţiunii normale γ_{n_0} în P_0.

În general, pentru orice punct $P\big(x(u(s),v(s)),y(u(s),v(s)),z(u(s),v(s))\big)\in S$ şi orice vector tangent în P la S, $d\vec{r}(u(s),v(s))=\vec{r}_u(u(s),v(s))du+\vec{r}_v(u(s),v(s))dv$, unde $du=u'(s)ds,\ dv=v'(s)ds$, raportul $\dfrac{\Phi_{\mathbf{II}}(du,dv)}{\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv)}$ este constant. Acest raport se notează cu k_n şi se numeşte ***curbura normală*** în P la suprafaţa S corespunzătoare direcţiei (du,dv).

Aşadar avem:

$$k_n=\frac{\Phi_{\mathbf{II}}(du,dv)}{\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv)}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{5.17}$$

Definiţia 5.5.2. *Curba de intersecţie dintre suprafaţa S şi planul determinat de versorul $\vec{n}$ al normalei în P la S şi de vectorul $d\vec{r}$ se numeşte* ***secţiunea normală*** *în P la suprafaţa S corespunzătoare direcţiei (du,dv). Această curbă este plană şi se notează cu γ_n. Dacă R_n este raza de curbură a curbei γ_n în P, atunci:*

$$\pm\frac{1}{R_n}=\frac{\Phi_{\mathbf{II}}(du,dv)}{\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv)}. \tag{5.18}$$

Observaţia 5.5.1. Fie γ o curbă pe suprafaţa S tangentă în P la $d\vec{r} = d\vec{r}(du, dv)$. Dacă notăm cu φ unghiul dintre versorul $\vec{\nu}$ al normalei principale în P la γ şi versorul $\vec{n}$ al normalei în P la suprafaţa S şi cu R raza de curbură a curbei γ în P, atunci

$$\frac{\cos\varphi}{R} = \pm\frac{1}{R_n} = \frac{\Phi_{\mathrm{II}}(du, dv)}{\Phi_{\mathrm{I}}(du, dv)}. \tag{5.19}$$

Relaţia (5.19) mai este cunoscută şi sub numele de ***teorema lui Meusnier***.

Observaţia 5.5.2. Derivând relaţiile $\vec{n}\cdot\vec{r}_u = 0$ şi $\vec{n}\cdot\vec{r}_v = 0$ rezultă:

$$L = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uu} = -\vec{n}_u\cdot\vec{r}_u$$

$$M = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uv} = -\vec{n}_u\cdot\vec{r}_v = -\vec{n}_v\cdot\vec{r}_u$$

$N = \vec{n}\cdot\vec{r}_{vv} = -\vec{n}_v\cdot\vec{r}_v$ şi mai departe

$$\Phi_{\mathrm{II}}(du, dv) = -d\vec{n}\cdot d\vec{r}. \tag{5.20}$$

Exemplul 5.5.1. Fie sfera închisă S:

$$\vec{r}(u,v) = R\sin u\cos v\,\vec{i} + R\sin u\sin v\,\vec{j} + R\cos u\,\vec{k},\ (u,v)\in\Delta = [0,\pi]\times[0,2\pi].$$

Să se afle raza de curbură R^* a unui cerc mare γ situat pe S, într-un punct oarecare $P\in\gamma$.

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R\sin u\cos v \\ y = R\sin u\sin v \\ z = R\cos u. \end{cases}$$

Calculând derivatele obţinem:

$$\begin{aligned} x_u &= R\cos u\cos v & x_v &= -R\sin u\sin v \\ y_u &= R\cos u\sin v & y_v &= R\sin u\cos v \\ z_u &= -R\sin u & z_v &= 0 \end{aligned}$$

$E = R^2,\ F = 0,\ G = R^2\sin^2 u$.

$$x_{uu} = -R\sin u\cos v \qquad x_{uv} = -R\cos u\sin v \qquad x_{vv} = -R\sin u\cos v$$

$$y_{uu} = -R\sin u \sin v \qquad y_{uv} = R\cos u \cos v \qquad y_{vv} = -R\sin u \sin v$$
$$z_{uu} = -R\cos u \qquad z_{uv} = 0 \qquad z_{vv} = 0$$

$$L = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uu} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|}\cdot\vec{r}_{uu} = \frac{\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}\right)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

În continuare avem:

$$\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}\right) = \begin{vmatrix} R\cos u\cos v & R\cos u\sin v & -R\sin u \\ -R\sin u\sin v & R\sin u\cos v & 0 \\ -R\sin u\cos v & -R\sin u\sin v & -R\cos u \end{vmatrix} = -R^3\sin u.$$

Cum $EG-F^2 = R^4\sin^2 u$, rezultă că $L = -R$.

În mod analog avem:

$$M = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uv} = \frac{\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uv}\right)}{\sqrt{EG-F^2}} = 0 \text{ şi}$$

$$N = \vec{n}\cdot\vec{r}_{vv} = \frac{\left(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{vv}\right)}{\sqrt{EG-F^2}} = -R\sin^2 u.$$

Un cerc mare pe sferă se obţine intersectând sfera cu un plan care trece prin origine. Fie γ un cerc mare pe sferă şi fie $P \in \gamma$ un punct oarecare.

Versorul normalei în P la sferă este, evident, colinear cu versorul normalei principale în P la γ, dar au orientări opuse. Rezultă că:

$\varphi = \sphericalangle\left(\vec{n}, \vec{\nu}\right) = \pi$ şi mai departe

$$-\frac{1}{R^*} = \frac{\Phi_{\mathrm{II}}\left(du, dv\right)}{\Phi_{\mathrm{I}}\left(du, dv\right)} = \frac{-Rdu^2 - R\sin^2 u\, dv^2}{R^2du^2 + R^2\sin^2 u\, dv^2} = -\frac{1}{R}.$$

Aşadar $R^* = R$.

5.6. TEOREMA LUI EULER. CURBURI PRINCIPALE. DIRECŢII PRINCIPALE

Fie φ şi ψ două forme pătratice pe $\mathbb{R}^n$. Presupunem, în plus, că una dintre ele, de exemplu ψ, este pozitiv definită. Se ştie că în acest caz există o bază ortonormată $v_1, v_2, ..., v_n$ în $\mathbb{R}^n$ în raport cu care cele două forme pătratice se reduc simultan la forma canonică. Mai precis, dacă notăm cu $y_1, y_2, ..., y_n$ coordonatele unui punct oarecare în raport cu această bază, atunci:

$\varphi(x) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$ şi

$\psi(x) = y_1^2 + ... + y_n^2$, unde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sunt soluţiile ecuaţiei:

$\det(A - \lambda B) = 0$,

iar A şi B sunt matricele formelor pătratice φ, respectiv ψ în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^n$ (vezi, de exemplu, [9], pag. 214). Precizăm că λ_i se numesc valori proprii generalizate, iar v_i vectori proprii generalizaţi $\left(Av_i = \lambda_i B v_i,\ i = \overline{1,n}\right)$.

Vom aplica acest rezultat pentru formele pătratice $\Phi_{\mathbf{I}}$ şi $\Phi_{\mathbf{II}}$.

Fie $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ un vector oarecare din spaţiul $T_P S$ – spaţiul tangent în punctul P la suprafaţa S.

Evident du şi dv sunt coordonatele vectorului $d\vec{r}$ în raport cu baza $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ din spaţiul $T_P S$.

$$\Phi_{\mathbf{I}}(du, dv) = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$\Phi_{\mathbf{II}}(du, dv) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Matricele asociate celor două forme pătratice în raport cu baza canonică $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ sunt $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, respectiv $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$. În plus, $\Phi_{\mathbf{I}}$ este pozitiv definită.

Conform rezultatului de algebră liniară amintit mai sus, există o nouă bază ortonormată $\{\vec{t}_1, \vec{t}_2\}$ în spaţiu $T_P S$ cu proprietatea că oricare ar fi $\vec{t} = \xi_1 \vec{t}_1 + \xi_2 \vec{t}_2$ avem:

$\Phi_{\mathbf{I}}(\vec{t}) = \xi_1^2 + \xi_2^2$ şi

$\Phi_{\mathbf{II}}(\vec{t}) = k_1\,\xi_1^2 + k_2\,\xi_2^2$, unde k_1 şi k_2 sunt rădăcinile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{vmatrix} = 0. \tag{5.21}$$

Din Teorema Meusnier (relaţia (5.19)) rezultă:

$$k_n = \frac{\Phi_{\mathbf{II}}(\xi_1,\xi_2)}{\Phi_{\mathbf{I}}(\xi_1,\xi_2)} = k_1\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2} + k_2\frac{\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

Cum $0 \le \dfrac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2} \le 1$, există $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ astfel încât

$$\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2} = \cos^2\theta \text{ şi } \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2} = \sin^2\theta.$$

Am obţinut următorul rezultat

$$k_n = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta,\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tag{5.22}$$

unde k_n este curbura normală într-un punct $P \in S$ corespunzătoare direcţiei (du, dv).

Relaţia (5.22) este cunoscută sub numele de ***teorema lui Euler***.

Din Teorema lui Euler rezultă că valorile k_1 şi k_2 sunt valorile extreme (valoarea maximă, respectiv minimă) a curburii normale k_n.

Într-adevăr, dacă $k_1 = k_2$, atunci curbura normală k_n nu depinde de θ, deci este constantă, indiferent de direcţia (du, dv). Evident, această valoare constantă $(k_1 = k_2 = \text{ct})$ poate fi privită ca valoare extremă. Un astfel de punct al suprafeţei (în care $k_1 = k_2$) se numeşte ***punct ombilical***.

Dacă $k_1 \ne k_2$, putem considera $k_1 > k_2$ şi relaţia (5.22) devine:

$k_n = (k_1 - k_2)\cos^2\theta + k_2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$ sau

$$k_n = (k_1 - k_2)\cos^2\theta + k_2. \tag{5.23}$$

Valoarea maximă se obţine pentru $\theta = 0$, deci

$$(k_n)_{\max} = k_1,$$

iar valoarea minimă pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, deci

$$(k_n)_{\min} = k_2.$$

Definiţia 5.6.1. *Fie $P \in S$ un punct care nu este ombilical. Valorile proprii k_1 şi k_2 (soluţiile ecuaţiei caracteristice* (5.21)) *se numesc* ***curburile principale*** *ale suprafeţei S în punctul P. Direcţiile din planul tangent în P la suprafaţa S care corespund vectorilor proprii asociaţi valorilor proprii k_1 şi k_2 se numesc* ***direcţii principale****.*

Exemplul 5.6.1. Să se afle curburile principale şi direcţiile principale într-un punct curent P al suprafeţei:

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + av\vec{k},\ a > 0.$$

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av.$$

Derivând obţinem:

$$x_u = \cos v \qquad y_u = \sin v \qquad z_u = 0$$
$$x_v = -u\sin v \qquad y_v = u\cos v \qquad z_v = a.$$

$$E = 1,\ F = 0,\ G = u^2 + a^2,\ EG - F^2 = u^2 + a^2.$$

$$\vec{r}_u = \cos v\,\vec{i} + \sin v\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_v = -u\sin v\,\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} + a\vec{k}.$$

Cum $F = 0$, rezultă că $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sunt ortogonali. Aşadar $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ formează o bază ortogonală în spaţiul tangent $T_P S$.

$$\Phi_{\mathrm{I}}(du, dv) = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Matricea asociată primei forme fundamentale în raport cu baza $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ este

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}.$$

Derivatele parţiale de ordinul doi sunt:

$$\begin{array}{lll} x_{uu} = 0 & y_{uu} = 0 & z_{uu} = 0 \\ x_{uv} = -\sin v & y_{uv} = \cos v & z_{uv} = 0 \\ x_{vv} = -u\cos v & y_{vv} = -u\sin v & z_{vv} = 0. \\ L = 0 & M = -\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & N = 0 \end{array}$$

$$\Phi_{\mathrm{II}}(du, dv) = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} du dv .$$

Matricea asociată formei a doua fundamentale în raport cu baza $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia din care se găsesc curburile principale este:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & -\lambda\left(u^2 + a^2\right) \end{vmatrix} = 0 .$$

Curburile principale sunt:

$$k_1 = \frac{a}{u^2 + a^2} \text{ şi } k_2 = \frac{-a}{u^2 + a^2}.$$

Direcţiile principale sunt direcţiile vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii k_1 şi k_2.

Pentru $k_1 = \dfrac{a}{u^2 + a^2}$ obţinem spaţiul propriu:

$$V_1 = \left\{ \left(-\sqrt{u^2 + a^2}\,\alpha,\ \alpha \right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Putem alege vectorul propriu $\left(\sqrt{u^2 + a^2}, -1 \right)$. Direcţia principală corespunzătoare este:

$$\vec{t}_1 = \sqrt{u^2 + a^2}\,\vec{r}_u - \vec{r}_v = \left(\sqrt{u^2 + a^2}\cos v + u \sin v \right)\vec{i} + \left(\sqrt{u^2 + a^2}\sin v - u\cos v \right)\vec{j} - a\vec{k}\,.$$

În mod analog, pentru $k_2 = -\dfrac{a}{u^2 + a^2}$ se obţine subspaţiul propriu

$V_2 = \left\{ \left(\sqrt{u^2 + a^2}\,\alpha, \alpha \right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Pentru $\alpha = 1$ obţinem direcţia principală

$$\vec{t}_2 = \sqrt{u^2 + a^2}\,\vec{r}_u + \vec{r}_v = \left(\sqrt{u^2 + a^2}\cos v - u \sin v \right)\vec{i} + \left(\sqrt{u^2 + a^2}\sin v + u\cos v \right)\vec{j} + a\vec{k}.$$

Observăm că cele două direcţii principale sunt ortogonale:

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = \left(u^2 + a^2 \right)\cos^2 v - u^2 \sin^2 v + \left(u^2 + a^2 \right)\sin^2 v - u^2 \cos^2 v - a^2 = 0\,.$$

5.7. CURBURA TOTALĂ. CURBURA MEDIE. CLASIFICAREA PUNCTELOR UNEI SUPRAFEŢE

În teoria suprafeţelor un rol important îl joacă noţiunile de curbură totală (curbura lui Gauss) şi curbură medie.

Definiţia 5.7.1. *Se numeşte* ***curbura totală*** *în punctul P al suprafeţei S şi se notează cu K produsul curburilor principale. Aşadar curbura totală este*:

$$K = k_1 k_2\,.$$

Se numeşte ***curbura medie*** *în punctul P al suprafeţei S şi se notează cu H media aritmetică a curburilor principale. Aşadar curbura medie este*:

$$H = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2 \right).$$

Ecuaţia (5.21) care ne dă curburile principale k_1 şi k_2 se mai scrie:

$$\left(EG-F^2\right)\lambda^2-\left(LG-2FM+EN\right)\lambda+LN-M^2=0. \tag{5.24}$$

Rezultă următoarele expresii pentru K şi H:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}. \tag{5.25}$$

$$H=\frac{1}{2}\cdot\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}. \tag{5.26}$$

Clasificarea punctelor pe o suprafaţă se face în funcţie de curbura totală.

Pentru a înţelege acest lucru să considerăm o suprafaţă parametrizată netedă S, de clasă C^2: $\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in\Delta$.

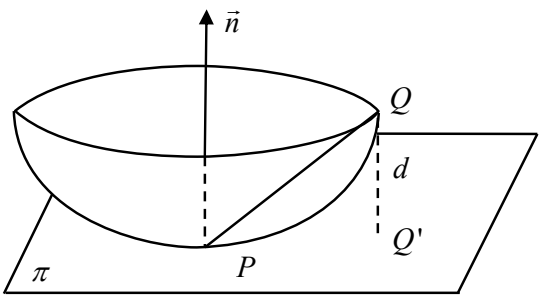


Fig. 14

Fie P un punct de pe suprafaţa S având vectorul de poziţia $\overrightarrow{OP}=\vec{r}(u,v)$.

Fie $\vec{n}$ versorul normalei în P la suprafaţa S şi fie $Q\in S$ de vector de poziţie $\overrightarrow{OQ}=\vec{r}(u+h,v+k)$.

Evident avem $\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(u+h,v+k)-\vec{r}(u,v)$.

Dacă notăm cu d distanţa orientată punctului Q faţă de planul π – planul tangent în P la S, atunci

$$d=\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}. \tag{5.27}$$

Pe de altă parte, din formula Taylor avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\vec{r}(u+h,v+k)-\vec{r}(u,v)=\\&=d\vec{r}(u,v)(h,k)+\frac{1}{2}d^2\vec{r}(u,v)(h,k)+\vec{R}_2.\end{aligned} \tag{5.28}$$

Înlocuind (5.28) în (5.27) rezultă:

$$d=\vec{n}\cdot d\vec{r}(P)(h,k)+\frac{1}{2}\vec{n}\cdot d^2\vec{r}(P)(h,k)+\vec{n}\cdot\vec{R}_2.$$

Cum $\vec{n}$ este ortogonal pe $d\vec{r}(P)$, mai departe avem:

$$d = \frac{1}{2}\vec{n} \cdot d^2\vec{r}(P)(h,k) + \vec{n} \cdot \vec{R}_2 .$$

În sfârşit, ţinând seama de definiţia formei a doua fundamentală şi de faptul că $\vec{n} \cdot \vec{R}_2$ este un infinit mic de ordinul 2, obţinem:

$$d = \frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{II}}(P)(h,k) + \theta(\rho^2), \tag{5.29}$$

unde $\rho^2 = h^2 + k^2$.

($\Phi_{\mathrm{II}}(P)$ semnifică faptul că $L, M, N -$coeficienţii formei a doua fundamentală sunt calculaţi în punctul P, iar $\theta(\rho^2)$ semnifică faptul că $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\theta(\rho^2)}{\rho^2} = 0$).

Matricea asociată formei pătratice $\Phi_{\mathrm{II}}(P)$ este $A = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$, iar determinanţii lui Sylvester sunt $\Delta_1 = L$ şi $\Delta_2 = LN - M^2$.

Distingem următoarele cazuri:

Cazul 1: $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} > 0$. Cum $EG - F^2 > 0$, rezultă că acest caz este echivalent cu faptul că $\Delta_2 = LN - M^2 > 0$, deci cu faptul că forma pătratică Φ_{II} este definită.

Dacă $L > 0$, atunci Φ_{II} este pozitiv definită, iar dacă $L < 0$, atunci Φ_{II} este negativ definită.

În ambele situaţii, există o vecinătate V a originii $(0,0)$ astfel încât pentru orice $(h,k) \in V$, d are acelaşi semn cu $\Phi_{\mathrm{II}}(P)(h,k)$.

Aşadar, dacă $\Phi_{\mathrm{II}}(P)$ este pozitiv definită, atunci $d > 0$, deci, local, planul tangent π se află dedesubtul suprafeţei S, iar dacă $\Phi_{\mathrm{II}}(P)$ este negativ definită, atunci $d < 0$ deci, local, planul tangent se află deasupra suprafeţei S.

Un astfel de punct P de pe suprafaţa S se numeşte ***de tip eliptic*** şi este caracterizat de faptul că, în vecinătatea sa, suprafaţa se află de aceeaşi parte a planului tangent în P la S.

Cele două situaţii sunt ilustrate în Figurile 15 şi 16.

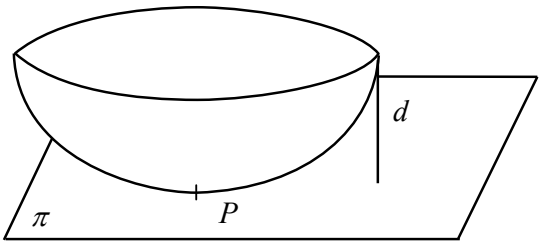


Fig. 15

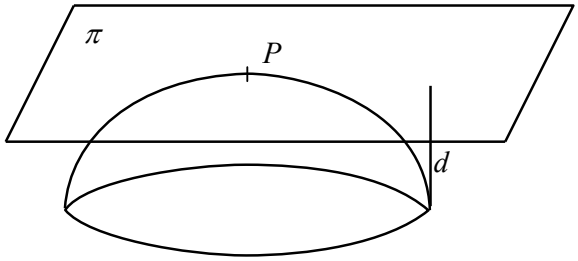


Fig. 16

Sfera, elipsoidul, paraboloidul eliptic sunt exemple de suprafeţe care au toate punctele de tip eliptic.

Cazul 2: $K < 0$. Această condiţie este echivalentă cu faptul că $LN - M^2 < 0$. În acest caz forma pătratică $\Phi_{\mathrm{II}}(P)$ este alternantă, de unde rezultă că în orice vecinătate V a originii $(0,0)$, există puncte (h',k') pentru care $\Phi_{\mathrm{II}}(P)(h',k') > 0$ şi există puncte (h'',k'') pentru care $\Phi_{\mathrm{II}}(P)(h'',k'') < 0$.

Din punct de vedere geometric, aceasta revine la faptul că în orice vecinătate a punctului P se află puncte pe suprafaţă sub planul tangent şi puncte pe suprafaţă deasupra planului tangent. Un astfel de punct se numeşte ***de tip hiperbolic***.

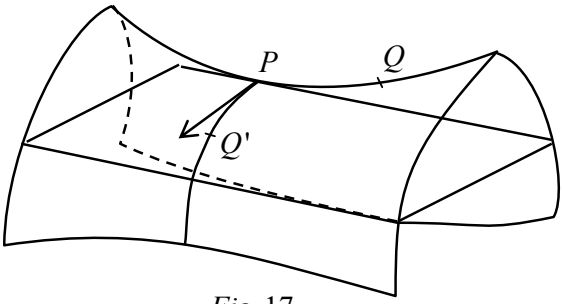


Fig. 17

Paraboloidul hiperbolic şi hiperboloidul cu o pânză sunt exemplele cele mai cunoscute de suprafeţe ale căror puncte sunt de tip hiperbolic.

În Figura 17, punctul Q este deasupra planului tangent în P la S, iar punctul Q' este sub acest plan.

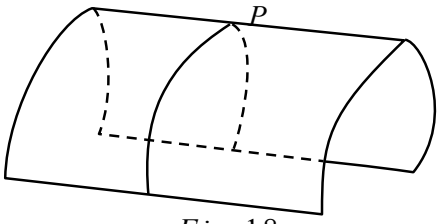


Fig. 18

Cazul 3: $K = 0$. Cum $K = k_1 k_2$ rezultă că cel puţin una din curburile principale este 0.

Punctul $P \in S$ se numeşte ***de tip parabolic***

dacă una din curburile principale este zero şi cealaltă este diferită de zero ($k_1 = 0, k_2 \neq 0$).

Deoarece $k_1 = 0$ rezultă că secţiunea normală corespunzătoare este o dreaptă. Aşadar, prin punctul P trece o dreaptă situată pe suprafaţă. Cealaltă secţiune normală, corespunzătoare celei de a doua direcţii principale, nu mai este o dreaptă.

Un exemplu de punct de tip parabolic este un punct oarecare de pe un cilindru circular (Figura 18).

O altă posibilitate este $k_1 = 0$ şi $k_2 = 0$. În acest caz orice secţiune normală are curbura zero, deci este o dreaptă. Un astfel de punct se numeşte ***de tip planar***. Orice punct al unui plan este un punct de tip planar.

5.8. LINII ASIMPTOTICE

Definiţia 5.8.1. *Fie S o suprafaţă orientabilă,* $P \in S$ *şi* $\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in \Delta$ *o parametrizare locală a sa.*

Presupunem, în plus, că $r \in C^2(\Delta)$. *O direcţie* (*un vector din spaţiul tangent în* P *la S*) $\vec{t} = d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ *se numeşte* ***direcţie asimptotică*** *în punctul* $P \in S$ *dacă curbura normală corespunzătoare acestei direcţii este egală cu zero.*

O curbă pe suprafaţa S *se numeşte* ***linie asimptotică*** *dacă tangenta în orice punct al său este o direcţie asimptotică.*

Ţinând seama de expresia curburii normale (5.17) rezultă că o curbă de pe suprafaţa S este linie asimptotică dacă în fiecare punct al său avem:

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N dv^2 = 0\,. \tag{5.30}$$

Ecuaţia diferenţială (5.30) se mai scrie:

$$L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N = 0\,. \tag{5.31}$$

Dacă $P \in S$ este un punct hiperbolic $\left(LN - M^2 < 0\right)$ atunci ecuaţia (5.31) are două familii de soluţii. Rezultă că dacă punctele unei suprafeţe sunt toate de tip hiperbolic, atunci

prin fiecare punct al său trec două linii asimptotice, deci o astfel de suprafaţă este acoperită de două familii de linii asimptotice.

Printr-un punct al suprafeţei de tip parabolic trece o singură linie asimptotică, iar printr-un punct de tip eliptic nu trece nici o linie asimptotică.

Într-un punct planar, orice direcţie este asimptotică.

Exemplul 5.8.1. Să se afle liniile asimptotice ale suprafeţei S:

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + \frac{1}{u}\,\vec{k},\ u>0, v\in\mathbb{R}.$$

Ecuaţiile parametrice sunt:

$$x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = \frac{1}{u}.$$

Prin derivare obţinem:

$$\begin{array}{lll}
x_u = \cos v & y_u = \sin v & z_u = -\dfrac{1}{u^2} \\
x_v = -u\sin v & y_v = u\cos v & z_v = 0 \\
x_{uu} = 0 & y_{uu} = 0 & z_{uu} = \dfrac{2}{u^3} \\
x_{uv} = -\sin v & y_{uv} = \cos v & z_{uv} = 0 \\
x_{vv} = -u\cos v & y_{vv} = -u\sin v & z_{vv} = 0.
\end{array}$$

$$L = \frac{\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & -\dfrac{1}{u^2} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{u^3} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{2}{u^2\sqrt{EG-F^2}}$$

$$M = \frac{\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & -\dfrac{1}{u^2} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} = 0$$

$$N=\frac{\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & -\dfrac{1}{u^2} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \\ -u\cos v & -u\sin v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Ecuaţia diferenţială (5.31) devine

$$\frac{2}{u^2\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{du}{dv}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}=0\text{, deci}$$

$$\frac{du}{dv}=\pm\frac{u}{\sqrt{2}}\ \text{şi mai departe}$$

$$\frac{du}{u}=\frac{dv}{\sqrt{2}}\Rightarrow \ln u=\frac{v}{\sqrt{2}}+\ln C_1\Rightarrow u=C_1e^{\frac{v}{\sqrt{2}}} \qquad \text{sau}$$

$$\frac{du}{u}=-\frac{dv}{\sqrt{2}}\Rightarrow \ln u=-\frac{v}{\sqrt{2}}+\ln C_2\Rightarrow u=C_2e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}}.$$

Cele două familii de linii asimptotice sunt:

$u=C_1e^{\frac{v}{\sqrt{2}}}$, respectiv $u=C_2e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}}$, cu $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

5.9. LINII DE CURBURĂ

Reamintim că expresia curburii normale într-un punct P al suprafeţei S este:

$$k_n=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{5.32}$$

Cum coeficienţii L,M,N,E,F,G sunt calculaţi în punctul P, deci sunt constante reale, rezultă că membrul drept depinde de direcţia $\vec{t}=\vec{r}_u\,du+\vec{r}_v\,dv$ din spaţiul tangent în P la S (spaţiul T_PS).

Aşadar k_n este o funcţie de două variabile du şi dv.

Dacă notăm cu $\xi=du$ şi $\eta=dv$, atunci

$$k_n(\xi,\eta)=\frac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2},\ \xi^2+\eta^2\neq 0. \tag{5.33}$$

Curburile principale k_1 şi k_2, adică valorile extreme ale curburii normale k_n, se află rezolvând ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0. \tag{5.34}$$

Definiţia 5.9.1. *Prin* ***direcţia principală*** *în punctul P la suprafaţa S se înţelege o direcţie $t=(\xi,\eta)$ pentru care curbura normală k_n este extremă* (*maximă sau minimă*).

Din această definiţie rezultă că dacă (ξ_0,η_0) este o direcţie principală, atunci (ξ_0,η_0) este un punct critic pentru k_n, deci este o soluţie a sistemului:

$$\frac{\partial k_n}{\partial\xi}=0,\ \frac{\partial k_n}{\partial\eta}=0. \tag{5.35}$$

Pe de altă parte avem:

$$\frac{\partial k_n}{\partial\xi}=2\eta\frac{(FL-EM)\xi^2+(GL-EN)\xi\eta+(GM-FN)\eta^2}{\left(E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial k_n}{\partial\eta}=2\xi\frac{(EM-FL)\xi^2+(EN-GL)\xi\eta+(FN-GM)\eta^2}{\left(E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2\right)^2}.$$

Aşadar orice direcţie principală (ξ_0,η_0) verifică ecuaţia

$$(FL-EM)\xi^2+(GL-EN)\xi\eta+(GM-FN)\eta^2=0.$$

Observăm că această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} \eta^2 & -\xi\eta & \xi^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0.$$

Cum $\xi=du$ şi $\eta=dv$ mai departe avem:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.36)$$

Ecuaţia (5.36) poartă numele de ***ecuaţia direcţiilor principale***.

Definiţia 5.9.2. *Se numesc* ***linii de curbură*** *ale suprafeţei S acele curbe de pe suprafaţa S în lungul cărora tangenta în fiecare punct este o direcţie principală.*

Exemplul 5.9.1. Fie suprafaţa S:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + uv\vec{k},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se calculeze direcţiile principale şi să se determine liniile de curbură ale suprafeţei S.

Avem succesiv:

$$\vec{r}_u = \vec{i} + v\vec{k},\ \vec{r}_v = \vec{j} + u\vec{k}$$

$$E = 1 + v^2,\ F = uv,\ G = 1 + u^2,\ \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + u^2 + v^2}$$

$$\vec{r}_{uu} = \vec{r}_{vv} = \vec{0},\ \vec{r}_{uv} = \vec{k}$$

$$L = 0,\ M = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}},\ N = 0.$$

Ecuaţia (5.36) devine:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ 1 + v^2 & uv & 1 + u^2 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau}$$

$$\left(1 + v^2\right) du^2 - \left(1 + u^2\right) dv^2 = 0.$$

Această ecuaţie admite soluţiile:

$$\begin{cases} du = \lambda\sqrt{1 + u^2} \\ dv = \lambda\sqrt{1 + v^2} \end{cases}, \text{ respectiv } \begin{cases} du = \mu\sqrt{1 + u^2} \\ dv = -\mu\sqrt{1 + v^2} \end{cases},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cum o direcţie principală este determinată în afara unui factor de proporţionalitate,

putem spune că direcţiile principale sunt:

$$t_1 = \left(\sqrt{1+u^2}, \sqrt{1+v^2}\right), \text{ respectiv}$$

$$t_2 = \left(\sqrt{1+u^2}, -\sqrt{1+v^2}\right).$$

Liniile de curbură se află integrând ecuaţiile diferenţiale:

$$\sqrt{1+v^2}\, du = \pm\sqrt{1+u^2}\, dv .$$

Separând variabilele obţinem:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} .$$

Integrând, rezultă ecuaţiile liniilor de curbură:

$$u + \sqrt{1+u^2} = \pm C\left(v + \sqrt{1+v^2}\right).$$

Observaţia 5.9.1. Direcţiile principale sunt, de fapt, vectorii proprii corespunzători valorilor proprii k_1 şi k_2 (curburile principale).

Să verificăm acest lucru în exemplul considerat.

Ecuaţia curburilor principale (ecuaţia (5.34)) este:

$$\begin{vmatrix} 0 - k\left(1+v^2\right) & \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} - kuv \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} - kuv & 0 - k\left(1+u^2\right) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau}$$

$$\left(1+u^2+v^2\right)k^2 + \frac{2uv}{\sqrt{1+u^2+v^2}}k - \frac{1}{1+u^2+v^2} = 0 .$$

Curburile principale sunt:

$$k_1 = \frac{-uv + \sqrt{\left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)}}{\left(1+u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = \frac{-uv - \sqrt{\left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)}}{\left(1+u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

Să observăm că direcţia principală $t_1 = \left(\sqrt{1+u^2}, \sqrt{1+v^2}\right)$ este vector propriu pentru valoarea proprie k_1, adică are loc egalitatea:

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} t_1 = k_1 \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} t_1$$

care este echivalentă cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+u^2} \\ \sqrt{1+v^2} \end{pmatrix} = \frac{-uv + \sqrt{\left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)}}{\left(1+u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+u^2} \\ \sqrt{1+v^2} \end{pmatrix}.$$

Ultima egalitate este adevărată aşa cum rezultă dintr-un calcul direct.

Analog se arată că

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} t_2 = k_2 \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} t_2, \text{ unde}$$

$$t_2 = \left(\sqrt{1+u^2}, -\sqrt{1+v^2}\right).$$

5.10. LINII GEODEZICE

Definiţia 5.10.1. *O curbă parametrizată de clasă* C^2, $\gamma : \vec{\rho} = \vec{\rho}(t), t \in I$, *situată pe suprafaţa* S, *se numeşte* ***linie geodezică*** *dacă vectorul* $\vec{\rho}''(t)$ *este perpendicular pe planul tangent în punctul* $\rho(t)$ *la suprafaţa* S.

Observaţia 5.10.1. Dacă γ este linie geodezică, atunci, în fiecare punct al său, normala la suprafaţă aparţine planului osculator al curbei γ în acel punct.

Într-adevăr, γ fiind linie geodezică rezultă că normala la suprafaţă este colineară cu $\vec{\rho}''(t)$, deci aparţine planului osculator în $\rho(t)$ la γ.

Exemplul 5.10.1. Orice dreaptă situată pe o suprafaţă este o linie geodezică.

Într-adevăr, o dreaptă d situată pe suprafaţa S are reprezentarea parametrică

$$d:\vec{\rho}(t)=a+t\vec{v},$$

unde $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ şi $\vec{v}$ este un vector liber nenul.

Cum $\vec{\rho}''(t)=\vec{0}$, rezultă că $\vec{\rho}''(t)$ este perpendicular pe planul tangent în $\rho(t)$ la suprafaţa S.

Exemplul 5.10.2. Dacă S este sfera $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, atunci „ecuatorul", adică cercul mare

$$\vec{\rho}(t)=R\cos t\,\vec{i}+R\sin t\,\vec{j},\ t\in[0,2\pi]$$

este o linie geodezică.

Reprezentarea parametrică a sferei este:

$$\vec{r}(u,v)=R\sin u\cos v\,\vec{i}+R\sin u\sin v\,\vec{j}+R\cos u\,\vec{k},\ u\in[0,\pi],\ v\in[0,2\pi].$$

Rezultă că $\vec{\rho}(t)=\vec{r}\left(\frac{\pi}{2},t\right),\ t\in[0,2\pi]$.

Cum $\vec{\rho}''(t)=-R\cos t\,\vec{i}-R\sin t\,\vec{j}$ şi normala la suprafaţă are parametrii directori

$$(2x,2y,2z)=(2R\cos t,\ 2R\sin t,\ 0),$$

deducem că $\vec{\rho}''(t)$ şi normala la suprafaţă sunt colineari şi deci că „ecuatorul" este linie geodezică.

Se poate arăta că orice cerc mare este o linie geodezică.

Exemplul 5.10.3. Fie cilindrul $S:x^2+y^2=1$ şi curba

$$\gamma:\vec{\rho}(t)=\cos(at+b)\,\vec{i}+\sin(at+b)\,\vec{j}+(ct+d)\,\vec{k},\ t\in\mathbb{R}.$$

Evident γ este o curbă pe acest cilindru. Vom arăta că γ este o linie geodezică.

Într-adevăr, $\vec{\rho}''(t)=-a^2\cos(at+b)\,\vec{i}-a^2\sin(at+b)\,\vec{j}+0\cdot\vec{k}$.

Pe de altă parte, normala la suprafaţă are parametrii directori

$$(2x, 2y, 0) = (2\cos(at+b), 2\sin(at+b), 0)$$

deci este colineară cu $\vec{\rho}''(t)$.

Dacă $a = 0$, atunci

$$\gamma : \vec{\rho}(t) = \cos b\,\vec{i} + \sin b\,\vec{j} + (ct+d)\,\vec{k},\ t \in \mathbb{R},$$

deci reprezintă o dreaptă situată pe cilindru şi paralelă cu Oz, deci o generatoare a cilindrului.

Dacă $c = 0$, atunci γ este un cerc de rază 1, situat în planul $z = d$.

Propoziţia 5.10.1. *Dacă* $\gamma : \vec{\rho} = \vec{\rho}(t),\ t \in I$ *este o linie geodezică, atunci* $\left\|\vec{\rho}'(t)\right\| = \text{ct},\ \forall t \in I$. *În particular,* γ *este o curbă regulată în orice punct, dacă* ρ *nu se reduce la o constantă.*

Demonstraţie.

Din egalitatea evidentă:

$$\left(\vec{\rho}'(t)\cdot\vec{\rho}'(t)\right)' = 2\vec{\rho}''(t)\cdot\vec{\rho}'(t) = 0 \text{ rezultă că}$$

$$\left\|\vec{\rho}'(t)\right\|^2 = \text{const.}$$

În continuare ne propunem să găsim ecuaţiile diferenţiale ale liniilor geodezice. Pentru aceasta vom defini coeficienţii lui Christoffel.

Deoarece $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ şi $\vec{n}$ sunt liniar independenţi, atunci ei formează o bază în V_3. Rezultă că vectorii $\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}$ sunt combinaţii liniare de vectorii acestei baze, deci că pentru orice $(u,v) \in \Delta$, există $\Gamma_{uu}^u,\ \Gamma_{uu}^v,\ l;\ \Gamma_{uv}^u,\ \Gamma_{uv}^v,\ m$ şi $\Gamma_{vv}^u,\ \Gamma_{vv}^v,\ n$ astfel încât

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \vec{r}_u + \Gamma_{uu}^v \vec{r}_v + l\vec{n} \\
\vec{r}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \vec{r}_u + \Gamma_{uv}^v \vec{r}_v + m\vec{n} \\
\vec{r}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \vec{r}_u + \Gamma_{vv}^v \vec{r}_v + n\vec{n}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Funcţiile Γ^{*}_{**} poartă numele de ***coeficienţii lui Christoffel***.

Pentru calculul acestor coeficienţi observăm că:

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_u=\Gamma^u_{uu}\,E+\Gamma^v_{uu}\,F$$

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v=\Gamma^u_{uu}\,F+\Gamma^v_{uu}\,G$$

$$\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_u=\Gamma^u_{uv}\,E+\Gamma^v_{uv}\,F \tag{5.38}$$

$$\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v=\Gamma^u_{uv}\,F+\Gamma^v_{uv}\,G$$

$$\vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_u=\Gamma^u_{vv}\,E+\Gamma^v_{vv}\,F$$

$$\vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_v=\Gamma^u_{vv}\,F+\Gamma^v_{vv}\,G\,.$$

Pe de altă parte avem:

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_u=\frac{1}{2}\left(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u\right)_u=\frac{1}{2}E_u\,.$$

$$\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_u=\frac{1}{2}\left(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u\right)_v=\frac{1}{2}E_v$$

$$\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v=\frac{1}{2}\left(\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v\right)_u=\frac{1}{2}G_u$$

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v=\left(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\right)_u-\vec{r}_u\cdot\vec{r}_{uv}=F_u-\frac{1}{2}E_v$$

$$\vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_u=\left(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\right)_v-\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v=F_v-\frac{1}{2}G_u$$

$$\vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_v=\frac{1}{2}\left(\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v\right)_v=\frac{1}{2}G_v\,.$$

Sub formă matricială aceste relaţii se scriu astfel:

$$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma^u_{uu}\\ \Gamma^v_{uu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}E_u\\ F_u-\frac{1}{2}E_v\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^{u} \\ \Gamma_{uv}^{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^{u} \\ \Gamma_{vv}^{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}.$$

Rezolvând aceste ecuaţii matriciale obţinem:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^{u} \\ \Gamma_{uu}^{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^{u} \\ \Gamma_{uv}^{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^{u} \\ \Gamma_{vv}^{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Exemplul 5.10.4. Să se calculeze coeficienţii lui Christoffel pentru sfera centrată în origine şi de rază 1:

$$\vec{r}(u,v) = \sin u \cos v\, \vec{i} + \sin u \sin v\, \vec{j} + \cos u\, \vec{k}.$$

Avem succesiv:

$$\vec{r}_u = \cos u \cos v\, \vec{i} + \cos u \sin v\, \vec{j} - \sin u\, \vec{k}$$

$$\vec{r}_v = -\sin u \sin v\, \vec{i} + \sin u \cos v\, \vec{j}$$

$$E = 1,\ F = 0,\ G = \sin^2 u,\ E_u = E_v = 0,\ F_u = F_v = 0,\ G_u = 2\sin u \cos u,\ G_v = 0$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 u} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{uu}^{u}\\ \Gamma_{uu}^{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{uv}^{u}\\ \Gamma_{uv}^{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \sin u\cos u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\cos u}{\sin u}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{vv}^{u}\\ \Gamma_{vv}^{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin u\cos u\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin u\cos u\\ 0\end{pmatrix}.$$

Aşadar avem:

$$\Gamma_{uu}^{u}=\Gamma_{uu}^{v}=0,\ \Gamma_{uv}^{u}=0,\ \Gamma_{uv}^{v}=\frac{\cos u}{\sin u}=\operatorname{ctg}u,\ \Gamma_{vv}^{u}=-\sin u\cos u,\ \Gamma_{vv}^{v}=0\,.$$

Teorema 5.10.1. *Curba* $\gamma:\vec{\rho}(t)=\vec{r}\big(u(t),v(t)\big),\ t\in I$ *este o geodezică pe suprafaţa* S: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ *dacă şi numai dacă verifică sistemul*:

$$\begin{cases}u''(t)+\Gamma_{uu}^{u}\big(u'(t)\big)^2+2\Gamma_{uv}^{u}u'(t)v'(t)+\Gamma_{vv}^{u}\big(v'(t)\big)^2=0\\ v''(t)+\Gamma_{uu}^{v}\big(u'(t)\big)^2+2\Gamma_{uv}^{v}u'(t)v'(t)+\Gamma_{vv}^{v}\big(v'(t)\big)^2=0.\end{cases}\tag{5.42}$$

Demonstraţie.

$$\vec{\rho}'(t)=\vec{r}_u u'(t)+\vec{r}_v v'(t)$$

$$\begin{aligned}\vec{\rho}''(t)&=\big(\vec{r}_{uu}u'(t)+\vec{r}_{uv}v'(t)\big)u'(t)+\vec{r}_u u''(t)+\\ &\quad+\big(\vec{r}_{uv}u'(t)+\vec{r}_{vv}v'(t)\big)v'(t)+\vec{r}_v v''(t)=\\ &=\vec{r}_{uu}\big(u'(t)\big)^2+2\vec{r}_{uv}u'(t)v'(t)+\vec{r}_{vv}\big(v'(t)\big)^2+\vec{r}_u u''(t)+\vec{r}_v v''(t).\end{aligned}$$

Ţinând seama de (5.37) mai departe avem:

$$\begin{aligned}\vec{\rho}''(t)&=\big(\Gamma_{uu}^{u}\vec{r}_u+\Gamma_{uu}^{v}\vec{r}_v+l\,\vec{n}\big)\big(u'(t)\big)^2+2\big(\Gamma_{uv}^{u}\vec{r}_u+\Gamma_{uv}^{v}\vec{r}_v+m\vec{n}\big)u'(t)v'(t)+\\ &\quad+\big(\Gamma_{vv}^{u}\vec{r}_u+\Gamma_{vv}^{v}\vec{r}_v+n\,\vec{n}\big)\big(v'(t)\big)^2+\vec{r}_u u''(t)+\vec{r}_v v''(t).\end{aligned}$$

Grupând în mod convenabil termenii obţinem:

$$\vec{\rho}''(t)=\left[u''(t)+\Gamma_{uu}^{u}\left(u'(t)\right)^2+2\Gamma_{uv}^{u}u'(t)v'(t)+\Gamma_{vv}^{u}\left(v'(t)\right)^2\right]\vec{r}_u+$$
$$+\left[v''(t)+\Gamma_{uu}^{v}\left(u'(t)\right)^2+2\Gamma_{uv}^{v}u'(t)v'(t)+\Gamma_{vv}^{v}\left(v'(t)\right)^2\right]\vec{r}_v+$$
$$+\left[l\left(u'(t)\right)^2+2mu'(t)v'(t)+n\left(v'(t)\right)^2\right]\vec{n}.$$

Deoarece γ este o geodezică, deci $\vec{\rho}''(t)$ este colinear cu $\vec{n}$, rezultă că:

$$\begin{cases} u''(t)+\Gamma_{uu}^{u}\left(u'(t)\right)^2+2\Gamma_{uv}^{u}u'(t)v'(t)+\Gamma_{vv}^{u}\left(v'(t)\right)^2=0 \\ v''(t)+\Gamma_{uu}^{v}\left(u'(t)\right)^2+2\Gamma_{uv}^{v}u'(t)v'(t)+\Gamma_{vv}^{v}\left(v'(t)\right)^2=0. \end{cases}$$

Corolar 5.10.1. *Pentru orice punct M de pe suprafaţa S şi orice vector $\vec{p}$ din planul tangent în M la suprafaţa S, există $\varepsilon>0$ şi o singură geodezică $\rho:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ cu proprietăţile*

$$\rho(0)=M \text{ şi } \vec{\rho}'(0)=\vec{p}.$$

Demonstraţie.

Afirmaţiile rezultă din Teorema 5.10.1. şi din Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei unui sistem de ecuaţii diferenţiale (a se vedea Teorema 5.10.2., Teorema 5.10.3. şi demonstraţia Teoremei 5.10.4., prezentate în continuare).

Exemplul 5.10.5. Să se afle geodezicele planului:

$$\vec{r}(u,v)=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}+0\cdot\vec{k}.$$

Avem $E=1,\ F=0,\ G=1$. Toţi coeficienţii Γ_{**}^{*} sunt nuli şi sistemul (5.42) devine:

$$\begin{cases} u''(t)=0 \\ v''(t)=0. \end{cases}$$

Soluţia generală este $u(t)=a_1t+b_1,\ v(t)=a_2t+b_2$.

Aşadar orice geodezică în plan este o dreaptă.

Am văzut că orice cerc mare al unei sfere este o geodezică. Acum vom arăta că orice geodezică de pe o sferă este un cerc mare.

Exemplul 5.10.6. Să se determine geodezicele sferei:

$$\vec{r}(u,v) = \sin u \cos v\, \vec{i} + \sin u \sin v\, \vec{j} + \cos u\, \vec{k}\,.$$

Ţinând seama de Exemplul 5.10.4., sistemul (5.42) devine:

$$\begin{cases} u''(t) - \sin u \cos u\, v'^2(t) = 0 \\ v''(t) + 2\dfrac{\cos u}{\sin u} u'(t) v'(t) = 0 \end{cases},\ u \neq 0 \text{ şi } u \neq \pi\,.$$

Din a doua ecuaţie a sistemului rezultă:

$\dfrac{v''(t)}{v'(t)} = -2\dfrac{\cos u(t)}{\sin u(t)} \cdot u'(t)$ şi mai departe, prin integrare se găseşte

$\ln v'(t) = -2\ln \sin u(t) + \ln C$, deci

$$v'(t) = \frac{C}{\sin^2 u(t)}\,. \tag{5.43}$$

Folosind (5.43) în prima ecuaţie din sistem obţinem:

$u''(t) = \dfrac{C^2 \cos u(t)}{\sin^3 u(t)}$ şi amplificând cu $u'(t)$ rezultă:

$$u'(t)u''(t) = \frac{C^2 \cos u(t) u'(t)}{\sin^3 u(t)}\,.$$

Integrând această relaţie rezultă:

$\dfrac{u'^2(t)}{2} = -\dfrac{C^2}{2\sin^2 u(t)} + \dfrac{k^2}{2}$ şi mai departe:

$$u'(t) = \pm\sqrt{k^2 - \frac{C^2}{\sin^2 u(t)}}\,. \tag{5.44}$$

Din (5.43) şi (5.44) deducem:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v'(t)}{u'(t)} = \pm\frac{\dfrac{C}{\sin^2 u}}{\sqrt{k^2 - \dfrac{C^2}{\sin^2 u}}} \text{ sau}$$

$$dv = \pm \frac{\dfrac{C}{\sin^2 u}}{\sqrt{\left(k^2 - C^2\right) - C^2 \operatorname{ctg}^2 u}} du$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$C \operatorname{ctg} u = \sqrt{k^2 - C^2} \sin w$, atunci

$-\dfrac{C}{\sin^2 u} du = \sqrt{k^2 - C^2} \cos w \, dw$ şi ecuaţia devine

$dv = \mp dw$ sau $w = \pm v + b,\ b = \text{constant}$.

În continuare avem:

$$C \operatorname{ctg} u = \sqrt{k^2 - C^2} \sin\left(\pm v + b\right) = \sqrt{k^2 - C^2}\left(\sin b \cos v \pm \cos b \sin v\right)$$

În final obţinem

$$C \cos u + \sqrt{k^2 - C^2} \sin u \left(A \cos v + B \sin v\right) = 0. \tag{5.45}$$

Dacă notăm cu

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u, \end{cases}$$

atunci $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, deci curba obţinută se află pe sferă.

În plus, această curbă se află în planul $\sqrt{k^2 - C^2}\left(Ax + By\right) + Cz = 0$, plan ce trece prin origine. Rezultă că ecuaţia curbei (5.45) este ecuaţia unui cerc mare.

În continuare vom pune în evidenţă o proprietate importantă a liniilor geodezice şi anume, faptul că pentru orice două puncte P şi Q de pe suprafaţa S, dintre toate curbele de pe suprafaţa S care trec prin aceste puncte, cea mai mică lungime o are arcul de geodezică.

Pentru aceasta avem nevoie de următoarea definiţie.

Definiţia 5.10.2. *O reprezentare parametrică a suprafeţei* S

$$x = x\left(s,t\right), y = y\left(s,t\right),\ z = z\left(s,t\right),\ \left(s,t\right) \in U$$

se numeşte ***semigeodezică*** *dacă prima formă fundamentală este*

$$\Phi_{\mathbf{I}}(ds,dt) = ds^2 + G\,dt^2 .$$

Exemplul 5.10.7. Se consideră următoarea reprezentare parametrică a planului, corespunzătoare coordonatelor polare

$$x = s\cos t,\ y = s\sin t,\ z = 0,\ s \in (0,\infty),\ t \in (0,2\pi).$$

Avem

$$x_s = \cos t,\quad y_s = \sin t,\quad z_s = 0$$

$$x_t = -s\sin t,\quad y_t = s\cos t,\quad z_t = 0 \quad \text{şi}$$

$E = 1,\ F = 0,\ G = s^2$, deci

$$\Phi_{\mathbf{I}}(ds,dt) = ds^2 + s^2 dt^2 .$$

Observaţia 5.10.2. Fie

$$x = x(s,t), y = y(s,t),\ z = z(s,t),\ (s,t) \in D$$

o reprezentare semigeodezică a suprafeţei S. Atunci

(i) curbele coordonate $s = s_0,\ t = t_0$ sunt ortogonale

(ii) orice curbă $\vec{\rho}(\tau) = (s_0 + \tau)\vec{i} + t_0\vec{j}$ este o geodezică şi $\left\|\vec{\rho}'(\tau)\right\| = 1$.

Într-adevăr, prima afirmaţie rezultă din faptul că $F = 0$.

Ţinând seama că $E = 1,\ F = 0$ din egalitatea

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{ss}^{s} \\ \Gamma_{ss}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_s \\ F_s - \frac{1}{2}E_t \end{pmatrix}, \text{ rezultă}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{ss}^{s} \\ \Gamma_{ss}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ şi mai departe că}$$

$\Gamma_{ss}^{s} = 0$ şi $\Gamma_{ss}^{t} = 0$.

Acum este evident că ecuaţiile curbei

$s = s_0 + \tau,\ t = t_0$ verifică sistemul (5.42), deci curba

$\vec{\rho}(\tau) = (s_0 + \tau)\vec{i} + t_0\vec{j}$ este o geodezică.

Cum $\dfrac{d\vec{\rho}}{d\tau} = \vec{i}$ rezultă imediat că $\left\|\vec{\rho}'(\tau)\right\| = 1$.

În cele ce urmează reamintim un rezultat din teoria sistemelor de ecuaţii diferenţiale.

Fie sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul I

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,...,x_n) \\ ... \quad ... ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,...,x_n),\ x = (x_1,...,x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5.46}$$

Să presupunem că funcţiile $f_i,\ i = 1,2,...,n$ sunt de clasă $C^k\ (k \geq 1)$ pe mulţimea deschisă şi conexă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.10.2 (*Teorema de existenţă a soluţiei şi de diferenţiabilitate a acesteia în raport cu condiţiile iniţiale*)

Pentru orice punct $M_0(x_{10},...,x_{n0}) \in \Omega$, *există o vecinătate* V *a punctului* M_0, $V \subset \Omega$, *un interval deschis* $I_\varepsilon = (-\varepsilon,\varepsilon)$ *şi* n *funcţii de clasă* C^k

$\Phi = (\varphi_1,...,\varphi_n) : I_\varepsilon \times V \to \Omega$ *cu proprietăţile*:

$$\begin{cases} \varphi_1(0,x_{10},...,x_{n0}) = x_{10} \\ \quad ... \quad ... ... \\ \varphi_n(0,x_{10},...,x_{n0}) = x_{n0} \end{cases} \tag{5.47}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = f_1\left(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)\right) \\ ... \quad ..... \\ \dfrac{d\varphi_n}{dt} = f_n\left(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)\right), \ (\forall)\, t \in I_\varepsilon. \end{cases} \tag{5.48}$$

Proprietatea (5.48) pune în evidenţă faptul că $\Phi = (\varphi_1,...,\varphi_n)$ este soluţie a sistemului diferenţial (5.46), iar proprietatea (5.47) arată că această soluţie verifică condiţia iniţială.

Teorema afirmă că soluţia $\Phi = (\varphi_1,...,\varphi_n)$ este de clasă C^k nu numai în raport cu variabila independentă $t \in I_\varepsilon$, ci şi în raport cu $x_{10}, x_{20},..., x_{n0}$.

Mai mult, existenţa unei soluţii de acest tip are loc pentru orice alt punct $M(x_1,...,x_n) \in V$. Cu alte cuvinte, pentru orice punct $M(x_1,...,x_n) \in V$, există o soluţie a sistemului (5.46), $\Phi^M = \left(\varphi_1^M,...,\varphi_n^M\right): I_\varepsilon \times V \to \Omega$ care verifică condiţia iniţială

$$\begin{cases} \varphi_1^M(0, x_1,...,x_n) = x_1 \\ \quad ... \qquad ... \ ... \\ \varphi_n^M(0, x_1,...,x_n) = x_n. \end{cases}$$

Funcţia vectorială Φ^M este de clasă C^k pe $I_\varepsilon \times V$ în raport cu toate variabilele $t, x_1,..., x_n$.

Teorema 5.10.3. (*Teorema de unicitate a soluţiei*) *Fie* $\Phi = (\varphi_1,...,\varphi_n)$ *şi* $\Psi = (\psi_1,...,\psi_n)$ *două soluţii ale sistemului* (5.46) *definite pe acelaşi interval* I. *Dacă există* $t_0 \in I$ *astfel încât* $\Phi(t_0) = \Psi(t_0)$, *atunci* $\Phi(t) = \Psi(t)$, *oricare ar fi* $t \in I$.

Următoarea teoremă asigură existenţa unei parametrizări semigeodezice a unei suprafeţe.

Teorema 5.10.4. *Pentru orice curbă* γ *de clasă* C^2 *de pe suprafaţa* S *şi orice punct* $M_0 \in \gamma$, *există o reprezentare parametrică semigeodezică locală a suprafeţei* S:

$$x = x(s,t), y = y(s,t),\ z = z(s,t),\ (s,t) \in V$$

în raport cu care curba γ *şi curba coordonată* $s = 0$ *coincid.*

Demonstraţie.

Fie suprafaţa $S : r = r(u,v), (u,v) \in \Delta$ şi fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, unde

$$x_0 = x(u_0, v_0),\ y_0 = y(u_0, v_0),\ z_0 = z(u_0, v_0).$$

Fie de asemenea curba $\gamma : \rho(t) = r(u(t), v(t)),\ t \in J \subset \mathbb{R}$, cu

$$\rho(t_0) = r(u(t_0), v(t_0)) = r(u_0, v_0) = M_0.$$

Pentru orice $\rho(t) \in \gamma$ se consideră versorul $\vec{\tau}(t)$ din planul tangent în $\rho(t)$ la suprafaţa S care este ortogonal pe $\vec{\rho}'(t)$. În plus, $\vec{\tau}(t)$ este astfel ales încât perechea $(\vec{\rho}'(t), \vec{\tau}(t))$ să aibă aceeaşi orientare cu baza $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ din $T_{\rho(t)}S$.

Fie funcţiile scalare $p(t)$ şi $q(t)$, componentele versorului $\vec{\tau}(t)$ în raport cu reperul $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$.

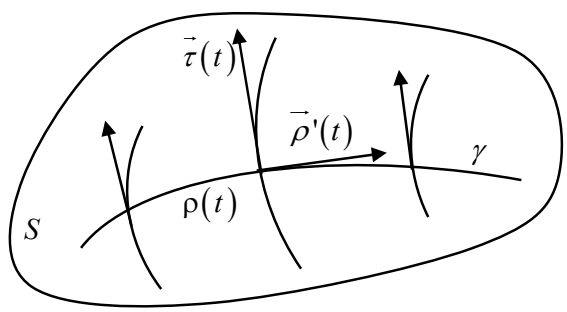


Fig. 19

Conform (5.42), geodezicele suprafeţei sunt date de sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul 2

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_1}{ds^2} = \Gamma^1_{11}\left(\dfrac{du_1}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^1_{12}\dfrac{du_1}{ds}\cdot\dfrac{du_2}{ds} + \Gamma^1_{22}\left(\dfrac{du_2}{ds}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d^2u_2}{ds^2} = \Gamma^2_{11}\left(\dfrac{du_1}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^2_{12}\dfrac{du_1}{ds}\cdot\dfrac{du_2}{ds} + \Gamma^2_{22}\left(\dfrac{du_2}{ds}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

unde am notat cu $\Gamma^1_{11} = \Gamma^{u_1}_{u_1 u_1}$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^{u_1}_{u_1 u_2}$, etc.

Aceste sistem este echivalent cu următorul sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{ds} = p_1 \\ \dfrac{du_2}{ds} = p_2 \\ \dfrac{dp_1}{ds} = -\left(\Gamma_{11}^1 p_1^2 + 2\Gamma_{12}^1 p_1 p_2 + \Gamma_{22}^1 p_2^2\right) \\ \dfrac{dp_2}{ds} = -\left(\Gamma_{11}^2 p_1^2 + 2\Gamma_{12}^2 p_1 p_2 + \Gamma_{22}^2 p_2^2\right). \end{cases} \tag{5.49}$$

Din Teorema 5.10.2. rezultă că pentru punctul

$$Q_0 = \left(u(t_0), v(t_0), p(t_0), q(t_0)\right) \in \mathbb{R}^4$$

există $\varepsilon > 0$, o vecinătate V a punctului Q_0 şi o soluţie a sistemului (5.49):

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1^{Q_0}(s) = \varphi_1\left(s, u(t_0), v(t_0), p(t_0), q(t_0)\right) \\ u_2 = \varphi_2^{Q_0}(s) = \varphi_2\left(s, u(t_0), v(t_0), p(t_0), q(t_0)\right) \\ p_1 = \psi_1^{Q_0}(s) = \psi_1\left(s, u(t_0), v(t_0), p(t_0), q(t_0)\right) \\ p_2 = \psi_2^{Q_0}(s) = \psi_2\left(s, u(t_0), v(t_0), p(t_0), q(t_0)\right), \ s \in I_\varepsilon \end{cases}$$

care verifică condiţia iniţială

$$\varphi_1^{Q_0}(0) = u(t_0), \ \varphi_2^{Q_0}(0) = v(t_0), \ \psi_1^{Q_0}(0) = p(t_0), \psi_2^{Q_0}(0) = q(t_0).$$

Mai mult, o astfel de soluţie există pentru orice punct

$$Q(t) = \left(u(t), v(t), p(t), q(t)\right) \in V$$

şi este de clasă C^1 atât în raport cu s, cât şi în raport cu $u(t), v(t), p(t)$ şi $q(t)$, deci şi în raport cu t.

Cum u, v, p şi q sunt de clasă C^1 în raport cu t, există $\delta > 0$ astfel încât pentru $|t - t_0| < \delta$ să rezulte că punctul

$$Q(t) = \left(u(t), v(t), p(t), q(t)\right) \in V.$$

Din cele de mai sus rezultă că există o soluţie a sistemului (5.49) asociată condiţiei

iniţiale $\left(u(t),v(t),p(t),q(t)\right)$. Fie

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1^Q(s,t) = \varphi_1\left(s,u(t),v(t),p(t),q(t)\right) \\ u_2 = \varphi_2^Q(s,t) = \varphi_2\left(s,u(t),v(t),p(t),q(t)\right) \\ p_1 = \psi_1^Q(s,t) = \psi_1\left(s,u(t),v(t),p(t),q(t)\right) \\ p_2 = \psi_2^Q(s,t) = \psi_2\left(s,u(t),v(t),p(t),q(t)\right),\ s \in I_\varepsilon,\ |t-t_0| < \delta \end{cases}$$

această soluţie.

Evident avem pe de o parte

$$\varphi_1^Q(0,t) = u(t),\ \varphi_2^Q(0,t) = v(t),\ \psi_1^Q(0,t) = p(t),\ \psi_2^Q(0,t) = q(t),$$

iar pe de altă parte

$$\frac{\partial \varphi_1^Q}{\partial s} = \psi_1^Q(s,t),\ \frac{\partial \varphi_2^Q}{\partial s} = \psi_2^Q(s,t),\ \text{etc.}$$

Se notează cu

$$f(s,t) = \varphi_1^Q(s,t),\ g(s,t) = \varphi_2^Q(s,t) \text{ şi cu}$$

$$\sigma(s,t) = r\left(f(s,t),\ g(s,t)\right),\ s \in I_\varepsilon,\ |t-t_0| < \delta$$

geodezica corespunzătoare acestei soluţii a sistemului (5.42). Cu aceste notaţii rezultă

$$f(0,t) = u(t),\ g(0,t) = v(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = p(t) \text{ şi } \frac{\partial g}{\partial s}(0,t) = q(t) \qquad \text{sau}$$

$$\sigma(0,t) = r\left(u(t),v(t)\right) = \rho(t) \text{ şi } \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial s}(0,t) = \vec{\tau}(t).$$

În continuare avem

$$\frac{D(f,g)}{D(s,t)}(0,t_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial s}(0,t_0) & \dfrac{\partial g}{\partial s}(0,t_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(0,t_0) & \dfrac{\partial g}{\partial t}(0,t_0) \end{vmatrix}.$$

Cum vectorii

$$\vec{\tau}(t_0)=\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial s}(0,t_0)=\vec{r}_u(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial s}(0,t_0)+\vec{r}_v(u_0,v_0)\frac{\partial g}{\partial s}(0,t_0) \text{ şi}$$

$$\vec{\rho}'(t_0)=\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial t}(0,t_0)=\vec{r}_u(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial t}(0,t_0)+\vec{r}_v(u_0,v_0)\frac{\partial g}{\partial t}(0,t_0)$$

nu sunt colineari, rezultă că Jacobianul

$$\frac{D(f,g)}{D(s,t)}(0,t_0)\neq 0 .$$

Din Teorema de Inversiune Locală se deduce că există o vecinătate deschisă U a punctului $(0,t_0)$ şi o vecinătate deschisă W a punctului (u_0,v_0) astfel încât aplicaţia

$(s,t)\to(f(s,t),g(s,t)):U\to W$ este difeomorfism.

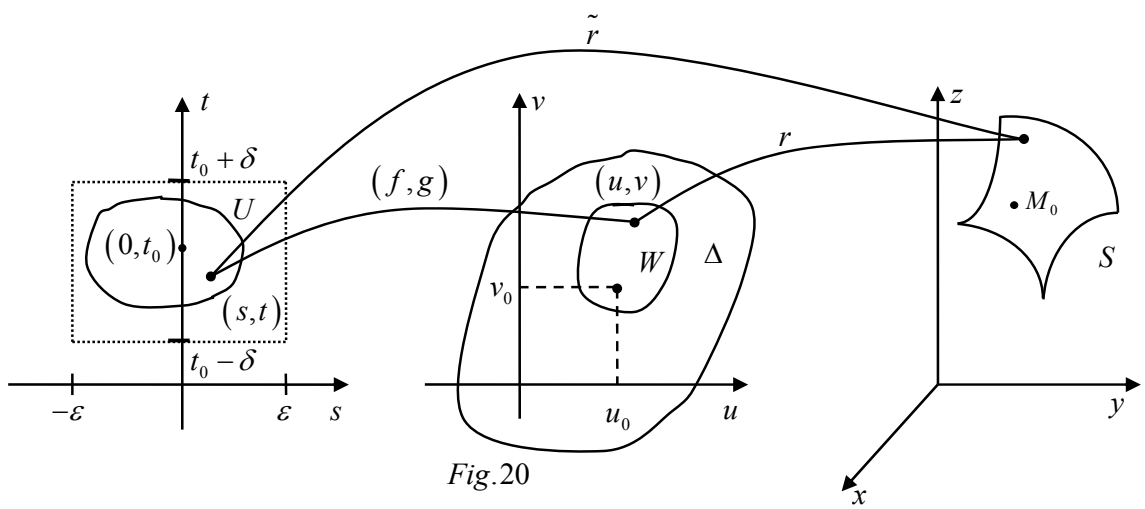


*Fig.*20

Fie $\tilde{r}:U\to S\subset\mathbb{R}^3$ definită astfel

$$\tilde{r}(s,t)=r(f(s,t),g(s,t)),\ (\forall)\,(s,t)\in U . \tag{5.50}$$

Vom arăta că (5.50) este parametrizarea căutată.

Pentru început să observăm că

$$\tilde{r}(0,t) = r\big(f(0,t), g(0,t)\big) = r\big(u(t), v(t)\big) = \rho(t),$$

de unde deducem că γ şi curba coordonată $s = 0$ coincid.

Observăm de asemenea că pentru orice t_1 fixat, curba coordonată

$$\tilde{r}(s,t_1) = r\big(f(s,t_1), g(s,t_1)\big) = \sigma(s,t_1)$$

este o geodezică pe suprafaţa S ce trece prin punctul $M(t_1) \in \gamma$.

Cum $\dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial s}(0,t) = \vec{\tau}(t)$ şi $\vec{\tau}(t)$ este versor, rezultă că $\left\| \dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial s}(0,t) \right\| = 1$.

Pe de altă parte, din Propoziţia 5.10.1. deducem că $\left\| \dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial s}(s,t) \right\| = 1, (\forall)\, s$ şi mai departe că

$$E = \left\| \vec{\tilde{r}}_s \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial s} \right\|^2 = 1.$$

Evident, curba coordonată $s = w, t = t_1$ fiind o geodezică verifică sistemul (5.42), deci

$$\begin{cases} s''(w) + \Gamma_{ss}^{s}\big(s'(w)\big)^2 + 2\Gamma_{st}^{s} s'(w)t'(w) + \Gamma_{tt}^{s}\big(t'(w)\big)^2 = 0 \\ t''(w) + \Gamma_{ss}^{t}\big(s'(w)\big)^2 + 2\Gamma_{st}^{t} s'(w)t'(w) + \Gamma_{tt}^{t}\big(t'(w)\big)^2 = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă că

$$\Gamma_{ss}^{s} = 0 \text{ şi } \Gamma_{ss}^{t} = 0.$$

Ţinând seama de acest lucru în egalitatea

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ss}^{s} \\ \Gamma_{ss}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ss}^{s} \\ \Gamma_{ss}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_s \\ F_s - \frac{1}{2}E_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_s \end{pmatrix}$$

deducem că $F_s = 0$, adică F nu depinde de s.

Prin urmare, pentru orice s rezultă

$$F(s,t)=F(0,t)=\vec{\tilde{r}}_s(0,t)\cdot\vec{\tilde{r}}_t(0,t)=\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial s}(0,t)\cdot\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial t}(0,t)=\vec{\tau}(t)\cdot\vec{\rho}'(t)=0.$$

Aşadar, $E=1,\ F=0$, deci parametrizarea

$$\tilde{r}(s,t)=r\big(f(s,t),g(s,t)\big),\ (\forall)\ (s,t)\in U$$

este o parametrizare semigeodezică.

Teorema 5.10.5. *Fie γ o geodezică pe suprafaţa S şi fie P,Q două puncte pe γ. Dintre toate curbele de pe suprafaţa S care trec prin punctele P şi Q, arcul de geodezică are lungimea cea mai mică.*

Demonstraţie.

Fie C o curbă pe suprafaţa S care trece prin punctul P şi este ortogonală pe γ.

Din Teorema 5.10.4. deducem că există o parametrizare semigeodezică a suprafeţei S, $r=r(s,t),\ (\forall)\ (s,t)\in U$, astfel încât $r(0,t_0)=P$, curba C este curba coordonată $s=0$ şi curba γ este curba coordonată $t=t_0$. Punctul $Q\in\gamma$, deci este de forma $Q=r(s_1,t_0)$.

Lungimea arcului $\widehat{PQ}$ de pe geodezica γ va fi egală cu

$$\int_0^{s_1}\sqrt{1}\,ds=|s_1|.$$

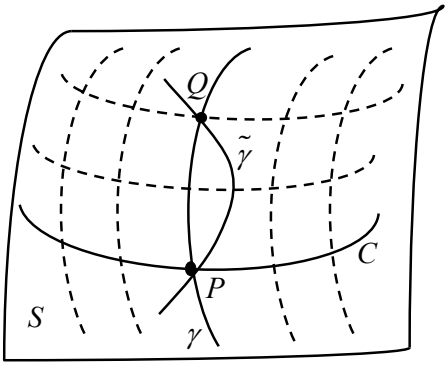


Fig. 21

Fie $\tilde{\gamma}:\rho(w)=r\big(s(w),t(w)\big)$ o curbă oarecare pe suprafaţa S care trece prin punctele P şi Q.

Dacă se presupune că $\rho(a)=P$ şi $\rho(b)=Q$, atunci

$$s(a)=0,\ t(a)=t_0,\ s(b)=s_1 \text{ şi } t(b)=t_0.$$

Lungimea arcului $\widehat{PQ}$ de pe curba $\tilde{\gamma}$ este egală cu

$$\int_a^b \sqrt{s'^2(w)+G\big(s(w),t(w)\big)t'^2(w)}\,dw > \int_a^b \sqrt{s'^2(w)}\,dw = \left|s(b)-s(a)\right| = \left|s_1\right|.$$

Aşadar, arcul $\widehat{PQ}$ de pe curba $\tilde{\gamma}$ are lungimea mai mare decât arcul $\widehat{PQ}$ de pe geodezica γ.

Probleme propuse

1. Fie suprafaţa definită prin ecuaţiile parametrice $x = u + \sin v,\ \ y = u - \cos v,\ \ z = u - 1$, u, v parametrii reali. Se cere:

a) Să se afle coordonatele carteziene ale punctelor $A(u=1, v=\frac{\pi}{2})$ şi $B(u=-1, v=3\pi)$;

b) Să se verifice dacă punctele $M(-2,3,1), N(3,4,2)$ aparţin suprafeţei;

c) Să se găsească reprezentarea carteziană implicită a suprafeţei.

Răspuns: a) $A(2,1,0), B(-1,0,-2)$; b) M nu este pe suprafaţă, N este pe suprafaţă (pentru $u=3, v=\pi$); c) $(x-z-1)^2+(z-y+1)^2=1$.

2. Să se determine ecuaţia carteziană implicită a suprafeţei care are ecuaţia vectorială:

a) $\vec{r}(u,v) = (u+v)\,\vec{i} + (u^2-v^2)\,\vec{j} + (u^3+v^3)\,\vec{k}$;

b) $\vec{r}(u,v) = (u+v)\,\vec{i} + (u^2+v^2)\,\vec{j} + (u^3+v^3)\,\vec{k}$;

c) $\vec{r}(u,v) = v\,\mathrm{tg}\,u\,\vec{i} + v\,\mathrm{ctg}\,u\,\vec{j} + v\,\vec{k}$.

Răspuns: a) $x^4 - 4xz + 3y^2 = 0$; b) $x^3 - 3xy + 2z = 0$; c) $xy = z^2$.

3. Să se găsească ecuaţiile planelor tangente şi normalelor la suprafeţele:

a) $x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$, în punctul $M(u = 2, v = 1)$;

b) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = au,\ a \in \mathbb{R}$, în punctul $M\left(u = 2, v = \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $z = \sin x - \cos y$, în punctul $M\left(\pi, -\frac{\pi}{2}, 0\right)$;

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 169 = 0$, în punctul $M(3,4,12)$;

e) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$, în punctul $M(3,1,-1)$;

f) $\vec{r}(u,v) = (u+v)\vec{i} + (u^2 + v^2)\vec{j} + (u^3 - v^3)\vec{k}$, în punctul $M(u = 1, v = 1)$;

g) $z = e^{\frac{x}{y}}$, în punctul $M(0,1,1)$;

h) $x = u^2 + v, y = u + v^2, z = u + v$, în punctul $M(u = 1, v = 1)$;

i) $25x^3 - x^2z^2 + 2xy^2z - y^4 = 0$, în punctul $M(1,2,-1)$;

j) $\vec{r}(u,v) = u^2\vec{i} + uv\vec{j} + (2u + v^2)\vec{k}$, în punctul $M(u = 1, v = 3)$;

k) $x = u^2 + v + 1,\ y = u^2 - v + 1,\ z = uv + 2$, în punctul $M(u = 1, v = -1)$;

l) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$, în punctul $M(4,3,4)$.

Răspuns: a) $3x - y - 2z - 4 = 0;\ \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$;

b) $ax + ay - \sqrt{2}z = 0;\ \frac{x-\sqrt{2}}{a} = \frac{y-\sqrt{2}}{a} = \frac{z-2a}{-\sqrt{2}}$; c) $x + y + z - \frac{\pi}{2} = 0;\ \frac{x-\pi}{1} = \frac{y+\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{z}{1}$;

d) $3x + 4y + 12z - 169 = 0;\ \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}$;

e) $3x - 2y + 3z - 4 = 0;\ \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$; f) $2x - y - 2 = 0;\ \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{0}$;

g) $-x+z-1=0;\ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$; h) $-x-y+3z-2=0;\ \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$;

i) $13x-8y+2z+5=0;\ \dfrac{x-1}{13}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z+1}{2}$; j) $8x-6y+z-1=0;\ \dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-3}{-6}=\dfrac{z-11}{1}$;

k) $x-3y-4z+12=0;\ x-1=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-1}{-4}$; l) $3x+4y-6z=0;\ \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{-6}$.

4. Să se determine ecuaţia planului tangent la suprafaţa $xyz=1$ paralel cu planul $x+y+z=1$.

Răspuns: $x+y+z-3=0$.

5. Să se determine un punct al suprafeţei $x^3-3xy-z=0$, în care normala la suprafaţă să fie perpendiculară pe planul $5x+6y+2z-7=0$.

Răspuns: $M\left(1,\dfrac{11}{6},-\dfrac{9}{2}\right)$.

6. Să se determine forma întâi fundamentală a următoarelor suprafeţe

a) $\vec{r}(u,v)=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}+uv\,\vec{k}$;

b) $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+u^2\,\vec{k}$;

c) $\vec{r}(u,v)=\left(u^2+v\right)\vec{i}+\left(u+v^2\right)\vec{j}+\left(u+v\right)\vec{k}$;

d) $\vec{r}(u,v)=\left(u^3+v^3\right)\vec{i}+\left(u^2+v^2\right)\vec{j}+\left(u+v\right)\vec{k}$;

e) $\vec{r}(u,v)=a\,\mathrm{ch}\dfrac{u}{a}\cos v\,\vec{i}+a\,\mathrm{ch}\dfrac{u}{a}\sin v\,\vec{j}+u\,\vec{k}$ (*catenoidul*);

f) $\vec{r}(u,v)=\left(a+b\cos u\right)\cos v\,\vec{i}+\left(a+b\cos u\right)\sin v\,\vec{j}+b\sin u\,\vec{k}$ (*torul*).

Răspuns: a) $\Phi_{\mathrm{I}}(du,dv)=\left(v^2+1\right)du^2+2uv\,du\,dv+\left(u^2+1\right)dv^2$;

b) $\Phi_{\mathrm{I}}(du,dv)=\left(4u^2+1\right)du^2+u^2dv^2$;

c) $\Phi_{\mathrm{I}}(du,dv)=\left(4u^2+2\right)du^2+\left(4u+4v+2\right)du\,dv+\left(4v^2+2\right)dv^2$;

d) $\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv)=\left(9u^4+4u^2+1\right)du^2+2\left(9u^2v^2+4uv+1\right)du\,dv+\left(9v^4+4v^2+1\right)dv^2$;

e) $\Phi_{\mathrm{I}}(du,dv)=\mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}du^2+a^2\mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}dv^2$; f) $\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv)=b^2du^2+\left(a+b\cos u\right)^2dv^2$.

7. Să se determine unghiul dintre curbele:

a) $u=-1$ şi $v=\pi$ trasate pe suprafaţa $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+(u+v)\,\vec{k}$;

b) $u=-1$ şi $v=-2$ trasate pe suprafaţa $\vec{r}(u,v)=\left(u^2+v\right)\vec{i}+\left(u^2-v\right)\vec{j}+uv\,\vec{k}$;

c) $u=v-1$ şi $u=3-v$ trasate pe suprafaţa $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+u^2\,\vec{k}$;

d) $u+v=0$ şi $u-v=0$ trasate pe suprafaţa $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+a\,v\,\vec{k}$;

e) $u+v=0$ şi $u-v=0$ trasate pe suprafaţa $\vec{r}(u,v)=u\,\vec{i}+v\,\vec{j}+\sin(u+v)\,\vec{k}$.

Răspuns: a) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$; b) $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$; c) $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$; d) $\cos\theta=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$; e) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

8. Se consideră suprafaţa $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+v\,\vec{k}$. Să se determine perimetrul triunghiului curbiliniu determinat prin intersecţia curbelor $2u=\pm v^2$ şi $v=1$.

Indicaţie: Curbele $2u=v^2$ şi $2u=-v^2$ se taie în $O(u=0,v=0)$; curbele $2u=v^2$ şi $v=1$ se taie în $A\left(u=\dfrac{1}{2},v=1\right)$; curbele $2u=-v^2$ şi $v=1$ se taie în $B\left(u=-\dfrac{1}{2},v=1\right)$;

Elementul de arc pe OA este $ds=\dfrac{v^2+2}{2}dv$, deci $L_{\widehat{OA}}=\displaystyle\int_0^1 ds=\int_0^1\frac{v^2+2}{2}dv=\frac{7}{6}$;

Elementul de arc pe OB este $ds=\dfrac{v^2+2}{2}dv$, deci $L_{\widehat{OB}}=\displaystyle\int_0^1 ds=\int_0^1\frac{v^2+2}{2}dv=\frac{7}{6}$;

Elementul de arc pe AB este $ds=du$, deci $L_{\widehat{BA}}=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du=1$; $P_{\triangle ABC}=\dfrac{10}{3}$.

9. Se dă suprafaţa de ecuaţii parametrice $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u + v$. Se cere:

a) prima formă fundamentală a suprafeţei;

b) elementul de arie al suprafeţei;

c) a doua formă fundamentală a suprafeţei.

Răspuns: a) $\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv) = 2du^2 + 2du\,dv + (u^2+1)dv^2$;

b) $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,dudv = \sqrt{2u^2+1}\,dudv$; c) $\Phi_{\mathbf{II}}(du,dv) = \dfrac{-2du\,dv + u^2\,dv^2}{\sqrt{1+2u^2}}$.

10. Să se determine a doua formă fundamentală a suprafeţei

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + (u^2+v^2)\vec{k}.$$

Răspuns: $\Phi_{\mathbf{II}}(du,dv) = L\,du^2 + 2M\,dudv + Ndv^2 = \dfrac{2u\,du^2 - 4v\,dudv + 2(u+u^3)dv^2}{\sqrt{u^2+4v^2+4u^4}}$.

11. Fiind dată sfera $\vec{r}(u,v) = R\cos u\cos v\,\vec{i} + R\cos u\sin v\,\vec{j} + R\sin u\,\vec{k}$,

a) să se arate că două curbe de coordonate oarecare sunt ortogonale;

b) să se determine prima şi a doua formă fundamentală;

c) să se calculeze curbura normală;

d) să se clasifice punctele suprafeţei;

e) să se arate că în orice punct curbura totală este constantă.

Răspuns: a) $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{F}{\sqrt{EG}} = 0$, deci curbele de coordonate sunt ortogonale;

b) $\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv) = R^2du^2 + R^2\cos^2 u\,dv^2$; $\Phi_{\mathbf{II}}(du,dv) = R\,du^2 + R\cos^2 u\,dv^2$;

c) $k_n = \dfrac{\Phi_{\mathbf{II}}(du,dv)}{\Phi_{\mathbf{I}}(du,dv)} = \dfrac{1}{R}$; d) $LN - M^2 = R^2\cos^2 u > 0$, deci toate punctele sferei sunt de tip eliptic; e) $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = \dfrac{1}{R^2}$.

12. Fie torul de ecuaţie vectorială $\vec{r}(u,v)=(a+b\cos u)\cos v\,\vec{i}+(a+b\cos u)\sin v\,\vec{j}+b\sin u\,\vec{k}$.

a) Să se arate că două curbe de coordonate oarecare sunt ortogonale;

b) Să se calculeze elementul de arie al suprafeţei;

c) Să se calculeze curbura normală a torului.

Răspuns: a) $F=0$; b) $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=b(a+b\cos u)\,du\,dv$;

c) $k_n=\dfrac{\Phi_{\mathrm{II}}(du,dv)}{\Phi_{\mathrm{I}}(du,dv)}=\dfrac{b(\sin u+\cos u)\,du^2+(a+b\cos u)\cos u\,dv^2}{b^2\,du^2+(a+b\cos u)^2\,dv^2}$.

13. Fie paraboloidul eliptic de ecuaţie implicită $x^2+y^2=z$ sau de ecuaţii parametrice $x=u$, $y=v$, $z=u^2+v^2$.

a) Să se determine prima şi a doua formă fundamentală a suprafeţei;

b) Să se calculeze elementul de arc şi elementul de arie;

c) Să se calculeze curbura totală şi curbura medie;

d) Să se clasifice punctele suprafeţei;

e) Să se calculeze lungimea arcului de curbă $u=1$ cuprins între punctele $A(u=1,v=-1)$ şi $B(u=1,v=1)$.

Răspuns: a) $\Phi_{\mathrm{I}}(du,dv)=(4u^2+1)du^2+8uv\,du\,dv+(4v^2+1)dv^2$;

$\Phi_{\mathrm{II}}(du,dv)=\dfrac{2\,du^2+2\,dv^2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$;

b) $ds=\sqrt{\Phi_{\mathrm{I}}(du,dv)}=\sqrt{(4u^2+1)du^2+8uv\,du\,dv+(4v^2+1)dv^2}$; $d\sigma=\sqrt{4u^2+4v^2+1}\,du\,dv$;

c) $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{4}{(4u^2+4v^2+1)^2}$; $H=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}=\dfrac{2(2u^2+2v^2+1)}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$;

d) $LN-M^2=\dfrac{4}{4u^2+4v^2+1}>0$, deci toate punctele paraboloidului eliptic sunt de tip eliptic;

e) $L_{\widehat{AB}} = \int_{-1}^{1} ds = \int_{-1}^{1} \sqrt{4v^2+1}\, du = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

14. Să se clasifice natura punctelor următoarelor suprafeţe:

a) $\vec{r}(u,v) = \cos u \operatorname{ch} v\, \vec{i} + \sin u \operatorname{ch} v\, \vec{j} + u\vec{k}$;

b) $\vec{r}(u,v) = \operatorname{sh} u\, \vec{i} + \operatorname{ch} u \cos v\, \vec{j} + \operatorname{ch} u \sin v\, \vec{k}$;

c) $x + y = z^3$.

Răspuns: a) $LN - M^2 = \frac{-\operatorname{sh}^2 v}{1+\operatorname{ch}^2 v} < 0$, punctele sunt hiperbolice; b) Punctele sunt hiperbolice;

c) $LN - M^2 = 0$, punctele sunt parabolice.

15. Să se determine curburile principale:

a) în punctul $M(1,1,1)$ de pe suprafaţa $z = xy$;

b) în punctul $O(0,0,0)$ de pe suprafaţa $2z = 4x^2 + 9y^2$;

c) în punctul $M(u=1, v=1)$ de pe suprafaţa $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$.

Răspuns: a) $k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}; k_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}$; b) $k_1 = 4; k_2 = 9$; c) $k_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}; k_2 = 0$.

16. Să se calculeze curbura totală K şi curbura medie H pentru suprafeţele următoare:

a) $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$, în punctul $M(u=1, v=1)$;

b) $z = x^2 y^3$, în punctul $M(1,1,1)$;

c) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\, \vec{i} + u \sin v\, \vec{j} + (u+v)\vec{k}$, într-un punct oarecare;

d) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\, \vec{i} + u \sin v\, \vec{j} + u\, \vec{k}$, într-un punct oarecare.

Răspuns: a) $K = 0; H = \frac{1}{4\sqrt{5}}$; b) $K = -\frac{6}{49}; H = -\frac{11}{14\sqrt{14}}$;

c) $K=-\dfrac{1}{\left(2u^2+1\right)^2}$; $H=\dfrac{u^2+1}{\left(2u^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$; d) $K=0$; $H=\dfrac{1}{2\sqrt{2}\,u}$.

17. Să se determine liniile asimptotice ale suprafeţelor:

a) $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+\dfrac{\sin 2v}{2}\,\vec{k}$;

b) $x=u,\ y=uv,\ z=v^3$;

c) $x=u+\cos v,\ y=u-\cos v,\ z=uv$;

d) $x=u,\ y=uv,\ z=v+\ln u$;

e) $\vec{r}(u,v)=(u+v)\,\vec{i}+\left(u^2+v^2\right)\vec{j}+\left(u^3+v^3\right)\vec{k}$;

f) $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\,\vec{j}+v\,\vec{k}$;

g) $\vec{r}(u,v)=v\cos u\,\vec{i}+v\sin u\,\vec{j}+\dfrac{u^3}{3}\,\vec{k}$;

h) $z=xy$;

i) $\vec{r}(u,v)=\operatorname{ch}u\cos v\,\vec{i}+\operatorname{ch}u\sin v\,\vec{j}+u\,\vec{k}$;

j) $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+au\,\vec{k}$;

k) $\vec{r}(u,v)=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+u^2\,\vec{k}$.

Indicaţie: a) $L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0\Leftrightarrow\dfrac{-2}{\sqrt{u^2+\cos^2 2v}}\left(\cos 2v\,du\,dv+u\sin 2v\,dv^2\right)=0$;

$$\begin{cases} dv=0\Rightarrow v=C_1\ (\text{const.}) \\ \cos 2v\,du+u\sin 2v\,dv=0\Leftrightarrow\dfrac{du}{u}=-\operatorname{tg}2v\,dv\Rightarrow u=C_2\sqrt{|\cos 2v|} \end{cases};\ \text{b) } v=C_1,\ v=C_2u;$$

c) $v=C_1$, $u=C_2\sqrt{\sin v}$; d) $u=C_1$, $u=C_2e^{-2v}$; e) $u=v+C_1$, $u=-v+C_2$;

f) $v=C_1$, $u^2\sin v=C_2$; g) $u=C_1$, $v=C_2u$; h) $u=C_1$, $v=C_2$; i) $u-v=C_1$, $u+v=C_2$;

j) $v = C$ (două familii confundate); k) $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \Leftrightarrow du^2 + u^2 dv^2 = 0$, deci liniile asimptotice sunt imaginare.

18. Să se determine liniile de curbură ale suprafeţelor:

a) $x = 3u + 3uv^2 - u^3$, $v = 3v + 3u^2 v - v^3$, $z = 3u^2 - 3v^2$;

b) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + a\,v\,\vec{k}$;

c) $\vec{r}(u,v) = \left(u^2 + v^2\right)\vec{i} + \left(u^2 - v^2\right)\vec{j} + a\,v\,\vec{k}$;

d) $z = xy$;

e) $\vec{r}(u,v) = (u + \sin v)\,\vec{i} + (u - \sin v)\,\vec{j} + a\,v\,\vec{k}$;

f) $\vec{r}(u,v) = \dfrac{u+v}{2}\,\vec{i} + \dfrac{u-v}{2}\,\vec{j} + \dfrac{uv}{2}\,\vec{k}$;

g) $\vec{r}(u,v) = u^2\,\vec{i} + \left(u^2 + v^2\right)\vec{j} + \left(u^2 + v\right)\vec{k}$.

Indicaţie: a) $\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ 9\left(1+u^2+v^2\right)^2 & 0 & 9\left(1+u^2+v^2\right)^2 \\ 6 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow du\,dv = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} du = 0 \Rightarrow u = C_1 \\ dv = 0 \Rightarrow v = C_2 \end{cases}$; b) $v = \pm \ln C_{1,2}\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)$; c) $u = C_1$, $v = C_2$;

d) $u + \sqrt{1+u^2} = C_1\left(v + \sqrt{1+v^2}\right)$, $u + \sqrt{1+u^2} = \dfrac{C_2}{v + \sqrt{1+v^2}}$; e) $u = C_1$, $v = C_2$;

f) $u + \sqrt{2+u^2} = C_1\left(v + \sqrt{2+v^2}\right)$, $u + \sqrt{2+u^2} = \dfrac{C_2}{v + \sqrt{2+v^2}}$; g) $v = C_1$, $3u^2 + v^2 + v = C_2$.

19. Să se determine liniile geodezice ale suprafeţei $x = R\cos u$, $y = R\sin v$, $z = v$ (*cilindrul drept*).

Indicaţie: $\dfrac{d^2 v}{dv} = \dfrac{d^2 u}{du} \Leftrightarrow \dfrac{d(dv)}{dv} = \dfrac{d(du)}{du}$; prin integrare rezultă $dv = C_1\,du \Rightarrow v = C_1 u + C_2$.

Bibliografie

[1] I.V. Belko, A.A. Burdun, V.I. Vedernikov, A.C. Fedenko
- *Geometrie diferenţială*, B.G.U., Minsk (în limba rusă), 1982.

[2] V. Brânzănescu, O. Stănăşilă
- *Matematici speciale*, *teorie*, *exemple*, *aplicaţii*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[3] C. Costinescu
- *Algebră liniară şi aplicaţii în geometrie*, Ed. MATRIX ROM, Bucureşti, 2005.

[4] Gh. Groza şi colaboratori
- *Algebră liniară*, *geometrie analitică şi diferenţială*, *Culegere de probleme*, U.T.C.B., Bucureşti, 1997.

[5] Gh. Groza
- *Linear Algebra and Analytic Geometry*, Ed. CONSPRESS, Bucureşti, 2010.

[6] V.A. Ilyin, E.G. Poznyak
- *Fundamentals of Mathematical Analysis*, Part 2, MIR PUBLISHERS, Moscow, 1982.

[7] M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko, E. Shikin
- *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol. 1, MIR PUBLISHERS, Moscow, 1989.

[8] P. Matei
- *Algebră liniară*, *geometrie analitică şi diferenţială*, Vol. 1 şi 2, Ed. AGIR, Bucureşti, 2002, 2004.

[9] G. Păltineanu, Şt. Donescu
- *Algebră liniară*, Ed. MATRIX ROM, Bucureşti, 2007.

[10] G. Păltineanu, Şt. Donescu, M. Zamfir
- *Algebră liniară*. *Culegere de probleme*, Ed. CONSPRESS, Bucureşti, 2008.

[11] V. Petrehuş
- *Lecţii de algebră*, Home Page.

[12] A.S. Popescu
- *Algebră liniară şi aplicaţii*, Ed. UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI, 1999.

[13] M. Postnikov
- *Lectures in Geometry*, MIR PUBLISHERS, Moscow, 1982.

[14] T. Shifrin
- *First Course in Curves and Surfaces*, Preliminary Version Spring, University of Georgia, 2010.

[15] R.T. Tâşkevici, A.C. Fedenco
- *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Minsk (în limba rusă), 1968.

Index

	Pagina
A doua formulă a lui Frenet pentru curbe în spaţiu	181
A treia formulă a lui Frenet pentru curbe în spaţiu	180
A doua formă fundamentală a unei suprafeţe	233
Algoritmul Gauss cu pivotare	87
Asimptotele unei hiperbole	69
Astroida	189
Axa unui fascicul de plane	35
Axa unei parabole	93
Banda lui Möbius	225
Binormala la o curbă în spaţiu	164
Capetele unui drum parametrizat	145
Centru de simetrie al unei conice	76, 77
Cilindru eliptic	126
Cilindru hiperbolic	126
Cilindru parabolic	127
Coeficienţii lui Christoffel	254
Conică	63
Conică cu centru unic	75
Conică fără centru sau cu o infinitate de centre	87
Componentele (coordonatele) scalare ale unui vector liber	14
Con	119
Con de rotaţie	119
Cosinusurile directoare ale direcţiei date de un vector	32
Cuadrică	105
Curbă	153
Curbă simplă	153
Curbă plană	155
Curbă plană definită parametric	155
Curbă plană definită explicit	155
Curbă plană definită implicit	155
Curbura unei curbe în spaţiu	173
Curbe coordonate	217
Curbura normală într-un punct la o suprafaţă	234
Curbura totală într-un punct la o suprafaţă	241

	Pagina
Curbura medie într-un punct la o suprafaţă	241
Curburile principale ale unei suprafeţe	239
Direcţia unui vector	7
Directoarea unei conice	63
Direcţii principale ale unei suprafeţe	239
Direcţie asimptotică într-un punct la o suprafaţă	245
Distanţa de la un punct la un plan	42
Distanţa de la un punct la o dreaptă	43
Distanţa dintre două drepte	49
Distanţă focală	65
Drepte perpendiculare	37
Drepte paralele	38
Dreaptă perpendiculară pe un plan	41
Dreaptă paralelă cu un plan	41
Dreaptă conţinută într-un plan	41
Drum parametrizat de clasă C^k	145
Drum parametrizat închis	146
Drum simplu	147
Drum regulat (neted)	148
Drumuri echivalente	148
Drum parametrizat biregulat	163
Drum parametrizat situat pe o suprafaţă	213
Dublul produs vectorial a trei vectori liberi	21
Ecuaţia generală carteziană a unui plan	23
Ecuaţia generală a unui plan ce trece prin origine	25
Ecuaţiile planelor de coordonate	25
Ecuaţia unui plan ce trece printr-un punct şi este perpendicular pe un vector nenul	25
Ecuaţia unui plan ce trece printr-un punct şi este paralel cu doi vectori nenuli şi necolineari	26
Ecuaţiile parametrice ale unui plan ce trece printr-un punct şi este paralel cu doi vectori nenuli şi necolineari	26
Ecuaţia unui plan determinat de trei puncte necoliniare	27
Ecuaţia planului prin tăieturi	28
Ecuaţia unui plan ce trece prin două puncte şi este paralel cu un vector nenul	29
Ecuaţiile canonice ale unei drepte	30
Ecuaţiile parametrice ale unei drepte	31
Ecuaţiile canonice ale unei drepte determinate de două puncte distincte	32
Ecuaţiile generale ale dreptei de intersecţie a două plane neparalele şi neconfundate	33
Ecuaţiile canonice ale dreptei de intersecţie a două plane neparalele şi neconfundate	34
Ecuaţia unui fascicul de plane	35

Pagina

Ecuaţiile generale ale perpendicularei comune a două drepte în spaţiu	47
Ecuaţia generală a unei conice	73
Ecuaţia canonică a unei elipse	65
Ecuaţiile parametrice ale unei elipse	66
Ecuaţia canonică a unei hiperbole	68
Ecuaţiile parametrice ale unei hiperbole	70
Ecuaţia canonică a parabolei	72
Ecuaţiile translaţiei în plan	76
Ecuaţiile rotaţiei de unghi α în plan	78
Ecuaţia canonică a unei conice cu centru	79
Ecuaţia canonică a unei conice fără centru	92
Ecuaţia generală a unei cuadrice	105
Ecuaţiile parametrice ale unui drum	145
Ecuaţiile parametrice ale unei pânze	203
Ecuaţiile canonice ale tangentei la o curbă în spaţiu definită parametric	159
Ecuaţiile canonice ale tangentei la o curbă în spaţiu definită implicit	160
Ecuaţia planului normal la o curbă în spaţiu definită parametric	159
Ecuaţia planului normal la o curbă în spaţiu definită implicit	160
Ecuaţia tangentei la o curbă plană definită implicit	162
Ecuaţia normalei la o curbă plană definită implicit	162
Ecuaţia planului osculator la o curbă în spaţiu	164
Ecuaţiile canonice ale binormalei la o curbă în spaţiu	164
Ecuaţiile generale ale normalei principale la o curbă în spaţiu	164
Ecuaţiile canonice ale normalei principale la o curbă în spaţiu	165
Ecuaţia planului rectifiant la o curbă în spaţiu	165
Ecuaţia înfăşurătoarei unei familii de curbe plane	186
Ecuaţiile parametrice ale evolutei unei curbe plane	189 190
Ecuaţia planului tangent la o suprafaţă	219, 221 222
Ecuaţiile canonice ale normalei la o suprafaţă	219, 221 222
Ecuaţia diferenţială a unei linii asimptotice pe o suprafaţă	245
Ecuaţia diferenţială a unei linii de curbură pe o suprafaţă	249
Ecuaţia diferenţială a unei linii geodezice pe o suprafaţă	256
Elipsă reală	63, 64
Elipsă imaginară	73
Elipsă colier	110
Elipsoid real	107
Elipsoid imaginar	105
Elipsoid de rotaţie	108
Elicea circulară	151
Evoluta unei curbe plane	189
Excentricitatea unei conice	63
Expresia analitică a unui vector liber	14
Expresia analitică a produsului scalar	16

	Pagina
Expresia analitică a produsului vectorial	18
Expresia analitică a produsului mixt	20
Expresia analitică a curburii unei curbe în spaţiu	173
Expresia analitică a curburii unei curbe plane definită parametric	174
Expresia analitică a curburii unei curbe plane definită explicit	174
Expresia analitică a torsiunii unei curbe în spaţiu	182
Expresia curburii totale a unei suprafeţe	242
Expresia curburii medii a unei suprafeţe	242
Fascicul de plane	35
Fascicul de plane paralele	36
Focarul unei conice	63
Foliul lui Descartes	148
Forma canonică a conicelor	73, 74
Forma canonică a cuadricelor	105
Formulele lui Frenet	181
Generatoare rectilinii	111
Generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză	111
Generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic	122
Geodezicele planului	257
Geodezicele sferei	258
Invarianţii unei conice	75
Interpretarea geometrică a curburii unei curbe	174
Interpretarea geometrică a torsiunii unei curbe	179
Înfăşurătoarea unei familii de curbe plane	186
Hiperbolă	63, 67
Hiperbolă echilateră	71
Hiperboloid cu o pânză	109
Hiperboloid cu două pânze	118
Linie asimptotică pe o suprafaţă	245
Linie de curbură pe o suprafaţă	249
Linie geodezică pe o suprafaţă	251
Lungimea unui drum parametrizat regulat	149
Lungimea unui drum parametrizat regulat situat pe o suprafaţă	226

	Pagina
Norma unui vector	7
Normala la un plan	24
Normala într-un punct la o suprafaţă	218
Normala principală la o curbă în spaţiu	164
Parabolă	63, 71
Paraboloidul eliptic	120
Paraboloidul eliptic de rotaţie	121
Paraboloidul hiperbolic	121
Parametrii directori ai direcţiei unei drepte	31
Parametrizare locală a unei curbe	153
Parametrizare locală a unei suprafeţe	210
Pânză parametrizată	203
Pânză parametrizată netedă	204
Pânză parametrizată simplă	204
Pânze parametrizate echivalente	206
Pereche de plane concurente	127
Pereche de plane paralele sau confundate	127
Perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă	44
Perpendiculara comună a două drepte în spaţiu	46, 47
Plane fundamentale (de bază) ale unui fascicul de plane	35
Plane perpendiculare	39
Plane paralele	39
Plane confundate	39
Planul normal la o curbă în spaţiu	159
Planul osculator la o curbă în spaţiu	163
Planul rectifiant la o curbă în spaţiu	165
Planul tangent într-un punct la o suprafaţă	218
Prima formulă a lui Frenet pentru curbe în spaţiu	178
Prima formă fundamentală a unei suprafeţe	226
Produsul scalar a doi vectori liberi	15
Produsul vectorial a doi vectori liberi	17
Produsul mixt a trei vectori liberi	19
Produsul unui vector liber cu un scalar	11
Proiecţia ortogonală a unei drepte pe un plan	40
Punct singular pentru un drum	148
Punct ombilical al unei suprafeţe	238
Punct eliptic al unei suprafeţe	243
Punct hiperbolic al unei suprafeţe	244
Punct parabolic al unei suprafeţe	244
Punct planar al unei suprafeţe	245
Raza de curbură a unei curbe	173
Raza de torsiune a unei curbe	179
Reper cartezian în spaţiu	13

	Pagina
Reperul lui Frenet	170
Reprezentare parametrică a unui drum	145
Reprezentare parametrică a unei pânze	203
Reprezentare parametrică normală a unui drum	150
Schimbare de parametru	148
Schimbare de parametrii	207
Semiaxele unei elipse	65
Semigeodezică	260
Sensul unui vector	7
Secţiunea normală într-un punct la o suprafaţă	234
Sferă	108
Spaţiu vectorial al vectorilor liberi	11
Spaţiul tangent într-un punct la o suprafaţă	218
Suma a doi vectori liberi	9
Suportul unui drum parametrizat	145
Suportul unei pânze parametrizate	203
Suprafaţă	209
Suprafaţă simplă	209
Suprafaţă orientabilă	223
Suprafaţă riglată	111
Tangenta la o curbă	158
Teorema lui Meusnier	235
Teorema lui Euler	238
Torsiunea unei curbe în spaţiu	179
Triedrul lui Frenet într-un punct al unei curbe în spaţiu	165
Unghiul dintre doi vectori liberi	14
Unghiul dintre două drepte	37
Unghiul dintre două plane	39
Unghiul dintre o dreaptă şi un plan	40,41
Unghiul de rotaţie al unei conice cu centru	
Unghiul de rotaţie al unei conice cu o infinitate de centre	93
Unghiul dintre două curbe situate pe o suprafaţă	228
Unghiul dintre două curbe coordonate pe o suprafaţă	229
Vârful unei parabole	93
Vector legat	7
Vector legat nul	7
Vector liber	9
Vector liber nul	9
Vector de poziţie	13

	Pagina
Vectori legaţi egali	7
Vectori liberi egali	11
Vectori legaţi echipolenţi	8
Vectori liberi coliniari	11
Vectori liberi coplanari	12
Vectori liberi ortogonali	15
Versorul unui vector	11
Versorii axelor de coordonate	13
Vectorul normal al unui plan	24
Vectorul director al unei drepte	31
Vector tangent într-un punct la o suprafaţă	218
Versorul tangentei la o curbă	159, 170
Versorul normalei principale la o curbă	170
Versorul binormalei la o curbă	170