Gavriil PĂLTINEANU Pavel MATEI

Ştefania DONESCU Mariana ZAMFIR

MATEMATICI SUPERIOARE 3

EDITURA CONSPRESS

Bucureşti 2014

Referenţi ştiinţifici: **Prof. univ. dr. Ileana Toma**
Prof. univ. dr. Angel Sever Popescu

P r e f a ţ ă

Acest curs este consacrat în principal prezentării rezultatelor de bază din teoria ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Numeroase fenomene şi procese din natură se modelează matematic prin ecuaţii diferenţiale sau prin ecuaţii cu derivate parţiale. Iată câteva dintre acestea: mişcarea unui punct material într-un câmp conservativ, vibraţiile unui sistem oscilant, căderea liberă a corpurilor, deplasarea unei membrane elastice sub acţiunea unei încărcări continue, propagarea căldurii într-o bară, dezintegrarea radioactivă, creşterea populaţiei, diverse reacţii chimice, etc.

Primele contribuţii notabile în teoria ecuaţiilor diferenţiale aparţin creatorilor calculului diferenţial şi integral, I. Newton şi G.W. Leibniz.

Abordând structural problemele de dimanică a punctului material, Newton a descoperit legea a doua a mecanicii: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\,\vec{v}}{d\,t}$ care este o ecuaţie diferenţială. Leibniz a fost condus la studiul ecuaţiilor deferenţiale de o problemă de geometrie, şi anume: determinarea unei curbe plecând de la unele proprietăţi ale tangentei la curbă. Leibniz este cel care a introdus în matematică termenul de ecuaţie diferenţială.

Prima definiţie clară a ecuaţiei deferenţiale a fost dată de L. Euler. După Euler, o ecuaţie diferenţială este o relaţie între x, y şi $p = y'(x)$ şi rezolvarea ei constă în găsirea unei relaţii între x şi y care să nu-l mai conţină pe p.

Lista matematicienilor care au contribuit esenţial la dezvoltarea acestui domeniu mai cuprinde pe: fraţii Johann şi Daniel Bernoulli, Laplace, Lagrange, Cauchy, Fourier, Poincaré, Picard, Liapunov, Voltera, etc.

Acest curs se adresează în principal studenţilor din anul II ai Facultăţii de Geodezie din Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti, dar, în egală măsură, este util studenţilor din orice universitate tehnică, precum şi doctoranzilor.

Dintre problemele studiate în lucrarea de faţă şi care nu se găsesc în mod curent într-un curs clasic de Matematici Speciale amintim: prezentarea expresiilor operatorilor diferenţiali (gradient, divergenţă, laplacian), în coordonate curbilinii, un studiu destul de amănunţit al polinoamelor Legendre şi al funcţiilor Legendre, prezentarea noţiunii de soluţie slabă a unei ecuaţii cu derivate parţiale, rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă cu metoda separării variabilelor, etc.

Fiecare capitol conţine exemple rezolvate complet care asigură o bună înţelegere a teoriei. Am fost preocupaţi continuu pentru a păstra un echilibru între rigoare şi accesibilitate.

Mulţumim referinţilor ştiinţifici: Prof. univ. dr. mat. Ileana TOMA şi Prof. univ. dr. mat. Angel Sever POPESCU, pentru grija cu care au citit manuscrisul, pentru observaţiile şi aprecierile făcute.

Bucureşti, Aprilie 2014

Autorii

Cuprins

PREFAŢĂ **3**

CUPRINS **5**

1. ELEMENTE DE TEORIA CÂMPULUI **9**

1.1. Câmpuri scalare. Derivata după o direcţie. Gradientul unui câmp scalar 9

1.2. Câmpuri vectoriale. Flux. Divergenţă. Formula Gauss 15

1.3. Circulaţia unui câmp vectorial. Rotor. Formula Stokes 22

1.4. Coordonate curbilinii. Expresiile operatorilor diferenţiali de ordinul întâi în coordonate curbilinii 28

2. ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL ÎNTÂI **37**

2.1. Introducere. Generalităţi 37

2.2. Ecuaţii diferenţiale. Soluţie generală. Soluţie particulară 38

2.3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Interpretarea geometrică a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi 40

2.4. Condiţii iniţiale. Problema Cauchy 41

2.5. Ecuaţii diferenţiale de ordinul I integrabile prin metode elementare 43

2.6. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi nerezolvate în raport cu y', integrabile prin metode elementare 65

2.7. Traiectorii izogonale. Traiectorii ortogonale 71

2.8. Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi 73

2.9. Metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard. Integrarea aproximativă a unei ecuaţii diferenţiale 79

3. ECUAŢII DIFEREŢIALE DE ORDIN SUPERIOR **83**

3.1. Introducere. Generalităţi 83

3.2. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior integrabile prin cuadraturi 84

3.3. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi omogene 92

3.4. Construcţia ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordinul n de sistem fundamental dat 101
3.5. Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare şi omogene 103
3.6. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi neomogene 104
3.7. Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange 106
3.8. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi omogene cu coeficienţi constanţi 110
3.9. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi neomogene cu coeficienţi constanţi 117
3.10. Ecuaţii diferenţiale de tip Euler 124

4. SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE 129

4.1. Sisteme de ecuaţii diferenţiale. Proprietăţi generale 129
4.2. Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare 146
4.3. Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange 154
4.4. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi 158

5. ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL ÎNTÂI 169

5.1. Integrale prime. Sisteme simetrice de ecuaţii diferenţiale 169
5.2. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare şi omogene 175
5.3. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniare 180

6. ELEMENTE DE TEORIA FUNCŢIILOR COMPLEXE 185

6.1. Numere complexe 185
6.2. Şiruri şi serii de numere complexe 188
6.3. Funcţii elementare 191
6.4. Funcţii olomorfe 194
6.5. Integrala funcţiilor de o variabilă complexă 203
6.6. Şiruri şi serii de funcţii complexe 210
6.7. Serii de puteri 211
6.8. Serii Taylor 212
6.9. Serii Laurent 216
6.10. Puncte singulare. Reziduuri 222

7. SERII FOURIER 231

7.1. Serii trigonometrice 231

7.2. Serii Fourier 235

7.3. Serii Fourier pentru funcţii de perioadă arbitrară ($T = 2l$) 241

7.4. Forma complexă a seriilor Fourier 243

7.5. Serii Fourier generalizate 244

7.6. Polinoame Legendre 251

8. TRANSFORMATA FOURIER 261

8.1. Formula integrală Fourier 261

8.2. Transformata Fourier 263

8.3. Transformatele Fourier prin cos şi sin 270

8.4. Proprietăţile transformatei Fourier 273

9. TRANSFORMATA LAPLACE 277

9.1. Definiţiile de bază 277

9.2. Proprietăţile transformatei Laplace 283

9.3. Determinarea funcţiei original pornind de la transformata Laplace 291

9.4. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi cu ajutorul transformatei Laplace 296

10. ECUAŢIILE CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL DOI 301

10.1. Introducere. Generalităţi 301

10.2. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniare. Clasificare 304

10.3. Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip hiperbolic 308

10.4. Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip parabolic 312

10.5. Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip eliptic 315

10.6. Problema Cauchy pentru coarda infinită. Soluţia lui D'Alembert 317

10.7. Coarda vibrantă cu capete fixe. Metoda Fourier 321

10.8. Studiul vibraţiilor forţate ale unei coarde finite cu capete fixe 334

10.9. Ecuaţia propagării căldurii într-o bară 339

10.10. Metoda Fourier pentru ecuaţia căldurii 341

10.11. Problema Cauchy pentru ecuaţia căldurii 347

10.12. Probleme la limită pentru ecuaţii eliptice. Soluţii fundamentale pentru ecuaţia Laplace. Formule Green 351
10.13. Formula celor trei potenţiale 355
10.14. Proprietăţile funcţiilor armonice 359
10.15. Problema Dirichlet interioară pentru cerc 362
10.16. Funcţii Green. Rezolvarea problemei Dirichlet cu ajutorul funcţiei Green 367
10.17. Rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă 369
10.18. Rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă cu metoda separării variabilelor 371

11. ELEMENTE DE CALCUL VARIAŢIONAL 387

11.1. Introducere 387
11.2. Extreme ale funcţionalelor. Variaţia întâi a unei funcţionale. Teorema lui Fermat 390
11.3. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$ 397
11.4. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(y,z)=\int_a^b F(x,y,z,y',z')\,dx$ 407
11.5. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(y)=\int_a^b F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)dx$ 410
11.6. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(u)=\iint_D F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy$ 413
11.7. Extreme condiţionate ale funcţionalelor 417

BIBLIOGRAFIE 421

INDEX 423

C A P I T O L U L 1

ELEMENTE DE TEORIA CÂMPULUI

1.1. Câmpuri scalare. Derivata după o direcţie. Gradientul unui câmp scalar

Un câmp reprezintă o distribuţie de valori ale unei mărimi fizice. Cum mărimile fizice sunt scalare sau vectoriale şi câmpurile sunt scalare sau vectoriale.

Definiţia 1.1.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. Prin *câmp scalar* pe Ω se înţelege orice funcţie scalară $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Dacă în plus $u \in C^k(\Omega)$, atunci spunem că u este un *câmp scalar de clasă* C^k pe Ω.

Exemple de câmpuri scalare sunt: câmpul temperaturilor, câmpul presiunilor, câmpul densităţilor, etc.

Definiţia 1.1.2. Prin *suprafaţă de nivel* a câmpului scalar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se înţelege mulţimea punctelor din Ω în care u ia aceeaşi valoare. Aşadar, ecuaţia suprafeţei de nivel este:

$$u(x, y, z) = C \text{, unde } C \text{ este o constantă.}$$

Exemplul 1.1.1. Să se găsească suprafeţele de nivel ale câmpului:

$u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Conform definiţiei avem:

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C$ sau

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2. \qquad \textbf{(1.1)}$$

Evident, (1.1) este ecuaţia unei sfere cu centrul în origine şi de rază C.

Dacă $\Omega = D \subset \mathbb{R}^2$, atunci câmpul $u : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *câmp scalar plan*.

Definiţia 1.1.3. Se numeşte *linie de nivel* a câmpului scalar plan $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mulţimea punctelor din D în care u ia aceeaşi valoare.

Ecuaţiile liniilor de nivel sunt:

$$u(x,y)=C\text{, unde } C \text{ este o constantă.}$$

Exemplul 1.1.2. Să se afle liniile de nivel ale câmpului scalar plan

$u(x,y)=x^2-y^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$

Conform definiţiei precedente, ecuaţiile liniilor de nivel sunt:

$$x^2-y^2=C. \qquad \textbf{(1.2)}$$

Dacă $C=0$, (1.2) reprezintă perechea de drepte: $y=\pm\ x$.

Dacă $C\neq 0$, (1.2) reprezintă o familie de hiperbole, reprezentate în Fig. 1.1.

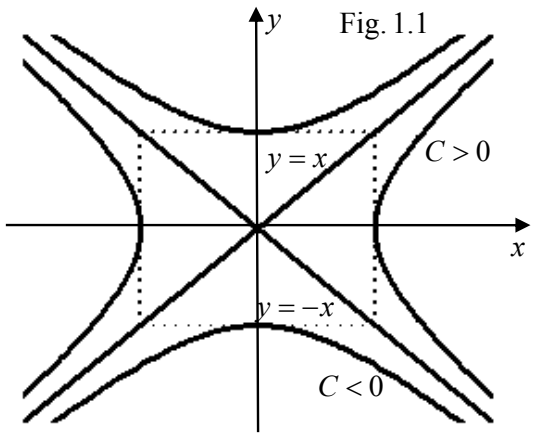


Fig. 1.1

În cazul concret al câmpului scalar plan al temperaturilor (presiunilor), liniile de nivel reprezintă izotermele (izobarele).

Fie $u:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ un câmp scalar, $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ şi

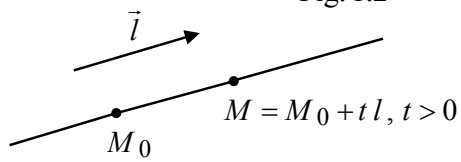
$\vec{l}=\cos\alpha\ \vec{i}+\cos\beta\ \vec{j}+\cos\gamma\ \vec{k}$

un versor. Dacă presupunem că Ω este o mulţime deschisă, atunci există $r>0$ astfel încât bila deschisă cu centrul în M_0 şi de rază r,

$$B(M_0,r)=\left\{M(x,y,z);\ d(M_0,M)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\ <r\right\}\subset\Omega.$$

Observăm că dacă $|t|<r$, atunci punctul $M=M_0+t\,l\in\Omega$. Într-adevăr, $d(M_0,M)=$ $=\|t\,l\|=|t|<r$, deci $M\in B(M_0,r)\subset\Omega$. Din punct de vedere geometric, mulţimea punctelor $M=M_0+t\,l$, $t\in\mathbb{R}$, reprezintă dreapta care trece prin M_0 şi este paralelă cu versorul $\vec{l}$.

Fig. 1.2



Definiţia 1.1.4. Spunem că funcţia $u:\Omega \to \mathbb{R}$ este *derivabilă în punctul* $M_0 \in \Omega$ *după direcţia* $\vec{l}$, dacă următoarea limită există şi este finită:

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(M_0 + t\,l) - u(M_0)}{|t|} = \lim_{d(M_0, M)\to 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{d(M_0, M)}, \text{ unde } \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{l}.$$

Această limită se notează cu $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ şi se numeşte *derivata funcţiei* u *în punctul* M_0 *după direcţia* $\vec{l}$.

Notăm cu:

$$\frac{\partial u}{\partial l^+} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{u(M_0 + t\,l) - u(M_0)}{|t|} \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial l^-} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{u(M_0 + t\,l) - u(M_0)}{|t|}.$$

Evident, $\frac{\partial u}{\partial l^+}(M_0) = \lim_{t\to 0} \frac{u(M_0 + t\,l) - u(M_0)}{t}$ şi $\frac{\partial u}{\partial l^-} = -\frac{\partial u}{\partial l^+}$.

Observaţia 1.1.1. Definiţia 1.1.4 generalizează noţiunea de derivată parţială. Într-adevăr, dacă $\vec{l} = \vec{i}$ $\big($i.e. $l = (1,\ 0,\ 0)\big)$, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial i^+}(M_0) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0 + t, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0).$$

În mod analog, $\frac{\partial u}{\partial j^+} = \frac{\partial u}{\partial y}$ şi $\frac{\partial u}{\partial k^+} = \frac{\partial u}{\partial z}$, unde $j = (0,\ 1,\ 0)$ şi $k = (0,\ 0,\ 1)$.

Teorema 1.1.1. Dacă u este diferenţiabilă în punctul $M_0 \in \Omega$, atunci u este derivabilă în M_0 după direcţia versorului $\vec{l} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}$ şi

$$\frac{\partial u}{\partial l^+}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma.$$

Demonstraţie. Fie $r > 0$ astfel încât $B(M_0, r) \subset \Omega$. Deoarece u este diferenţiabilă în punctul M_0 rezultă că:

$$u(M_0+t\,l)-u(M_0)=du(M_0)(t\,l)+\varphi(t\,l)$$

unde φ este un $O(h)$, adică $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(h)}{\|h\|}=0$. Cum

$$du(M_0)(t\,l)=t\;du(M_0)(l)=t\left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma\right)$$

vom avea

$$\lim_{t\to 0}\frac{u(M_0+t\,l)-u(M_0)}{t}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma+\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t\,l)}{\|t\,l\|}.$$

Ţinând seama că $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi(t\,l)}{\|t\,l\|}=0$, deducem că există

$$\frac{\partial u}{\partial l^+}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma.$$

Exemplul 1.1.3. Fie $u(x,y,z)=x\,y\,z$, $M_0=(1,-1,1)$ şi $\vec{l}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{i}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{j}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{k}$.

Să se calculeze $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$.

Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\,z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=z\,x,\ \frac{\partial u}{\partial z}=x\,y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,-1,1)=-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}(1,-1,1)=1,\ \frac{\partial u}{\partial z}(1,-1,1)=-1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(1,-1,1)=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$$

Exemplul 1.1.4. Fie $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0=(1,\,1,\,1)$ şi $l=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}},0\right)$.

Să se calculeze $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M_0)$.

Avem succesiv:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1,1)=\frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1)=\frac{\partial u}{\partial z}(1,1,1)=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ şi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(1,1,1)=\frac{2}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Definiţia 1.1.5. Fie $u:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1. Se numeşte *gradientul* câmpului u în punctul $M_0\in\Omega$ şi se notează cu $\operatorname{grad}_{M_0}u$, următorul vector:

$$\operatorname{grad}_{M_0}u=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\,\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\,\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\,\vec{k}.$$

Reamintim că produsul scalar a doi vectori liberi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se defineşte astfel:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\alpha$, unde α este unghiul dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Dacă folosim expresiile analitice ale vectorilor, anume:

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ şi $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, atunci $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Cu aceste precizări din Teorema 1.1.1 rezultă că:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\vec{l}\cdot\operatorname{grad}_{M_0}u. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Dacă notăm cu α unghiul dintre vectorii $\vec{l}$ şi $\operatorname{grad}_{M_0}u$, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\|\operatorname{grad}_{M_0}u\|\cos\alpha. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Din (1.4) deducem că valoarea maximă a derivatei câmpului u după direcţia $\vec{l}$ se obţine atunci când $\vec{l}$ şi $\operatorname{grad}_{M_0}u$ sunt coliniari $(\alpha=0)$. Aşadar, avem:

$$\max_l\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\|\operatorname{grad}_{M_0}u\|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right)^2}. \qquad \textbf{(1.5)}$$

Exemplul 1.1.5. Fie $u(x,y,z)=xy+yz+zx$ şi $M_0=(1,1,1)$.

Să se afle $\max\limits_l\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$.

Avem succesiv:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=z+x,\ \frac{\partial u}{\partial z}=x+y \text{ şi } \operatorname{grad}_{M_0}u=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}.$$

Conform (1.5), $\max\limits_l\frac{\partial u}{\partial l}(1,1,1)=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$.

Observaţia 1.1.2. Fie $u:\Omega\to\mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1, $M_0\in\Omega$, γ o curbă netedă care trece prin M_0, inclusă în Ω şi $\vec{\tau}$ versorul tangentei în M_0 la γ (Fig. 1.3).

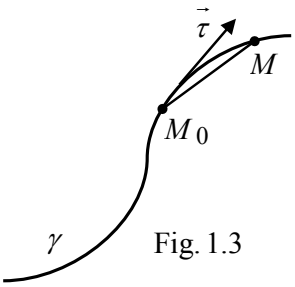


Fig. 1.3

Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(M_0)=\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in\gamma}}\frac{u(M)-u(M_0)}{d(M_0,M)}.$$

Într-adevăr,

$$\frac{u(M)-u(M_0)}{d(M_0,M)}=\frac{du(M_0)(M-M_0)}{\|M-M_0\|}+\frac{\varphi(M-M_0)}{\|M-M_0\|}. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Cu precizarea că dacă $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ şi $M=(x,y,z)$, atunci

$M-M_0=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$,

$\|M-M_0\|=d(M_0,M)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ şi

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi(M-M_0)}{\|M-M_0\|}=0.$$

Pe de altă parte, este clar că:

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in\gamma}} du(M_0)\left(\frac{M-M_0}{\|M-M_0\|}\right)=du(M_0)\left(\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in\gamma}}\frac{M-M_0}{\|M-M_0\|}\right)=du(M_0)(\tau)$$

unde $\vec{\tau}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$.

Rezultă că

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in\gamma}}\frac{u(M)-u(M_0)}{d(M_0,M)}=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma=\frac{\partial u}{\partial \tau}(M_0).$$

Observaţia 1.1.3. Dacă $u\in C^1(D)$, atunci $\operatorname{grad} u$ este perpendicular pe orice suprafaţă de nivel (respectiv, linie de nivel în cazul plan) a câmpului u.

Într-adevăr, fie suprafaţa de nivel $S: u(x,y,z)=C$ şi $M \in S$. Fie, de asemenea, γ o curbă pe suprafaţa S care trece prin punctul M şi $\vec{\tau}$ versorul tangentei în M la γ. Pentru orice $M' \in \gamma$ avem:

$$u(M')=u(M)=C.$$

Din Observaţia 1.1.2 rezultă că

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(M)=\lim_{\substack{M'\to M\\ M'\in\gamma}}\frac{u(M')-u(M)}{d(M,M')}=0.$$

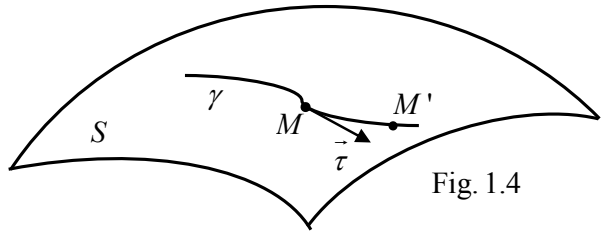


Fig. 1.4

Cum

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(M)=\vec{\tau}\cdot \operatorname{grad}_M u=0,$$

deducem că $\operatorname{grad}_M u \perp \vec{\tau}$, deci $\operatorname{grad}_M u$ este perpendicular pe planul tangent în M la suprafaţa S, deci pe suprafaţa S.

Ţinând seama de regulile de derivare, deducem cu uşurinţă următoarele proprietăţi ale gradientului:

1) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v$

2) $\operatorname{grad}(\alpha u)=\alpha \operatorname{grad} u$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}$

3) $\operatorname{grad}(u v)=v \operatorname{grad} u+u \operatorname{grad} v$

4) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v \operatorname{grad} u-u \operatorname{grad} v}{v^2}$, $v \neq 0$

5) $\operatorname{grad} F(u)=F'(u) \operatorname{grad} u$, unde $F \in C^1(\mathbb{R})$.

1.2. Câmpuri vectoriale. Flux. Divergenţă. Formula Gauss

Definiţia 1.2.1. Se numeşte *câmp vectorial* orice funcţie vectorială $\vec{V}:\Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Dacă notăm cu P, Q şi R componentele scalare ale câmpului $\vec{V}$, atunci

$$\vec{V}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k},\ (x,y,z)\in\Omega.$$

Dacă P, Q, R sunt de clasă C^p pe Ω, spunem că $\vec{V}$ este un *câmp vectorial de clasă* C^p pe Ω.

Exemple de câmpuri vectoriale sunt: câmpul forţelor, câmpul vitezelor particulelor unui fluid în mişcare, câmpul newtonian, etc.

În continuare prezentăm câmpul newtonian.

Fie O un punct fixat, $M \neq O$ şi $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Dacă notăm cu $\vec{V}(M)$ vectorul atracţiei exercitată de O asupra punctului M, atunci câmpul newtonian $\vec{V}$ se defineşte astfel:

$\vec{V}(M) = -\dfrac{k}{r^2}\vec{\rho}$, unde $r = \|\vec{r}\|$ şi $\vec{\rho} = \dfrac{1}{r}\vec{r}$ este versorul lui $\vec{r}$. Aşadar avem:

$$\vec{V}(M) = -\frac{k}{r^3}\vec{r},\ (\forall)\ M \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}.$$

Dacă alegem un reper ortogonal $Oxyz$, atunci

$$\vec{V}(x,y,z) = -\frac{k}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right),\ (\forall)\ (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Evident, câmpul newtonian $\vec{V}$ este un câmp de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Definiţia 1.2.2. Un câmp vectorial $\vec{V} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se numeşte *de potenţial*, dacă există un câmp scalar $u : \Omega \to \mathbb{R}$, de clasă C^1 astfel încât $\vec{V} = \text{grad}\ u$.

Dacă $\vec{V} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$, atunci condiţia de mai sus revine la

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Exemplul 1.2.1. Câmpul vectorial $\vec{V} = y^2 z^3\,\vec{i} + 2xyz^3\,\vec{j} + 3xy^2z^2\,\vec{k}$ este un câmp de potenţial pe $\mathbb{R}^3$, deoarece

$\vec{V} = \text{grad}\ u$, unde $u(x,y,z) = xy^2z^3$.

Fie S o suprafaţă netedă sau netedă pe porţiuni, bilateră, pentru care s-a ales o faţă. Fie $\vec{n}$ versorul normalei la suprafaţă care corespunde feţei alese. Fie de asemenea $\vec{V} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ un câmp vectorial continuu, definit pe o mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ care conţine suprafaţa S.

Definiţia 1.2.3. *Fluxul* câmpului $\vec{V}$ prin suprafaţa orientată S este prin definiţie următoarea integrală de suprafaţă de speţa întâi:

$$\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\ d\sigma.$$

În cazul particular al câmpului vectorial al vitezelor unui fluid în curgere staţionară ($\vec{V}(M)$ este viteza particulei de fluid în punctul M şi nu depinde de timp), fluxul acestui câmp vectorial reprezintă cantitatea de fluid care trece prin suprafaţa S, în unitatea de timp, în sensul versorului $\vec{n}$ care defineşte faţa aleasă a suprafeţei.

Exemplul 1.2.2. Să se afle fluxul câmpului $\vec{V} = \vec{i}$ printr-o suprafaţă de forma unui dreptunghi de laturi 1 şi 2, perpendiculară pe axa Ox, în sensul pozitiv al axei Ox (Fig. 1.5).

Conform Definiţiei 1.2.3 avem:

$$\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma .$$

În acest caz, $\vec{V} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, deci

$$\Phi = \iint_S d\sigma = \text{Aria}(S) = 2 .$$

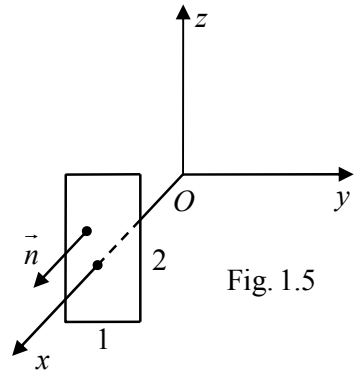


Fig. 1.5

Exemplul 1.2.3. Să se afle fluxul câmpului $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin faţa exterioară a unui cilindru circular drept de înălţime h, rază R şi cu axa de simetrie Oz (Fig. 1.6).

Fie S_1 suprafaţa laterală a cilindrului, S_2 baza superioară şi S_3 baza inferioară. Evident, suprafaţa totală este $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ şi

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n_1}\, d\sigma + \iint_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n_2}\, d\sigma + \iint_{S_3} \vec{V} \cdot \vec{n_3}\, d\sigma .$$

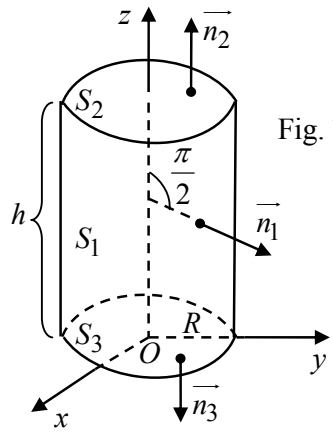


Fig. 1.6

Cum versorul normalei exterioare $\vec{n_1}$ la S_1 este paralel cu planul xOy, rezultă că dacă $(x, y, z) \in S_1$, atunci $\vec{V} \cdot \vec{n_1} = R$ şi

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n_1}\, d\sigma = R \cdot \text{Aria}(S_1) = R \cdot 2\pi R h = 2\pi R^2 h .$$

Evident, versorul normalei exterioare la S_2 este $\vec{n_2} = \vec{k}$ şi $\vec{V} \cdot \vec{n_2} = h$. Aşadar

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{V} \cdot \overrightarrow{n_2}\, d\sigma = h \cdot \text{Aria}\left(S_2\right) = \pi R^2 h .$$

În sfârşit, observăm că $\overrightarrow{n_3} = -\vec{k}$ şi dacă $\left(x, y, z\right) \in S_3$, atunci $\vec{V} \cdot \overrightarrow{n_3} = 0$, de unde rezultă că $\Phi_3 = 0$.

În consecinţă, fluxul căutat este $\Phi = 3\pi R^2 h$.

Exemplul 1.2.4. Să se afle fluxul câmpului vectorial $\vec{V} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ prin suprafaţa superioară a emisferei $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ (Fig. 1.7).

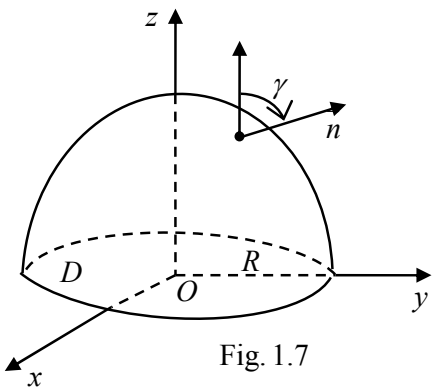


Fig. 1.7

Suprafaţa S este graficul funcţiei

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ ,\ \left(x, y\right) \in D$$

unde $D : x^2 + y^2 \leq R^2$.

Parametrii directori ai normalei la suprafaţă sunt $-p$, $-q$ şi 1, unde $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Prin urmare, avem:

$$p = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},\ q = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} .$$

Versorul normalei la suprafaţă, corespunzător feţei superioare este:

$\vec{n} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}$, $\cos\gamma > 0$.

În continuare, avem:

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2};\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{x}{R};\ \cos\beta = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{y}{R}, \text{ deci}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_S \left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right) d\sigma =$$

$$= \iint_D \left(\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \right) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

Pentru calculul ultimei integrale trecem la coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \ \theta \in [0,\, 2\pi],\ \rho \in [0,\, R]$$

şi obţinem

$$\Phi = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho = R^2 \cdot 2\pi \cdot \left(-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right)\Big|_0^R = 2\,\pi\, R^3.$$

Definiţia 1.2.4. Fie $\vec{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$, $(x,y,z) \in \Omega$, un câmp vectorial de clasă C^1.

Se numeşte *divergenţa* câmpului $\vec{V}$ şi se notează cu $\operatorname{div} \vec{V}$, următorul câmp scalar:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Câmpul $\vec{V}$ se numeşte *solenoidal* (*tubular*) dacă $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

Ţinând seama de regulile de derivare, rezultă imediat următoarele proprietăţi:

1) $\operatorname{div}\left(\alpha_1 \vec{V_1} + \alpha_2 \vec{V_2}\right) = \alpha_1 \operatorname{div} \vec{V_1} + \alpha_2 \operatorname{div} \vec{V_2}$, $(\forall)\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2) $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, dacă $\vec{a}$ este un vector constant

3) $\operatorname{div}\left(u\,\vec{V}\right) = u \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} u$, pentru orice funcţie scalară u de clasă C^1.

Exemplul 1.2.5. Să se afle divergenţa câmpului $\vec{V} = \varphi(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}$, unde $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ şi $r = \left\|\vec{r}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Conform proprietăţii 3) avem:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\varphi(r)}{r} \cdot \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r}, \text{ unde}$$

$\operatorname{div} \vec{r} = 1 + 1 + 1 = 3$ şi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right) = \frac{\varphi'(r) \cdot \dfrac{\partial r}{\partial x} \cdot r - \varphi(r) \cdot \dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}.$$

Cum $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, rezultă că

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$ şi mai departe:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)=\frac{x\,\varphi'(r)-\dfrac{x\,\varphi(r)}{r}}{r^2}=\frac{x}{r^3}\left(r\,\varphi'(r)-\varphi(r)\right).$$

În mod analog, avem:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)=\frac{y}{r^3}\left(r\varphi'(r)-\varphi(r)\right) \text{ şi } \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)=\frac{z}{r^3}\left(r\varphi'(r)-\varphi(r)\right), \text{ deci}$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)=\frac{\left(r\varphi'(r)-\varphi(r)\right)}{r^3}\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right)=\frac{\left(r\varphi'(r)-\varphi(r)\right)}{r^3}\cdot\vec{r} \text{ şi}$$

$$\operatorname{div}\vec{V}=3\,\frac{\varphi(r)}{r}+\frac{r\varphi'(r)-\varphi(r)}{r^3}\cdot r^2=\frac{2\varphi(r)}{r}+\varphi'(r).$$

Reamintim formula Gauss – Ostrogradsky:

Fie $\mathrm{T}\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu cele trei axe de coordonate sau o reuniune finită de astfel de domenii, care nu au puncte interioare comune şi fie $P,\ Q,\ R$ trei funcţii reale continue împreună cu derivatele lor $\frac{\partial P}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial z}$ pe $\overline{T}$. Presupunem, de asemenea, că $S=\overline{T}\setminus T$ (frontiera lui T) este o suprafaţă netedă pe porţiuni. Atunci

$$\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_{S_e}P(x,y,z)\,dy\,dz+Q(x,y,z)\,dz\,dx+R(x,y,z)\,dx\,dy$$

unde cu S_e s-a notat faţa exterioară a suprafeţei S.

Dacă notăm cu $\vec{V}$ câmpul vectorial de componente scalare $P,\ Q,\ R$, adică

$$\vec{V}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$$

şi cu $\vec{n}$ versorul normalei exterioare la suprafaţa S, atunci formula Gauss – Ostrogradski capătă forma vectorială:

Teorema 1.2.1.

$$\iiint_T \operatorname{div}\vec{V}\,dx\,dy\,dz=\iint_S\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

Sub această formă, formula Gauss – Ostrogradski este cunoscută sub numele de *formula flux – divergenţă*.

Exemplul 1.2.6. Să se calculeze fluxului câmpului $\vec{V} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ prin faţa exterioară a cubului $T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a \right\}$.

În acest caz S este reuniunea celor şase feţe ale cubului, iar faţa exterioară a sa corespunde normalei orientată spre exterior.

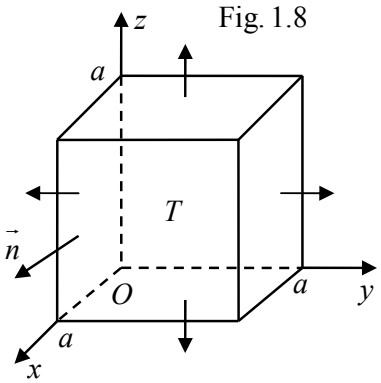


Fig. 1.8

Din Teorema 1.2.1 rezultă

$$\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \vec{V}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_T (2x + 2y + 2z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z)\, dz = 2\int_0^a dx \int_0^a \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^a dy =$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2} \right) dy = 2\int_0^a \left(axy + a\,\frac{y^2}{2} + \frac{a^2}{2}\,y \right)\Bigg|_0^a dx =$$

$$= 2\int_0^a \left(a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) dx = 2\left(a^2\,\frac{x^2}{2} + a^3 x \right)\Bigg|_0^a = 3a^4 .$$

Observaţia 1.2.1. Definiţia divergenţei unui câmp vectorial este independentă de sistemul de coordonate ales.

Într-adevăr, fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe Ω şi $M \in \Omega$. Fie de asemenea $\{T_n\}$ un şir de domenii elementare (domenii simple în raport cu cele 3 axe sau reuniuni finite de astfel de domenii care nu au puncte interioare comune), închise în Ω cu proprietatea că $M \in T_n$, $(\forall)\ n$.

Din Teorema 1.2.1 deducem că:

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(T_n)} \cdot \iint_{S_n} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \frac{1}{\operatorname{Vol}(T_n)} \cdot \iiint_{T_n} \operatorname{div} \vec{V}\, dx\, dy\, dz .$$

Ţinând seama de teorema de medie pentru integrala triplă, rezultă că există $A_n, B_n, C_n \in T_n$ astfel încât

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{V}\, dx\, dy\, dz = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz + \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz + \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \left[\frac{\partial P}{\partial x}(A_n) + \frac{\partial Q}{\partial y}(B_n) + \frac{\partial R}{\partial z}(C_n) \right] \cdot \operatorname{Vol}(T_n).$$

In continuare, avem:

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}(T_n)} \cdot \iint_{S_n} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \frac{\partial P}{\partial x}(A_n) + \frac{\partial Q}{\partial y}(B_n) + \frac{\partial R}{\partial z}(C_n).$$

Dacă $\operatorname{diam}(T_n) \to 0$, atunci $A_n \to M$, $B_n \to M$, $C_n \to M$ şi deoarece $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ sunt continue, deducem că:

$$\operatorname{div}_M \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Vol}(T_n)} \cdot \iint_{S_n} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

deci depinde numai de $\vec{V}$ şi M.

1.3. Circulaţia unui câmp vectorial. Rotor. Formula Stokes

Definiţia 1.3.1. Fie γ o curbă închisă, netedă pe porţiuni şi $\vec{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^0 pe un domeniu Ω care conţine curba γ.

Se numeşte *circulaţia* câmpului $\vec{V}$ în lungul curbei γ următoarea integrală curbilinie de speţa a doua:

$$\oint_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz.$$

Exemplul 1.3.1. Să se afle circulaţia câmpului vectorial $\vec{V} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + zx\,\vec{k}$ în lungul curbei:

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

Curba γ este elipsa de intersecţie dintre planul $x+y+z=1$ şi cilindrul $x^2+y^2=1$.

Alegând $x=\cos t$, $y=\sin t$, rezultă $z=1-\cos t-\sin t$, deci reprezentarea parametrică a curbei γ este:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1-\cos t-\sin t \end{cases}, \; t\in[0,\, 2\pi].$$

Mai departe avem:

$$\oint_\gamma \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\Big[\cos t\sin t(-\sin t)+\sin t(1-\cos t-\sin t)\cos t+$$

$$+(1-\cos t-\sin t)\cos t(\sin t-\cos t)\Big]\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2\sin t\cos t-3\sin^2 t\cos t-\cos^2 t-\cos^2 t\sin t+\cos^3 t\right)dt=$$

$$=2\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}-3\cdot\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt+\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi}+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)\cos t\,dt=-\pi.$$

Definiţia 1.3.2. Fie $\vec{V}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe domeniul $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

Se numeşte *rotorul* câmpului $\vec{V}$ în punctul $M\in\Omega$ şi se notează cu $\mathrm{rot}_M\vec{V}$, următorul vector:

$$\mathrm{rot}_M\vec{V}=\left[\frac{\partial R}{\partial y}(M)-\frac{\partial Q}{\partial z}(M)\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial P}{\partial z}(M)-\frac{\partial R}{\partial x}(M)\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(M)-\frac{\partial P}{\partial y}(M)\right]\vec{k}.$$

Definiţia rotorului se poate reţine uşor cu ajutorul următorului determinant formal:

$$\mathrm{rot}\,\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Exemplul 1.3.2. Să se afle rotorul câmpului $\vec{V}=(x+z)\,\vec{i}+(y+z)\,\vec{j}+\left(x^2+z\right)\vec{k}$.

Avem: $P=x+z$; $Q=y+z$; $R=x^2+z$, deci

$\operatorname{rot}\vec{V}=(0-1)\,\vec{i}+(1-2x)\,\vec{j}+(0-0)\vec{k}=-\vec{i}+(1-2x)\vec{j}$.

Definiţia 1.3.3. Câmpul $\vec{V}$ se numeşte *irotaţional* în Ω dacă $\operatorname{rot}_M\vec{V}=\vec{0},\ (\forall)\ M\in\Omega$.

Exemplul 1.3.3. Fie $\vec{V}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\,\vec{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$. Să se arate că $\vec{V}$ este irotaţional în $\mathbb{R}^3$, mai puţin punctele de pe axa Oz.

Avem: $P=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $R=0$ şi

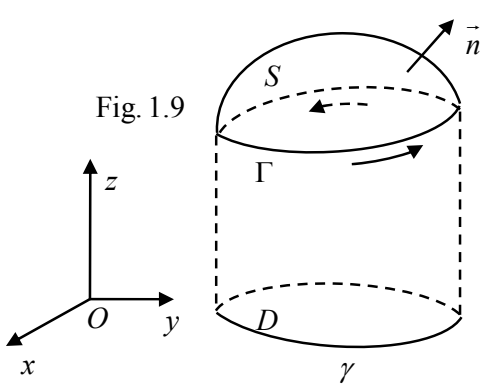
$$\operatorname{rot}\vec{V}=(0-0)\,\vec{i}+(0-0)\,\vec{j}+\left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\vec{k}=0\,\vec{i}+0\,\vec{j}+0\,\vec{k}=\vec{0}.$$

Reamintim formula lui Stokes:

Pentru început considerăm o suprafaţă netedă explicită S, adică graficul unei funcţii $z=f(x,y),\ (x,y)\in\bar{D}\subset\mathbb{R}^2$, unde D este un domeniu mărginit a cărui frontieră γ este o curbă închisă netedă (Fig. 1.9). Presupunem că $f\in C^2\left(\bar{D}\right)$ şi că P, Q, R sunt trei funcţii scalare definite pe un domeniu $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, care conţine suprafaţa $\bar{S}$. Fie Γ frontiera suprafeţei S $\left(\Gamma=\bar{S}\setminus S=\left\{\left(x,y,f(x,y)\right);\ (x,y)\in\gamma\right\}\right)$. Atunci are loc formula lui Stokes:

$$\oint_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_{S_+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Fig. 1.9



Între sensul de parcurgere al frontierei Γ şi faţa pe care se face integrala de suprafaţă din membrul drept, se respectă regula burghiului: dacă Γ este parcursă în sens trigonometric (respectiv, sensul acelor unui ceasornic), atunci integrala de suprafaţă se face pe faţa superioară (respectiv, inferioară).

Formula rămâne valabilă şi pentru suprafeţe care sunt reuniuni finite de suprafeţe explicite de tipul menţionat mai sus, două câte două dintre acestea având în comun numai arce de curbă care provin din bordurile acestor suprafeţe.

Dacă notăm cu $\vec{V}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$, $(x,y,z)\in\Omega$, cu $d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$ şi cu $\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ versorul normalei la suprafaţa S, orientată în sus, atunci formula Stokes devine:

$$\oint_{\Gamma}\vec{V}\cdot d\vec{r}=\iint_{S}\operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

Observăm că integrala din membrul stâng este circulaţia câmpului $\vec{V}$ în lungul curbei Γ (frontiera suprafeţei S), iar integrala din membrul drept este fluxul câmpului $\operatorname{rot}\vec{V}$ prin faţa superioară a suprafeţei S.

Exemplul 1.3.4. Să se calculeze circulaţia câmpului $\vec{V}=y\,\vec{i}-x\,\vec{j}+\vec{k}$ în lungul curbei:

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=h\end{cases}.$$

Evident, curba Γ este un cerc de rază R, cu centrul pe axa Oz situat în planul $z=h$.

Fie S interiorul cercului Γ şi S_+ faţa sa superioară. Evident versorul normalei la suprafaţa S, orientată în sus este $\vec{n}=\vec{k}$.

Conform formulei lui Stokes avem:

$$\oint_{\Gamma}\vec{V}\cdot d\vec{r}=\iint_{S}\operatorname{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

Cum

$$\operatorname{rot}\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & 1\end{vmatrix}=0\,\vec{i}+0\,\vec{j}-2\vec{k}\text{, rezultă}$$

$$\oint_{\Gamma}\vec{V}\cdot d\vec{r}=\iint_{S}-2\vec{k}\cdot\vec{k}\,d\sigma=-2\cdot\operatorname{Aria}(S)=-2\pi R^2.$$

Observaţia 1.3.1. (Reguli de calcul pentru rotor)

1) $\operatorname{rot}\vec{c}=\vec{0}$, $(\forall)\,\vec{c}$ vector constant

2) $\operatorname{rot}\left(\alpha_1 \vec{V_1} + \alpha_2 \vec{V_2}\right) = \alpha_1 \operatorname{rot} \vec{V_1} + \alpha_2 \operatorname{rot} \vec{V_2}$, $(\forall)\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)\ \vec{V_1}, \vec{V_2}$ câmpuri vectoriale de clasă C^1

3) $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot} \vec{V}\right) = 0$, $(\forall)\ \vec{V}$ câmp vectorial de clasă C^2 (i.e. câmpul vectorial $\operatorname{rot} \vec{V}$ este solenoidal)

4) $\operatorname{rot}\left(u\,\vec{V}\right) = u \operatorname{rot} \vec{V} + \left(\operatorname{grad} u\right) \times \vec{V}$, $(\forall)\ u$ funcţie scalară de clasă C^1.

Primele două proprietăţi sunt evidente. Proprietatea 3) rezultă din Teorema lui Schwarz referitoare la egalitatea derivatelor parţiale mixte de ordinul doi.

Proprietatea 4) se verifică astfel:

Fie $\vec{V} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$. Atunci:

$$\operatorname{rot}\left(u\,\vec{V}\right) = \left(\frac{\partial(uR)}{\partial y} - \frac{\partial(uQ)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(uP)}{\partial z} - \frac{\partial(uR)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(uQ)}{\partial x} - \frac{\partial(uP)}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= u\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\right] +$$

$$+\left[\left(R\,\frac{\partial u}{\partial y} - Q\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(P\,\frac{\partial u}{\partial z} - R\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(Q\,\frac{\partial u}{\partial x} - P\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}\right] =$$

$$= u \operatorname{rot} \vec{V} + \left(\operatorname{grad} u\right) \times \vec{V}.$$

Observaţia 1.3.2. Definiţia rotorului este independentă de sistemul de coordonate ales. Afirmaţia rezultă din formula lui Stokes şi din teorema de medie pentru integrala de suprafaţă. Fără a intra în detalii, să presupunem că $\{\Sigma_n\}$ este un şir de suprafeţe netede pe porţiuni, astfel încât $M \in \Sigma_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că pe măsură ce n creşte, suprafaţa Σ_n se „strânge” în jurul punctului M astfel încât la limită se reduce la punctul M.

Din formula lui Stokes rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\oint_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{r}}{\operatorname{Aria}\left(\Sigma_n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\iint_{\Sigma_n} \operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma}{\operatorname{Aria}\left(\Sigma_n\right)} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{rot}_{M_n} \vec{V} \cdot \vec{n}_{M_n} = \operatorname{rot}_M \vec{V} \cdot \vec{n}_M.$$

Observaţia 1.3.3. Cei trei operatori diferenţiali: gradientul, divergenţa şi rotorul se pot exprima cu ajutorul unui operator simbolic numit *nabla* (*operatorul lui Hamilton*).

Acest operator se notează cu ∇ şi se defineşte astfel:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Fie u un câmp scalar de clasă C^1 şi $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1. Avem:

1) grad $u = \nabla u$ – produsul (formal) dintre „vectorul” ∇ şi funcţia scalară u. Aşadar:

$$\text{grad } u = \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

2) div $\vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$ – produsul scalar dintre „vectorul” ∇ şi vectorul $\vec{V}$. Avem:

$$\text{div } \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

3) rot $\vec{V} = \nabla \times \vec{V}$ – produsul vectorial dintre „vectorul” ∇ şi vectorul $\vec{V}$. Rezultă că:

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Pentru lucrul cu operatorul ∇ propunem următoarele exerciţii:

1) $\nabla(u\,v) = v\,\nabla u + u\,\nabla v$

2) $\nabla \cdot \left(u\,\vec{V}\right) = \vec{V} \cdot \nabla u + u\,\nabla \cdot \vec{V}$

3) $\nabla \cdot \left(\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}\right) = \vec{V_2} \cdot \left(\nabla \times \vec{V_1}\right) - \vec{V_1} \cdot \left(\nabla \times \vec{V_2}\right)$

4) $\nabla \cdot (\nabla u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$

Operatorul $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ se numeşte *laplacian* (*operator Laplace*), de la numele matematicianului francez Pierre - Simon Laplace.

5) $\nabla \cdot \left(\nabla\,\vec{V}\right) = 0$;

6) $\nabla \times \left(u\,\vec{V}\right) = (\nabla u) \times \vec{V} + u\left(\nabla \times \vec{V}\right)$;

7) $\nabla \times (\nabla u) = 0$.

1.4. Coordonate curbilinii. Expresiile operatorilor diferenţiali de ordinul întâi în coordonate curbilinii

Fie Ω şi $\widetilde{\Omega}$ două domenii din $\mathbb{R}^3$ şi $F:\widetilde{\Omega}\to\Omega$ o schimbare de variabile. Aceasta înseamnă că:

1) F este bijectivă

2) $F\in C^1\left(\widetilde{\Omega}\right)$ şi $F^{-1}\in C^1\left(\Omega\right)$

3) Dacă $F\left(u,v,w\right)=\left(x\left(u,v,w\right),y\left(u,v,w\right),z\left(u,v,w\right)\right)$, $\left(\forall\right)\left(u,v,w\right)\in\widetilde{\Omega}$, atunci

Jacobianul $\dfrac{D\left(x,y,z\right)}{D\left(u,v,w\right)}\neq 0$ pe $\widetilde{\Omega}$.

Fie $Oxyz$ un reper ortogonal drept de versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ (Fig. 1.10).

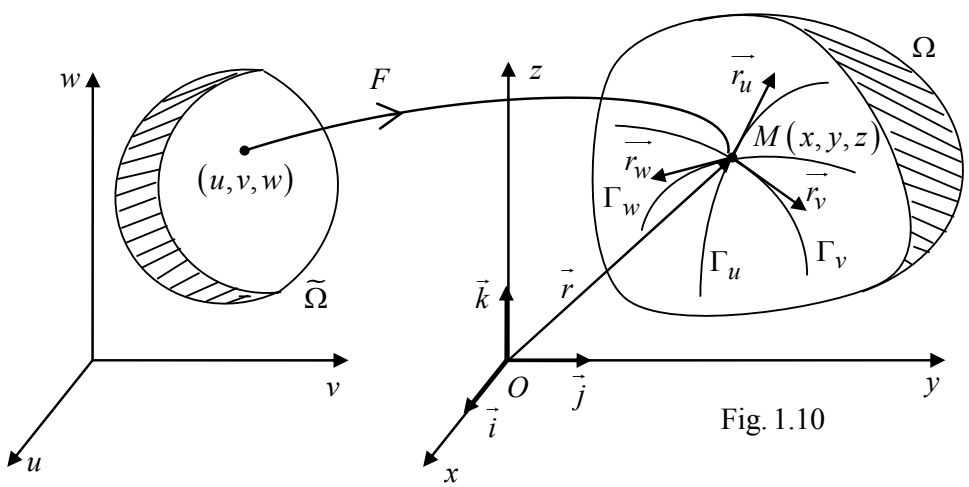


Fig. 1.10

Prin această schimbare de variabile, fiecărui punct $\left(u,v,w\right)\in\widetilde{\Omega}$ îi corespunde un punct $M\left(x,y,z\right)\in\Omega$ şi anume:

$$\begin{cases} x=x\left(u,v,w\right)\\ y=y\left(u,v,w\right)\\ z=z\left(u,v,w\right)\end{cases}. \qquad \textbf{(1.7)}$$

Dacă notăm cu $\vec{r}$ vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM}$, atunci

$\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=x\left(u,v,w\right)\vec{i}+y\left(u,v,w\right)\vec{j}+z\left(u,v,w\right)\vec{k}$.

Fie Γ_u, Γ_v şi Γ_w curbele coordonate în Ω.

Aşadar, Γ_u este curba din Ω obţinută pentru $v = \text{constant}$ şi $w = \text{constant}$:

$\Gamma_u : \vec{r} = \vec{r}(u, v, w);\ u \in [a, b],\ v$ şi w constante.

$\overrightarrow{r_u} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$ este un vector tangent în punctul M la curba Γ_u. Analog

$\overrightarrow{r_v} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$ este un vector tangent în M la curba Γ_v şi

$\overrightarrow{r_w} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial w} = x_w \vec{i} + y_w \vec{j} + z_w \vec{k}$ este un vector tangent în M la curba Γ_w.

Notăm cu:

$$\begin{aligned} H_u &= \left\| \overrightarrow{r_u} \right\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \\ H_v &= \left\| \overrightarrow{r_v} \right\| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \\ H_w &= \left\| \overrightarrow{r_w} \right\| = \sqrt{x_w^2 + y_w^2 + z_w^2}. \end{aligned} \qquad \textbf{(1.8)}$$

$H_u,\ H_v,\ H_w$ se numesc *coeficienţii lui Lamé*.

Evident produsul mixt

$$\left(\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{r_w}\right) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0.$$

Rezultă că vectorii tangenţi $\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{r_w}$ formează o bază. În continuare vom presupune că această bază este ortogonală. În aceste condiţii avem:

$$\left(\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{r_w}\right) = \overrightarrow{r_u} \cdot \left(\overrightarrow{r_v} \times \overrightarrow{r_w}\right) = \left\| \overrightarrow{r_u} \right\| \left\| \overrightarrow{r_v} \times \overrightarrow{r_w} \right\| = \left\| \overrightarrow{r_u} \right\| \left\| \overrightarrow{r_v} \right\| \left\| \overrightarrow{r_w} \right\|.$$

Am folosit faptul că $\overrightarrow{r_u}$ este coliniar cu $\overrightarrow{r_v} \times \overrightarrow{r_w}$ şi că $\overrightarrow{r_v} \perp \overrightarrow{r_w}$.

Ţinând seama de (1.8) rezultă că:

$$\left(\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{r_w}\right) = H_u\, H_v\, H_w. \qquad \textbf{(1.9)}$$

Dacă notăm cu

$\overrightarrow{e_u} = \dfrac{1}{H_u} \overrightarrow{r_u}$, $\overrightarrow{e_v} = \dfrac{1}{H_v} \overrightarrow{r_v}$, $\overrightarrow{e_w} = \dfrac{1}{H_w} \overrightarrow{r_w}$, atunci $\left\{\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w}\right\}$ este o bază ortonormată.

În continuare vom construi baza conjugată bazei $\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{r_w}$ astfel:

Fie $\overrightarrow{r_u}^* = \dfrac{1}{H_u\, H_v\, H_w} \overrightarrow{r_v} \times \overrightarrow{r_w}$.

Cum $\overrightarrow{r_v} \times \overrightarrow{r_w} = \lambda\, \overrightarrow{r_u}$ deducem că $\left\|\overrightarrow{r_v} \times \overrightarrow{r_w}\right\| = \lambda \left\|\overrightarrow{r_u}\right\|$ şi mai departe $\left\|\overrightarrow{r_v}\right\| \left\|\overrightarrow{r_w}\right\| = \lambda \left\|\overrightarrow{r_u}\right\|$,

deci $\lambda = \dfrac{H_v H_w}{H_u}$. Prin urmare

$$\overrightarrow{r_u}^* = \frac{1}{H_u H_v H_w} \frac{H_v H_w}{H_u} \overrightarrow{r_u} = \frac{1}{H_u^2} \overrightarrow{r_u}.$$

În mod analog avem:

$$\overrightarrow{r_v}^* = \frac{1}{H_v^2} \overrightarrow{r_v} \text{ şi } \overrightarrow{r_w}^* = \frac{1}{H_w^2} \overrightarrow{r_w}.$$

Din (1.9) rezultă că:

$$\left(\overrightarrow{r_u}^*, \overrightarrow{r_v}^*, \overrightarrow{r_w}^*\right) = \frac{1}{H_u H_v H_w} \neq 0$$

de unde deducem că $\overrightarrow{r_u}^*, \overrightarrow{r_v}^*, \overrightarrow{r_w}^*$ formează la rândul lor o bază.

Această bază se numeşte baza conjugată bazei $\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{r_w}$. Au loc relaţiile:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{r_u}^* \cdot \overrightarrow{r_u} = 1; \quad \overrightarrow{r_u}^* \cdot \overrightarrow{r_v} = \overrightarrow{r_u}^* \cdot \overrightarrow{r_w} = 0 \\
&\overrightarrow{r_v}^* \cdot \overrightarrow{r_v} = 1; \quad \overrightarrow{r_v}^* \cdot \overrightarrow{r_u} = \overrightarrow{r_v}^* \cdot \overrightarrow{r_w} = 0. \\
&\overrightarrow{r_w}^* \cdot \overrightarrow{r_w} = 1; \quad \overrightarrow{r_w}^* \cdot \overrightarrow{r_u} = \overrightarrow{r_w}^* \cdot \overrightarrow{r_v} = 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Exemplul 1.4.1. Coordonate cilindrice

Fie schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \ \rho \in (0, \infty),\ \theta \in (0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R},\ \widetilde{\Omega} = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

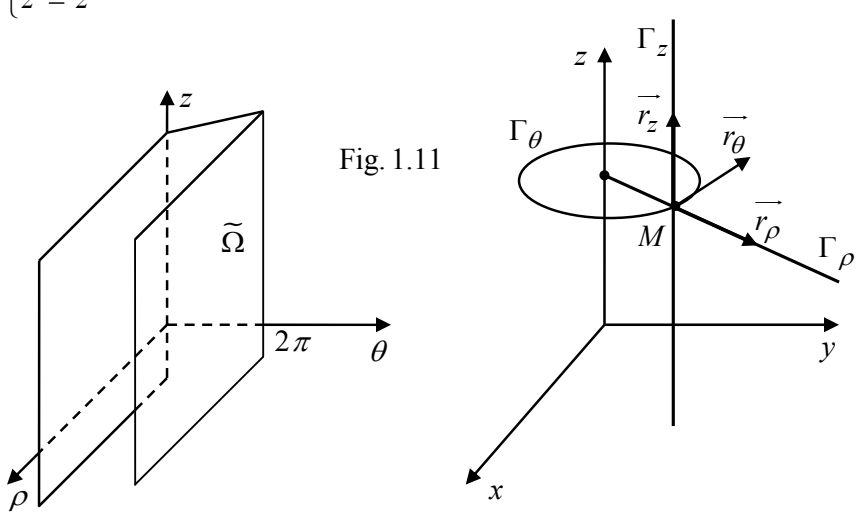


Fig. 1.11

Avem succesiv:

$x_\rho = \cos\theta,\ y_\rho = \sin\theta,\ z_\rho = 0$

$x_\theta = -\rho\sin\theta,\ y_\theta = \rho\cos\theta,\ z_\theta = 0$

$x_z = 0,\ y_z = 0,\ z_z = 1$

$\overrightarrow{r_\rho} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ şi $H_\rho = 1$

$\overrightarrow{r_\theta} = -\rho\sin\theta\,\vec{i} + \rho\cos\theta\,\vec{j}$ şi $H_\theta = \rho$

$\overrightarrow{r_z} = \vec{k}$ şi $H_z = 1$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = H_\rho H_\theta H_z = \rho$$

$$\overrightarrow{r_\rho}^* = \overrightarrow{r_\rho};\ \overrightarrow{r_\theta}^* = \frac{1}{\rho^2}\cdot\overrightarrow{r_\theta};\ \overrightarrow{r_z}^* = \overrightarrow{r_z}.$$

Exemplul 1.4.2. Coordonate sferice

Coordonatele sferice corespund schimbării de variabile:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\in(0,\infty),\ \theta\in(0,\pi),\ \varphi\in(0,2\pi). \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

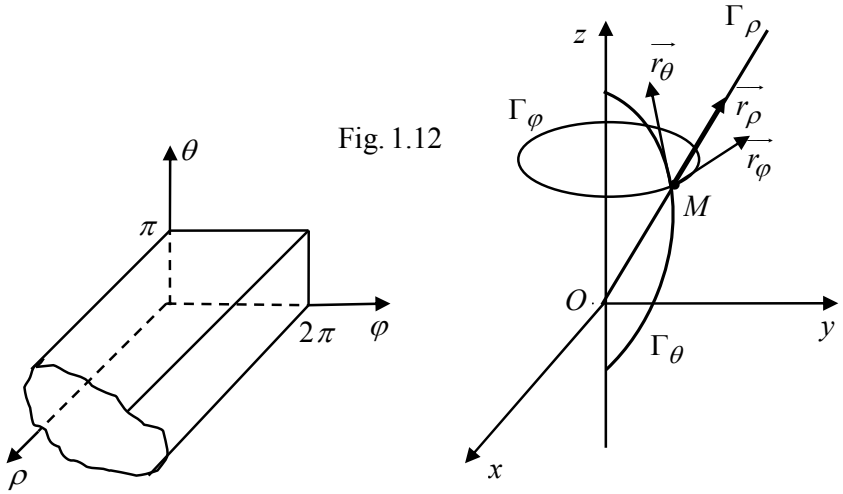


Fig. 1.12

Avem succesiv:

$x_\rho = \sin\theta\cos\varphi,\ y_\rho = \sin\theta\sin\varphi,\ z_\rho = \cos\theta$

$x_\theta = \rho\cos\theta\cos\varphi,\ y_\theta = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ z_\theta = -\rho\sin\theta$

$x_\varphi = -\rho \sin\theta \sin\varphi,\ y_\varphi = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ z_\varphi = 0$

$\overrightarrow{r_\rho} = \sin\theta \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi\, \vec{j} + \cos\theta\, \vec{k}$ şi $H_\rho = 1$

$\overrightarrow{r_\theta} = \rho\cos\theta \cos\varphi\, \vec{i} + \rho\cos\theta \sin\varphi\, \vec{j} - \rho\sin\theta\, \vec{k}$ şi $H_\theta = \rho$

$\overrightarrow{r_\varphi} = -\rho\sin\theta \sin\varphi\, \vec{i} + \rho\sin\theta \cos\varphi\, \vec{j}$ şi $H_\varphi = \rho\sin\theta$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = H_\rho H_\theta H_\varphi = \rho^2 \sin\theta$$

$$\overrightarrow{r_\rho}^* = \overrightarrow{r_\rho};\ \overrightarrow{r_\theta}^* = \frac{1}{\rho^2} \cdot \overrightarrow{r_\theta};\ \overrightarrow{r_\varphi}^* = \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \cdot \overrightarrow{r_\varphi}.$$

Revenim la cazul general şi deducem expresia gradientului în coordonate curbilinii.

Dacă $f \in C^1(\Omega)$, atunci $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

Cum f depinde de u, v şi w prin intermediul funcţiilor $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x_u + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y_u + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z_u = \operatorname{grad} f \cdot \overrightarrow{r_u}.$$

Aşadar avem:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \operatorname{grad} f \cdot \overrightarrow{r_u};\ \frac{\partial f}{\partial v} = \operatorname{grad} f \cdot \overrightarrow{r_v};\ \frac{\partial f}{\partial w} = \operatorname{grad} f \cdot \overrightarrow{r_w}. \qquad \textbf{(1.11)}$$

Fie a, b, c coordonatele vectorului $\operatorname{grad} f$ în raport cu baza conjugată $\overrightarrow{r_u}^*, \overrightarrow{r_v}^*, \overrightarrow{r_w}^*$.

Rezultă că

$$\operatorname{grad} f = a \cdot \overrightarrow{r_u}^* + b \cdot \overrightarrow{r_v}^* + c \cdot \overrightarrow{r_w}^*. \qquad \textbf{(1.12)}$$

Ţinând seama de relaţiile (1.10), (1.12) şi (1.11) deducem:

$\operatorname{grad} f \cdot \overrightarrow{r_u} = a$; $\operatorname{grad} f \cdot \overrightarrow{r_v} = b$; $\operatorname{grad} f \cdot \overrightarrow{r_w} = c$

deci

$$a = \frac{\partial f}{\partial u},\ b = \frac{\partial f}{\partial v},\ c = \frac{\partial f}{\partial w}. \qquad \textbf{(1.13)}$$

Din (1.12) şi (1.13) rezultă:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \overrightarrow{r_u}^* + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \overrightarrow{r_v}^* + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \overrightarrow{r_w}^* =$$

$$= \frac{1}{H_u^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \overrightarrow{r_u} + \frac{1}{H_v^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \overrightarrow{r_v} + \frac{1}{H_w^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \overrightarrow{r_w} =$$

$$= \frac{1}{H_u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \overrightarrow{e_u} + \frac{1}{H_v} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \overrightarrow{e_v} + \frac{1}{H_w} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \overrightarrow{e_w}.$$

În concluzie, *expresia gradientului în coordonate curbilinii* este:

$$\text{grad } f = \frac{1}{H_u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \overrightarrow{e_u} + \frac{1}{H_v} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \overrightarrow{e_v} + \frac{1}{H_w} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \overrightarrow{e_w} \ . \qquad \textbf{(1.14)}$$

Pentru coordonatele cilindrice, obţinem expresia gradientului:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \overrightarrow{e_z} \ . \qquad \textbf{(1.15)}$$

iar în coordonate sferice, gradientul este:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\rho \sin\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \overrightarrow{e_\varphi} \ . \qquad \textbf{(1.16)}$$

În continuare, vom deduce expresia divergenţei în coordonate curbilinii. Pentru început prezentăm câteva rezultate pregătitoare.

Din (1.14) deducem că pentru funcţia proiecţie $f(u,v,w) = u$ avem

$$\text{grad } f = \frac{1}{H_u} \cdot \overrightarrow{e_u}.$$

Aşadar, rezultă:

$$\text{grad } u = \frac{1}{H_u} \cdot \overrightarrow{e_u}, \ \text{grad } v = \frac{1}{H_v} \cdot \overrightarrow{e_v}, \ \text{grad } w = \frac{1}{H_w} \cdot \overrightarrow{e_w}. \qquad \textbf{(1.17)}$$

Cum baza $\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \overrightarrow{e_w}$ este ortonormată rezultă:

$$\frac{\overrightarrow{e_u}}{H_v H_w} = \frac{\overrightarrow{e_v}}{H_v} \times \frac{\overrightarrow{e_w}}{H_w} = \text{grad } v \times \text{grad } w \text{ şi mai departe:}$$

$$\text{div}\left(\frac{\overrightarrow{e_u}}{H_v H_w}\right) = \text{div}\left(\text{grad } v \times \text{grad } w\right) = 0. \qquad \textbf{(1.18)}$$

(Se verifică imediat că dacă f şi $g \in C^2$, atunci $\text{div}\left(\text{grad } f \times \text{grad } g\right) = 0$).

Prin urmare avem:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\overrightarrow{e_u}}{H_v\,H_w}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{\overrightarrow{e_v}}{H_u\,H_w}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{\overrightarrow{e_w}}{H_u\,H_v}\right)=0\,. \qquad \textbf{(1.19)}$$

În sfârşit, reamintim că:

$$\operatorname{div}\left(\varphi\,\vec{V}\right)=\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{V}+\varphi\,\operatorname{div}\vec{V}\,. \qquad \textbf{(1.20)}$$

Fie acum $\vec{V}=P(u,v,w)\,\overrightarrow{e_u}+Q(u,v,w)\,\overrightarrow{e_v}+R(u,v,w)\,\overrightarrow{e_w}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe $\widetilde{\Omega}$.

$$\operatorname{div}\vec{V}=\operatorname{div}\left(P\,\overrightarrow{e_u}\right)+\operatorname{div}\left(Q\,\overrightarrow{e_v}\right)+\operatorname{div}\left(R\,\overrightarrow{e_w}\right).$$

Ţinând seama de (1.20) şi (1.19) obţinem:

$$\operatorname{div}\left(P\,\overrightarrow{e_u}\right)=\operatorname{div}\left(H_v\,H_w\,P\;\frac{\overrightarrow{e_u}}{H_v\,H_w}\right)=\operatorname{grad}\left(H_v\,H_w\,P\right)\cdot\frac{\overrightarrow{e_u}}{H_v\,H_w}+$$

$$+\underbrace{H_v\,H_w\,P\;\operatorname{div}\left(\frac{\overrightarrow{e_u}}{H_v\,H_w}\right)}_{0}=\operatorname{grad}\left(H_v\,H_w\,P\right)\cdot\frac{\overrightarrow{e_u}}{H_v\,H_w}\,.$$

În sfârşit, ţinând seama de (1.14) deducem:

$$\operatorname{div}\left(P\,\overrightarrow{e_u}\right)=\left[\frac{1}{H_u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(H_v\,H_w\,P\right)\overrightarrow{e_u}+\frac{1}{H_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(H_u\,H_w\,P\right)\overrightarrow{e_v}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left(H_u\,H_v\,P\right)\overrightarrow{e_w}\right]\cdot\frac{\overrightarrow{e_u}}{H_v\,H_w}=\frac{1}{H_u\,H_v\,H_w}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(H_v\,H_w\,P\right).$$

Aşadar, avem:

$$\operatorname{div}\left(P\,\overrightarrow{e_u}\right)=\frac{1}{H_u\,H_v\,H_w}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(H_v\,H_w\,P\right)$$

$$\operatorname{div}\left(Q\,\overrightarrow{e_v}\right)=\frac{1}{H_u\,H_v\,H_w}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(H_u\,H_w\,Q\right)$$

$$\operatorname{div}\left(R\,\overrightarrow{e_w}\right)=\frac{1}{H_u\,H_v\,H_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left(H_u\,H_v\,R\right)$$

de unde rezultă *expresia divergenţei în coordonate curbilinii*:

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{1}{H_u\,H_v\,H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(H_v\,H_w\,P\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(H_u\,H_w\,Q\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(H_u\,H_v\,R\right)\right). \qquad \textbf{(1.21)}$$

Expresia divergenţei în coordonate cilindrice este:

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho P)+\frac{\partial}{\partial\theta}(Q)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho R)\right] \qquad \textbf{(1.22)}$$

iar în coordonate sferice:

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\theta P\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin\theta\, Q)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho R)\right] \text{ sau}$$

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 P\right)+\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, Q)+\frac{1}{\rho\sin\theta}\cdot\frac{\partial R}{\partial\varphi}. \qquad \textbf{(1.23)}$$

În sfârşit, pentru a găsi expresia laplacianului în coordonate curbilinii pornim de la observaţia că

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\operatorname{div}(\operatorname{grad} f),\ f\in C^2(\Omega).$$

Ţinând seama de (1.14) şi (1.21) deducem:

$$\Delta f=\operatorname{div}\left(\frac{1}{H_u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\overrightarrow{e_u}+\frac{1}{H_v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\overrightarrow{e_v}+\frac{1}{H_w}\cdot\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\overrightarrow{e_w}\right)=$$

$$=\frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_u H_w}{H_v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\cdot\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right].$$

În concluzie, *expresia laplacianului în coordonate curbilinii* este:

$$\Delta f=\frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_u H_w}{H_v}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\cdot\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]. \qquad \textbf{(1.24)}$$

Expresia laplacianului în coordonate cilindrice este:

$$\Delta f=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] \text{ sau}$$

$$\Delta f=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \qquad \textbf{(1.25)}$$

Expresia laplacianului în coordonate sferice este:

$$\Delta f=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\right]$$

şi mai departe:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \qquad \textbf{(1.26)}$$

C A P I T O L U L 2

ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

2.1. Introducere. Generalităţi

Rezolvarea unor probleme practice din Mecanică, Fizică, Geometrie, Electrotehnică şi din alte domenii tehnice conduce la noţiunea de ecuaţie diferenţială ordinară sau, mai simplu, ecuaţie diferenţială.

Problemă: Fie punctul O ales ca origine a spaţiului şi un punct material M aflat la momentul iniţial $t = 0$ în repaus, unde t este timpul (Fig. 2.1). Se aruncă pe verticală în sus punctul material cu viteza iniţială v_0. Să se determine legea de mişcare a punctului când se neglijează frecarea cu aerul.

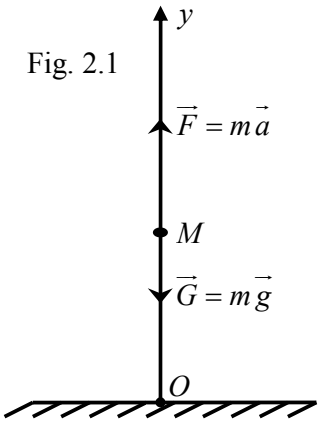


Fig. 2.1

Soluţie: Fie Oy axa spaţiului. Punctul material M ocupă diferite poziţii y la diferite momente t, deci $y(t)$ este o funcţie de t şi reprezintă spaţiul parcurs.

La momentul iniţial $t = 0$, când începe mişcarea, avem $y(0) = 0$ (valoarea iniţială a spaţiului) şi $y'(0) = v_0$ (viteza iniţială).

Se aplică legea fundamentală a dinamicii:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

unde m este masa punctului material şi $\vec{a}$ este acceleraţia (se notează $a = y''(t)$).

Asupra punctului material acţionează în sens invers forţa de greutate:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g}$$

unde $\vec{g}$ este acceleraţia gravitaţională.

Rezultă $m \cdot \vec{a} = -m \cdot \vec{g}$, deci $\vec{a} = -\vec{g}$, adică

$$y''(t) = -g\,. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Ecuaţia (2.1) în care funcţia necunoscută apare şi prin intermediul derivatelor sale se numeşte *ecuaţie diferenţială*.

Prin integrare succesivă, rezultă:

$y''(t) = -g \;\Leftrightarrow\; \left(y'(t)\right)' = -g \;\Rightarrow\; y'(t) = -g\,t + C_1$, deci

$$y(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + C_1 t + C_2 \;,\; C_1, C_2 \text{ constante reale arbitrare.} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Determinarea funcţiei $y(t)$ se numeşte *integrarea* (*rezolvarea*) ecuaţiei diferenţiale, iar funcţia $y(t)$ din relaţia (2.2) care verifică ecuaţia (2.1) se numeşte *integrala* (*soluţia*) *generală* a ecuaţiei diferenţiale. Ordinul ecuaţiei diferenţiale este dat de ordinul maxim al derivatelor funcţiei necunoscute ce intervin în ecuaţie. În cazul problemei date, ordinul este 2.

Pentru problema dată, ne interesează o soluţie bine determinată care verifică condiţiile:

$$y(0) = 0 \text{ şi } y'(0) = v_0 \qquad \textbf{(2.3)}$$

numite *condiţii iniţiale* (*condiţii Cauchy*).

Folosind relaţiile (2.3) în ecuaţia (2.2) se obţin $C_2 = 0$ şi $C_1 = v_0$ şi soluţia căutată este:

$$y(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0\,t\,. \qquad \textbf{(2.4)}$$

(*legea de mişcare a punctului material sub acţiunea forţei de greutate*).

Egalitatea (2.4) se numeşte *soluţia particulară* a ecuaţiei (2.1). Viteza este

$v(t) = y'(t) = -g\,t + v_0 = 0$, pentru $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$

şi $y(t_1)$ este înălţimea maximă la care se ridică punctul material.

Problema (2.1) cu condiţiile iniţiale (2.3) se numeşte *Problema Cauchy*.

2.2. Ecuaţii diferenţiale. Soluţie generală. Soluţie particulară

Definiţia 2.2.1. Fie $F:[a,b]\times Y \to \mathbb{R}$ o funcţie reală, cu $[a,b]\subset\mathbb{R}$ interval, $Y \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, de argumente variabila $x\in[a,b]$ şi funcţia reală y împreună cu derivatele sale y', y'', ..., $y^{(n)}$. Se numeşte *ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul n* cu funcţia necunoscută $y(x)$ o ecuaţie de forma:

$$F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0, \text{ pentru } (\forall)\ x \in [a, b], \qquad \textbf{(2.5)}$$

în care se cere să se determine funcţiile $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, derivabile de n ori pe $[a, b]$.

În ipoteza că $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, numărul n se numeşte *ordinul ecuaţiei diferenţiale*.

Observaţia 2.2.1. Dacă ecuaţia (2.5) este explicitată în raport cu $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right), \qquad \textbf{(2.6)}$$

unde f este o funcţie reală de argumente $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$, definită şi continuă într-un domeniu din $\mathbb{R}^{n+1}$, atunci ecuaţia (2.6) se numeşte *forma normală* (*explicită*) a ecuaţiei (2.5).

Definiţia 2.2.2. Orice funcţie $y = y(x)$ continuă şi cu derivatele până la ordinul n continue se numeşte *soluţie* a ecuaţiei diferenţiale (2.5) dacă transformă ecuaţia (2.5) în identitate, pentru orice $x \in [a, b]$.

Funcţia $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, ce depinde de n constante reale independente C_1, $C_2, ..., C_n$ se numeşte *soluţie generală* sau *familie de curbe integrale* a ecuaţiei diferenţiale (2.5) dacă transformă ecuaţia (2.5) în identitate, pentru orice $x \in [a, b]$ şi pentru alegeri ale constantelor reale $C_1, C_2, ..., C_n$.

O soluţie care se obţine din soluţia generală particularizând constantele $C_1, C_2, ..., C_n$ se numeşte *soluţie particulară* sau *curbă integrală* a ecuaţie diferenţiale (2.5).

O soluţie care nu se poate obţine din soluţia generală prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, ..., C_n$ se numeşte *soluţie singulară* a ecuaţie diferenţiale (2.5).

Graficul unei soluţii a ecuaţiei diferenţiale (2.5) este o curbă plană, de aceea soluţia se numeşte şi *curbă integrală* a ecuaţiei diferenţiale.

Exemplul 2.2.1.

1) $y' = y - x$ este ecuaţie diferenţială de ordinul I.

$y = Ce^x + x + 1,\ C \in \mathbb{R}$ este o familie de soluţii ale ecuaţiei.

$y = e^x + x + 1$ este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale (pentru $C = 1$).

2) $y'^2 + xy' - y = 0$ este ecuaţie diferenţială de ordinul I.

$y = Cx + C^2$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}, (\forall)\, C \in \mathbb{R}$ este soluţia generală a ecuaţiei (reprezintă, din punct de vedere geometric, o familie de drepte).

$y = x + 1$ este o soluţie particulară a ecuaţiei (pentru $C = 1$; reprezintă, din punct de vedere geometric, o dreaptă).

$y = -\dfrac{x^2}{4}$ este soluţia singulară a ecuaţiei (nu se poate obţine din soluţia generală pentru nicio valoare particulară a constantei C; reprezintă geometric o parabolă).

În principiu, problema rezolvării unei ecuaţii diferenţiale revine la a determina soluţia generală pentru ecuaţia considerată, însă, în general, acest lucru nu este posibil şi nici nu reprezintă un interes deosebit. Din această cauză preocupările în această problemă urmează două direcţii:

1. analiza proprietăţilor soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale şi studierea unor tipuri de ecuaţii pentru care determinarea soluţiei generale se reduce la calcul de primitive;

2. metode de rezolvare aproximativă sau rezolvare numerică a ecuaţiilor diferenţiale.

2.3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Interpretarea geometrică a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Definiţia 2.3.1. Pentru $n = 1$ ecuaţia (2.5) devine o *ecuaţie diferenţială de ordinul întâi*, care poate fi de una din formele:

1) $F(x, y, y') = 0$ (*forma implicită*)

2) $y' = f(x, y)$ (*forma normală* sau *explicită*).

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi se poate determina sub una din formele:

a) $y = \varphi(x, C)$, $x \in [a, b]$, $C \in \mathbb{R}$ (*forma explicită*)

b) $G(x, y, C) = 0$, $C \in \mathbb{R}$ (*forma implicită* numită şi *integrala generală*)

c) $\begin{cases} x = \varphi(t, C) \\ y = \psi(t, C) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, $C \in \mathbb{R}$ (*forma parametrică*).

Se numeşte *soluţie particulară* a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi $F(x, y, y') = 0$ o funcţie $y = \varphi_1(x)$, cu $x \in [a, b]$ care se obţine din soluţia generală $y = \varphi(x, C)$ dând o valoare particulară constantei arbitrare C.

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$y' = f(x, y)$, cu $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Fiecărui punct $M_0(x_0, y_0) \in D$ îi corespund: o direcţie de coeficient unghiular (pantă) $y'_0 = f(x_0, y_0)$ şi o dreaptă ce trece prin M_0 şi de pantă $m_0 = y'_0$, adică dreapta de ecuaţie:

$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$.

Atunci ecuaţia diferenţială asociază fiecărui punct din D o direcţie (o dreaptă) şi astfel în D se formează un câmp Φ de direcţii.

Fie $y = \varphi(x), (x, y) \in D$ o soluţie a ecuaţiei diferenţiale. Graficul soluţiei este o curbă integrală în D cu proprietatea că în fiecare punct al său tangenta la curbă are ca direcţie direcţia câmpului Φ care trece prin punctul considerat, deci în fiecare punct (x_0, y_0) tangenta la curbă are panta $m = f(x_0, y_0)$)

Problema integrării ecuaţiei diferenţiale este de a găsi curbele integrale din D care au proprietatea că în fiecare punct sunt tangente la direcţia câmpului Φ.

2.4. Condiţii iniţiale. Problema Cauchy

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$y' = f(x, y)$, cu $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu

a cărei soluţie generală este de forma

$y = y(x, C)$

soluţie ce reprezintă o familie de curbe care depinde de parametrul C şi fie punctul $(x_0, y_0) \in D$.

Se cere să se determine soluţia $y = y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale care satisface condiţia $y_0 = y(x_0)$, numită *condiţie iniţială* sau *condiţie Cauchy*. Problema determinării soluţiei ecuaţiei diferenţiale care verifică condiţii iniţiale se numeşte *problema Cauchy*.

Din punct de vedere geometric, problema Cauchy constă în a determina din familia de curbe integrale aceea curbă care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$, deci care verifică relaţia $y_0 = y(x_0, C)$ (relaţie din care se determină constanta C în funcţie de x_0, y_0).

Observaţia 2.4.1. La sfârşitul capitolului se va enunţa o teoremă de existenţă şi unicitate în care se arată că există o unică soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x, y)$, al cărei grafic trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0) \in D$, adică se obţine în mod unic $C = C(x_0, y_0)$ şi curba integrală va avea forma $y = y(x, C(x_0, y_0))$.

În multe probleme de fizică şi tehnică care conduc la o ecuaţie diferenţială de ordinul n se pune asupra ecuaţiei o problemă analogă cu cea de mai sus numită *problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul* n.

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n de forma

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

a cărei soluţie generală este de forma

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Problema Cauchy pentru această ecuaţie constă în a determina soluţia ecuaţiei diferenţiale care să satisfacă condiţiile:

$$\begin{cases} y(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) & = y_0 \\ y'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) & = y'_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) & = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad \textit{condiţiile iniţiale Cauchy}, \qquad \textbf{(2.7)}$$

unde $x_0,\ y_0,\ y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ sunt valori iniţiale date.

Observaţia 2.4.2. Dacă funcţiile din relaţiile (2.7) sunt continue şi au derivatele parţiale de ordinul întâi continue în raport cu parametrii care le definesc şi, în plus, determinantul funcţional $\dfrac{\partial\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)}{\partial(C_1, C_2, \ldots, C_n)} \neq 0$, atunci, conform teoremei de existenţă şi unicitate pentru sisteme de funcţii implicite, sistemul (2.7) admite soluţie unică în raport cu constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ şi anume

$$C_k^0 = C_k\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right), 1 \le k \le n$$

iar curba integrală (soluţia ecuaţiei diferenţiale) va fi de forma $y = y\left(x_0, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$.

2.5. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi integrabile prin metode elementare (cuadraturi)

În cele ce urmează ne vom ocupa de două probleme cu legătură strânsă între ele:

1) Determinarea tuturor soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi date de forma $y' = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, pentru care se vor da metode de integrare.

2) Problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială dată.

2.5.1. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \text{ cu } f : [a,b] \to \mathbb{R},\ g : [c,d] \to \mathbb{R} \text{ continue.} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Determinarea soluţiei

Se pune $y' = \dfrac{dy}{dx}$ şi se presupune că $g(y) \neq 0,\ (\forall)\ y \in [c,\ d]$.

Se scrie ecuaţia (2.8) sub forma

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$$

(adică se separă variabilele) şi integrând ambii membrii ai ecuaţiei se obţine soluţia generală implicită (integrala generală):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx \text{ sau } G(y) = F(x) + C,$$

unde G este o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{g}$ şi $F : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f.

Dacă avem şi condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, atunci înlocuind în soluţia generală de mai sus, se obţine

$$G(y_0) = F(x_0) + C, \text{ deci } C = G(y_0) - F(x_0)$$

şi ecuaţia cu variabile separabile (2.8) admite soluţia particulară sub forma implicită:

$$G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0).$$

Observaţia 2.5.1. O ecuaţie cu variabile separabile poate avea şi forma:

$$P(x)\, dx + Q(y)\, dy = 0, \text{ cu } P : [a,\ b] \to \mathbb{R},\ Q : [c,\ d] \to \mathbb{R} \text{ continue} \qquad \textbf{(2.9)}$$

iar soluţia sa generală este de forma:

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)\,dy = C\,,\ (x,y),\ (x_0,y_0) \in [a,\,b] \times [c,\,d].$$

Exemplul 2.5.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $\left(x^2+1\right) y' = y^2+1$.

$$\left(x^2+1\right) y' = y^2+1 \Leftrightarrow y' = \frac{y^2+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x^2+1}.$$

Prin integrare se obţine soluţia generală:

$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x^2+1} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$ (soluţie sub formă implicită) sau

$y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + C\right)$ (soluţie sub formă explicită).

2.5.2. Ecuaţii diferenţiale omogene

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$y' = f(x,y),\ \text{cu}\ f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \text{continuă}, f(tx,ty) = f(x,y),\ (\forall)\ t \in \mathbb{R}^*. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Definiţia 2.5.1. Spunem că o funcţie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cu $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu, este *omogenă de gradul* m, $m \in \mathbb{R}$, dacă

$$f(tx,ty) = t^m \cdot f(x,y),\ (\forall)\ (x,y) \in D,\ (\forall)\ t > 0.$$

În cazul ecuaţiei (2.10), membrul drept este o funcţie omogenă de gradul zero şi ecuaţia diferenţială (2.10) poate fi scrisă sub forma:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right),\ \text{cu}\ g : I \to \mathbb{R}\ \text{continuă},\ I \subset \mathbb{R}\ \text{interval}. \qquad \textbf{(2.11)}$$

Determinarea soluţiei

Se efectuează schimbarea de funcţie

$y(x) \to z(x)$, dată prin relaţia $y(x) = x\,z(x)$, cu $z : I \to \mathbb{R}$ şi atunci

$y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$.

Înlocuind $y = x\,z$ şi $y' = z + x\,z'$ în ecuaţia (2.11) rezultă:

$$z + x\,z' = g(z) \Leftrightarrow x\,z' = g(z) - z \Leftrightarrow z' = \frac{g(z)-z}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{g(z)-z}{x} \Leftrightarrow \frac{dz}{g(z)-z} = \frac{dx}{x}$$

cu $g(z) - z \neq 0$, adică se obţine o ecuaţie cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $z(x)$.

Integrând această ecuaţie se găseşte soluţia sa generală implicită (integrala generală):

$$\int \frac{dz}{g(z)-z} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow G(z) = \ln|x| + C,$$

unde $G(z)$ este o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{g(z)-z}$.

Se înlocuieşte z cu $\dfrac{y}{x}$ în soluţia generală de mai sus a ecuaţiei cu variabile separabile şi se obţine soluţia generală implicită (integrala generală) a ecuaţiei omogene (2.11):

$$G\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C. \qquad \textbf{(2.12)}$$

Observaţia 2.5.2. Dacă z_0 este o soluţie a ecuaţiei $g(z) - z = 0$, atunci $y = z_0 x$ este de asemenea o soluţie a ecuaţiei omogene (2.11), şi anume o soluţie singulară.

Observaţia 2.5.3. Dacă în relaţia (2.12) se înlocuieşte constanta C cu $-\ln C$, atunci integrala generală (2.12) se scrie sub forma

$$x = C\, e^{G\left(\frac{y}{x}\right)} \Leftrightarrow x = C\, H\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exemplul 2.5.2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $x\,y\,y' = x^2 + 2y^2$.

$$x\,y\,y' = x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow y' = \frac{x^2+2y^2}{x\,y} \Leftrightarrow y' = \frac{x}{y} + 2\,\frac{y}{x}.$$

Se notează $f(x,y) = \dfrac{x^2+2y^2}{x\,y} = \dfrac{x}{y} + 2\,\dfrac{y}{x}$ şi se verifică dacă f este omogenă de grad 0:

$$f(t\,x, t\,y) = \frac{t\,x}{t\,y} + 2\,\frac{t\,y}{t\,x} = \frac{x}{y} + 2\,\frac{y}{x} = f(x,y),$$

deci ecuaţia diferenţială considerată este omogenă.

Se face schimbarea de funcţie $y(x) \to z(x)$, cu $y = x\,z$, deci $y' = z + x\,z'$.

Ecuaţia diferenţială omogenă se transformă într-o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $z(x)$:

$$z + x\,z' = \frac{1}{z} + 2z \Leftrightarrow x\,z' = \frac{1}{z} + z \Leftrightarrow x\,z' = \frac{z^2+1}{z} \Leftrightarrow$$

$$z' = \frac{1}{x}\cdot\frac{z^2+1}{z} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{z^2+1}{z} \Leftrightarrow \frac{z}{z^2+1}\,dz = \frac{dx}{x}$$

iar prin integrare se obţine:

$$\frac{1}{2}\ln\left(z^2+1\right)=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln C \Leftrightarrow \ln\left(z^2+1\right)=\ln x^2+\ln C \Leftrightarrow \ln\left(z^2+1\right)=\ln\left(Cx^2\right)$$

deci

$$z^2+1=Cx^2,\ C>0.$$

Înlocuind $z=\frac{y}{x}$ se obţine soluţia generală a ecuaţiei omogene:

$$\frac{y^2}{x^2}+1=C\,x^2 \Leftrightarrow y^2+x^2=C\,x^4 \Leftrightarrow y^2=x^2\left(C\,x^2-1\right)$$ (soluţie sub formă implicită).

2.5.3. Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),$$ unde $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ sunt constante reale. **(2.13)**

Observaţia 2.5.4. Dacă $c_1=c_2=0$, atunci ecuaţia (2.13) este o ecuaţie diferenţială omogenă:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) \Leftrightarrow y'=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right) \Leftrightarrow y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

şi se procedează ca în secţiunea 2.5.2.

Observaţia 2.5.5. Dacă $c_1^2+c_2^2\neq 0$, atunci sunt posibile două cazuri:

Cazul I: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ $\left(\text{i.e. } \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\right)$, deci dreptele $\begin{cases}(d_1): a_1x+b_1y+c_1=0\\ (d_2): a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ sunt concurente în punctul $M\left(x_0,y_0\right)$.

Se fac schimbările de funcţie şi de variabilă $y(x)\to Y(X)$, date prin:

$$\begin{aligned} X &= x-x_0 \\ Y &= y-y_0 \end{aligned}. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Rezultă $dX=dx,\ dY=dy$ şi $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}=Y'$.

Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia diferenţială (2.13) se obţine o ecuaţie diferenţială omogenă cu funcţia necunoscută $Y(X)$:

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)\Leftrightarrow\frac{dY}{dX}=g\left(\frac{Y}{X}\right). \qquad \textbf{(2.15)}$$

Se rezolvă ecuaţia diferenţială (2.15) făcând schimbarea de funcţie $Y(X)\to Z(X)$, dată prin $Y=XZ$ şi se obţine soluţia generală a ecuaţiei omogene (2.15). În această soluţie generală se înlocuiesc X şi Y, conform relaţiilor (2.14), şi se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale reductibilă la omogene (2.13).

Cazul II: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ $\left(\text{i.e. } \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}\right)$, deci dreptele $\begin{cases}(d_1): a_1x+b_1y+c_1=0\\(d_2): a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ sunt paralele.

Se notează $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k\in\mathbb{R}$ şi ecuaţia diferenţială (2.13) se transformă

$$y'=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\Leftrightarrow y'=g(a_2x+b_2y). \qquad \textbf{(2.16)}$$

Se face schimbarea de funcţie

$y(x)\to z(x)$, dată prin $a_2x+b_2y=z$.

Atunci

$$z'=a_2+b_2y' \text{ şi } y'=\frac{z'-a_2}{b_2}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right).$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială (2.16) se obţine o ecuaţie cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $z(x)$:

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)=g(z)\Leftrightarrow\frac{dz}{dx}=b_2\,g(z)+a_2\Leftrightarrow\frac{dz}{b_2\,g(z)+a_2}=dx \qquad \textbf{(2.17)}$$

dacă $b_2\,g(z)+a_2\neq 0$.

Se rezolvă ecuaţia diferenţială cu variabile separabile (2.17), iar în soluţia generală a acesteia se înlocuieşte z, conform relaţiei $z=a_2x+b_2y$, şi se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale reductibilă la omogene (2.13).

Observaţia 2.5.6.

1) Dacă $b_1=b_2=0$, atunci ecuaţia diferenţială (2.13) este de forma $y'=\varphi(x)$, iar această ecuaţie se integrează imediat.

2) Dacă $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (adică dreptele (d_1) şi (d_2) sunt confundate), atunci ecuaţia diferenţială (2.13) este de forma $y'=f(k)$, cu $f(k)$ constantă şi se integrează foarte uşor.

Exemplul 2.5.3. Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei $y'=\frac{x-y+1}{x+y-3}$, $x+y-3\neq 0$.

Deoarece $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\Leftrightarrow\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}$, rezultă că ecuaţia este reductibilă la omogenă, cazul I.

Dreptele $(d_1): x-y+1=0$ şi $(d_2): x+y-3=0$ sunt concurente în punctul $M(1,\,2)$, deci $x_0=1,\ y_0=2$.

Se fac schimbările de funcţie şi de variabilă $y(x)\to Y(X)$, date prin

$\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$. Atunci $dX=dx,\ dY=dy$ şi $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}=Y'$.

Înlocuind în ecuaţia diferenţială dată rezultă ecuaţia diferenţială omogenă cu funcţia necunoscută $Y(X)$:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}\Leftrightarrow\frac{dY}{dX}=\frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}.$$

Se face schimbarea de funcţie $Y(X)\to Z(X)$, dată de $Y=XZ$, deci $Y'=Z+XZ'$.

Ecuaţia omogenă de mai sus devine o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $Z(X)$:

$$Z+XZ'=\frac{1-Z}{1+Z}\Leftrightarrow XZ'=\frac{1-2Z-Z^2}{1+Z}\Leftrightarrow Z'=\frac{1}{X}\cdot\frac{1-2Z-Z^2}{1+Z}.$$

Prin integrare rezultă:

$$\frac{dZ}{dX}=\frac{1}{X}\cdot\frac{1-2Z-Z^2}{1+Z}\Leftrightarrow\frac{1+Z}{1-2Z-Z^2}\,dZ=\frac{dX}{X}\Leftrightarrow$$

$$\int\frac{1+Z}{1-2Z-Z^2}\,dZ=\int\frac{dX}{X}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-2Z-Z^2\right)'}{1-2Z-Z^2}\,dZ=\int\frac{dX}{X}\Leftrightarrow$$

$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2Z-Z^2\right|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln C\Leftrightarrow\ln\left|1-2Z-Z^2\right|+\ln X^2=\ln C$, deci

$C=X^2\left(1-2Z-Z^2\right)$.

Înlocuind $Z=\dfrac{Y}{X}$ rezultă soluţia generală a ecuaţiei omogene:

$$C=X^2-2\,X\,Y-Y^2.$$

Revenind la funcţia iniţială şi variabila iniţială prin relaţiile $X=x-1$ şi $Y=y-2$ se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale reductibile la ecuaţie omogenă:

$$C=(x-1)^2-2(x-1)(y-2)-(y-2)^2 \Leftrightarrow C=x^2-y^2-2xy+2x+6y-7 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2xy-y^2+2x+6y+C_1=0$$

(soluţie este sub formă implicită; reprezintă din punct de vedere geometric o familie de hiperbole echilatere).

Exemplul 2.5.4. Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei $y'=\dfrac{2x-4y+1}{x-2y+3}$.

Deoarece $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{1}=\dfrac{-4}{-2}$, rezultă că ecuaţia este reductibilă la omogenă, cazul II, deci dreptele $(d_1): 2x-4y+1=0$ şi $(d_2): x-2y+3=0$ sunt paralele.

Se face schimbarea de funcţie $y(x)\to z(x)$, dată prin $x-2y=z$, deci $z'=1-2y'$. Rezultă $y'=\dfrac{1-z'}{2}$. Folosind aceste relaţii în ecuaţia iniţială aceasta devine o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $z(x)$:

$$\frac{1-z'}{2}=\frac{2z+1}{z+3} \Leftrightarrow 1-z'=\frac{4z+2}{z+3} \Leftrightarrow z'=\frac{-3z+1}{z+3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-3z+1}{z+3} \Leftrightarrow \frac{z+3}{-3z+1}\,dz=dx, \text{ pentru } -3z+1\neq 0.$$

Prin integrare, rezultă soluţia generală a ecuaţiei cu variabile separabile

$$\int\frac{z+3}{-3z+1}\,dz=\int dx \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int\frac{-3z+1-10}{-3z+1}\,dz=x+C \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}\left[\int\frac{-3z+1}{-3z+1}\,dz-10\int\frac{dz}{-3z+1}\right]=x+C \Leftrightarrow -\frac{1}{3}z-\frac{10}{9}\ln\left|-3z+1\right|=x+C.$$

Înlocuind $z=x-2y$ se obţine soluţia generală a ecuaţiei reductibile la omogene:

$$-\frac{1}{3}(x-2y)-\frac{10}{9}\ln\left|-3(x-2y)+1\right|-x=C \Leftrightarrow$$

$$12x-6y+10\ln\left|-3x+6y+1\right|=C_1 \text{ (soluţie sub formă implicită)}.$$

Pentru $-3z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{3}$, se obţine soluţia $x-2y-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow 3x-6y-1=0$ (soluţie singulară ce se obţine şi pentru $C_1 \to -\infty$).

2.5.4. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$y'=P(x)\,y+Q(x), \text{ cu } P, Q:[a, b]\to\mathbb{R} \text{ continue.} \tag{2.18}$$

Observaţia 2.5.7. Dacă $Q(x)=0, (\forall)\ x\in[a, b]$, atunci ecuaţia $y'=P(x)y$ se numeşte *ecuaţie diferenţială liniară omogenă* (cuvântul „omogen" are aici alt sens decât cel întâlnit la ecuaţia diferenţială omogenă); dacă $Q(x)\neq 0$, atunci ecuaţia se numeşte *liniară neomogenă*.

Determinarea soluţiei

Integrarea ecuaţiei diferenţiale (2.18) se poate face prin două metode.

Metoda I: *Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange* se desfăşoară în două etape:

Etapa 1: Se rezolvă ecuaţia diferenţială liniară omogenă asociată, ecuaţie obţinută pentru $Q(x)=0$. Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile:

$$y'=P(x)\,y,\ x\in[a, b] \tag{2.19}$$

deci

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=P(x)\,dx.$$

Integrând, se deduce soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene (2.19), notată cu y_{GO}

$$\int\frac{dy}{y}=\int P(x)\,dx \Leftrightarrow \ln|y|=\int P(x)\,dx+\ln C,\ C>0 \text{ sau}$$

$$y_{GO}=C\,e^{\int P(x)\,dx}. \tag{2.20}$$

Etapa 2: Pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei neomogene (2.18) se utilizează metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

În soluţia generală (2.20) a ecuaţiei liniare omogene (2.19), se înlocuieşte constanta de integrare C cu funcţia $C(x)$ şi astfel se construieşte funcţia:

$$y=C(x)\,e^{\int P(x)\,dx}. \tag{2.21}$$

Funcţia $C(x)$ se determină astfel încât funcţia (2.21) să verifice ecuaţia neomogenă (2.18) (adică să fie o soluţie a ecuaţiei neomogene (2.18)). Se obţine:

$$C'(x)\, e^{\int P(x)dx} + C(x)P(x)\, e^{\int P(x)dx} = P(x)C(x)e^{\int P(x)dx} + Q(x) \Leftrightarrow$$

$$C'(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x) \Leftrightarrow C'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}, \text{ deci}$$

$$C(x) = \int \left(Q(x)\, e^{-\int P(x)dx} \right) dx + K, \text{ unde } K \text{ este constantă de integrare.} \qquad \textbf{(2.22)}$$

Folosind relaţia (2.22) în soluţia (2.20) a ecuaţiei omogene şi se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (2.18), notată cu y_{GN}:

$$y_{GN} = e^{\int P(x)dx} \left[\int \left(Q(x)\, e^{-\int P(x)dx} \right) dx + K \right]. \qquad \textbf{(2.23)}$$

Observaţia 2.5.8. Soluţia generală (2.23) a ecuaţiei liniare neomogene (2.18) se scrie şi sub forma

$$y_{GN} = K\, e^{\int P(x)dx} + e^{\int P(x)dx} \cdot \int \left(Q(x) e^{-\int P(x)dx} \right) dx$$

şi este egală cu integrala generală a ecuaţiei omogene (2.19) plus o soluţie particulară y_p a ecuaţiei neomogene (care se obţine din soluţia generală (2.23) dacă luăm $K = 0$).

Aşadar $y_{GN} = y_{GO} + y_p$.

Observaţia 2.5.9. Soluţia generală (2.23) a ecuaţiei liniare neomogene depinde liniar de constanta de integrare K, deci este de forma

$$y_{GN} = \varphi(x) + K\psi(x),$$

adică este o familie de curbe ce depinde liniar de constanta K.

Observaţia 2.5.10. Ecuaţia

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \text{ cu } a, b, c : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} \text{ continue}, \ a(x) \neq 0$$

este o ecuaţie diferenţială liniară. Prin împărţirea cu $a(x)$, dacă se fac notaţiile $P(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$ şi $Q(x) = -\dfrac{c(x)}{a(x)}$, atunci se aduce ecuaţia la forma (2.18).

Metoda II: Se caută soluţia generală a ecuaţiei neomogene (2.18) sub forma:

$$y(x) = u(x)v(x), \ x \in [a, b], \qquad \textbf{(2.24)}$$

adică sub forma unui produs de două funcţii dintre care o funcţie se alege convenabil, iar cealaltă se alege astfel încât $y(x)$ să verifice ecuaţia (2.18). Avem

$$y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),\ x\in[a,\,b] \tag{2.25}$$

şi înlocuind (2.24) şi (2.25) în ecuaţia (2.18) se obţine

$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=P(x)u(x)v(x)+Q(x)$ sau

$$u'(x)v(x)+u(x)\big(v'(x)-P(x)v(x)\big)=Q(x). \tag{2.26}$$

Se pune condiţia $v'-P(x)\,v=0$ şi se determină funcţia $v(x)$:

$v'-P(x)v=0 \Leftrightarrow v'=P(x)\,v \Leftrightarrow \dfrac{dv}{dx}=P(x)v \Leftrightarrow \dfrac{dv}{v}=P(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int P(x)\,dx \Leftrightarrow \ln v=\int P(x)\,dx$, deci

$$v(x)=e^{\int P(x)\,dx}. \tag{2.27}$$

Se foloseşte relaţia (2.27) în egalitatea (2.26) şi se obţine

$u'\,e^{\int P(x)\,dx}=Q(x) \Leftrightarrow u'=Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}$, deci

$$u(x)=\int\left(Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\right)dx+K. \tag{2.28}$$

Folosind relaţiile (2.27) şi (2.28) în (2.24) se obţine soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene (2.18):

$$y_{GN}=e^{\int P(x)\,dx}\left[\int\left(Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\right)dx+K\right].$$

Exemplul 2.5.5. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $y'+2\,x\,y=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

$y'+2\,x\,y=e^{-x^2} \Leftrightarrow y'=-2\,x\,y+e^{-x^2}$ este o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă, unde

$P(x)=-2\,x\,y$ şi $Q(x)=e^{-x^2}$.

Metoda I: Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

Etapa 1: Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată (pentru $Q(x)=0$):

$y'=-2\,x\,y$ (ecuaţie diferenţială cu variabile separabile).

$$y' = -2\,x\,y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -2\,x\,y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2\,x\,dx \Leftrightarrow \ln y = -x^2 + \ln C$$

deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$y_{GO} = C\,e^{-x^2}$, cu C constantă reală arbitrară.

Etapa 2: Se variază constanta $C \to C(x)$.

Se construieşte funcţia $y = C(x)\,e^{-x^2}$ şi se pune condiţia să verifice ecuaţia liniară neomogenă dată. Rezultă

$y' = C'(x)\,e^{-x^2} - 2\,x\,C(x)\,e^{-x^2}$ şi înlocuind în ecuaţia neomogenă se găseşte:

$$C'(x)\,e^{-x^2} - 2\,x\,C(x)\,e^{-x^2} = -2\,x\,C(x)\,e^{-x^2} + e^{-x^2} \Leftrightarrow$$

$$C'(x)\,e^{-x^2} = e^{-x^2} \Leftrightarrow C'(x) = 1, \text{ deci}$$

$$C(x) = \int dx \Leftrightarrow C(x) = x + K, \ K \text{ constantă reală}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene este

$y_{GN} = (x + K)\,e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (soluţie sub formă explicită).

Metoda II: Se caută soluţia generală de forma

$$y(x) = u(x)\,v(x)$$

deci $y' = u'\,v + u\,v'$. Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia liniară neomogenă rezultă:

$$u'\,v + u\,v' = -2\,x\,u\,v + e^{-x^2} \Leftrightarrow u'\,v + u\,(v' + 2\,x\,v) = e^{-x^2}.$$

Se pune condiţia $v' + 2\,x\,v = 0$, deci

$$v' = -2\,x\,v \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -2\,x\,v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -2\,x\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -2x\,dx \Leftrightarrow \ln v = -x^2 \Rightarrow v = e^{-x^2}.$$

Rezultă

$$u'\,v = e^{-x^2} \Leftrightarrow u'\,e^{-x^2} = e^{-x^2} \Leftrightarrow u' = 1, \text{ deci } u(x) = x + C.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene este

$$y = (x + C)e^{-x^2}.$$

2.5.5. Ecuaţii diferenţiale Bernoulli

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$y' = P(x)\, y + Q(x)\, y^{\alpha}, \text{ cu } P, Q : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continue, } \alpha \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(2.29)}$$

Observaţia 2.5.11.

1) Dacă $\alpha = 0$, ecuaţia (2.29) devine $y' = P(x)\, y + Q(x)$, adică o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă de ordinul întâi.

2) Dacă $\alpha = 1$, ecuaţia (2.29) devine $y' = \left(P(x) + Q(x)\right) y$, deci o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile.

Determinarea soluţiei

Se împarte ecuaţia (2.29) prin y^{α} şi rezultă ecuaţia

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = P(x)\, y^{1-\alpha} + Q(x).$$

Se face schimbarea de funcţie

$y(x) \to z(x)$, dată prin $y^{1-\alpha} = z$.

Atunci $\left(y^{1-\alpha}\right)' = z' \Leftrightarrow (1-\alpha)\, y^{-\alpha}\, y' = z'$, de unde rezultă

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha}.$$

Înlocuind în ecuaţia (2.29) se obţine o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă cu funcţia necunoscută $z(x)$:

$$\frac{z'}{1-\alpha} = P(x)\, z + Q(x) \Leftrightarrow z' = (1-\alpha)\left(P(x)\, z + Q(x)\right). \qquad \textbf{(2.30)}$$

Se determină soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene (2.30):

$$z_{GN} = e^{(1-\alpha)\int P(x)\,dx}\left[(1-\alpha)\int\left(Q(x)\, e^{-(1-\alpha)\int P(x)\,dx}\right)dx + K\right] \qquad \textbf{(2.31)}$$

şi ţinând cont de substituţia $y^{1-\alpha} = z$ se va obţine şi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale Bernoulli (2.29), şi anume $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, unde funcţia z este dată în relaţia (2.31).

Exemplul 2.5.6. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $x\, y' - 2\, x^2 y = x^4 \sqrt{y}$.

$x\,y' - 2\,x^2 y = x^4\sqrt{y} \Leftrightarrow y' = 2\,x\,y + x^3\,y^{\frac{1}{2}}$ este o ecuaţie diferenţială Bernoulli, unde

$P(x) = 2\,x$, $Q(x) = x^3$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Se face schimbarea de funcţie $y(x) \to z(x)$, dată prin $y^{1-\alpha} = z \Leftrightarrow y^{\frac{1}{2}} = z \Leftrightarrow y = z^2$.

Atunci $y' = 2\,z\,z'$ şi prin înlocuire ecuaţia Bernoulli devine o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă cu funcţia necunoscută $z(x)$:

$$2\,z\,z' = 2\,x\,z^2 + x^3 z \Leftrightarrow z' = x\,z + \frac{1}{2}x^3.$$

Se caută soluţia generală a ecuaţiei liniare sub forma $z = u\,v$, deci $z' = u'\,v + u\,v'$. Ecuaţia liniară devine

$$u'\,v + u\,v' = x\,u\,v + \frac{x^3}{2} \Leftrightarrow u'\,v + u\,(v' - x\,v) = \frac{x^3}{2}.$$

Se pune condiţia

$$v' - x\,v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = x\,v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int x\,dx \Leftrightarrow \ln v = \frac{x^2}{2} \Rightarrow v = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Rezultă

$$u'\,v = \frac{x^3}{2} \Leftrightarrow u'\,e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{x^3}{2} \Leftrightarrow u' = e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{x^3}{2} \Rightarrow$$

$$u = \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{x^3}{2}\,dx \Leftrightarrow u = -\frac{1}{2}\int x^2\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\,dx \Leftrightarrow u = -\frac{1}{2}\left(x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - \int 2\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)$$

$$u = -\frac{1}{2}\left(x^2\,e^{-\frac{x^2}{2}} + 2\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + K \Leftrightarrow u = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2 + 2\right) + K.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare este

$$z = u\,v \Leftrightarrow z = \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2 + 2\right) + K\right)e^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow z = K\,e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2 + 2}{2}.$$

Revenind la substituţia $y = z^2$, rezultă soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli

$$y=\left(K\,e^{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^2+2}{2}\right)^2$$ (soluţie sub formă explicită).

2.5.6. Ecuaţii diferenţiale Riccati

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x),\ \text{cu } P,\ Q,\ R:[a,\ b]\to\mathbb{R} \text{ continue.} \qquad \textbf{(2.32)}$$

Observaţia 2.5.12.

1) Dacă $P(x)=0$, ecuaţia (2.32) devine $y'=Q(x)\ y+R(x)$, adică este o ecuaţie diferenţială liniară neomogenă de ordinul întâi.

2) Dacă $R(x)=0$, ecuaţia (2.32) devine $y'=P(x)y^2+Q(x)y$, adică o ecuaţie diferenţială Bernoulli cu $\alpha=2$.

Determinarea soluţiei

În general, ecuaţia Riccati nu se integrează prin cuadraturi, aşa cum s-a procedat în cazurile anterioare. Dacă se cunoaşte o soluţie particulară y_p a ecuaţiei Riccati (2.32), atunci se va arăta că integrarea ecuaţiei (2.32) se reduce la cuadraturi.

Se face schimbarea de funcţie

$y(x)\to z(x)$, dată prin $y=y_p+\dfrac{1}{z}$

şi rezultă $y'=y_p'-\dfrac{z'}{z^2}$. Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia (2.32) aceasta devine

$$y_p'-\frac{z'}{z^2}=P(x)\left(y_p+\frac{1}{z}\right)^2+Q(x)\left(y_p+\frac{1}{z}\right)+R(x)$$

$$y_p'-\frac{z'}{z^2}=P(x)y_p^2+Q(x)y_p+R(x)+2P(x)\ y_p\ \frac{1}{z}+P(x)\ \frac{1}{z^2}+Q(x)\ \frac{1}{z}. \qquad \textbf{(2.33)}$$

Deoarece y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei Riccati (2.32), rezultă

$$y_p'=P(x)y_p^2+Q(x)y_p+R(x). \qquad \textbf{(2.34)}$$

Folosind relaţia (2.34), identitatea (2.33) se mai scrie

$$-\frac{z'}{z^2}=2P(x)\ y_p\ \frac{1}{z}+P(x)\ \frac{1}{z^2}+Q(x)\ \frac{1}{z}\Leftrightarrow$$

$z'=-\big(2P(x)\ y_p+Q(x)\big)\ z-P(x)$ (ecuaţie diferenţială liniară neomogenă cu funcţia

necunoscută $z(x)$).

Se determină soluţia generală a ecuaţiei liniare de mai sus şi folosind substituţia $y = y_p + \frac{1}{z}$ se obţine soluţia generală a ecuaţiei Riccati (2.32).

Observaţia 2.5.13. Dacă pentru rezolvarea ecuaţiei Riccati (2.32) se face schimbarea de funcţie $y(x) \to z(x)$, dată prin $y = y_p + z$, atunci se obţine o ecuaţie Bernoulli.

Exemplul 2.5.7. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $y' + y^2 = 2xy + 5 - x^2$, cu soluţia particulară $y_p = x + 2$. Să se găsească curba integrală ce trece prin punctul $M(0,-2)$.

$y' + y^2 = 2xy + 5 - x^2 \Leftrightarrow y' = -y^2 + 2xy + 5 - x^2$ este o ecuaţie Riccati, unde

$P(x) = -1,\ Q(x) = 2x,\ R(x) = 5 - x^2$.

Se face schimbarea de funcţie $y(x) \to z(x)$, dată prin $y = y_p + \frac{1}{z} \Leftrightarrow y = x + 2 + \frac{1}{z}$.

Atunci rezultă $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$ şi prin înlocuire, ecuaţia Riccati se transformă într-o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $z(x)$:

$$1 - \frac{z'}{z^2} = -\left(x + 2 + \frac{1}{z}\right)^2 + 2x\left(x + 2 + \frac{1}{z}\right) + 5 - x^2 \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} \Leftrightarrow z' = 1 + 4z.$$

Ecuaţia cu variabile separabile devine

$$z' = 1 + 4z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + 4z \Leftrightarrow \frac{dz}{1+4z} = dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dz}{1+4z} = \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln(1+4z) = x + \frac{1}{4}\ln C \Leftrightarrow \ln\frac{1+4z}{C} = 4x \Leftrightarrow z = \frac{C\,e^{4x} - 1}{4}.$$

Folosind substituţia $y = x + 2 + \frac{1}{z}$, rezultă soluţia generală a ecuaţiei Riccati

$y = x + 2 + \frac{4}{C\,e^{4x} - 1}$ (soluţie sub formă explicită).

În continuare se determină curba integrală ce trece prin punctul $M(0,-2)$, adică soluţia ecuaţiei Riccati care verifică condiţia Cauchy $y(0) = -2$.

Din condiţia $y(0) = -2$ rezultă

$$-2 = 2 + \frac{4}{C-1} \Leftrightarrow \frac{4}{C-1} = -4 \Leftrightarrow C-1 = -1 \Rightarrow C = 0.$$

Curba integrală care trec prin punctul $M(0,-2)$ are ecuaţia explicită $y = x-2,\ x \in \mathbb{R}$.

2.5.7. Ecuaţii diferenţiale cu diferenţiale totale exacte

Fie ecuaţia diferenţială $y' = f(x,y),\ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ (D este domeniu simplu conex), unde $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, cu $P, Q : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, $Q(x,y) \neq 0$ în D. Avem

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \Leftrightarrow P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \qquad \textbf{(2.35)}$$

Ecuaţia diferenţială (2.35) se numeşte cu *diferenţiale totale exacte* dacă membrul stâng este o diferenţială totală exactă, adică dacă şi numai dacă are loc $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pe $D \subset \mathbb{R}^2$.

Aşadar, ecuaţiile diferenţiale cu diferenţiale totale exacte sunt de forma:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \text{ cu } P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ de clasă } C^1,$$

unde $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu simplu conex şi $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ pe D. **(2.36)**

Determinarea soluţiei

Deoarece expresia diferenţială $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ este o diferenţială totală, atunci din independenţa de drum a integralei curbilinii, există o funcţie diferenţiabilă $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \qquad \textbf{(2.37)}$$

Pe de altă parte se ştie că

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy. \qquad \textbf{(2.38)}$$

Din relaţiile (2.37) şi (2.38) rezultă egalităţile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \end{cases}. \qquad \textbf{(2.39)}$$

Folosind relaţiile (2.39), rezultă că funcţia F este dată de egalitatea:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt,\ (x,y)\in D \qquad \textbf{(2.40)}$$

punctul $(x_0,y_0)\in D$ fiind ales astfel încât drumul de integrare ABM să fie în întregime în D.

Pe de altă parte, folosind relaţia (2.37), ecuaţia (2.36) devine

$$dF(x,y)=0,\ (\forall)\ (x,y)\in D\ ,$$

de unde rezultă

$$F(x,y)=C\ (\text{constantă}),\ (x,y)\in D \qquad \textbf{(2.41)}$$

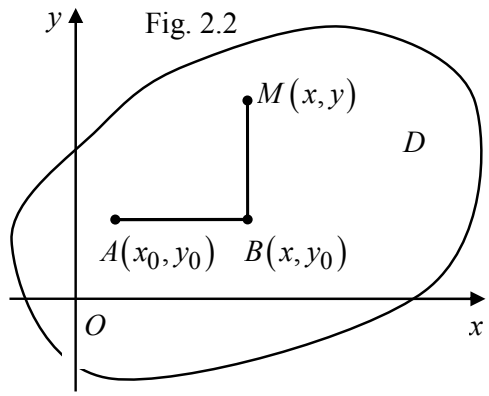


Fig. 2.2

Combinând relaţiile (2.40) şi (2.41), rezultă că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu diferenţiale totale exacte (2.36) este:

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt=C\ ,\ (x_0,y_0)\in D\,. \qquad \textbf{(2.42)}$$

Exemplul 2.5.8. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$(x+y+1)\,dx+\left(x-y^2+3\right)dy=0\ .$$

Se fac notaţiile $P(x,y)=x+y+1,\ Q(x,y)=x-y^2+3$, cu $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clasă C^1. Deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$, atunci ecuaţia diferenţială este cu diferenţiale totale exacte.

Rezultă că există funcţia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenţiabilă astfel încât

$$dF(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0\,.$$

Cum $dF(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$ şi folosind relaţia anterioară, rezultă

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=P(x,y)=x+y+1\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)=x-y^2+3\end{cases}.$$

Integrând prima ecuaţie din sistem se obţine

$$F(x,y)=\int (x+y+1)\,dx \Leftrightarrow F(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+C(y).$$

Se derivează relaţia de mai sus în raport cu y şi rezultă $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x+C'(y)$.

Se egalează ecuaţia a doua a sistemului cu egalitatea anterioară şi rezultă:

$x-y^2+3=x+C'(y) \Rightarrow C'(y)=-y^2+3$, deci

$C(y)=\int\left(-y^2+3\right)dy$, adică $C(y)=-\frac{y^3}{3}+3y+K$.

Avem $F(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+K$.

Pe de altă parte, $dF(x,y)=0$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, deci $F(x,y)=C_1$.

Atunci soluţia generală a ecuaţiei este

$$\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+K=C_1 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y=C$$

(soluţie sub formă implicită; s-a notat $C=C_1-K$ = constantă arbitrară).

2.5.8. Factor integrant

Fie ecuaţia diferenţială:

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0, \text{ cu } P,\,Q:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \text{ de clasă } C^1,$$

$$\text{unde } D\subset\mathbb{R}^2 \text{ domeniu, } \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ pe } D. \qquad \textbf{(2.43)}$$

Membrul stâng $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ al ecuaţiei (2.43) nu este o diferenţială totală exactă în D, adică $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\neq\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.

Determinarea soluţiei

Se caută o funcţie diferenţiabilă $\mu:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de clasă C^1 pe D, numită *factor integrant* al ecuaţiei (2.43) astfel încât înmulţind ecuaţia (2.43) cu $\mu(x,y)$ ecuaţia rezultată să devină o ecuaţie diferenţială cu diferenţiale totale exacte.

Ecuaţia

$$\mu(x,y)\cdot P(x,y)\,dx+\mu(x,y)\cdot Q(x,y)\,dy=0 \qquad \textbf{(2.44)}$$

este cu diferenţiale totale exacte dacă are loc relaţia

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\cdot P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\cdot Q) \text{ sau } P\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\cdot\frac{\partial P}{\partial y}=Q\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad \textbf{(2.45)}$$

Observaţia 2.5.14. Ecuaţiile (2.45) sunt ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi şi, de regulă, sunt mai greu de rezolvat decât rezolvarea ecuaţiei (2.43). Se observă că este nevoie doar de o soluţie particulară a ecuaţiei (2.45) şi că, în anumite cazuri, determinarea unei astfel de soluţii este posibilă.

În cazul particular când se caută un factor integrant funcţie numai de o singură variabilă (numai în funcţie de x sau de y), atunci ecuaţia (2.45) se integrează uşor. După determinarea funcţiei μ se integrează ecuaţia diferenţială cu diferenţiale totale exacte (2.44) şi evident că orice soluţie a sa este şi soluţie a ecuaţiei (2.43).

Observaţia 2.5.15. De regulă, în cazuri concrete, se dau indicii asupra formei factorului integrant (de exemplu: $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x\pm y)$, $\mu\left(x^2\pm y^2\right)$, $\mu(xy)$, $\mu\left(\frac{y}{x}\right)$).

Cazul I. Dacă se caută factorul integrant de forma $\mu=\mu(x)$ (o funcţie numai de variabila x), atunci $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ şi ecuaţia (2.45) devine:

$$\mu\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\cdot\frac{d\mu}{dx}\Leftrightarrow\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}. \qquad \textbf{(2.46)}$$

Dacă membrul drept al ecuaţiei (2.46) depinde numai de x, atunci ecuaţia (2.46) este cu variabile separabile şi determinarea funcţiei μ este posibilă. Rezultă:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}\,dx\Leftrightarrow\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}\,dx\Leftrightarrow$$

$$\ln|\mu|=\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}\,dx+\ln C\Rightarrow\mu=C\,e^{\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cdot\frac{1}{Q}\,dx}.$$

Luând $C=1$ se obţine un factor integrant suficient pentru a integra ecuaţia (2.43).

Cazul II. Dacă se caută factorul integrant de forma $\mu=\mu(y)$ (o funcţie numai de variabila y), atunci $\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$ şi ecuaţia (2.45) devine:

$$\mu\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=P\cdot\frac{d\mu}{dy}\Leftrightarrow\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dy}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{P}. \qquad \textbf{(2.47)}$$

Dacă membrul drept al ecuaţiei (2.47) depinde numai de y, atunci ecuaţia (2.47) este cu variabile separabile şi determinarea funcţiei μ este posibilă. Rezultă

$$\frac{d\mu}{\mu}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{P}\,dy\Leftrightarrow\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{P}\,dy\Leftrightarrow$$

$$\ln|\mu|=\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{P}\,dy+\ln C\Rightarrow\mu=C\,e^{\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\frac{1}{P}dy}.$$

Observaţia 2.5.16. În mod asemănător se procedează şi în cazul în care cerem ca ecuaţia (2.43) să admită un factor integrant de forma $\mu(x\pm y)$, $\mu\left(x^2\pm y^2\right)$, $\mu(xy)$, $\mu\left(\frac{y}{x}\right)$.

Exemplul 2.5.9. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $\left(xy^2+y\right)dx-x\,dy=0$, cu factor integrant de forma $\mu=\mu(y)$.

Se fac notaţiile:

$P(x,y)=xy^2+y$, $Q(x,y)=-x$, cu $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clasă C^1.

Deoarece $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy+1$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$, atunci ecuaţia diferenţială nu este cu diferenţiale totale exacte. Se caută un factor integrant $\mu:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\mu=\mu(y)$ astfel încât ecuaţia

$$\mu\cdot\left(xy^2+y\right)dx-\mu\cdot x\,dy=0$$

să fie cu diferenţiale totale exacte. Trebuie să avem:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\cdot\left(xy^2+y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-\mu\cdot x),\text{ cu }\frac{\partial\mu}{\partial x}=0.$$

Rezultă:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot\left(xy^2+y\right)+\mu\cdot(2xy+1)=\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot(-x)-\mu\Leftrightarrow\mu\cdot(2xy+2)=-\frac{d\mu}{dy}\cdot\left(xy^2+y\right)$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2(xy+1)}{y(xy+1)}\,dy\Leftrightarrow\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{y}\,dy\ \text{(ecuaţie diferenţială cu variabile separabile).}$$

Prin integrare rezultă:

$\ln\mu = -2\ln y + \ln C$ sau $\mu = \dfrac{C}{y^2}$. Se ia $C = 1$ şi rezultă $\mu = \dfrac{1}{y^2}$.

Se înmulţeşte ecuaţia dată cu $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ şi se obţine o ecuaţie diferenţială cu diferenţiale totale exacte:

$$\frac{1}{y^2}\left(xy^2 + y\right)dx - \frac{1}{y^2}\,xdy = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0.$$

Se integrează această ecuaţie şi se obţine $F(x,y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x}\left(t + \frac{1}{y_0}\right)dt - \int_{y_0}^{y}\frac{x}{t^2}\,dt$.

Se va lua $(x_0, y_0) = (1, 1)$ şi rezultă:

$$F(x,y) = \int_1^x (t+1)\,dt - \int_1^y \frac{x}{t^2}dt = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Bigg|_1^x + \frac{x}{t}\Bigg|_1^y = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} - 1\right) + \frac{x}{y} - x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} - \frac{3}{2}.$$

Pe de altă parte $dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$.

Atunci soluţia generală a ecuaţiei este $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{y} - \dfrac{3}{2} = C \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{y} = C_1$.

Exemplul 2.5.10. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$(x+y)dx + (y-x)dy = 0$, cu factor integrant de forma $\mu = \mu\left(x^2 + y^2\right)$.

Se fac următoarele notaţii:

$P(x,y) = x + y,\ Q(x,y) = y - x$, cu $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 şi $u(x,y) = x^2 + y^2$.

Deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$, atunci ecuaţia diferenţială nu este cu diferenţiale totale exacte.

Se caută un factor integrant $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mu = \mu(u) = \mu\left(x^2 + y^2\right)$ astfel încât ecuaţia

$$(\mu \cdot P)\,dx + (\mu \cdot Q)\,dy = 0 \Leftrightarrow \mu \cdot (x+y)\,dx + \mu \cdot (y-x)\,dy = 0$$

să fie cu diferenţiale totale exacte, adică să aibă loc relaţia:

$$\frac{\partial(\mu\cdot P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu\cdot Q)}{\partial x}\Leftrightarrow P\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\cdot\frac{\partial P}{\partial y}=Q\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}\Leftrightarrow$$

$$(x+y)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\cdot 1=(y-x)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\cdot(-1)\Leftrightarrow(x+y)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+2\mu=(y-x)\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}.$$

Conform regulilor de derivare a funcţiilor compuse, rezultă relaţiile:

$$\frac{\partial\mu(u)}{\partial y}=\frac{d\mu}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{d\mu}{du}\cdot\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial y}=\frac{d\mu}{du}\cdot 2y \text{ şi}$$

$$\frac{\partial\mu(u)}{\partial x}=\frac{d\mu}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d\mu}{du}\cdot\frac{\partial\left(x^2+y^2\right)}{\partial x}=\frac{d\mu}{du}\cdot 2x.$$

Folosind ultimele două relaţii, ecuaţia factorului integrant devine o ecuaţie cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $\mu(u)$:

$$(x+y)\cdot\frac{d\mu}{du}\cdot 2y+2\mu=(y-x)\cdot\frac{d\mu}{du}\cdot 2x\Leftrightarrow\frac{d\mu}{du}\left(2xy-2x^2-2yx-2y^2\right)=2\mu\Leftrightarrow$$

$$\frac{d\mu}{du}\left(-2x^2-2y^2\right)=2\mu\Leftrightarrow\frac{d\mu}{du}\cdot(-2u)=2\mu\Leftrightarrow -u\,\frac{d\mu}{du}=\mu\Leftrightarrow\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{du}{u}.$$

Prin integrare se obţine o soluţie particulară

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int-\frac{du}{u}\Leftrightarrow\ln\mu=-\ln u\text{, deci }\mu=\frac{1}{u}\text{, adică }\mu\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Înmulţind ecuaţia iniţială cu $\mu\left(x^2+y^2\right)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ se obţine o ecuaţie diferenţială cu diferenţiale totale exacte. Se fac notaţiile:

$$P^*(x,y)=\mu\cdot P=\frac{x+y}{x^2+y^2}\text{ şi }Q^*(x,y)=\mu\cdot Q=\frac{y-x}{x^2+y^2}\text{. Atunci}$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial y}=\frac{\partial Q^*}{\partial x}=\frac{x^2-2xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

şi deci există o funcţie diferenţiabilă $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ astfel încât

$$dF(x,y)=P^*(x,y)\,dx+Q^*(x,y)\,dy=0.$$

Cum $dF(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy$ şi folosind relaţia anterioară, rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P^*(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q^*(x,y) = \dfrac{y-x}{x^2+y^2} \end{cases}.$$

Se integrează prima ecuaţie din sistem în raport cu x şi se găseşte:

$$F(x,y) = \int \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + y\cdot\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C(y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C(y).$$

Derivând ultima relaţie obţinută în raport cu y rezultă:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{2\left(x^2+y^2\right)} + \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + C'(y) = \frac{y-x}{x^2+y^2} + C'(y).$$

Egalând ecuaţiei a doua din sistemul anterior cu ultima relaţie determinată se obţine:

$$\frac{y-x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2} + C'(y) \Leftrightarrow C'(y) = 0, \text{ deci } C(y) = K \text{ (constantă)}.$$

Expresia funcţiei $F(x,y)$ devine $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} + K$.

Pe de altă parte, $dF(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, deci $F(x,y) = C_1$.

Atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + K = C_1 \Rightarrow \ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C$$

(soluţie sub formă implicită; s-a notat $C = C_1 - K$ = constantă arbitrară).

2.6. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi nerezolvate în raport cu y', integrabile prin metode elementare

Până acum ne-am ocupat de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi sub forma normală (explicită)

$y' = f(x,y),\ (x,y) \in D$, adică rezolvate în raport cu y'.

În continuare ne vom ocupa de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi de forma:

$F(x,y,y') = 0$, nerezolvate în raport cu y', adică sub forma implicită.

2.6.1. Ecuaţii diferenţiale Lagrange

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y'),\ \text{cu } \varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ de clasă } C^1. \qquad \textbf{(2.48)}$$

Observaţia 2.6.1. O ecuaţie diferenţială de forma :

$$A(y')\,x + B(y')\,y + C(y') = 0,\ \text{cu } A, B, C : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ de clasă } C^1$$

se poate aduce la forma (2.48) prin împărţirea cu $B(y') \neq 0$.

Observaţia 2.6.2. Ecuaţiile diferenţiale Lagrange fac parte din clasa ecuaţiilor $F(x, y, y') = 0$ care nu pot fi rezolvate în raport cu y', în care membrul drept este o funcţie liniară de variabila x, cu coeficienţi funcţie de y'.

Determinarea soluţiei

În ecuaţia (2.48) se înlocuieşte $y'(x)$ cu $p(x)$ şi ecuaţia devine

$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p) \qquad \textbf{(2.49)}$$

şi apoi se derivează în raport cu x, ţinând seama că p este funcţie de x şi se ajunge la o ecuaţie liniară în x, din care se scoate x ca funcţie de p:

$$y'(x) = \varphi(p) + x\varphi'(p)\,p'(x) + \psi'(p)\,p'(x).$$

Cum $y'(x) = p(x)$ şi $p'(x) = \dfrac{dp}{dx}$, relaţia precedentă se scrie

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}\left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right] + \varphi(p) - p = 0.$$

Dacă considerăm p variabilă independentă şi x funcţie necunoscută, atunci rezultă ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi cu funcţia necunoscută $x(p)$

$$(\varphi(p) - p)\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x - \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p},\ \text{dacă } \varphi(p) - p \neq 0. \qquad \textbf{(2.50)}$$

Prin integrarea ecuaţiei (2.50) se găseşte soluţia generală

$$x = g(p, C),\ \text{cu } C \text{ constantă reală arbitrară, adică} \qquad \textbf{(2.51)}$$

$$x = e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[\int -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)-p}\, e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\, dp + C\right]. \qquad \textbf{(2.52)}$$

Folosind (2.51) în relaţia (2.49) se găseşte şi y ca funcţie de p

$$y = g(p,C)\varphi(p) + \psi(p),\ p \in [a,\, b]. \qquad \textbf{(2.53)}$$

Sistemul format din relaţiile (2.51) şi (2.53) ne oferă soluţia generală sub formă parametrică a ecuaţiei diferenţiale Lagrange (2.48):

$$\begin{cases} x = g(p,C) \\ y = g(p,C)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases},\ p \in [a,\, b]. \qquad \textbf{(2.54)}$$

Observaţia 2.6.3. Rămâne să considerăm cazul $\varphi(p) - p = 0$. Dacă p_0 este o soluţie a ecuaţiei $\varphi(p) - p = 0$ (adică $\varphi(p_0) = p_0$), atunci $y = p_0 x + \psi(p_0)$ este o soluţie singulară a ecuaţiei diferenţiale Lagrange (2.48) şi pot avea loc două situaţii

1) Dacă $\lim\limits_{p \to p_0} |x(p)| = \lim\limits_{p \to p_0} |g(p,C)| = x_0$ (finit), atunci dreapta $y = p_0 x + \psi(p_0)$ este o soluţie singulară a ecuaţiei Lagrange (2.48) (această soluţie nu este conţinută în soluţia generală (2.54) dată parametric).

2) Dacă $\lim\limits_{p \to p_0} |x(p)| = \lim\limits_{p \to p_0} |g(p,C)| = +\infty$, atunci dreapta $y = p_0 x + \psi(p_0)$ este o direcţie asimptotică a curbelor integrale date parametric de integrala generală (2.54).

Exemplul 2.6.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $y = x y'^2 + y'^2$.

Se fac notaţiile $\varphi(y') = \psi(y') = y'^2$, deci ecuaţia este ecuaţie diferenţială Lagrange.

Se notează $y' = p$, cu $p = p(x)$ şi înlocuind în ecuaţia Lagrange aceasta devine

$y = x p^2 + p^2$.

Se derivează în raport cu x şi se ţine cont că p este funcţie de x şi că $y' = p$:

$$p = p^2 + 2xpp' + 2pp' \Leftrightarrow p'(2px + 2p) = p - p^2 \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}\cdot(2px + 2p) = p - p^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx}{dp}\cdot p(1-p) = 2p(x+1) \Leftrightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2(x+1)}{1-p},\ \text{pentru } p(1-p) \neq 0.$$

$\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2}{1-p}x + \dfrac{2}{1-p}$ ecuaţie diferenţială liniară cu funcţia necunoscută $x(p)$.

Se rezolvă această ecuaţie liniară prin metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

Etapa1: Se rezolvă ecuaţia omogenă asociată:

$$\frac{dx}{dp}=\frac{2}{1-p}x \Leftrightarrow \frac{dx}{x}=\frac{2}{1-p}\,dp \Leftrightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\frac{2}{1-p}\,dp \Leftrightarrow \ln x=-2\ln|1-p|+\ln C$$

sau

$$x_{GO}=\frac{C}{(1-p)^2}.$$

Etapa 2: Se variază constanta $C\to C(p)$.

Se construieşte funcţia $x=\dfrac{C(p)}{(1-p)^2}$ şi se pune condiţia să fie o soluţie particulară a ecuaţiei liniare neomogene. Rezultă:

$$\frac{C'(p)(1-p)^2+2(1-p)C(p)}{(1-p)^4}=\frac{2}{1-p}\cdot\frac{C(p)}{(1-p)^2}+\frac{2}{1-p} \Leftrightarrow \frac{C'(p)}{(1-p)^2}=\frac{2}{1-p}$$

$$C'(p)=2(1-p)\Rightarrow C(p)=\int 2(1-p)\,dp=2p-p^2+K.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene este

$$x_{GN}=\frac{C(p)}{(1-p)^2} \Leftrightarrow x_{GN}=\frac{2p-p^2+K}{(1-p)^2}.$$

Observaţie. Ecuaţia diferenţială liniară $\dfrac{dx}{dp}=\dfrac{2}{1-p}x+\dfrac{2}{1-p} \Leftrightarrow \dfrac{dx}{dp}=2(x+1)\cdot\dfrac{1}{1-p}$ poate fi considerată ecuaţie cu variabile separabile şi rezolvarea ei se poate face mult mai rapid.

Înlocuind în ecuaţia $y=x\,p^2+p^2$ se obţine şi y ca funcţie de p:

$$y=\frac{2p-p^2+K}{(1-p)^2}\cdot p^2+p^2 \Leftrightarrow y=\frac{\left(p^2+1\right)K}{(1-p)^2}.$$

Soluţia generală sub formă parametrică a ecuaţiei Lagrange este: $\begin{cases} x=\dfrac{2p-p^2+K}{(1-p)^2} \\ y=\dfrac{\left(p^2+1\right)K}{(1-p)^2} \end{cases}$.

În cazul $p - p^2 = 0$ avem soluţiile $p = 0$ şi $p = 1$.

Pentru $p = 0$, rezultă că $y = x \cdot 0^2 + 0^2 \Leftrightarrow y = 0$ este o soluţie singulară, deoarece

$$\lim_{p \to 0} \left| x(p) \right| = \lim_{p \to 0} \left| \frac{2p - p^2 + K}{(1-p)^2} \right| = |K| \text{ (finită)}.$$

Pentru $p = 1$, rezultă că $y = x + 1$ este o soluţie singulară şi avem

$\lim_{p \to 1} \left| x(p) \right| = \lim_{p \to 1} \left| \frac{2p - p^2 + K}{(1-p)^2} \right| = +\infty$, pentru $K \neq -1$, deci dreapta $y = x + 1$ este o direcţie asimptotică a curbelor integrale reprezentate de soluţia generală care au $K \neq -1$.

2.6.2. Ecuaţii diferenţiale Clairaut

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$y = x\,y' + \psi(y'), \text{ cu } \psi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ de clasă } C^1. \qquad \textbf{(2.55)}$$

Observaţia 2.6.4. Ecuaţia diferenţială Clairaut (2.55) este un caz particular de ecuaţie diferenţială Lagrange pentru $\varphi(y') = y'$.

Determinarea soluţiei

Pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale (2.55) se procedează la fel ca pentru ecuaţia Lagrange (2.48).

Se notează $y' = p$ (cu $p = p(x)$) şi înlocuind în ecuaţia (2.55), aceasta devine

$$y = x\,p + \psi(p). \qquad \textbf{(2.56)}$$

Se derivează în raport cu x ecuaţia (2.56), ţinând seama că p este funcţie de x

$y' = p + xp' + \psi'(p)\,p'$ sau $p = p + xp' + \psi'(p)\,p' \Leftrightarrow p'\left(x + \psi'(p)\right) = 0$.

Sunt două cazuri posibile:

1) $p' = 0$, deci $p = C$ (constantă arbitrară) şi înlocuind în ecuaţia (2.56) se obţine

$$y = C\,x + \psi(C),\ C \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(2.57)}$$

şi reprezintă *soluţia generală* a ecuaţiei Clairaut (2.55).

Observaţia 2.6.5. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (2.55) reprezintă geometric o *familie de drepte* ce se obţine înlocuind în ecuaţia iniţială (2.55) y' cu o constantă C.

2) $x+\psi'(p)=0$, deci $x=-\psi'(p)$ şi înlocuind în ecuaţia (2.56) se va determina şi y ca funcţie de p:

$$y=-\psi'(p)\,p+\psi(p).$$

Sistemul

$$\begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y=-\psi'(p)\,p+\psi(p) \end{cases},\ p\in[a,\,b] \qquad \textbf{(2.58)}$$

reprezintă *soluţia singulară* sub formă parametrică a ecuaţiei Clairaut (2.55).

Observaţia 2.6.6. Soluţia singulară a ecuaţiei diferenţiale (2.55) reprezintă geometric *înfăşurătoarea familiei de drepte* ce reprezintă integrala generală (2.57) (adică tangenta în orice punct al curbei (2.58) este o dreaptă din familia (2.57)).

Observaţia 2.6.7. Ecuaţia diferenţială Clairaut (2.55) admite:

1) o soluţie generală, ce se obţine înlocuind pe y' cu o constantă C şi care reprezintă geometric o familie de drepte:

$$y=C\,x+\psi(C).$$

2) o soluţie singulară, ce se obţine eliminând parametrul C între ecuaţia soluţiei generale şi relaţia obţinută prin derivarea soluţiei generale în raport cu C

$$\begin{cases} y=C\,x+\ \psi(C) \\ 0=\quad x+\psi'(C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-C\,\psi'(C)+\psi(C) \\ x=-\psi'(C) \end{cases}.$$

Exemplul 2.6.2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $y=x\,y'+y'^2$.

Soluţia generală: se pune $y'=C$ şi se obţine $y=C\,x+C^2$ (familie de drepte).

Soluţia singulară este înfăşurătoarea familiei de drepte.

Se notează $F(x,y,C)=y-C\,x-C^2=0$ şi se calculează $\dfrac{\partial F}{\partial C}(x,y,C)=-x-2C$.

Se elimină parametrul C din ecuaţiile:

$$\begin{cases} F(x,y,C)\quad =0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial C}(x,y,C)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-C\,x-C^2=0 \\ -x-2C\qquad =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2C \\ y-C\,x-C^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2C \\ y=-C^2 \end{cases}$$

(soluţie sub formă parametric ce reprezintă înfăşurătoarea familiei de drepte).

Observaţie. Se poate obţine soluţia singulară şi sub formă explicită astfel:

Se elimină parametrul C între ecuaţiile:

$$\begin{cases} y - Cx - C^2 = 0 \\ -x - 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - Cx - C^2 = 0 \\ C = -\dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} = 0 \\ C = -\dfrac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$$

(soluţie sub formă explicită ce reprezintă din punct de vedere geometric o parabolă).

Prin urmare, curbele integrale ale ecuaţiei Clairaut sunt: parabola de ecuaţia $y = -\dfrac{x^2}{4}$ şi toate tangentele ce se pot duce la parabolă.

2.7. Traiectorii izogonale. Traiectorii ortogonale

Definiţia 2.7.1. Fie (Γ) şi (Γ') două familii de curbe plane definite într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ astfel încât prin fiecare punct $(x, y) \in D$ să treacă câte o singură curbă din fiecare familie.

Spunem că familiile de curbe (Γ) şi (Γ') se numesc *izogonale* dacă în fiecare punct din domeniul D cele două curbe ale familiilor care trec prin acest punct se intersectează sub un unghi constant θ.

Se consideră un punct $M(x_0, y_0) \in D$ şi fie γ, γ' cele două curbe ale familiilor (Γ) şi (Γ') care trec prin punctul M. Unghiul θ sub care se taie curbele γ şi γ' în M este unghiul format de tangentele în M la curbele γ şi γ'. Se notează cu θ_1, respectiv θ_2, unghiurile făcute de tangentele la γ, respectiv γ', cu semiaxa pozitivă Ox. Rezultă

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 .$$

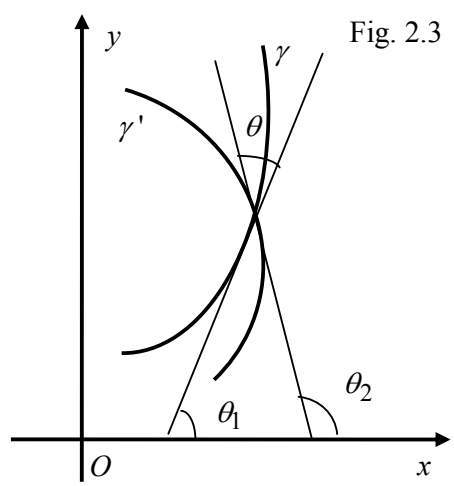


Fig. 2.3

Condiţia ca familiile de curbe (Γ) şi (Γ') să fie izogonale este ca unghiul θ al tangentelor celor două curbe γ şi γ' să fie constant pentru orice $(x_0, y_0) \in D$, adică:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1}{1 + \operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_1} = \text{constant} .$$

Problema care se pune, în general, este următoarea:

Fiind dată o familie de curbe (Γ) într-un domeniu D din $\mathbb{R}^2$, să se găsească familia de curbe (Γ') izogonală familiei (Γ), adică familia de curbe care intersectează familia (Γ) sub un unghi constant.

Răspuns: Dacă familia (Γ) este definită de ecuaţia diferenţială $f(x,y,y')=0$, $(x,y)\in D$, atunci ecuaţia diferenţială a familiei (Γ') care taie familia (Γ) după un unghi constant θ, cu $\operatorname{tg}\theta = k = \text{constant}$, este

$$f\left(x,\ y,\ \frac{y'-k}{1+k\,y'}\right)=0,\ (x,y)\in D. \qquad \textbf{(2.59)}$$

Demonstraţie. Fie $(x,y)\in D$. O curbă γ a familiei (Γ) are în punctul $(x,y)\in D$ tangenta geometrică de coeficient unghiular y', definit de ecuaţia diferenţială $f(x,y,y')=0$.

Curba γ', izogonală familiei (Γ), care trece prin punctul $(x,y)\in D$ are tangenta în acest punct cu coeficientul unghiular y_1' definit prin"

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y_1'-y'}{1+y_1'\ y'}=k \Leftrightarrow y_1'-y'=k+k\ y_1'\ y' \Leftrightarrow y'=\frac{y_1'-k}{1+k\,y_1'}.$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială a familiei (Γ) pe y' cu $\dfrac{y'-k}{1+k\,y'}$ se obţine ecuaţia diferenţială a familiei de curbe (Γ'), izogonală familiei (Γ):

$$f\left(x,\ y,\ \frac{y'-k}{1+k\,y'}\right)=0,\ (x,y)\in D.$$

Observaţia 2.7.1. Dacă familia de curbe (Γ) este dată prin ecuaţia $F(x,y,C)=0$ (depinzând de un parametru C), atunci se determină mai întâi ecuaţia diferenţială a familiei (Γ) (ecuaţie ce se obţine eliminând parametrul C între ecuaţia $F(x,y,C)=0$ şi derivata ei în raport cu x, adică din ecuaţiile sistemului: $\begin{cases} F(x,y,C)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0 \end{cases}$) şi după aceea se scrie ecuaţia diferenţială a curbelor izogonale.

Definiţia 2.7.2. Fie (Γ) şi (Γ') două familii de curbe izogonale. Dacă unghiul θ sub care se taie două curbe oarecare ale celor două familii este egal cu $\dfrac{\pi}{2}$, atunci familiile (Γ) şi (Γ') se numesc *ortogonale*.

Dacă (Γ) este o familie de curbe definită prin ecuaţia diferenţială $f(x,y,y')=0$, $(x,y)\in D$, atunci familia de curbe (Γ'), ortogonală familiei (Γ) este definită de ecuaţia diferenţială:

$$f\left(x,\ y,-\frac{1}{y'}\right)=0,\ (x,y)\in D. \qquad \textbf{(2.60)}$$

Observaţia 2.7.2. Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor ortogonale a unei familii de curbe (Γ) care depinde de un parametru, se obţine din ecuaţia diferenţială a familiei (Γ), înlocuind pe y' cu $-\frac{1}{y'}$.

Exemplul 2.7.1. Să se afle traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe $y=Cx$.

Folosind Observaţia 2.7.2., se determină ecuaţia diferenţială a familiei de drepte ce trece prin origine.

Se face notaţia $F(x,y,C)=y-Cx=0$ şi se derivează în raport cu x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0 \Leftrightarrow -C+y'=0.$$

Se elimină C între ecuaţiile sistemului:

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-Cx=0 \\ y'-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-Cx=0 \\ y'=C \end{cases} \Rightarrow y-y'x=0.$$

Ecuaţia diferenţială a familiei de drepte ce trec prin origine este $y-y'x=0$.

Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor ortogonale se obţine înlocuind y' cu $-\frac{1}{y'}$ în ecuaţia diferenţială anterioară. Se obţine:

$$y+\frac{1}{y'}x=0 \Leftrightarrow yy'+x=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y}\cdot x \Leftrightarrow y\,dy=-x\,dx$$

$$\int y\,dy=\int -x\,dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C \Leftrightarrow x^2+y^2=C.$$

Aşadar, traiectoriile ortogonale formează familii de cercuri $x^2+y^2=C$ cu centrul în origine şi rază variabilă.

Exemplul 2.7.2. Să se afle traiectoriile izogonale ale familiei de drepte $y = Cx$ cu $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Rezultă $k = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Conform Exemplului 2.7.1, ecuaţia diferenţială a familiei de drepte este $y - y'x = 0$.

Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor izogonale se obţine înlocuind y' cu $\frac{y'-k}{1+ky'} = \frac{y'-1}{1+y'}$ în ecuaţia diferenţială a familiei de drepte. Se obţine:

$$y - \frac{y'-1}{1+y'} \cdot x = 0 \Leftrightarrow y + yy' - y'x + x = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$$ (ecuaţie diferenţială omogenă).

Integrând se obţine soluţia $\sqrt{x^2+y^2} = C\, e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ (traiectoriile izogonale sunt spirale logaritmice).

2.8. Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi:

$y' = f(x,y),\ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Problema Cauchy pentru această ecuaţie constă în a determina soluţia $y = y(x)$ care satisface condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$.

Obţinerea soluţiei generale pentru ecuaţia $y' = f(x,y)$ printr-un număr finit de cuadraturi este imposibilă, exceptând cazurile ecuaţiilor diferenţiale pentru care funcţia $f(x,y)$ are forme particulare (cazuri studiate în subcapitolele anterioare).

În general, o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi, luată la întâmplare, nu se clasifică în nici unul din cazurile studiate şi atunci se impune să dăm o metodă mai generală care să permită determinarea unei soluţii aproximative a ecuaţiei. Pentru acest lucru este necesar să se precizeze condiţiile în care problema Cauchy admite soluţii, natura acestei soluţii, precum şi unicitatea ei.

În teorema următoare se stabilesc condiţiile în care această soluţie există şi este unică şi se va da un mod de construcţie a ei.

Teorema 2.8.1. (Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii de ordinul întâi)

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi $y' = f(x, y)$ care îndeplineşte condiţiile:

i) f este o funcţie reală continuă în domeniul închis (dreptunghiul) $D: \begin{cases} |x - x_0| \le a \\ |y - y_0| \le b \end{cases}$,

$a, b > 0$ şi (x_0, y_0) este un punct din plan

ii) f satisface condiţia Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_2 - y_1|, \ (\forall)\ (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

unde $L \ge 0$ este o constantă ce depinde de domeniu (fiind aceeaşi pentru tot domeniul).

Atunci există o unică funcţie $y(x)$ derivabilă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ $(h \le a)$ soluţie a ecuaţiei diferenţiale date, adică $y'(x) = f(x, y(x))$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ şi care îndeplineşte condiţia Cauchy $y(x_0) = y_0$.

Observaţia 2.8.1.

1) Din ipoteza i) a Teoremei 2.8.1 rezultă, deoarece f este continuă pe un domeniu închis D, că f este mărginită pe D, adică există $M > 0$ astfel încât

$|f(x, y)| \le M$, $(\forall)\ (x, y) \in D$.

Astfel se notează $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

2) Relativ la ipoteza ii) din Teorema 2.8.1, dacă f admite derivată parţială de ordinul întâi în raport cu y continuă pe D, atunci condiţia Lipschitz este satisfăcută.

Demonstraţie. 2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ fiind mărginită pe D, fie $L > 0$ astfel încât $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < L$, pentru orice $(x, y) \in D$. Din teorema Lagrange rezultă:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y_1 - y_2), \text{ unde } \xi \in (y_1, y_2).$$

Rezultă

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)\right| |y_1 - y_2| \le L|y_1 - y_2|, \ (\forall)\ (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

deci f satisface condiţia Lipschitz pe D.

Demonstraţia Teoremei 2.8.1. Ecuaţia $y' = f(x, y)$ se mai scrie sub forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Leftrightarrow dy = f(x, y)\, dx$$

şi prin integrare se obţine

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + C.$$

Din condiţia $y(x_0) = y_0$, rezultă $y_0 = C$ şi avem

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + y_0 \qquad \textbf{(2.61)}$$

adică ecuaţia diferenţială dată a fost scrisă sub forma unei *ecuaţii integrale* (o ecuaţie în care necunoscuta y apare sub semnul integral).

Determinarea soluţiei $y = y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale date se face prin metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard, care constă în construirea unui şir de funcţii, numite *aproximaţii succesive*: $y_0,\ y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x)$, uniform convergent către funcţia $y(x)$ pe intervalul $[x_0 - h,\ x_0 + h]$.

Aproximaţiile succesive se definesc astfel:

$$\begin{cases} y_0 = y_0 \\ y_1(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx \\ y_2(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx \quad , \ x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx \end{cases} \qquad \textbf{(2.62)}$$

Şirul aproximaţiilor succesive $y_0,\ y_1(x), \ldots,\ y_n(x), \ldots$ are proprietăţile:

1) $y_k(x_0) = y_0,\ (\forall)\ k \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ (deoarece pentru $x = x_0$ integralele sunt nule)

2) funcţiile $y_k(x),\ k\in\{1,2,...,n,...\}$ sunt continue pe intervalul $[x_0-h,\ x_0+h]$ (pentru că f este continuă pe D şi atunci integralele nedefinite sunt funcţii continue pentru $(\forall)\ x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ şi $y_n\in[y_0-b,\ y_0+b]$).

Se arătă că şirul $y_0,\ y_1(x),...,\ y_n(x),...$ este uniform convergent pe $[x_0-h,\ x_0+h]$ către o funcţie continuă $y(x)$, când $n\to+\infty$ şi limita $y(x)$ a acestui şir verifică ecuaţia diferenţială dată, deci este soluţia ecuaţiei diferenţiale.

Se consideră următoarea serie de funcţii:

$$y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+...+(y_n-y_{n-1})+... \qquad \textbf{(2.63)}$$

şi se observă că şirul aproximaţiilor succesive $(y_n)_n$ reprezintă şirul sumelor parţiale al seriei (2.63) (adică $s_n(x)=y_n(x),\ x\in[x_0-h,\ x_0+h]$), deci şirul $(y_n)_n$ şi seria de funcţii (2.63) sunt convergente în acelaşi timp. Rămâne să se demonstreze convergenţa uniformă a seriei (2.63) pe intervalul $[x_0-h,\ x_0+h]$.

Pentru seria (2.63) avem

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\,dx\right|\le M\,|x-x_0|\le M\,h\le M\cdot\frac{b}{M}=b$$

deoarece $h=\min\left\{a,\ \dfrac{b}{M}\right\}$

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_1)\,dx-\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\,dx\right|\le\int_{x_0}^{x}|f(x,y_1)-f(x,y_0)|dx\le$$

$$\le\int_{x_0}^{x} L\,|y_1-y_0|dx\le\int_{x_0}^{x} L\,M\,|x-x_0|dx=M\,L\cdot\frac{|x-x_0|^2}{2}\le\frac{L\,M\,h^2}{2!}.$$

Analog se demonstrează

$|y_3(x)-y_2(x)|\le\dfrac{L^2\,M\,h^3}{3\,!}$ şi se arătă prin recurenţă că

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\frac{L^{n-1}M}{n!}\,|x-x_0|^n\le\frac{L^{n-1}M\,h^n}{n!},\ (\forall)\ x\in[x_0-h,\ x_0+h],\ n\in\mathbb{N}. \qquad \textbf{(2.64)}$$

Se consideră seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_{n\geq 1}\frac{M\,L^{n-1}\,h^n}{n!}=Mh+\frac{MLh^2}{2\,!}+\frac{ML^2\,h^3}{3\,!}+\ldots+\frac{ML^n\,h^{n+1}}{(n+1)!}+\ \ldots\ . \qquad \textbf{(2.65)}$$

Seria numerică pozitivă (2.65) este convergentă, conform criteriului raportului.

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{ML^n\,h^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{ML^{n-1}}\cdot\frac{1}{h^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{Lh}{n+1}=0<1\right).$$

Conform relaţiei (2.64), rezultă că seria de funcţii (2.63) are termenii în valoare absolută majoraţi de termenii seriei numerice convergente (2.65) pe intervalul $[x_0-h,\,x_0+h]$ (adică seria de funcţii (2.63) este majorată de seria numerică cu termeni pozitivi convergentă (2.65) pe intervalul $[x_0-h,\,x_0+h]$).

Conform criteriului Weierstrass pentru serii de funcţii, rezultă că seria de funcţii (2.63) este absolut şi uniform convergentă pe intervalul $[x_0-h,\,x_0+h]$, deci şirul aproximaţiilor succesive $(y_n(x))_n$ este uniform convergent pe $[x_0-h,\,x_0+h]$.

Se notează cu $y(x)$ limita acestui şir. Cum $y_n\xrightarrow{u}y$ pe $[x_0-h,\,x_0+h]$ şi y_n sunt funcţii continue pe $[x_0-h,\,x_0+h]$, rezultă că $y(x)$ este continuă pe $[x_0-h,\,x_0+h]$.

Rezultă (folosind relaţiile (2.62) prin trecere la limită):

$$\begin{aligned} y(x)&=\lim_{n\to+\infty}y_n(x)=y_0+\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x}f(x,y_{n-1})\,dx=\\ &=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(x,\lim_{n\to+\infty}y_{n-1}\right)dx=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\,dx. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.66)}$$

Se arată că soluţia $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\,dx$ verifică ecuaţia diferenţială $y'=f(x,y)$.

Relaţia (2.66) reprezintă ecuaţia integrală (2.61), care este identică cu ecuaţia diferenţială $y'=f(x,y)$, deci $y(x)$ definită prin relaţia (2.66) este soluţia ecuaţiei diferenţiale $y'=f(x,y)$.

Din relaţia (2.66), pentru $x=x_0$, rezultă $y(x_0)=y_0$, deci condiţia Cauchy este verificată.

Se poate arăta că soluţia $y(x)$ dată prin relaţia (2.66) este unică şi derivabilă pe intervalul $[x_0 - h,\ x_0 + h]$. Să presupunem că mai exista o soluţie $z(x)$ astfel încât

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, z(x))\ dx,\ (\forall)\ x \in [x_0 - h,\ x_0 + h].$$

Atunci pentru orice $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$, avem:

$$|y(x) - z(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))|\ dx \right| \le L \left| \int_{x_0}^{x} |y(x) - z(x)| dx \right| \le L \|y - z\|_\infty h .$$

Se deduce, folosind $h \le \dfrac{1}{2L}$, că

$$\|y - z\|_\infty = \sup\{|y(x) - z(x)|;\ x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]\} \le 2hL\ \|y - z\|_\infty \le \|y - z\|_\infty$$

de unde

$\|y - z\|_\infty = 0$, deci $y = z$ şi astfel unicitatea este stabilită.

Observaţia 2.8.2. Şirul aproximaţiilor succesive (2.62) se foloseşte la integrarea cu aproximaţie a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x, y)$. Se înlocuieşte soluţia exactă $y(x)$ cu un termen al şirului (2.62): $y(x) \simeq y_n(x)$.

2.9. Metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard. Integrarea aproximativă a unei ecuaţii diferenţiale

Metoda aproximaţiilor succesive prezentată în Teorema 2.8.1 de existenţă si unicitate poate fi folosită la rezolvarea aproximativă a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

Fie ecuaţia diferenţială $y' = f(x, y)$ care nu se încadrează în niciun tip studiat anterior. Atunci poate fi integrată în mod aproximativ, folosind metoda Picard, care ne dă un procedeu aproximativ de rezolvare a problemei Cauchy pentru ecuaţia dată.

Presupunem că f îndeplineşte condiţiile i) şi ii) în domeniul D, din Teorema 2.8.1 de existenţă şi unicitate.

Fie $(x_0, y_0) \in D$ un punct interior.

Într-un dreptunghi $[x_0 - h,\ x_0 + h] \times [y_0 - b,\ y_0 + b]$ situat în totalitate în D, se poate construi şirul de funcţii continue $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ care converge uniform către o funcţie derivabilă $y(x)$, când $n \to +\infty$.

Se arată că $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, deci că $y(x)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale date care verifică şi condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$ (adică $y(x)$ trece prin punctul $(x_0, y_0) \in D$).

Aşadar avem şirul aproximaţiilor succesive

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx \\ y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx \quad , \text{ pentru } x \in [x_0 - h, x_0 + h]. \\ \dots \quad \dots\dots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx \end{cases}$$

În general nu se poate calcula soluţia exactă $y(x)$, $y(x) = \lim_{n \to +\infty} y_n(x)$, ci se calculează o soluţie aproximativă $y_p(x)$, care este cu atât mai apropiată de soluţia aproximativă cu cât p este mai mare.

Aşadar s-a găsit un procedeu de aproximare a soluţiei ecuaţiei diferenţiale de ordinul I $y' = f(x, y)$ care trece printr-un punct dat (x_0, y_0), adică un procedeu aproximativ de rezolvare a problemei Cauchy pentru ecuaţia diferenţială dată.

Exemplul 2.9.1. Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi

$y' = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, cu condiţia iniţială $y(0) = 0$.

Funcţia $f(x, y) = x^2 + y^2$ este continuă şi mărginită în D (deoarece $|f(x, y)| = |x^2 + y^2| \le 2$, $(\forall)\ (x, y) \in D$). Rezultă deci $M = 2$.

Avem $x_0 = y_0 = 0$ şi $a = b = 1$.

Deoarece $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = |2y| \le 2$, $(\forall)\ (x, y) \in D$, rezultă că f satisface condiţia Lipschitz.

Se ia $h=\min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}=\min\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, deci $\left[x_0-h,\ x_0+h\right]=\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$.

Conform Teoremei 2.8.1, rezultă că există o unică soluţie $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale care verifică condiţia $y(0)=0$.

Pentru $x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$, se defineşte şirul aproximaţiilor succesive astfel:

$y_0=0$

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\,dx=\int_0^x f(x,0)\,dx=\int_0^x x^2\,dx=\frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_1(x))\,dx=\int_0^x f\left(x,\frac{x^3}{3}\right)dx=\int_0^x\left(x^2+\frac{x^6}{9}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}$$

$$y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_2(x))\,dx=\int_0^x f\left(x,\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}\right)dx=\int_0^x\left(x^2+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}\right)^2\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}.$$

Dacă ne mulţumim cu această aproximaţie rezultă

$$y(x)\simeq\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535},\ x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$$

(deci se poate aproxima soluţia problemei Cauchy cu $y_3(x)$).

Exemplul 2.9.2. Să se integreze ecuaţia diferenţială $y'=y$, cu condiţia $y(0)=1$.

Soluţia generală exactă a ecuaţiei diferenţiale este $y=C\,e^x$ obţinută astfel

$$y'=y\ \Leftrightarrow\ \frac{dy}{dx}=y\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=dx\ \Leftrightarrow\ \ln y=x+\ln C\Leftrightarrow y=C\,e^x.$$

Pentru $y(0)=1$, rezultă $C=1$, deci soluţia exactă căutată este $y=e^x$.

Să găsim această soluţie şi prin metoda aproximaţiilor succesive.

Notăm

$f(x,y)=y,\ x_0=0,\ y_0=1$

$(x,y)\in\left[x_0-a,\ x_0+a\right]\times\left[y_0-b,\ y_0+b\right]\Leftrightarrow(x,y)\in\left[-a,\ a\right]\times\left[1-b,\ 1+b\right].$

Rezultă $\left|f(x,y)\right| = |y| \le 1+b$, deci $M = 1+b$ şi atunci f este continuă şi mărginită.

Cum $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |1| \le 1$

deci $L = 1$, $(\forall)\,(x,y)$ şi atunci f satisface condiţia Lipschitz.

Din relaţia $h = \min\left\{a,\ \dfrac{b}{M}\right\} = \min\left\{a,\ \dfrac{b}{1+b}\right\}$, se ia $h = 1$.

Pentru $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h] \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$ se poate aplica metoda aproximaţiilor succesive:

$$y_0 = 1$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx = 1 + \int_0^x f(x,1)\, dx = 1 + \int_0^x 1\, dx = 1 + x$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx = 1 + \int_0^x f(x, 1+x)\, dx = 1 + \int_0^x (1+x)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))\, dx = 1 + \int_0^x f\left(x, 1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) dx = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) dx =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

În general avem

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx = 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) dx =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Rezultă că soluţia căutată este

$$y(x) = \lim_{n \to +\infty} y_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x,\ x \in [-1, 1].$$

Observaţie. Soluţia obţinută numai pentru $x \in [-1, 1]$ este, evident, valabilă şi pentru $x \in \mathbb{R}$.

C A P I T O L U L 3

ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR

3.1. Introducere. Generalităţi

În Capitolul 2, s-a arătat că o *ecuaţie diferenţială de ordinul* n este o relaţie de forma

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0,\ x \in [a, b] \qquad \textbf{(3.1)}$$

şi funcţia $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ care verifică ecuaţia (3.1) şi depinde de n constante arbitrare independente $C_1, C_2, ..., C_n$ este *soluţia generală* a ecuaţiei diferenţiale (3.1).

Observaţia 3.1.1. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul n poate fi dată şi sub formele:

a) $G(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ (*forma implicită* numită şi *integrala generală*)

b) $\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y = \psi(t, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases},\ t \in [\alpha, \beta]$ (*forma parametrică*).

O *soluţie particulară* a ecuaţiei diferenţiale (3.1) este o funcţie $y = y(x),\ x \in [a, b]$ care se obţine din soluţia generală dând valori particulare constantelor $C_1, C_2, ..., C_n$.

O soluţie care nu se poate obţine din soluţia generală prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, ..., C_n$ se numeşte *soluţie singulară* a ecuaţie diferenţiale (3.1).

Exemplul 3.1.2. $y'' + 2y' + y = 0$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul 2.

Funcţia $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ este soluţia generală a ecuaţiei.

Funcţia $y(x) = e^{-x}(x+1)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei (pentru $C_1 = C_2 = 1$).

Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială de ordinul n (3.1) se enunţă astfel:

Să se determine soluţia $y = y(x),\ x \in [a, b]$ a ecuaţiei diferenţiale (3.1), care împreună cu derivatele până la ordinul $n-1$ ia nişte valori date într-un punct $x_0 \in [a, b]$:

$$\begin{cases} y(x_0, C_1, ..., C_n) & = a_0 \\ y'(x_0, C_1, ..., C_n) & = a_1 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0, C_1, ..., C_n) & = a_{n-1} \end{cases} \quad \textit{condiţii iniţiale} \text{ sau } \textit{condiţii Cauchy}. \qquad \textbf{(3.2)}$$

3.2. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior integrabile prin cuadraturi

3.2.1 Ecuaţii diferenţiale de forma

$$y^{(n)} = f(x), \text{ cu } f:[a, b] \to \mathbb{R} \text{ continuă.} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Determinarea soluţiei

Soluţia generală a ecuaţiei (3.3) se obţine prin n cuadraturi succesive astfel:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\, dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int \left(\int f(x)\, dx \right) dx + C_1 x + C_2, \text{ etc. şi se ajunge la}$$

.....

$$y(x) = g(x) + K_1 x^{n-1} + K_2 x^{n-2} + ... + K_{n-1} x + K_n \ .$$

Exemplul 3.2.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $y''' = e^{-x}$.

$y''' = e^{-x}$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul 3. Prin integrare succesivă se obţine soluţia generală sub formă explicită:

$$y'' = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C_1$$

$$y' = \int \left(-e^{-x} + C_1 \right) dx = e^{-x} + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \left(e^{-x} + C_1 x + C_2 \right) dx = -e^{-x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Aşadar, soluţia generală este $y(x) = -e^{-x} + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$, cu $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

3.2.2. Ecuaţii diferenţiale de forma

$$F\left(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},...,\ y^{(n)}\right)=0,\ k\le n, \tag{3.4}$$

din care lipsesc y şi derivatele sale până la ordinul $k-1$ inclusiv.

Determinarea soluţiei

Se efectuează schimbarea de funcţie $y(x)\to z(x)$, dată prin relaţia $y^{(k)}(x)=z(x)$ şi astfel se reduce ordinul ecuaţiei (3.4) cu k unităţi (ecuaţia diferenţială (3.4) de ordinul n se transformă într-o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-k$). Se pune $y^{(k)}=z$ şi se obţin relaţiile:

$y^{(k+1)}=z',\ y^{(k+2)}=z'',...,\ y^{(n)}=z^{(n-k)}$.

Prin folosirea acestor relaţii în ecuaţia diferenţială (3.4) se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul $n-k$:

$$F\left(x,\ z,\ z',...,\ z^{(n-k)}\right)=0,\ k\le n. \tag{3.5}$$

Se integrează ecuaţia (3.5) şi se obţine soluţia generală $z=g\left(x,C_1,C_2,...,C_{n-k}\right)$.

Înlocuind $z=y^{(k)}$, rezultă ecuaţia $y^{(k)}=g\left(x,C_1,C_2,...,C_{n-k}\right)$, ecuaţie diferenţială de ordinul k de tipul 3.2.1. Această ecuaţie se integrează succesiv de k ori şi se obţine soluţia generală y.

Exemplul 3.2.2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $xy^{(4)}-y'''=2x^3$, condiţiile cu $y(1)=1,\ y'(1)=1,\ y''(1)=0,\ y'''(1)=0$.

$xy^{(4)}-y'''=2x^3$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul 4 din care lipsesc $y,\ y',\ y''$, deci se face schimbarea de funcţie $y(x)\to z(x)$, dată prin $y'''=z$.

Rezultă $y^{(4)}=z'$ şi ecuaţia diferenţială de ordinul 4 devine:

$xz'-z=2x^3\Leftrightarrow z'=\dfrac{1}{x}z+2x^2$ (ecuaţie diferenţială de ordinul I liniară cu funcţia necunoscută $z(x)$).

Etapa 1: Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată: $z'=\dfrac{1}{x}z$.

$$z'=\frac{1}{x}z\Leftrightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}z\Leftrightarrow\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\ln z=\ln x+\ln C\Rightarrow z_{GO}=Cx.$$

Etapa 2: Se variază constanta $C \to C(x)$ şi se construieşte funcţia $z = C(x)x$, care este o soluţie particulară a ecuaţiei liniare neomogene:

$$C'(x)x + C(x) = \frac{1}{x}C(x)x + 2x^2 \Leftrightarrow C'(x)x = 2x^2 \Leftrightarrow C'(x) = 2x$$

$$C(x) = \int 2x\,dx \Leftrightarrow C(x) = x^2 + C_1, \text{ cu } C_1 \text{ constantă}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare de ordinul I este

$$z = \left(x^2 + C_1\right)x \Leftrightarrow z = x^3 + C_1 x.$$

Se revine la substituţia $y''' = z$ şi se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul 3:

$y''' = x^3 + C_1 x$ (ecuaţie diferenţială de tipul 3.2.1).

Prin integrare succesivă rezultă:

$$y'' = \int \left(x^3 + C_1 x\right) dx = \frac{x^4}{4} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y' = \int \left(\frac{x^4}{4} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2\right) dx = \frac{x^5}{20} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3$$

$$y = \int \left(\frac{x^5}{20} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3\right) dx = \frac{x^6}{120} + C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4, \text{ deci}$$

$y = \frac{1}{120}x^6 + \frac{C_1}{24}x^4 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$ este soluţia generală sub formă explicită a ecuaţiei diferenţiale de ordinul 4.

Pentru a rezolva problema Cauchy asociată se calculează:

$$y'''(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1$$

$$y''(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + C_1 \cdot \frac{1}{2} + C_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{4}$$

$$y'(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{20} + C_1 \cdot \frac{1}{6} + C_2 + C_3 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{20} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = \frac{13}{15}$$

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{120} + C_1 \cdot \frac{1}{24} + C_2 \cdot \frac{1}{2} + C_3 + C_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{13}{15} + C_4 = 1 \Rightarrow C_4 = \frac{1}{24}.$$

Soluţia particulară care îndeplineşte condiţiile iniţiale este:

$$y(x) = \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{15}x + \frac{1}{24}.$$

3.2.3. Ecuaţii diferenţiale de forma

$F\left(y,\ y',\ y'',\ldots,\ y^{(n)}\right)=0$, din care lipseşte variabila independentă x. **(3.6)**

Determinarea soluţiei

Se face schimbarea de funcţie $y(x)\to p(y)$, dată prin $y'(x)=p(y)$ şi se consideră y ca variabilă independentă şi astfel se reduce ordinul ecuaţiei diferenţiale (3.6) cu o unitate.

Din relaţia $y'=p$ (explicit $y'(x)=p\left(y(x)\right)$), prin derivare în raport cu x, rezultă:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot y'=\frac{dp}{dy}\cdot p$$

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy''}{dx}=\frac{d}{dx}\left(p\cdot\frac{dp}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(p\cdot\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p\cdot\frac{d^2p}{dy^2}\right]\cdot p,\ \text{etc.}$$

Se observă că $y''(x)$ se exprimă cu ajutorul derivatei $p'(y)$, $y'''(x)$ se exprimă cu ajutorul derivatelor $p'(y)$, $p''(y)$ şi atunci derivata $y^{(k)}(x)$ se va exprima cu ajutorul derivatei $p^{(k-1)}(y)$ şi a altor derivate de ordin mai mic. Înlocuind derivatele funcţiei y în ecuaţia (3.6) se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-1$, cu funcţia necunoscută p şi variabila independentă y de forma:

$$F\left(y,\ p,\ p',\ldots,\ p^{(n-1)}\right)=0.$$

Integrând această ecuaţie de ordinul $n-1$ se obţine:

$p=g\left(y,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}\right)$ şi folosind schimbarea $y'=p$ rezultă ecuaţia diferenţială de ordinul I"

$$y'=g\left(y,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}\right).$$

Prin integrarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul I apare şi constanta de integrarea C_n.

Exemplul 3.2.3. Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei $1+y'^2=2yy''$.

$1+y'^2=2yy''$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul 2 din care lipseşte variabila independentă x. Se face schimbarea de funcţie $y(x)\to p(y)$, dată prin $y'(x)=p(y)$ şi rezultă:

$$y'=p \text{ şi } y''=p\,\frac{dp}{dy}.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială aceasta devine:

$$1+p^2=2yp\frac{dp}{dy}\Leftrightarrow\frac{dp}{dy}=\frac{1+p^2}{2yp}\Leftrightarrow\frac{dp}{dy}=\frac{1+p^2}{2p}\cdot\frac{1}{y}$$

(ecuaţie diferenţială de ordinul I cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $p(y)$).

$$\frac{2p}{1+p^2}\,dp=\frac{dy}{y}\Leftrightarrow\int\frac{2p}{1+p^2}\,dp=\int\frac{dy}{y}\Leftrightarrow\ln\left(1+p^2\right)=\ln y+\ln C_1 \text{ sau}$$

$1+p^2=C_1\,y\Leftrightarrow p^2=C_1\,y-1$, deci $p=\pm\sqrt{C_1\,y-1}$.

Revenind la $y'=p$ se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul I cu variabile separabile"

$$y'=\pm\sqrt{C_1\,y-1}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1\,y-1}\Leftrightarrow\frac{dy}{\sqrt{C_1\,y-1}}=\pm\,dx$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{C_1\,y-1}}=\int\pm\,dx\Leftrightarrow\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1\,y-1}=\pm\,x+C_2$$ (soluţia sub formă implicită).

3.2.4. Ecuaţii diferenţiale de forma

$F\left(x,\,y,\,y',...,\,y^{(n)}\right)=0$, omogenă de grad α în raport cu $y,y',...,y^{(n)}$. **(3.7)**

Determinarea soluţiei

Se face schimbarea de funcţie $y(x)\to z(x)$, dată prin relaţia $\frac{y'(x)}{y(x)}=z(x)$ şi astfel se reduce ordinul ecuaţiei (3.7) cu o unitate.

Funcţia F fiind omogenă de grad α în $y,\,y',...,\,y^{(n)}$ (adică $F\left(x,ty,ty',...,ty^{(n)}\right)=$ $=t^{\alpha}F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)$, $(\forall)\ t\in\mathbb{R}^*$) şi luând $t=\frac{1}{y}$ se obţine ecuaţia:

$$F\left(x,\,1,\,\frac{y'}{y},...,\,\frac{y^{(n)}}{y}\right)=0. \qquad \textbf{(3.8)}$$

Folosind substituţia $\frac{y'}{y}=z$ rezultă relaţiile:

$$y'=zy$$

$$y''=z'y+zy'=z'y+z^2y=y\left(z'+z^2\right)$$

$$y'''=y'\left(z'+z^2\right)+y\left(z''+2zz'\right)=zy\left(z'+z^2\right)+y\left(z''+2zz'\right)=y\left(z''+3zz'+z^3\right),\text{ etc.}$$

Atunci $\frac{y'}{y}=z$, $\frac{y''}{y}=z'+z^2$, $\frac{y'''}{y}=z''+3zz'+z^3$, etc.

Expresia $\frac{y^{(k)}}{y}$ $(1\le k\le n)$ se exprimă cu ajutorul funcţiei z şi a primelor $k-1$ derivate ale lui z. Dacă se înlocuiesc $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y},\ldots,\frac{y^{(n)}}{y}$ în ecuaţia (3.8) se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-1$ cu funcţia necunoscută $z(x)$.

Exemplul 3.2.4. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $x^2yy''=(y-xy')^2$.

$x^2yy''=(y-xy')^2$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul 2.

Se face notaţia $F(x,y,y',y'')=x^2yy''-(y-xy')^2=0$.

Deoarece

$$F(x,ty,ty',ty'')=x^2t^2yy''-(ty-xty')^2=t^2\left[x^2yy''-(y-xy')^2\right]=$$

$$=t^2F(x,y,y',y''),\ (\forall)\ t\in\mathbb{R}^*$$

rezultă că ecuaţia diferenţială dată este omogenă de grad $\alpha=2$ în raport cu $y,\ y',\ y''$.

Se face schimbarea de funcţie $y(x)\to z(x)$, dată prin $\frac{y'}{y}=z$ şi rezultă $y'=zy$, $y''=z'y+zy'=z'y+z^2y$. Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia diferenţială dată, aceasta devine

$$x^2y\left(z'y+z^2y\right)=(y-xzy)^2\Leftrightarrow x^2y^2\left(z'+z^2\right)-y^2(1-xz)^2=0\Leftrightarrow$$

$$y^2\left[x^2\left(z'+z^2\right)-(1-xz)^2\right]=0\Leftrightarrow y^2\left(x^2z'+2xz-1\right)=0.$$

Din ecuaţia $y^2=0$, rezultă că $y=0$ este o soluţie singulară a ecuaţiei.

Rezultă şi ecuaţia $x^2z'+2xz-1=0\Leftrightarrow z'=-\frac{2}{x}z+\frac{1}{x^2}$ (ecuaţie diferenţială de ordinul I liniară cu funcţia necunoscută $z(x)$).

Etapa 1: Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă asociată: $z'=-\frac{2}{x}z$.

$$z'=-\frac{2}{x}z\Leftrightarrow\frac{dz}{dx}=-\frac{2}{x}z\Leftrightarrow\frac{dz}{z}=-\frac{2}{x}dx\Leftrightarrow\ln z=-2\ln x+\ln C\Rightarrow z_{GO}=\frac{C}{x^2}.$$

Etapa 2: Se variază constanta $C \to C(x)$ şi se construieşte funcţia $z = \dfrac{C(x)}{x^2}$, care este o soluţie particulară a ecuaţiei liniare neomogene:

$$\frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} = -\frac{2}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} = -\frac{2C(x)}{x^3} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$C'(x) = 1$, deci $C(x) = \int dx \Leftrightarrow C(x) = x + C_1$, cu C_1 constantă.

Soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene este $z = \dfrac{x + C_1}{x^2} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C_1}{x^2}$.

Se revine la substituţia $\dfrac{y'}{y} = z$ şi se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul I cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $y(x)$:

$$y' = y\left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y\,\frac{x + C_1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x + C_1}{x^2}\,dx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{x + C_1}{x^2}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\ln y = \ln x - \frac{C_1}{x} + \ln C_2 \Leftrightarrow \ln y = \ln(C_2 x) - \frac{C_1}{x}, \text{ deci } y = C_2\, x\, e^{-\frac{C_1}{x}},\ x \neq 0$$

(soluţia generală sub formă explicită).

3.2.5. Ecuaţii diferenţiale de forma

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ldots,\ \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \text{ omogenă în raport cu } x,\ y,\ dx,\ dy,\ldots,\ d^n y. \qquad \textbf{(3.9)}$$

Determinarea soluţiei

Se fac schimbările de funcţie şi de variabilă $y(x) \to z(t)$, date prin $y = z\,x,\ x = e^t$ şi astfel se reduce ordinul ecuaţiei (3.9) cu o unitate.

Exemplul 3.2.5. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $x^3 y'' = (x\,y' - y)^2$.

$x^3 y'' = (x\,y' - y)^2$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul 2. Se aduce ecuaţia la forma:

$$x^3 y'' = (x\,y' - y)^2 \Leftrightarrow x^3\,\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x\,\frac{dy}{dx} - y\right)^2 \Leftrightarrow x^3 d^2 y = (x\ dy - y\ dx)^2$$

şi se observă că ecuaţia este omogenă de gradul patru în raport cu $x,\ y,\ dx,\ dy,\ d^2 y$.

Se fac schimbările de funcţie şi de variabilă $y(x) \to z(t)$, date prin $y = z\,x$ şi $x = e^t$.

Conform regulilor de derivare pentru funcţii compuse, rezultă:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot x + z \cdot 1 = z'(t) \cdot e^{-t} \cdot e^{t} + z = z' + z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(z' + z) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt} + z\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right) \cdot e^{-t} = (z'' + z')\, e^{-t}.$$

Ecuaţia devine

$$e^{3t}(z'' + z')e^{-t} = \left[e^{t}(z' + z) - z e^{t}\right]^2 \Leftrightarrow e^{2t}(z'' + z') = e^{2t}(z' + z - z)^2 \Leftrightarrow$$

$$z'' + z' = z'^2 \Leftrightarrow z'' - z'^2 + z' = 0$$

(ecuaţie diferenţială de ordinul 2 cu funcţia necunoscută $z(t)$ din care lipseşte variabila independentă t, deci o ecuaţie de tipul 3.2.3).

Se fac schimbările de funcţie şi de variabilă $z(t) \to p(z)$ date prin $z' = p$. Rezultă:

$$z''(t) = \frac{dz'}{dt} = \frac{dp}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dp}{dz}\, z' = p\, \frac{dp}{dz}.$$

Ecuaţia devine:

$p\,\dfrac{dp}{dz} - p^2 + p = 0 \Leftrightarrow p\left(\dfrac{dp}{dz} - p + 1\right) = 0$ şi sunt posibile două cazuri:

a) $p = 0 \Leftrightarrow z' = 0$, deci $z = C$. Cum $y = z\,x$, rezultă soluţia $y = C\,x$.

b) $\dfrac{dp}{dz} - p + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dp}{dz} = p - 1$ (ecuaţie diferenţială de ordinul I cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $p(z)$).

$$\frac{dp}{dz} = p - 1 \Leftrightarrow \frac{dp}{p-1} = dz \Leftrightarrow \int \frac{dp}{p-1} = \int dz \Leftrightarrow \ln|p-1| = z + \ln K \Leftrightarrow \ln\frac{p-1}{K} = z \Leftrightarrow$$

$$\frac{p-1}{K} = e^{z} \Leftrightarrow p - 1 = K e^{z} \Leftrightarrow p = K e^{z} + 1.$$

Dar $p = z'$ şi înlocuind în ecuaţia de mai sus rezultă ecuaţia diferenţială de ordinul I cu variabile separabile cu funcţia necunoscută $z(t)$:

$$z' = K e^{z} + 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = K e^{z} + 1 \Leftrightarrow \frac{dz}{K e^{z} + 1} = dt \Leftrightarrow \int \frac{dz}{K e^{z} + 1} = \int dt.$$

Pentru rezolvarea integralei din membrul stâng al identităţii anterioare se face schimbarea de variabilă $K e^{z} = u$, deci:

$K e^z dz = du \Rightarrow dz = \dfrac{du}{K e^z} \Rightarrow dz = \dfrac{du}{u}$. Înlocuind în integrala din membrul stâng aceasta devine:

$\displaystyle\int \frac{du}{(u+1)u} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln|u| - \ln|u+1| = \ln\left|\frac{u}{u+1}\right|$. Rezultă:

$$\int \frac{dz}{K e^z + 1} = \int dt \Leftrightarrow \ln\left(\frac{K e^z}{K e^z + 1} \right) = t + \ln K_1 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{K e^z}{K e^z + 1} \right) = \ln e^t + \ln K_1 \Rightarrow \frac{K e^z}{K e^z + 1} = K_1 e^t.$$

Însă $e^t = x$, deci se obţine:

$$\frac{K e^z}{K e^z + 1} = K_1 x \Leftrightarrow K e^z = K_1 K e^z x + K_1 x \Leftrightarrow K e^z (1 - K_1 x) = K_1 x \Leftrightarrow$$

$$e^z = \frac{K_1 x}{K(1 - K_1 x)} \Rightarrow z = \ln\left(\frac{K_1 x}{K(1 - K_1 x)} \right).$$

Dar $y = z x$, deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul 2 dată este

$y = x \ln\left(\dfrac{K_1 x}{K\ (1 - K_1 x)} \right)$ (soluţie sub formă explicită).

3.3. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi omogene

Definiţia 3.3.1. O *ecuaţie diferenţială de ordin n liniară şi omogenă* este o ecuaţie de forma

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \qquad \textbf{(3.10)}$$

unde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ (coeficienţii ecuaţiei) sunt funcţii reale continue definite pe un interval $I = [a, b]$ şi $a_0(x) \neq 0, (\forall)\ x \in I$.

Observaţia 3.3.1.

1) Ecuaţia diferenţială (3.10) este liniară în necunoscuta $y(x)$ şi derivatele sale.

2) Dacă coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt toţi constanţi (numere reale), atunci ecuaţia (3.10) se numeşte *ecuaţie diferenţială de ordinul n liniară şi omogenă cu coeficienţi constanţi*, altfel ecuaţia este cu *coeficienţi variabili*.

3) Pentru prescurtarea scrierii se introduce operatorul diferenţial liniar

$$L: C^n(I) \to C^n(I),\ L = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$$

şi astfel ecuaţia (3.10) se mai scrie şi sub forma:

$$L(y) = 0. \qquad \textbf{(3.11)}$$

Definiţia 3.3.2. Se numeşte *soluţie* a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10) orice funcţie $\varphi \in C^n(I)$ care verifică ecuaţia (3.10), adică:

$$a_0(x)\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\varphi'(x) + a_n(x)\varphi(x) = 0,\ (\forall)\ x \in I.$$

Propoziţia 3.3.1. Dacă se cunoaşte o soluţie particulară $y_1(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (3.10), atunci prin schimbarea de funcţie $y(x) \to z(x)$, dată prin $y = y_1 z$, se poate micşora ordinul ecuaţiei cu o unitate.

Demonstraţie. Se calculează derivatele şi se obţin relaţiile

$$y = y_1 z$$

$$y' = y_1' z + y_1 z'$$

$$y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

.....

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} z + C_n^1 y_1^{(n-1)} z' + C_n^2 y_1^{(n-2)} z'' + \ldots + C_n^n y_1 z^{(n)}.$$

Înmulţind prima relaţie cu $a_n(x)$, a doua cu $a_{n-1}(x)$,…, ultima cu $a_0(x)$ şi adunând membru cu membru, rezultă ecuaţia:

$$\left(a_0(x)y_1^{(n)} + \ldots + a_n(x)y_1\right)z + \left(C_n^1 a_0(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y_1\right)z' + \ldots$$
$$+ a_0(x)y_1 z^{(n)} = 0. \qquad \textbf{(3.12)}$$

Deoarece y_1 este o soluţie particulară a ecuaţiei (3.10), rezultă că verifică ecuaţia:

$$a_0(x)y_1^{(n)} + \ldots + a_n(x)y_1 = 0.$$

Se face o nouă schimbare de funcţie $z(x) \to u(x)$, dată prin $z' = u$ şi ecuaţia (3.12) se transformă într-o ecuaţie diferenţială de ordinul $n-1$ liniară cu funcţia necunoscută $u(x)$:

$$A_0(x)u^{(n-1)} + A_1(x)u^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1}(x)u = 0.$$

Observaţia 3.3.2. Dacă se cunosc $k \le n$ soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale (2.10), atunci se poate micşora cu k unităţi ordinul acesteia.

Propoziţia 3.3.2. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10) este un subspaţiu vectorial al spaţiului funcţiilor $\mathfrak{F}(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ funcţie}\}$, adică dacă $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3.10), atunci funcţia $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.10), unde $C_1,\ C_2$ sunt constante reale arbitrare.

Funcţia $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ se numeşte *combinaţie liniară cu coeficienţi constanţi*.

Demonstraţie. Se arată că operatorul diferenţial L este liniar, adică:

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2),\ (\forall)\ y_1,\ y_2 \in C^n(I),\ (\forall)\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\left(C_1 \frac{d^{n-k} y_1}{dx^{n-k}} + C_2 \frac{d^{n-k} y_2}{dx^{n-k}} \right) =$$

$$= C_1 \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^{n-k} y_1}{dx^{n-k}} + C_2 \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \frac{d^{n-k} y_2}{dx^{n-k}} = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2).$$

Atunci se obţine

$$L(y) = L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) = 0,$$

deoarece $L(y_1) = 0$ şi $L(y_2) = 0$, pentru că y_1 şi y_2 sunt soluţiile ecuaţiei diferenţiale (3.10) (sau ale ecuaţiei (3.11)). Rezultă deci că funcţia $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ este soluţie a ecuaţiei (3.10).

Propoziţia 3.3.3. Dacă funcţiile $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n \in C^n(I)$ sunt n soluţii ale ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10), atunci şi combinaţia liniară cu coeficienţi constanţi $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, unde $C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n$ sunt constante arbitrare, este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.10).

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă $L(y_1) = L(y_2) = \ldots = L(y_n) = 0$. Deoarece L este operator liniar, rezultă relaţia

$$L(y) = L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) + \ldots + C_n L(y_n) = 0,$$

deci funcţia y este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.10).

Definiţia 3.3.3. Funcţiile $y_1(x),\ y_2(x),...,\ y_n(x)$ definite pe un interval $I=[a,\ b]$ sunt *liniar independente* pe $[a,\ b]$ dacă o relaţie liniară între ele de forma

$$C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)+...+C_n\,y_n(x)=0,\ \ x\in[a,\ b]$$

are loc doar dacă $C_1,\ C_2,...,\ C_n$ sunt toate nule.

În caz contrar, dacă există numerele $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\ \lambda_n$ nu toate nule astfel încât să avem

$$\lambda_1\,y_1(x)+\lambda_2\,y_2(x)+...+\lambda_n\,y_n(x)=0,\ \ (\forall)\ x\in[a,\ b],$$

spunem că funcţiile $y_1(x),\ y_2(x),...,\ y_n(x)$ sunt *liniar dependente* pe $[a,\ b]$.

Exemplul 3.3.1.

1) Funcţiile $y_1=e^{-x}$ şi $y_2=e^{x}$ sunt liniar independente pe $\mathbb{R}$.

2) Funcţiile $y_1=\cos^2 x,\ y_2=\sin^2 x,\ y_3=1$ sunt liniar dependente pe $\mathbb{R}$.

Definiţia 3.3.4. Fie $y_1(x),\ y_2(x),...,\ y_n(x)$ funcţii de clasă $n-1$ pe $I=[a,b]$ (funcţii derivabile continuu pe I până la ordinul $n-1$ inclusiv). Determinantul:

$$W(x)=W(y_1,y_2,...,y_n)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinantul lui Wronski* sau *Wronskianul* funcţiilor $y_1,\ y_2,...,\ y_n$.

Teorema 3.3.1. Dacă funcţiile reale $y_1(x),\ y_2(x),...,\ y_n(x)\in C^{n-1}(I),\ I=[a,\ b]$ sunt liniar dependente pe I, atunci $W(y_1,y_2,...,y_n)=0,\ (\forall)\ x\in I$.

Demonstraţie. Funcţiile $y_1,\ y_2,...,\ y_n$ fiind liniar dependente pe I, atunci există constantele $C_1,\ C_2,...,\ C_n\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$C_1\ y_1+C_2\ y_2+...+C_n\ y_n=0,\ \text{cu}\ C_1^2+C_2^2+...+C_n^2\neq 0. \qquad \textbf{(3.13)}$$

Se derivează succesiv de $n-1$ ori relaţia (3.13) şi se obţin relaţiile:

$$\begin{cases} C_1\,y_1' & +\,C_2\,y_2' & +...+\,C_n\,y_n' & =0 \\ C_1\,y_1'' & +\,C_2\,y_2'' & +...+\,C_n\,y_n'' & =0 \\ ... & ...\,... & ...\,...\,...\,... & ...\,... \\ C_1\,y_1^{(n-1)} & +\,C_2\,y_2^{(n-1)} & +...+\,C_n\,y_n^{(n-1)} & =0. \end{cases} \qquad \textbf{(3.14)}$$

Ecuaţiile (3.13) şi (3.14) formează un sistem liniar omogen de n ecuaţii cu n necunoscute $C_1, C_2, ..., C_n$. Deoarece $C_1, C_2, ..., C_n$ nu sunt toate nule, atunci sistemul format cu (3.13) şi (3.14) admite şi soluţii diferite de soluţia banală $(C_1 = C_2 = ... = C_n = 0)$. Conform Teoremei Rouché, determinantul sistemului, care este tocmai Wronskianul $W(y_1, y_2, ..., y_n)$, trebuie să fie nul pentru orice $x \in [a, b]$.

Observaţia 3.3.3. Condiţia $W(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ pe I apare ca o condiţie necesară ca funcţiile $y_1, y_2, ..., y_n$ să fie liniar dependente pe I, nu şi ca o condiţie suficientă.

Teorema 3.3.2. Fie funcţiile $y, y_1, y_2, ..., y_n \in C^n(I)$ astfel încât

1) $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ pe I (adică $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt liniar independente pe I)

2) $W(y, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ pe I.

Atunci funcţia y este o combinaţie liniară cu coeficienţi constanţi a funcţiilor y_1, $y_2, ..., y_n$:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \text{ cu } C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}.$$

Propoziţia 3.3.4. Dacă funcţiile $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x) \in C^n(I), I = [a, b]$ sunt n soluţii liniar independente ale ecuaţiei (3.10), atunci Wronskianul $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ este diferit de zero pe I.

Demonstraţie. Se presupune prin absurd că există $x_0 \in I$ astfel încât $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ să se anuleze în x_0. Fie sistemul de ecuaţii liniar şi omogen:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) & + C_2 y_2(x_0) & + ... + C_n y_n(x_0) & = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) & + C_2 y_2'(x_0) & + ... + C_n y_n'(x_0) & = 0 \\ ... & ..... & ..... & ..... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = 0. \end{cases} \quad \textbf{(3.15)}$$

Determinantul sistemului liniar omogen (3.15) este $W(y_1(x_0), y_2(x_0), ..., y_n(x_0)) = 0$. Atunci sistemul admite şi soluţii diferite de soluţia banală. Fie $C_1, C_2, ..., C_n$ o soluţie nebanală a sistemului (3.15), deci numerele $C_1, C_2, ..., C_n$ nu sunt toate nule şi cu ajutorul lor se formează funcţia:

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x). \qquad \textbf{(3.16)}$$

Din Propoziţia 3.3.3, rezultă că funcţia y este soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10). Folosind ecuaţiile sistemului (3.15), rezultă că funcţia (3.16) satisface condiţiile:

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \qquad \textbf{(3.17)}$$

Este evident că funcţia $y = 0$ este unica soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.10) care satisface condiţiile (3.17) şi deci rezultă:

$$C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x) = 0. \qquad \textbf{(3.18)}$$

Numerele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ nefiind toate nule, relaţia (3.18) arată că funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar dependente pe I, ceea ce contrazice ipoteza.

Atunci rezultă că $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ pe $I = [a, b]$.

Observaţia 3.3.5. Dacă funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C^n(I)$ sunt n soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3.10), atunci ele sunt liniar independente pe I dacă şi numai dacă Wronskianul $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ pe I.

Demonstraţie. Implicaţia "$\Rightarrow$" rezultă din Propoziţia 3.3.4.

Să demonstrăm implicaţia "$\Leftarrow$". Să presupunem că $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$.

Atunci soluţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar independente pe I, căci dacă ar fi liniar dependente pe I, atunci din Teorema 3.3.1 ar rezulta că $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ pe I.

Teorema 3.3.3. (Teorema Louville)

Dacă Wronskianul a n soluţii ale ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10) este nenul într-un punct $x_0 \in I$, atunci el este nenul pe tot intervalul I.

Mai mult, $W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt}$, $(\forall)\ x \in I$.

Demonstraţie. Se face demonstraţia în cazul particular $n = 2$.

Să presupunem că există $x_0 \in I$ astfel încât $W(x_0) \neq 0$. Fie $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale $a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0$, cu $a_0(x) \neq 0$. Rezultă:

$$\begin{cases} a_0(x)\, y_1'' + a_1(x)\, y_1' + a_2(x)\, y_1 = 0 \\ a_0(x)\, y_2'' + a_1(x)\, y_2' + a_2(x)\, y_2 = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Avem:

$$W(x)=W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \text{ şi}$$

$$W(x_0)=W(y_1(x_0),y_2(x_0))=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}\neq 0.$$

Prin derivarea Wronskianului $W(x)$ se obţine

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Înlocuind y_1'' şi y_2'' cu valorile date de relaţiile (3.19), se găseşte:

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}y_1'-\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}y_1 & -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}y_2'-\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}y_2 \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}-\frac{a_2(x)}{a_0(x)}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\cdot W(x)$$

sau

$$\frac{dW}{dx}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\cdot W(x)\Leftrightarrow\frac{dW}{W}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\Leftrightarrow\int_{x_0}^{x}\frac{dW}{W}=\int_{x_0}^{x}-\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt+C.$$

(pentru $x=x_0$ rezultă $C=0$)

$$\ln|W|\Big|_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{x}-\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt\Leftrightarrow\ln\left|\frac{W(x)}{W(x_0)}\right|=\int_{x_0}^{x}-\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt\Leftrightarrow\left|\frac{W(x)}{W(x_0)}\right|=e^{\int_{x_0}^{x}-\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt}$$

de unde

$$W(x)=W(x_0)\,e^{\int_{x_0}^{x}-\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt}.$$

Cum, prin ipoteză avem $W(x_0)\neq 0$ şi $e^{\int_{x_0}^{x}-\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt}\neq 0$, atunci $W(x)\neq 0$, pentru orice $x\in I$.

Definiţia 3.3.5. Spunem că n soluţii $y_1, y_2, ..., y_n$ ale ecuaţiei diferenţiale (3.10) formează un *sistem fundamental de soluţii* pe intervalul I dacă ele sunt liniar independente pe I (adică dacă $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ pe I).

Observaţia 3.3.6.

1) Dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale (3.10), atunci, conform Propoziţiei 3.3.4, rezultă $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ pe I.

2) Dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt n soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3.10), cu Wronskianul diferit de zero într-un punct $x_0 \in I$, atunci, conform Teoremei 3.3.3, ele formează un sistem fundamental de soluţii pe intervalul I.

Propoziţia 3.3.5. Dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt n soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3.10) liniar independente pe I (adică ele formează un sistem fundamental de soluţii pe I), atunci orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.10) pe intervalul I este de forma:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,\ x \in I = [a, b]$, unde $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$.

Funcţia y dată mai sus se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10) pe intervalul I.

Demonstraţie. Fie $y_1, y_2, ..., y_n$ soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3.10) astfel încât Wronskianul $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$. Rezultă:

$$\begin{cases} a_0(x) y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + ... + a_n(x) y_1 = 0 \\ a_0(x) y_2^{(n)} + a_1(x) y_2^{(n-1)} + ... + a_n(x) y_2 = 0 \\ ... \quad ... ... \quad ... ... \quad ... ... \\ a_0(x) y_n^{(n)} + a_1(x) y_n^{(n-1)} + ... + a_n(x) y_n = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

şi

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... y_n \\ y_1' & y_2' & ... y_n' \\ ... & ... & ... ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Fie y o soluţie oarecare a ecuaţiei diferenţiale (3.10) (definită pe I). Atunci y verifică ecuaţia (3.10), deci

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad \textbf{(3.21)}$$

Ecuaţiile (3.20) şi (3.21) formează un sistem liniar omogen de $n+1$ ecuaţii cu $n+1$ necunoscute $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$. Cum sistemul admite soluţia nebanală $a_0(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I$, rezultă că determinantul sistemului trebuie să fie egal cu zero, adică:

$$\begin{vmatrix} y^n & y^{(n-1)} & \ldots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \ldots & y_1' & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \ldots & y_n' & y_n \end{vmatrix} \neq 0, \ (\forall)\ x \in I.$$

Se cunoaşte o proprietate a determinaţilor: dacă determinantul este nul, atunci elementele unei linii sunt combinaţii liniare de elementele celorlalte linii, deci

$$\begin{cases} y^{(n)} & = \mu_1 y_1^{(n)} & + \mu_2 y_2^{(n)} & + \ldots + \mu_n y_n^{(n)} \\ y^{(n-1)} & = \mu_1 y_1^{(n-1)} & + \mu_2 y_2^{(n-1)} & + \ldots + \mu_n y_n^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y & = \mu_1 y_1 & + \mu_2 y_2 & + \ldots + \mu_n y_n \end{cases} \qquad \textbf{(3.22)}$$

Se va arăta că $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sunt constante.

Se derivează relaţiile $2, 3, \ldots, n$ din sistemul (3.22):

$$y^{(n)} = \mu_1' y_1^{(n-1)} + \mu_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + \mu_n' y_n^{(n-1)} + \underbrace{\mu_1 y_1^{(n)} + \mu_2 y_2^{(n)} + \ldots + \mu_n y_n^{(n)}}_{=y^{(n)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1' y_1^{(n-1)} + \mu_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + \mu_n' y_n^{(n-1)} = 0$$

$$y^{(n-1)} = \mu_1' y_1^{(n-2)} + \mu_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + \mu_n' y_n^{(n-2)} + \underbrace{\mu_1 y_1^{(n-1)} + \mu_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \mu_n y_n^{(n-1)}}_{=y^{(n-1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1' y_1^{(n-2)} + \mu_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + \mu_n' y_n^{(n-2)} = 0$$

.....

$$y' = \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n + \underbrace{\mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + \ldots + \mu_n y_n'}_{=y'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n = 0.$$

Rezultă sistemul liniar omogen de n ecuaţii cu n necunoscute $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_n'$:

$$\begin{cases} \mu_1' y_1^{(n-1)} + \mu_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + \mu_n' y_n^{(n-1)} = 0 \\ \mu_1' y_1^{(n-2)} + \mu_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + \mu_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \ldots + \mu_n' y_n = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Determinantul sistemului (3.23) este $W\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$

(din ipoteză). Atunci sistemul (3.23) admite doar soluţia banală

$\mu_1' = \mu_2' = \ldots = \mu_n' = 0$, deci

$\mu_1 = C_1,\ \mu_2 = C_2, \ldots,\ \mu_n = C_n$ (constante).

Aşadar, s-a arătat că există $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constante reale astfel încât

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,\ (\forall)\ x \in I = [a, b]$.

Propoziţia 3.3.6. $n+1$ soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n definite pe $I = [a, b]$ sunt liniar dependente pe I.

3.4. Construcţia ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordinul n de sistem fundamental dat

Teorema 3.4.1. Un sistem fundamental de soluţii $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pe intervalul $I = [a, b]$ determină o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n şi numai una care admite sistemul $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ca sistem fundamental de soluţii pe $I = [a, b]$. Această ecuaţie este de forma:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \ldots & y_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.24}$$

Demonstraţie. Înlocuind pe y cu y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ în ecuaţia (3.24), rezultă că determinantul este nul (având două linii egale), deci ecuaţia (3.24) are soluţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Ecuaţia diferenţială (3.24) are ordinul n, deoarece determinantul $\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

este coeficientul lui $y^{(n)}$, iar acest determinant este nenul pe I, fiind chiar Wronskianul funcţiilor $y_1, y_2, \dots, y_n$, iar din ipoteză $y_1, y_2, \dots, y_n$ formează un sistem fundamental de soluţii $\left(\text{i.e. } W\left(y_1, y_2, \dots, y_n\right) \neq 0\right)$.

Exemplul 3.4.1. Funcţiile $y_1 = x,\ y_2 = x+1,\ x \in \mathbb{R}$ formează un sistem fundamental de soluţii pe $\mathbb{R}$, deoarece $W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Ecuaţia diferenţială de ordinul 2 determinată de y_1 şi y_2 este:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y'' \begin{vmatrix} x & 1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y'' = 0.$$

Exemplul 3.4.2. Funcţiile $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ formează un sistem fundamental de soluţii pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, deoarece $W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \neq 0,\ (\forall)\ x \neq 0$.

Ecuaţia diferenţială de ordinul 2 determinată de y_1 şi y_2 este

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Exemplul 3.4.3. Funcţiile $y_1 = x\cos x,\ y_2 = x\sin x,\ x \in \mathbb{R}$ formează un sistem fundamental de soluţii pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pentru că

$$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\cos x & x\sin x \\ \cos x - x\sin x & \sin x + x\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2\cos^2 x + x^2\sin^2 x = x^2 \neq 0,\ (\forall)\ x \neq 0.$$

Ecuaţia diferenţială de ordinul 2 determinată de y_1 şi y_2 este

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x\cos x & \cos x - x\sin x & -2\sin x - x\cos x \\ x\sin x & \sin x + x\cos x & 2\cos x - x\sin x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 y'' - 2xy' + \left(2 + x^2\right) y = 0 .$$

3.5. Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare şi omogene

Teorema 3.5.1. Fie ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordinul n

$$L(y) = a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0,\ x \in [a, b] \qquad \textbf{(3.10)}$$

având $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sistem fundamental de soluţii pe $I = [a, b]$.

Atunci există o singură soluţie $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, unde C_1, $C_2, \ldots, C_n$ sunt constante reale, care în punctul $x_0 \in I$ satisface condiţiile iniţiale:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

unde $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ sunt numere oarecare date.

Demonstraţie. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (3.10) pe $I = [a, b]$ este

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \qquad \textbf{(3.25)}$$

(conform Propoziţiei 3.3.5).

Condiţiile iniţiale ne conduc la sistemul liniar cu necunoscutele $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) & + C_2 y_2(x_0) & + \ldots + C_n y_n(x_0) & = y_0 \\ C_1 y'_1(x_0) & + C_2 y'_2(x_0) & + \ldots + C_n y'_n(x_0) & = y'_0 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = y_0^{(n-1)} \end{cases} . \qquad \textbf{(3.26)}$$

Determinantul sistemului (3.26) este $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$,

deoarece $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este sistem fundamental de soluţii.

Atunci sistemul (3.26) admite soluţie unică $C_1, C_2, ..., C_n$ determinată prin regula lui Cramer. Înlocuind $C_1, C_2, ..., C_n$ determinate mai sus în relaţia (3.25), se obţine soluţia unică $y(x)$ căutată a ecuaţiei diferenţiale (3.10).

Exemplul 3.5.1. Ecuaţia diferenţială $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ are soluţiile particulare $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$. Wronskianul este:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0 \text{ pe } \mathbb{R}.$$

Soluţia generală este

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \Leftrightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Să se găsească soluţia particulară care verifică condiţiile:

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ şi $y''(0) = 1$. Se obţine sistemul:

$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 1 \end{cases}$, de unde $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -1$, $C_3 = \frac{1}{2}$. Rezultă soluţia:

$$y = \frac{1}{2} e^x - e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

3.6. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi neomogene

Definiţia 3.6.1. O *ecuaţie diferenţială de ordin n liniară şi neomogenă* este o ecuaţie de forma:

$$L(y) = a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \qquad \textbf{(3.27)}$$

unde $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ sunt funcţii reale continue definite pe intervalul $I = [a, b]$, $a_0(x) \neq 0$, $(\forall) x \in I$ şi $f(x)$ este o funcţie continuă pe I.

Teorema 3.6.1. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27) se obţine adăugând la soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10) o soluţie particulară oarecare a ecuaţiei neomogene (3.27), adică:

$$y_{GN} = y_{GO} + y_p$$

unde s-au notat cu

y_{GN} soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27)

y_{GO} soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10)

y_p o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27).

Demonstraţie. Fie $y_p(x)$ o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27) pe $I=[a,\, b]$, deci verifică ecuaţia:

$$a_0(x)y_p^{(n)} + a_1(x)y_p^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y'_p + a_n(x)y_p = f(x). \qquad \textbf{(3.28)}$$

Prin scăderea ecuaţiei (3.28) din ecuaţia (3.27) se obţine ecuaţia:

$$a_0(x)\left(y-y_p\right)^{(n)} + a_1(x)\left(y-y_p\right)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\left(y-y_p\right)' + a_n(x)\left(y-y_p\right) = 0. \qquad \textbf{(3.29)}$$

Se face schimbarea de funcţie $y(x) \to Y(x)$, dată prin $y - y_p = Y$ şi ecuaţia (3.29) devine:

$$L(Y) = a_0(x)Y^{(n)} + a_1(x)Y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)Y' + a_n(x)Y = 0$$

deci funcţia $Y(x)$ este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10), soluţie notată cu y_{GO}. Rezultă că $y - y_p = Y$, deci $y = y_p + Y$, adică $y = y_p + y_{GO}$.

Prin urmare, dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10) pe intervalul I, rezultă că soluţia generală a ecuaţiei neomogene (3.27) este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_p,\ x \in I = [a,\, b].$$

Observaţia 3.6.1. Pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27) este suficient să se cunoască un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10) şi o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27).

Aflarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene (3.27) constituie o problemă dificilă. Dacă nu se poate determina această soluţie particulară, dar se cunoaşte soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10), atunci se poate afla soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27) prin *metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange*.

3.7. Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange

Fie $y_1, y_2, ..., y_n$ un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (3.10), deci soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene (3.10) este de forma:

$$y = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + ... + C_n\, y_n(x),\ \ x \in I = [a, b].$$

Se caută soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27) de aceeaşi formă cu soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.10) înlocuind constantele $C_1, C_2, ..., C_n$ cu funcţiile derivabile ce depind de x, notate cu $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x),\ x \in [a, b]$.

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.27) se caută de forma:

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + ... + C_n(x)\, y_n(x)$$

unde funcţiile $C_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ sunt date prin relaţiile

$$C_i(x) = \int C_i'(x)\, dx + K_i,\ i = 1, 2, ..., n$$

iar funcţiile $C_i'(x),\ i = 1, 2, ..., n$ reprezintă soluţia sistemului liniar şi neomogen

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) & + & C_2'(x)y_2(x) & + & ... & + & C_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) & + & C_2'(x)y_2'(x) & + & ... & + & C_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\ ... & & ... & & ... & & ... & & ... \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & + & ... & + & C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & + & ... & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}.$$

Demonstraţie. Se face demonstraţia în cazul $n = 3$.

Fie ecuaţia diferenţială liniară neomogenă:

$$a_0(x)\, y''' + a_1(x)\, y'' + a_2(x)\, y' + a_3(x)\, y = f(x) \qquad \textbf{(3.30)}$$

şi ecuaţia diferenţială omogenă asociată

$$a_0(x)\, y''' + a_1(x)\, y'' + a_2(x)\, y' + a_3(x)\, y = 0. \qquad \textbf{(3.31)}$$

Fie y_1, y_2, y_3 un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale omogene (3.31), deci această ecuaţiei este verificată

$$a_0(x)y_i''' + a_1(x)y_i'' + a_2(x)y_i' + a_3(x)y_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \qquad \textbf{(3.32)}$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.31) este de forma:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Se construieşte funcţia:

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + C_3(x)\, y_3 \qquad \textbf{(3.33)}$$

şi se arată că este soluţia ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.30).

Soluţia (3.33) depinde de trei funcţii $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$. Aceste funcţii se vor determina din trei condiţii, numai o condiţie este obligatorie, aceea de a verifica ecuaţia (3.30), celelalte două se impun în mod convenabil pentru a uşura calculul.

Se derivează ecuaţia diferenţială (3.33) şi rezultă relaţia:

$y' = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_3(x)y_3'$.

Se impune condiţia $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0$ şi rămâne relaţia

$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_3(x)y_3'$.

Se derivează în continuare şi rezultă:

$y'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_3(x)y_3''$.

Se impune condiţia $C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0$ şi rămâne relaţia"

$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_3(x)y_3''$.

Se derivează mai departe

$y''' = C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' + C_1(x)y_1''' + C_2(x)y_2''' + C_3(x)y_3'''$.

Prin introducerea derivatelor calculate în ecuaţia diferenţială neomogenă (3.30) şi ţinând cont de relaţiile (3.32) rezultă:

$$a_0(x)C_1(x)y_1''' + a_0(x)C_2(x)y_2''' + a_0(x)C_3(x)y_3''' + a_0(x)C_1'(x)y_1'' +$$
$$a_0(x)C_2'(x)y_2'' + a_0(x)C_3'(x)y_3'' + a_1(x)C_1(x)y_1'' + a_1(x)C_2(x)y_2'' +$$
$$a_1(x)C_3(x)y_3'' + a_2(x)C_1(x)y_1' + a_2(x)C_2(x)y_2' + +a_2(x)C_3(x)y_3' +$$
$$a_3(x)C_1(x)y_1 + a_3(x)C_2(x)y_2 + a_2(x)C_3(x)y_3 = f(x).$$

Rezultă $a_0(x)C_1'(x)y_1'' + a_0(x)C_2'(x)y_2'' + a_0(x)C_3'(x)y_3'' = f(x)$.

Se obţine sistemul liniar neomogen:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0 \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Sistemul liniar neomogen (3.34) are trei ecuaţii cu trei necunoscute $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$. Determinantul acestui sistem este $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$ pe I (deoarece y_1, y_2, y_3 este un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (3.31)), deci sistemul (3.34) admite soluţie unică $C_1'(x), C_2'(x)$, $C_3'(x)$, conform regulii lui Cramer. Rezultă:

$C_i(x) = \int C_i'(x)\, dx + K_i$, cu K_i, $i = 1, 2, 3$, constante reale.

Dacă se înlocuiesc funcţiile $C_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ în soluţia (3.33) se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.30):

$$y(x) = \sum_{i=1}^{3}\left(\int C_i'(x)\, dx + K_i\right)y_i = \sum_{i=1}^{3} K_i y_i + \sum_{i=1}^{3} y_i \int C_i'(x)\, dx\ . \tag{3.35}$$

Observaţia 3.7.1. Funcţia (3.35) este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.30). Se observă că expresia:

$$\sum_{i=1}^{3} K_i\, y_i = K_1\, y_1 + K_2\, y_2 + K_3\, y_3$$

este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.31) şi

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \int C_i'(x)\, dx = y_1 \int C_1'(x)\, dx + y_2 \int C_2'(x)\, dx + y_3 \int C_3'(x)\, dx$$

este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.30).

Exemplul 3.7.1. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene $y'' + y = \operatorname{tg} x$, ştiind că $y_1 = \cos x$ şi $y_2 = \sin x$ sunt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniare omogene asociate $y'' + y = 0$.

Deoarece $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$, rezultă că y_1, y_2 formează un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene $y'' + y = 0$.

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, cu C_1, C_2 constante reale arbitrare.

Se variază constantele C_1, C_2, deci $C_1 \to C_1(x), C_2 \to C_2(x)$ şi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene este de forma

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

unde funcţiile $C_1(x)$, $C_2(x)$ sunt date de sistemul liniar neomogen:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(\cos x)' + C_2'(x)(\sin x)' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}.$$

Se înmulţeşte prima ecuaţie cu $\sin x$, a doua ecuaţie cu $\cos x$ şi se adună membru cu membru ecuaţiile obţinute şi rezultă:

$$C_2'(x)\sin^2 x + C_2'(x)\cos^2 x = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x \Leftrightarrow C_2'(x) = \sin x.$$

Se înlocuieşte în prima ecuaţie din sistem şi rezultă:

$$C_1'(x)\cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}.$$

Atunci:

$$C_1(x) = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}\,dx = \int\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)dx = \int\left(\cos x - \frac{\cos x}{\cos^2 x}\right)dx =$$

$$= \int\left(\cos x - \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\right)dx = \int\left(\cos x + \frac{\cos x}{\sin^2 x - 1}\right)dx =$$

$$= \int\left(\cos x + \frac{(\sin x)'}{\sin^2 x - 1}\right)dx = \sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + K_1$$

$$C_2(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + K_2.$$

Prin înlocuirea funcţiilor $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ se va obţine soluţia generală a ecuaţiei neomogene:

$$y = \left(\sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + K_1\right)\cos x + (-\cos x + K_2)\sin x.$$

Observaţia 3.7.2. Pentru a găsi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (3.27) trebuie găsită soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene asociate (3.10), deci este suficient să găsim un sistem fundamental de soluţii particulare ale ecuaţiei omogene (3.10). În general, determinarea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială omogenă este dificilă, dacă ecuaţia are coeficienţi variabili. Acest lucru este posibil destul de uşor în cazul ecuaţiilor cu coeficienţi constanţi, ecuaţii de care ne vom ocupa în continuare.

3.8. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi omogene cu coeficienţi constanţi

Definiţia 3.8.1. O *ecuaţie diferenţială de ordin n liniară şi omogenă cu coeficienţi constanţi* este o ecuaţie de forma:

$$L(y) = a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0 \qquad \textbf{(3.36)}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt constante reale date şi $a_0 \neq 0$.

Este evident că teoremele generale asupra ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n liniare cu coeficienţi variabili se aplică şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale cu coeficienţi constanţi.

Conform Propoziţiei 3.3.4, rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniară şi omogenă revine la determinarea unui sistem fundamental de soluţii.

Pentru clasa ecuaţiilor diferenţiale liniare şi omogene cu coeficienţi constanţi se poate determina întotdeauna un sistem fundamental de soluţii. În acest scop se foloseşte metoda Euler.

Se caută pentru ecuaţia diferenţială (3.36) soluţii de forma

$$y = e^{rx} \qquad \textbf{(3.37)}$$

unde r este o constantă (reală sau complexă) ce trebuie determinată.

Se obţin succesiv relaţiile $y' = r\,e^{rx},\ y'' = r^2 e^{rx}, \ldots,\ y^{(n)} = r^n e^{rx}$ şi înlocuind în (3.36) rezultă:

$$L(y) = L\left(e^{rx}\right) = a_0\, r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \ldots + a_{n-1}\, r\, e^{rx} + a_n\, e^{rx} = 0, \text{ deci}$$

$$e^{rx}\left(a_0\, r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, r + a_n\right) = 0.$$

Deoarece $e^{rx} \neq 0,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$ rezultă ecuaţia algebrică:

$$K_n(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 . \qquad \textbf{(3.38)}$$

Prin urmare numărul r (real sau complex) trebuie să fie rădăcină a ecuaţiei algebrice (3.38) numită *ecuaţia caracteristică* a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi (3.36).

Pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi (3.36) trebuie să se ţină seama de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice (3.38).

Se disting următoarele cazuri:

Cazul I: Ecuaţia caracteristică (3.38) are rădăcini reale şi distincte

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, cu $r_i \neq r_j, (\forall) i \neq j$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice (3.38).

Funcţiile $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$ sunt n soluţii particulare ale ecuaţiei (3.36) (conform relaţiei (3.37)) şi formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (3.36), deoarece

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \ldots & r_n e^{r_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \ldots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Într-adevăr, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, deoarece $e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x} > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$, iar determinantul este determinant de tip Vandermonde al numerelor $r_1, r_2, \ldots, r_n$ şi este diferit de zero dacă $r_i \neq r_j, (\forall)\, i \neq j$.

Atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (3.36) este:

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n\, e^{r_n x},\ x \in \mathbb{R}$, cu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constante arbitrare.

Exemplul 3.8.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Ecuaţia caracteristică asociată este $K_3(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ şi are rădăcinile reale şi distincte $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$.Sistemul fundamental de soluţii este:

$y_1 = e^{r_1 x} = e^x, y_2 = e^{r_2 x} = e^{2x}, y_3 = e^{r_3 x} = e^{3x}$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este de forma:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \Leftrightarrow y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3\, e^{3x}, \text{ cu } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Cazul II: Ecuaţia caracteristică (3.38) are rădăcini complexe şi distincte

Să presupunem că ecuaţia caracteristică (3.38) admite rădăcini complexe şi distincte, iar această situaţie este posibilă numai dacă gradul ecuaţiei $n = 2m$ este număr par, deoarece coeficienţii ecuaţiei sunt reali şi atunci rădăcinile complexe sunt conjugate două câte două.

Fie $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1,\ r_2 = \alpha_2 + i\beta_2,\ \ldots,\ r_m = \alpha_m + i\beta_m$

$\bar{r}_1 = \alpha_1 - i\beta_1,\ \bar{r}_2 = \alpha_2 - i\beta_2,\ \ldots,\ \bar{r}_m = \alpha_m - i\beta_m,\ 2m = n$

rădăcinile complexe distincte ale ecuaţiei (3.38).

Funcţiile

$$\begin{aligned} &y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x},\ y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha_2 + i\beta_2)x},\ \ldots,\ y_m = e^{r_m x} = e^{(\alpha_m + i\beta_m)x} \\ &\bar{y}_1 = e^{\bar{r}_1 x} = e^{(\alpha_1 - i\beta_1)x},\ \bar{y}_2 = e^{\bar{r}_2 x} = e^{(\alpha_2 - i\beta_2)x},\ \ldots,\ \bar{y}_m = e^{\bar{r}_m x} = e^{(\alpha_m - i\beta_m)x} \end{aligned} \tag{3.39}$$

sunt soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale omogene (3.36) şi formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (3.36) (pentru că $r_i \neq r_j, i \neq j$ şi se foloseşte acelaşi procedeu ca în cazul I).

Folosind formulele lui Euler $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t,\ t \in \mathbb{R}$, relaţiile (3.39) se pot scrie

$$\begin{aligned} &y_k = e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x) + i e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x) \\ &\bar{y}_k = e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x) - i e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x),\ 2m = n,\ k = 1, 2, \ldots, m\ . \end{aligned} \tag{3.40}$$

În practică, ne interesează mai ales soluţiile reale ale ecuaţiei (3.36), de aceea nu se ia (3.40) ca sistem fundamental de soluţii, ci următoarele funcţii, obţinute prin combinaţii liniare cu coeficienţi constanţi (care după cum ştim sunt de asemenea soluţii ale ecuaţiei (3.36)):

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{y_1 + \bar{y}_1}{2} = e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x) & Y_1^* &= \frac{y_1 - \bar{y}_1}{2i} = e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x) \\ Y_2 &= \frac{y_2 + \bar{y}_2}{2} = e^{\alpha_2 x} \cos(\beta_2 x) & Y_2^* &= \frac{y_2 - \bar{y}_2}{2i} = e^{\alpha_2 x} \sin(\beta_2 x) \\ &\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots & &\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ Y_m &= \frac{y_m + \bar{y}_m}{2} = e^{\alpha_m x} \cos(\beta_m x) & Y_m^* &= \frac{y_m - \bar{y}_m}{2i} = e^{\alpha_m x} \sin(\beta_m x). \end{aligned}$$

Soluţiile reale $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, Y_1^*, Y_2^*, \ldots, Y_m^*$ ale ecuaţiei diferenţiale (3.36) formează un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (3.36).

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (3.36) este de forma:

$$y = e^{\alpha_1 x}\left[A_1\cos(\beta_1 x) + B_1\sin(\beta_1 x)\right] + e^{\alpha_2 x}\left[A_2\cos(\beta_2 x) + B_2\sin(\beta_2 x)\right] + \ldots +$$
$$+ e^{\alpha_m x}\left[A_m\cos(\beta_m x) + B_m\sin(\beta_m x)\right],$$

unde $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$ sunt constante reale arbitrare, $n = 2m$.

Exemplul 3.8.2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Ecuaţia caracteristică asociată este $K_2(r) = r^2 + 2r + 5 = 0$ şi are rădăcinile complexe conjugate $r_1 = -1 - 2i,\ r_2 = -1 + 2i \in \mathbb{C}$, deci $\alpha = -1$ şi $\beta = 2$.

Sistemul fundamental de soluţii este :

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{-x}\cos 2x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{-x}\sin 2x$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Leftrightarrow y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$, cu $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Consecinţa 3.8.1. Dacă ecuaţia caracteristică (3.38) are rădăcinile reale simple r_1, $r_2, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$ şi rădăcinile complexe simple $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, \alpha_m + i\beta_m, \alpha_1 - i\beta_1, \alpha_2 - i\beta_2$, $\ldots, \alpha_m - i\beta_m \in \mathbb{C}$, cu $p + 2m = n$, atunci soluţia generală pe $\mathbb{R}$ a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (3.36) este de forma:

$$y = \sum_{k=1}^{p} A_k e^{r_k x} + \sum_{j=1}^{m} e^{\alpha_j x}\left[B_j\cos(\beta_j x) + C_j\sin(\beta_j x)\right],$$

cu $A_k, B_j, C_j,\ k = 1, 2, .. p,\ j = 1, 2, \ldots, m$ constante reale.

Exemplul 3.8.3. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$.

Ecuaţia caracteristică asociată este $K_4(r) = r^4 - 3r^2 - 4 = 0$. Se notează $r^2 = t$ şi se obţine ecuaţia $t^2 - 3t - 4 = 0$, care admite soluţiile reale $t_1 = 4$ şi $t_2 = -1$. Rezultă ecuaţia $r^2 = 4$, cu soluţiile reale distincte $r_1 = -2, r_2 = 2$ şi ecuaţia $r^2 = -1$, cu rădăcinile complexe conjugate $r_3 = -i,\ r_4 = i$ (deci $\alpha = 0$ şi $\beta = -1$). Sistemul fundamental de soluţii este:

$y_1 = e^{r_1 x} = e^{-2x}, y_2 = e^{r_2 x} = e^{2x}, y_3 = e^{\alpha x}\cos\beta x = \cos x,\ y_4 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \sin x$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 \Leftrightarrow$

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$, cu $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Cazul III: Ecuaţia caracteristică (3.38) are rădăcini multiple (confundate)

Dacă ecuaţia caracteristică (3.38) admite rădăcina $r = r_0$ ca rădăcină multiplă de ordinul $p \le n$, atunci funcţiile $y_1 = e^{r_0 x}, y_2 = x e^{r_0 x}, ..., y_p = x^{p-1} e^{r_0 x}$ sunt soluţii liniar independente ale ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (3.36) şi funcţia

$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x} + C_p x^{p-1} e^{r_0 x}$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.36).

Demonstraţie. Se foloseşte operatorul diferenţial liniar L:

$$L\left(e^{rx}\right) = a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + ... + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} =$$

$$= e^{rx}\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n\right) = e^{rx} K_n(r), \text{ deci}$$

$$L\left(e^{rx}\right) = e^{rx} K_n(r). \qquad \textbf{(3.41)}$$

Se consideră în relaţia (3.41) x şi r ca două variabile independente şi se derivează de m ori în raport cu r:

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} L\left(e^{rx}\right) = \frac{\partial^m}{\partial r^m}\left[e^{rx} K_n(r)\right]. \qquad \textbf{(3.42)}$$

Operatorul L are coeficienţi constanţi şi derivatele parţiale de orice ordin ale lui e^{rx} sunt funcţii continue pe $\mathbb{R}$, deci se poate schimba ordinea de derivare (conform teoremei lui Schwarz):

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} L\left(e^{rx}\right) = L\left(\frac{\partial^m}{\partial r^m} e^{rx}\right) = L\left(x^m e^{rx}\right). \qquad \textbf{(3.43)}$$

Se foloseşte regula de derivare a lui Leibnitz pentru produse de funcţii:

$$(u \cdot v)^{(m)} = C_m^0 u^{(m)} v + C_m^1 u^{(m-1)} v' + ... + C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)} + ... + C_m^m u v^{(m)}.$$

Rezultă:

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left[e^{rx} K_n(r)\right] = x^m e^{rx} K_n(r) + C_m^1 x^{m-1} e^{rx} K_n'(r) + ... +$$

$$+ C_m^k x^{m-k} e^{rx} K_n^{(k)}(r) + ... + e^{rx} K_n^{(m)}(r) = \qquad \textbf{(3.44)}$$

$$= e^{rx}\left[x^m K_n(r) + C_m^1 x^{m-1} K_n'(r) + ... + C_m^k x^{m-k} K_n^{(k)}(r) + ... + K_n^{(m)}(r)\right].$$

Folosind relaţiile (3.43) şi (3.44) în relaţia (3.42) rezultă identitatea

$$L\left(x^m e^{rx}\right) = e^{rx}\left[x^m K_n(r) + C_m^1 x^{m-1} K_n'(r) + \ldots + K_n^{(m)}(r)\right]. \qquad \textbf{(3.45)}$$

Sunt posibile două situaţii:

1) Dacă $r = r_0$ este rădăcină reală multiplă de ordinul $p \le n$ a ecuaţiei caracteristice $K_n(r) = 0$ rezultă

$$K_n(r_0) = K_n'(r_0) = \ldots = K_n^{(p-1)}(r_0) = 0 \text{ şi } K_n^{(p)}(r_0) \ne 0.$$

Din relaţia (3.45), pentru $m \le p-1$ avem

$$L\left(x^m e^{r_0 x}\right) = e^{r_0 x}\left[x^m K_n(r_0) + C_m^1 x^{m-1} K_n'(r_0) + \ldots + K_n^{(m)}(r_0)\right] = 0,$$

deci funcţiile

$$y_1 = e^{r_0 x}, y_2 = x e^{r_0 x}, \ldots, y_p = x^{p-1} e^{r_0 x} \qquad \textbf{(3.46)}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (3.36).

Evident soluţiile $y_1 = e^{r_0 x}, y_2 = x e^{r_0 x}, \ldots, y_p = x^{p-1} e^{r_0 x}$ sunt liniar independente pe $\mathbb{R}$, deoarece funcţiile $1, x, x^2, \ldots, x^{p-1}$ sunt liniar independente. O consecinţă imediată a acestui fapt este că funcţia

$$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x} + C_p x^{p-1} e^{r_0 x}, \; x \in \mathbb{R}$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare (3.36).

2) Dacă $r_0 = \alpha + i\beta$ este rădăcină complexă multiplă de ordinul $p \le n$ a ecuaţiei caracteristice $K_n(r) = 0$, atunci şi $\overline{r_0} = \alpha - i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul $p \le n$ a ecuaţiei caracteristice.

Atunci soluţiile (3.46) ale ecuaţiei diferenţiale (3.36) se scriu sub formele:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
y_1 & = & e^{\alpha x}\cos(\beta x) & y_1^* & = & e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\
y_2 & = & x e^{\alpha x}\cos(\beta x) & y_2^* & = & x e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_p & = & x^{p-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & y_p^* & = & x^{p-1} e^{\alpha x}\sin(\beta x)
\end{array}$$

şi sunt evident liniar independente.

O consecinţă imediată a acestui fapt este că funcţia:

$$y = e^{\alpha x}\cos(\beta x)\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_p x^{p-1}\right) + e^{\alpha x}\sin(\beta x)\left(C_{p+1} + C_{p+2} x + \ldots + C_{2p} x^{p-1}\right),\ x \in \mathbb{R}$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare (3.36).

Observaţia 3.8.1. Dacă ecuaţia caracteristică are şi rădăcini reale multiple şi rădăcini complexe multiple, atunci se procedează ca în cazul rădăcinilor simple (Consecinţa 3.8.1).

Exemplul 3.8.4. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Ecuaţia caracteristică asociată este $K_3(r) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^3 = 0$ şi admite soluţiile reale $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \in \mathbb{R}$ (rădăcină multiplă de ordinul 3).

Sistemul fundamental de soluţii este de forma:

$y_1 = e^{r_1 x} = e^x, y_2 = x e^{r_1 x} = x e^x, y_3 = x^2 e^{r_1 x} = x^2 e^x$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \Leftrightarrow y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$, cu $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Exemplul 3.8.5. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$.

Ecuaţia caracteristică asociată este $K_4(r) = r^4 + 8r^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \left(r^2 + 4\right)^2 = 0$ şi admite soluţiile complexe $r_{1,2} = \pm 2i \in \mathbb{C}$, $r_{3,4} = \pm 2i \in \mathbb{C}$ (rădăcină multiplă de ordinul 2), deci $\alpha = 0$ şi $\beta = 2$. Sistemul fundamental de soluţii este:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = \cos 2x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \sin 2x$$

$$y_3 = x e^{\alpha x}\cos\beta x = x\cos 2x, \quad y_4 = x e^{\alpha x}\sin\beta x = x\sin 2x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 \Leftrightarrow$

$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3 x\cos 2x + C_4 x\sin 2x$, cu $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Cazul IV: Ecuaţia caracteristică (3.38) are şi rădăcini reale şi rădăcini complexe, simple sau multiple

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene (3.36) se determină astfel: pentru fiecare rădăcină a ecuaţiei caracteristice se construiesc soluţiile corespunzătoare ecuaţiei diferenţiale (3.36) aşa cum s-a arătat în cazurile I, II, III. Se obţin pentru ecuaţia diferenţială (3.36) n soluţii $y_1, y_2, \ldots, y_n$ liniar independente pe $\mathbb{R}$ şi atunci soluţia generală a

ecuaţiei (3.36) va fi de forma:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, cu $C_1, C_2, ..., C_n$ constante reale arbitrare.

Exemplul 3.8.6. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene

$y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0$.

Ecuaţia caracteristică asociată este:

$$K_5(r) = r^5 - r^4 - r + 1 = 0 \Leftrightarrow r^4(r-1) - (r-1) = 0 \Leftrightarrow (r-1)\left(r^4 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(r-1)(r-1)(r+1)\left(r^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2(r+1)\left(r^2+1\right) = 0$$

şi admite soluţiile $r_1 = r_2 = 1 \in \mathbb{R}$, $r_3 = -1 \in \mathbb{R}$, $r_{4,5} = \pm i \in \mathbb{C}$ $(\alpha = 0, \beta = 1)$.

Sistemul fundamental de soluţii este:

$y_1 = e^{r_1 x} = e^x$, $y_2 = x\, e^{r_1 x} = x\, e^x$, $y_3 = e^{r_3 x} = e^{-x}$,

$y_4 = e^{\alpha x} \cos \beta x = \cos x$, $y_5 = e^{\alpha x} \sin \beta x = \sin x$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 + C_5 y_5 \Leftrightarrow$

$y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x + C_3\, e^{-x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x$, cu $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$.

3.9. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi neomogene cu coeficienţi constanţi

Definiţia 3.9.1. O *ecuaţie diferenţială de ordin n liniară şi neomogenă şi cu coeficienţi constanţi* este o ecuaţie de forma:

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad \textbf{(3.47)}$$

unde $a_0, a_1, ..., a_n$ (coeficienţii ecuaţiei) sunt constante reale date, $a_0 \neq 0$ şi f este o funcţie reală continuă definită pe un interval $I = [a, b]$.

Ecuaţia diferenţială omogenă corespunzătoare este (3.36) şi ecuaţia caracteristică asociată este (3.38).

În Teorema 3.6.1, s-a arătat că soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale neomogene este egală cu suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene corespunzătoare şi o soluţie particulară a sa, adică $y_{GN} = y_{GO} + y_p$, unde s-a notat cu

y_{GN} soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.47)

y_{GO} soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (3.36)

y_p o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.47).

Metoda I: O soluţie particulară y_p a ecuaţiei diferenţiale neomogene (3.47) se poate determina întotdeauna prin metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

Exemplul 3.9.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene

$y''+y=\dfrac{1}{\sin x},\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Etapa I: Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale omogene asociată: $y''+y=0$.

Ecuaţia caracteristică este $K_2(r)=r^2+1=0$, cu soluţiile $r_{1,2}=\pm i\in\mathbb{C}\ (\alpha=0,\beta=1)$.

Sistemul fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene este:

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x=\cos x,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x=\sin x$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$y_{GO}=C_1y_1+C_2y_2\Leftrightarrow y_{GO}=C_1\cos x+C_2\sin x$, cu $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

Etapa II: Pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei diferenţiale neomogene se foloseşte metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange, adică se variază constantele de integrare $C_1\to C_1(x),\ C_2\to C_2(x)$ şi se construieşte funcţia

$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$.

Funcţiile $C_1(x),\ C_2(x)$ verifică sistemul liniar neomogen

$$\begin{cases}C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0\\ C_1'(x)(\cos x)'+C_2'(x)(\sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0\\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\sin x}\end{cases}.$$

Se înmulţeşte prima ecuaţie cu $\sin x$, a doua ecuaţie cu $\cos x$ şi se adună membru cu membru relaţiile obţinute. Se găseşte:

$C_2'(x)\sin^2 x+C_2'(x)\cos^2 x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\Leftrightarrow C_2'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, respectiv

$C_1'(x)\cos x+\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\sin x=0\Rightarrow C_1'(x)=-1$.

Rezultă funcţiile:

$C_1(x)=\displaystyle\int C_1'(x)dx=\int -1\,dx=-x+K_1$ şi

$$C_2(x)=\int C_2'(x)dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\ln|\sin x|+K_2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene este

$$y=(-x+K_1)\cos x+(\ln|\sin x|+K_2)\sin x \Leftrightarrow$$

$$y_{GN}=K_1\cos x+K_2\sin x-x\cos x+\ln|\sin x|\cdot\sin x.$$

Metoda II: În anumite cazuri se poate găsi o soluţie particulară y_p a ecuaţiei diferenţiale (3.47) printr-un simplu calcul algebric şi astfel se poate evita metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange care conduce la calcule mai complicate.

Găsirea soluţiei particulare y_p depinde de forma funcţiei $f(x)$ din membrul drept al ecuaţiei diferenţiale (3.47).

Cazul I: Dacă funcţia $f(x)$ este de *forma specială I*:

$$f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$$

unde $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $P_m(x)$ este un polinom de grad m cu coeficienţi reali, atunci soluţia particulară este de forma:

$$y_p=x^k e^{\alpha x}P_m^*(x),$$

unde $k\in\mathbb{N}$ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii α ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice (3.38) şi $P_m^*(x)$ este un polinom de grad m cu coeficienţi reali nedeterminaţi.

Determinarea coeficienţilor polinomului $P_m^*(x)$ se face prin identificare, punând condiţia ca soluţia y_p să verifice ecuaţia diferenţială neomogenă (3.47).

Cazul II. Dacă funcţia $f(x)$ este de *forma specială II*:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_{m_1}(x)\cos(\beta x)+Q_{m_2}(x)\sin(\beta x)\right],$$

unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $P_{m_1}(x)$ este un polinom de grad m_1 cu coeficienţi reali şi $Q_{m_2}(x)$ este un polinom de grad m_2 cu coeficienţi reali, atunci soluţia particulară este de forma:

$$y_p=x^k e^{\alpha x}\left[P_m^*(x)\cos(\beta x)+Q_m^*(x)\sin(\beta x)\right],$$

unde $k\in\mathbb{N}$ este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha+i\beta$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice (3.38) şi $P_m^*(x), Q_m^*(x)$ sunt două polinoame de grad m cu coeficienţi reali nedeterminaţi, $m=\max\left\{\text{grad } P_{m_1},\ \text{grad } Q_{m_2}\right\}=\max\{m_1,m_2\}$.

Determinarea coeficienţilor polinoamelor $P_m^*(x)$ şi $Q_m^*(x)$ se face prin identificare, punând condiţia ca soluţia y_p să verifice ecuaţia diferenţială neomogenă (3.47).

Exemplul 3.9.2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene $y''-y=xe^{2x}$.

Etapa I: Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale omogene asociată: $y''-y=0$.

Ecuaţia caracteristică este $K_2(r)=r^2-1=0$, cu soluţiile reale $r_1=-1, r_2=1\in\mathbb{R}$.

Sistemul fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene este:

$y_1=e^{r_1x}=e^{-x}$, $y_2=e^{r_2x}=e^{x}$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$y_{GO}=C_1y_1+C_2y_2 \Leftrightarrow y_{GO}=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$, cu $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

Etapa II: Determinarea unei soluţii particulare y_p a ecuaţiei diferenţiale neomogene.

Membrul drept $f(x)=xe^{2x}$ este de forma specială I, cu $\alpha=2$ şi $P(x)=x$ un polinom de grad 1. Se caută o soluţie particulară y_p de forma:

$$y_p=x^k e^{\alpha x}P^*(x),$$

unde $k=0$, deoarece $\alpha=2$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice şi $P^*(x)=Ax+B$, deoarece $\operatorname{grad}P^*=\operatorname{grad}P=1$.

Atunci rezultă $y_p=x^0e^{2x}(Ax+B)\Leftrightarrow y_p=e^{2x}(Ax+B)$, cu $A,B\in\mathbb{R}$.

Constantele reale A şi B se determină prin identificare, din condiţia ca y_p să fie o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene date, adică $y_p''-y_p=xe^{2x}$.

Se calculează derivatele funcţie construite:

$$y_p=e^{2x}(Ax+B)$$
$$y_p'=2e^{2x}(Ax+B)+e^{2x}\cdot A=e^{2x}(2Ax+A+2B)$$
$$y_p''=2e^{2x}(2Ax+A+2B)+e^{2x}\cdot 2A=e^{2x}(4Ax+4A+4B).$$

Se introduc funcţii anterior calculate în ecuaţia neomogenă şi rezultă

$$y_p''-y_p=xe^{2x}\Leftrightarrow e^{2x}(4Ax+4A+4B)-e^{2x}(Ax+B)=xe^{2x}\Leftrightarrow$$

$$e^{2x}\left(3Ax+4A+3B\right)=xe^{2x}\Rightarrow 3Ax+4A+3B=x,\ \text{deci}\ \begin{cases}3A & =1.\\ 4A+3B & =0\end{cases}$$

Se găsesc $A=\frac{1}{3}$ şi $B=-\frac{4}{9}$ şi soluţia particulară este $y_p=e^{2x}\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţială neomogenă este

$$y_{GN}=y_{GO}+y_p\Leftrightarrow y_{GN}=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+e^{2x}\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right).$$

Exemplul 3.9.3. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene

$y''-2y'+2y=2e^{x}\cos x$.

Etapa I: Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale omogene asociată: $y''-2y'+2y=0$.

Ecuaţia caracteristică este $K_2(r)=r^2-2r+2=0$, cu soluţiile complexe conjugate $r_{1,2}=1\pm i\in\mathbb{C}$ $(\alpha_1=1,\ \beta_1=1)$. Sistemul fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene este:

$$y_1=e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x)=e^{x}\cos x,\ y_2=e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x)=e^{x}\sin x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este

$$y_{GO}=C_1y_1+C_2y_2\Leftrightarrow y_{GO}=C_1e^{x}\cos x+C_2e^{x}\sin x,\ \text{cu}\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Etapa II: Determinarea unei soluţii particulare y_p a ecuaţiei diferenţiale neomogene.

Membrul drept $f(x)=2e^{x}\cos x=e^{x}(2\cdot\cos x+0\cdot\sin x)$ este de forma specială II, cu $\alpha=1,\beta=1$ şi $P(x)=2,\ Q(x)=0$ polinoame de grad 0. Se caută o soluţie particulară y_p de forma

$$y_p=x^k e^{\alpha x}\left[P^*(x)\cos(\beta x)+Q^*(x)\sin(\beta x)\right],$$

unde $k=1$, deoarece $\alpha+i\beta=1+i=r_1$ este rădăcină simplă a ecuaţiei caracteristice, $P^*(x)=$ $=A$ şi $Q^*(x)=B$, deoarece grad $P^*=$ grad $Q^*=\max\{\text{grad}\,P,\ \text{grad}\,Q\}=\max\{0,0\}=0$.

Atunci $y_p=xe^{x}(A\cos x+B\sin x)$, cu $A,B\in\mathbb{R}$.

Constantele reale A şi B se determină din condiţia ca y_p să fie o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene date, adică $y''_p-2y'_p+2y_p=2e^{x}\cos x$.

Se calculează derivatele funcţie construite:

$$y_p = x\,e^x\left(A\cos x + B\sin x\right)$$

$$y'_p = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right) + x\,e^x\left(A\cos x + B\sin x\right) + x\,e^x\left(-A\sin x + B\cos x\right)$$

$$y'_p = e^x\left(A\cos x + B\sin x + A\,x\cos x + B\,x\sin x - A\,x\sin x + B\,x\cos x\right)$$

$$y''_p = e^x\left(A\cos x + B\sin x + A\,x\cos x + B\,x\sin x - A\,x\sin x + B\,x\cos x\right) +$$

$$+ e^x\left(-A\sin x + B\cos x + A\cos x - A\,x\sin x + B\sin x + B\,x\cos x + \right.$$

$$\left. -A\sin x - A\,x\cos x + B\cos x - B\,x\sin x\right)$$

$$y''_p = e^x\left(2A\cos x + 2B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 2A\,x\sin x + 2B\cos x\right).$$

Se introduc funcţii anterior calculate în ecuaţia neomogenă şi rezultă:

$$e^x\left(2A\cos x + 2B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 2A\,x\sin x + 2B\cos x\right) -$$

$$-2e^x\left(A\cos x + B\sin x + A\,x\cos x + B\,x\sin x - A\,x\sin x + B\,x\cos x\right) +$$

$$+2x\,e^x\left(A\cos x + B\sin x\right) = 2e^x\cos x \Leftrightarrow e^x\left(-2A\sin x + 2B\cos x\right) = 2e^x\cos x \Rightarrow$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 2\cos x, \text{ deci } \begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 2 \end{cases}.$$

Se găsesc $A = 0$ şi $B = 1$ şi soluţia particulară este $y_p = x\,e^x\sin x$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţială neomogenă este:

$$y_{GN} = y_{GO} + y_p \Leftrightarrow y_{GN} = C_1\,e^x\cos x + C_2\,e^x\sin x + x\,e^x\sin x.$$

Exemplul 3.9.4. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene

$$y'' + 2y' + y = x\,e^{-x} + e^{-x}\cos x.$$

Etapa I: Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale omogene asociată: $y'' + 2y' + y = 0$.

Ecuaţia caracteristică este $K_2(r) = r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$, cu soluţiile reale confundate $r_1 = r_2 = -1 \in \mathbb{R}$. Sistemul fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene este:

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{-x},\ y_2 = x\,e^{r_1 x} = x\,e^{-x}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$$y_{GO} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Leftrightarrow y_{GO} = C_1\,e^{-x} + C_2\,x\,e^{-x}, \text{ cu } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Etapa II. Determinarea unei soluţii particulare y_p a ecuaţiei diferenţiale neomogene.

Membrul drept al ecuaţiei este de forma:

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x}\cos x = xe^{-x} + e^{-x}(1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x) = f_1(x) + f_2(x),$$

cu $f_1(x) = xe^{-x}$ de formă specială I şi $f_2(x) = e^{-x}(1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x)$ de formă specială II.

Se caută o soluţie particulară y_p a ecuaţiei neomogene de forma $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

Funcţia $f_1(x) = xe^{-x}$ este de forma specială I, cu $\alpha_1 = -1$ şi $P_1(x) = x$ un polinom de grad 1. Se caută soluţia particulară y_{p_1} de forma:

$$y_{p_1} = x^{k_1} e^{\alpha_1 x} P_1^*(x),$$

unde $k_1 = 2$, deoarece $\alpha_1 = r_1 = r_2 = -1$ este rădăcină dublă a ecuaţiei caracteristice şi $P_1^*(x) = Ax + B$, deoarece $\operatorname{grad} P_1^* = \operatorname{grad} P_1 = 1$, deci

$$y_{p_1} = x^2 e^{-x}(Ax + B) = e^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2\right).$$

Funcţia $f_2(x) = e^{-x}(1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x)$ este de forma specială II, cu $\alpha_2 = -1, \beta_2 = 1$ şi $P_2(x) = 1, Q_2(x) = 0$ polinoame de grad 0. Se caută soluţia particulară y_{p_2} de forma:

$$y_{p_2} = x^{k_2} e^{\alpha_2 x}\left[P_2^*(x)\cos(\beta_2 x) + Q_2^*(x)\sin(\beta_2 x)\right],$$

unde $k_2 = 0$, deoarece $\alpha_2 + i\beta_2 = -1 + i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, $P_2^*(x) = C$ şi $Q_2^*(x) = D$, deoarece $\operatorname{grad} P_2^* = \operatorname{grad} Q_2^* = \max\{\operatorname{grad} P_2, \operatorname{grad} Q_2\} = \max\{0,0\} = 0$, deci

$$y_{p_2} = e^{-x}(C\cos x + D\sin x).$$

Atunci $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = e^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2 + C\cos x + D\sin x\right)$, cu $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Se calculează derivatele soluţiei particulare:

$$y_p = e^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2 + C\cos x + D\sin x\right)$$

$$y'_p = -e^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2 + C\cos x + D\sin x\right) + e^{-x}\left(3Ax^2 + 2Bx - C\sin x + D\cos x\right)$$

$$y'_p = e^{-x}\left(-Ax^3 + 3Ax^2 - Bx^2 + 2Bx - C\cos x + D\cos x - C\sin x - D\sin x\right)$$

$$y''_p = -e^{-x}\left(-Ax^3 + 3Ax^2 - Bx^2 + 2Bx - C\cos x + D\cos x - C\sin x - D\sin x\right) +$$

$$+ e^{-x}\left(-3Ax^2 + 6Ax - 2Bx + 2B + C\sin x - D\sin x - C\cos x - D\cos x\right)$$

$$y''_p = e^{-x}\left(Ax^3 - 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax - 4Bx + 2B + 2C\sin x - 2D\cos x\right).$$

Se introduc funcţii anterior calculate în ecuaţia neomogenă şi rezultă:

$$y''_p + 2y'_p + y = xe^{-x} + e^{-x}\cos x \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}\left(Ax^3 - 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax - 4Bx + 2B + 2C\sin x - 2D\cos x\right) +$$

$$+2e^{-x}\left(-Ax^3 + 3Ax^2 - Bx^2 + 2Bx - C\cos x + D\cos x - C\sin x - D\sin x\right) +$$

$$+e^{-x}\left(Ax^3 + Bx^2 + C\cos x + D\sin x\right) = xe^{-x} + e^{-x}\cos x \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}\left(6Ax + 2B - C\cos x - D\sin x\right) = e^{-x}\left(x + \cos x\right) \Rightarrow$$

$$6Ax + 2B - C\cos x - D\sin x = x + \cos x, \text{ deci } \begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = 0 \\ -C = 1 \\ -D = 0 \end{cases}.$$

Se găsesc $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$, $C = -1$ şi $D = 0$ şi soluţia particulară este:

$$y_p = e^{-x}\left(\frac{1}{6}x^3 - \cos x\right).$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţială neomogenă este:

$$y_{GN} = y_{GO} + y_p \Leftrightarrow y_{GN} = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x} + e^{-x}\left(\frac{1}{6}x^3 - \cos x\right).$$

3.10. Ecuaţii diferenţiale de tip Euler

Definiţia 3.10.1. O *ecuaţie diferenţială de tip Euler* este o ecuaţie diferenţială de ordinul n liniară cu coeficienţi variabili de forma:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \qquad \textbf{(3.48)}$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt constante reale date, $a_0 \neq 0$ şi $f(x)$ este o funcţie reală continuă definită pe un interval $I = [a,b]$, $x \neq 0$.

Observaţia 3.10.1. În punctul $x = 0$, coeficientul $a_0 x^n$ se anulează şi astfel vom presupune că intervalul $I = [a,b]$ nu conţine originea.

O metodă de rezolvare a ecuaţiei diferenţiale Euler (3.48) constă în a reduce această ecuaţie cu coeficienţi variabili la o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi.

Teorema 3.10.1. Ecuaţia diferenţială Euler (3.48) se transformă în ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi dacă se face schimbarea de variabilă $x \to t$, dată prin $|x| = e^t$.

Demonstraţie. Se pune $|x| = e^t$.

Cazul a). Pentru $x > 0$, avem $x = e^t$ şi se fac următoarele calcule:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} = y'(t) \cdot e^{-t} \overset{\text{not}}{=} \dot{y}(t) \cdot e^{-t}, \text{ deci}$$

$$x\,y'(x) = e^t \cdot y'(t) \cdot e^{-t} = y'(t) \overset{\text{not}}{=} \dot{y}(t)$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} \cdot e^{-t} - \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right) \cdot e^{-t} =$$

$$= \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \cdot e^{-2t} = \left(y''(t) - y'(t)\right) \cdot e^{-2t} \overset{\text{not}}{=} \left(\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\right) \cdot e^{-2t} \quad \text{, deci}$$

$$x^2 y''(x) = e^{2t} \cdot \left(y''(t) - y'(t)\right) \cdot e^{-2t} = y''(t) - y'(t) \overset{\text{not}}{=} \ddot{y}(t) - \dot{y}(t)$$

$$y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left[\left(y''(t) - y'(t)\right) \cdot e^{-2t}\right] \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \left[\left(y'''(t) - y''(t)\right) \cdot e^{-2t} - 2e^{-2t} \cdot \left(y''(t) - y'(t)\right)\right] \cdot e^{-t} =$$

$$= \left(y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)\right) \cdot e^{-3t} \overset{\text{not}}{=} \left(\dddot{y}(t) - 3\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t)\right) \cdot e^{-3t}, \text{ deci}$$

$$x^3 y'''(x) = e^{3t} \cdot \left(\dddot{y}(t) - 3\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t)\right) \cdot e^{-3t} = \dddot{y}(t) - 3\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t).$$

Se calculează şi celelalte derivate în raport cu x şi se observă că toate produsele $x^k \dfrac{d^k y}{dx^k}, 1 \le k \le n$ se exprimă liniar în funcţie de derivatele $\dfrac{d^m y}{dt^m} = y^{(m)}(t), 1 \le m \le k$, înmulţite cu factori numerici.

Dacă se înlocuiesc produsele $x\,y', x^2 y'', x^3 y''', \ldots, x^n y^{(n)}$ în ecuaţia diferenţială (3.48), ecuaţia se transformă într-o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi de forma:

$$b_0 \frac{d^n y}{d t^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{d t^{n-1}} + \ldots + b_{n-1} \frac{d y}{d t} + b_n y = f\left(e^t\right) \qquad \textbf{(3.49)}$$

cu $b_0, b_1, \ldots, b_n$ constante reale.

Folosind rezultatele demonstrate pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, se poate găsi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (3.49). În soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (3.49), se înlocuieşte $t = \ln|x|$ şi se obţine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale Euler (3.48).

Cazul b). Pentru $x < 0$, avem $x = -e^t$ şi se fac următoarele calcule:

$$y'(x) = \frac{d y}{d x} = \frac{d y}{d t} \cdot \frac{d t}{d x} = \frac{\frac{d y}{d t}}{\frac{d x}{d t}} = \frac{\frac{d y}{d t}}{-e^t} = -e^{-t} \cdot \frac{d y}{d t} = -e^{-t} \cdot y'(t) \overset{\text{not}}{=} -e^{-t} \cdot \dot{y}(t), \text{ deci}$$

$x y'(x) = -e^t \cdot \left(-e^{-t} \cdot \dot{y}(t)\right) = \dot{y}(t)$, adică se obţine acelaşi rezultat ca în cazul a).

În concluzie, în cazul $x < 0$ se obţin aceleaşi rezultate ca în cazul $x > 0$.

Observaţia 3.10.2. Ecuaţia diferenţială liniară omogenă asociată ecuaţiei neomogene (3.49) admite soluţii de forma $y = e^{rt}$; dar $t = \ln|x|$, deci $y = e^{r \ln|x|} = e^{\ln|x|^r} = |x|^r$, $x \neq 0$.

Aşadar, ecuaţia diferenţială Euler omogenă (obţinută din (3.48) pentru $f(x) = 0$) admite soluţii de forma $y = |x|^r$, $x \neq 0$, cu r soluţie a ecuaţiei caracteristice asociată ecuaţiei omogene.

Observaţia 3.10.3. Ecuaţia diferenţială de ordinul n

$$a_0 (a x + b)^n y^{(n)} + a_1 (a x + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} (a x + b) y' + a_n y = f(x) \qquad \textbf{(3.50)}$$

unde $a, b, a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt constante reale date şi $f(x)$ este o funcţie reală continuă definită pe un interval I, poate fi transformată într-o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi dacă se face schimbarea de variabilă $|a x + b| = e^t$.

Exemplul 3.10.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene $x^2 y'' + 5 x y' + 3 y = \sin x$.

Se face schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi apoi se fac următoarele calcule:

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{e^t}=y'(t)\cdot e^{-t}\overset{\text{not}}{=}\dot{y}(t)\cdot e^{-t}$$

$$y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot e^{-t}-\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot e^{-t}=$$

$$=\left(y''(t)-y'(t)\right)\cdot e^{-2t}\overset{\text{not}}{=}\left(\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\right)\cdot e^{-2t}$$

$$xy'(x)=e^t\cdot\left(\dot{y}(t)\cdot e^{-t}\right)=\dot{y}(t)$$

$$x^2y''(x)=e^{2t}\cdot\left(\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\right)\cdot e^{-2t}=\ddot{y}(t)-\dot{y}(t).$$

Înlocuind aceste expresii în ecuaţia Euler dată, aceasta devine:

$$\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)+5\dot{y}(t)+3y(t)=\sin e^t\Leftrightarrow\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)=\sin e^t.$$

$\ddot{y}+4\dot{y}+3y=\sin e^t$ este o ecuaţie diferenţială de ordinul 2 liniară neomogenă cu coeficienţi constanţi şi funcţia necunoscută $y(t)$.

Etapa I: Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale omogene asociată: $\ddot{y}+4\dot{y}+3y=0$.

Ecuaţia caracteristică este $K_2(r)=r^2+4r+3=0$ şi admite soluţiile reale $r_1=-1$, $r_2=-3\in\mathbb{R}$. Sistemul fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene este:

$$y_1=e^{r_1t}=e^{-t},\ y_2=e^{r_2t}=e^{-3t}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene este:

$$y_{GO}=C_1y_1+C_2y_2\Leftrightarrow y_{GO}=C_1e^{-t}+C_2\ e^{-3t},\text{ cu } C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Etapa II: Determinarea unei soluţii particulare y_p a ecuaţiei diferenţiale neomogene.

Membrul drept al ecuaţiei este $f(t)=\sin e^t$, însă nu este de nicio formă specială (nici de forma specială I, nici de forma specială II).

Se foloseşte metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange pentru găsirea soluţiei generale a ecuaţiei liniare neomogene, deci se variază constantele de integrare $C_1\to C_1(t)$, $C_2\to C_2(t)$ şi se construieşte funcţia

$$y=C_1(t)\,e^{-t}+C_2(t)\,e^{-3t}.$$

Funcţiile $C_1(t), C_2(t)$ sunt soluţiile sistemului liniar neomogen

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{-t} + C_2'(t)e^{-3t} = 0 \\ C_1'(t)\left(e^{-t}\right)' + C_2'(t)\left(e^{-3t}\right)' = \sin e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(t)e^{-t} + C_2'(t)e^{-3t} = 0 \\ -C_1'(t)e^{-t} - 3C_2'(t)e^{-3t} = \sin e^t \end{cases}.$$

Adunând membru cu membru cele două ecuaţii ale sistemului se găseşte

$$-2C_2'(t)e^{-3t} = \sin e^t \Leftrightarrow C_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{3t}\sin e^t.$$

Folosind această expresie în prima ecuaţie a sistemului se obţine

$$C_1'(t)e^{-t} - \frac{1}{2}e^{3t}\sin e^t \cdot e^{-3t} = 0 \Rightarrow C_1'(t) = \frac{1}{2}e^t \sin e^t.$$

Prin integrare se obţin funcţiile:

$$C_1(t) = \int \frac{1}{2}e^t \sin e^t \, dt = -\frac{1}{2}\int \left(\cos e^t\right)' dt = -\frac{1}{2}\cos e^t + K_1 \text{ şi}$$

$$C_2(t) = \int -\frac{1}{2}e^{3t}\sin e^t \, dt = \frac{1}{2}\int e^{2t}\left(\cos e^t\right)' dt = \frac{1}{2}\left[e^{2t}\cos e^t - \int 2e^{2t}\cos e^t dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\cos e^t - \int e^t\left(\sin e^t\right)' dt = \frac{1}{2}e^{2t}\cos e^t - e^t \sin e^t + \int e^t \sin e^t dt = .$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\cos e^t - e^t\sin e^t - \int \left(\cos e^t\right)' dt = \frac{1}{2}e^{2t}\cos e^t - e^t \sin e^t - \cos e^t + K_2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene este

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}\cos e^t + K_1\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{2}e^{2t}\cos e^t - e^t \sin e^t - \cos e^t + K_2\right)e^{-3t}.$$

Se revine la variabila x, unde $x = e^t$, deci soluţia generală a ecuaţiei Euler este

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2}\cos x + K_1\right)\cdot\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}x^2\cos x - x\sin x - \cos x + K_2\right)\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{x} + \frac{K_1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3} + \frac{K_2}{x^3}$$

$y(x) = \dfrac{K_1}{x} + \dfrac{K_2}{x^3} - \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{\cos x}{x^3}$, $x \neq 0$, cu $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ (soluţie sub formă explicită).

C A P I T O L U L 4

SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

4.1. Sisteme de ecuaţii diferenţiale. Proprietăţi generale

Definiţia 4.1.1. Un *sistem de n ecuaţii diferenţiale* este definit de n relaţii între variabila independentă x şi funcţiile necunoscute $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ împreună cu derivatele lor de anumite ordine. Forma generală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale este:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(m_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n)}\right) = 0 \\ \qquad ... \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ... \; ... \\ F_n\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(m_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n)}\right) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

unde F_i sunt funcţii definite pe $[a, b] \times D_1 \times D_2 \times ... \times D_n$, cu $D_i \subset \mathbb{R}^{m_i+1}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Definiţia 4.1.2. Dacă sistemul (4.1) poate fi rezolvat în raport cu derivatele de ordinul cel mai mare al funcţiilor necunoscute y_i, $i = 1, 2, ..., n$, adică este de forma:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(m_2-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n-1)}\right) \\ \quad ... \quad ... \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ y_n^{(m_n)} = f_n\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(m_2-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n-1)}\right) \end{cases} \tag{4.2}$$

atunci spunem că sistemul este scris sub *formă normală* (*formă canonică* sau *formă explicită*).

Observaţia 4.1.1.

1) Dacă cel puţin unul din numerele $m_1, m_2, ..., m_n$ este mai mare decât 1, atunci sistemul se numeşte *sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin superior*.

2) Dacă $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$, adică derivatele de ordin maxim ale funcţiilor care intervin în sistem sunt $y_1', y_2', ..., y_n'$, atunci sistemul se numeşte *sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.*

Teorema 4.1.1. Un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordin superior (4.1) (sau (4.2)) este echivalent cu un sistem de $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

Demonstraţie. Pentru simplificarea demonstraţiei se ia cazul $n = 2$ şi $m_1 = m_2 = n = 2$, deci se consideră sistemul două ecuaţii diferenţiale de ordinul 2:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', y_1'', y_2, y_2', y_2'') = 0 \end{cases}. \tag{4.3}$$

Prin introducerea de noi funcţii necunoscute, $y_3(x), y_4(x)$, sistemul (4.3) se reduce la un sistem de patru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Se definesc

$$y_1' = y_3 \text{ şi } y_2' = y_4, \text{ deci } y_1'' = y_3' \text{ şi } y_2'' = y_4'. \tag{4.4}$$

Atunci sistemul dat (4.3) se transformă în sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu 4 ecuaţii şi 4 funcţii necunoscute $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$ $(m = m_1 + m_2 = 4)$:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_3', y_4') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_3', y_4') = 0 \\ y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \end{cases}. \tag{4.5}$$

Observaţia 4.1.2. Echivalenţa din Teorema 4.1.1 trebuie înţeleasă în sensul că orice soluţie a sistemului (4.3), (y_1, y_2), defineşte prin relaţiile (4.4) o soluţie a sistemului (4.5), (y_1, y_2, y_3, y_4), şi reciproc.

În baza teoremei anterioare, în continuare, vom studia doar sistemele diferenţiale de ordinul întâi.

Definiţia 4.1.3. Un *sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi* este definit de n relaţii între variabila independentă x, funcţiile necunoscute $y_1(x), ..., y_n(x)$ şi derivatele lor de ordinul întâi. Forma generală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \\ \qquad ... \qquad\qquad ... ... \\ F_n(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

unde F_i, $i = 1, 2, ..., n$ sunt funcţii definite pe o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

Definiţia 4.1.4. Un *sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi sub formă normală* este un sistem de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \quad ... \quad ... \qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases} \tag{4.7}$$

unde $f_1, ..., f_n$ sunt funcţii continue definite pe o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definiţia 4.1.5. Se numeşte *soluţie* a sistemului de ecuaţii diferenţiale (4.7) orice set de n funcţii reale $y_1 = \varphi_1(x), ..., y_n = \varphi_n(x), x \in I$, definite pe un interval deschis $I \subset \mathbb{R}$, $\varphi_i \in C^1(I), i = 1, 2, ..., n$, care împreună cu derivatele lor verifică identic sistemul (4.7) pe I:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dx}(x) = f_1(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \\ \quad ... \quad ... \qquad ... \\ \dfrac{d\varphi_n}{dx}(x) = f_n(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \end{cases}, \ (\forall)\, x \in I.$$

(Se subînţelege că am presupus $(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \in D$, $(\forall)\, x \in I$).

În general, un sistem de ecuaţii diferenţiale admite o infinitate de soluţii. Pentru a selecta o anumită soluţie se impun anumite condiţii suplimentare, cele mai utilizate fiind condiţiile iniţiale.

Definiţia 4.1.6. Fie $M_0(x_0, y_{10}, ..., y_{n0})$ un punct oarecare din D fixat. Se numeşte *problema Cauchy* relativă la sistemul (4.7), problema determinării unei soluţii a acestui sistem, $y_1 = \varphi_1(x), ..., y_n = \varphi_n(x), x \in I$, care verifică condiţiile iniţiale (*condiţiile Cauchy*):

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, ..., \varphi_n(x_0) = y_{n0}. \tag{4.8}$$

Definiţia 4.1.7. Sistemul de funcţii $y_1 = \Phi_1(x, C_1, ..., C_n), ..., y_n = \Phi_n(x, C_1, ..., C_n)$ se numeşte *soluţia generală* a sistemului (4.7) dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1) Sistemul de funcţii $\Phi_1, ..., \Phi_n$ este soluţie a sistemului (4.7), pentru constantele reale $C_1, ..., C_n$

2) Problema Cauchy (4.8) are soluţie unică.

O soluţie a sistemului (4.7) care se obţine din soluţia generală dând valori constantelor arbitrare se numeşte *soluţie particulară*.

Exemplul 4.1.1. Fie sistemul diferenţial

$$\begin{cases} 2y + z - y' = 0 \\ y + 2z - z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = y + 2z \end{cases}.$$

Funcţiile $\varphi_1(x) = e^x$ şi $\varphi_2(x) = -e^x$ formează o soluţie a sistemului dat (verifică sistemul). Soluţia generală a sistemului este

$y(x) = \Phi_1(x, C_1, C_2)$, $z(x) = \Phi_2(x, C_1, C_2)$, unde

$\Phi_1(x, C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ şi $\Phi_2(x, C_1, C_2) = -C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

cu C_1, C_2 constante reale.

Observaţia 4.1.3. Dacă adoptăm scrierea vectorială

$y = (y_1, ..., y_n)$, $f = (f_1, ..., f_n)$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, $y_0 = (y_{10}, ..., y_{n0})$

atunci sistemul (4.7) se scrie

$$y' = f(x, y) \tag{4.9}$$

iar problema Cauchy constă în determinarea unei funcţii vectoriale $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1(I)$, cu proprietăţile

$$(x, \varphi(x)) \in D,\ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),\ (\forall)\, x \in I,\ \varphi(x_0) = y_0. \tag{4.10}$$

Definiţia 4.1.8. O funcţie $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ se numeşte *lipschitziană* pe D, în raport cu $y_1, ..., y_n$ dacă există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$\left| f(x, y_1, ..., y_n) - f(x, z_1, ..., z_n) \right| \le L \sum_{j=1}^{n} \left| y_j - z_j \right|$$

oricare ar fi punctele $(x, y_1, ..., y_n)$ şi $(x, z_1, ..., z_n)$ din D.

Observaţia 4.1.4. Dacă D este o mulţime deschisă şi convexă, $f \in C^1(D)$ şi există $M > 0$ astfel încât

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y_1, ..., y_n) \right| \le M,\ (\forall)\, (x, y_1, ..., y_n) \in D,\ (\forall)\, i = 1, 2, ..., n$$

atunci f este lipschitziană pe D.

Demonstraţie. Într-adevăr, din Teorema creşterilor finite a lui Lagrange rezultă că oricare ar fi $P(x, y_1, ..., y_n) \in D$ şi $Q(x, z_1, ..., z_n) \in D$ există un punct $(x, \xi_1, ..., \xi_n)$ pe segmentul de dreaptă deschis, de capete P şi Q, astfel încât

$$f(x,y_1,...,y_n)-f(x,z_1,...,z_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}(x,\xi_1,...,\xi_n)(y_j-z_j).$$

În continuare, avem:

$$\left|f(x,y_1,...,y_n)-f(x,z_1,...,z_n)\right|\le\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial y_j}(x,\xi_1,...,\xi_n)\right|\left|y_j-z_j\right|\le M\sum_{j=1}^{n}\left|y_j-z_j\right|$$

deci f este lipschitziană pe D.

Următoarea teoremă de existenţă pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale ne dă condiţii suficiente pentru care soluţia sistemului (4.7) cu problema Cauchy (4.8) există şi este unică, iar metoda folosită pentru demonstrarea ei, *metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard*, ne dă şi un procedeu de construcţie efectivă a soluţiei.

Teorema 4.1.2. (Teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale)

Fie sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,y_1,...,y_n) \\ \dots \quad \dots \qquad \dots \\ y_n' = f_n(x,y_1,...,y_n) \end{cases} \tag{4.7}$$

care îndeplineşte condiţiile:

i) $f_i:\overline{D}\to\mathbb{R}$, $i=1,2,...,n$, sunt funcţii reale continue pe $\overline{D}$, unde

$D=(x_0-a,\,x_0+a)\times\Delta$

$$\Delta=\prod_{j=1}^{n}(y_{j0}-b_j,\,y_{j0}+b_j)=(y_{10}-b_1,\,y_{10}+b_1)\times...\times(y_{n0}-b_n,\,y_{n0}+b_n)$$

$a,\,b_1,...,b_n>0$ şi $(x_0,y_{10},...,y_{n0})$ este un punct din $\mathbb{R}^{n+1}$

ii) $f_i:\overline{D}\to\mathbb{R}$, $i=1,2,...,n$, sunt lipschitziene pe $\overline{D}$, în raport cu $y_1,...,y_n$.

Atunci există o soluţie unică a sistemului diferenţial (4.7), şi anume

$y_1=\varphi_1(x),\,...,\,y_n=\varphi_n(x),\;x\in I\subset(x_0-a,\,x_0+a)$

care îndeplineşte condiţiile iniţiale (condiţiile Cauchy)

$\varphi_1(x_0)=y_{10},\,...,\,\varphi_n(x_0)=y_{n0}$.

(Cu alte cuvinte, în condiţiile precizate, problema Cauchy (4.7) + (4.8) are soluţie unică).

Demonstraţie. Pentru fiecare $i = 1, 2, ..., n$, funcţia f_i este continuă pe mulţimea compactă $\overline{D}$, deci este mărginită pe $\overline{D}$. Fie $M_i > 0$ marginea superioară a funcţiei f_i pe $\overline{D}$ şi fie $M = \max\{M_1, ..., M_n\}$. Fie, de asemenea, $L = \max\{L_1, ..., L_n\}$, unde $L_i > 0$ este constanta Lipschitz a funcţiei f_i pe $\overline{D}$, $i = 1, 2, ..., n$. Fie, de asemenea, $\alpha \in (0, 1)$ oarecare şi fie

$$h = \min\left\{a, \frac{b_1}{M}, ..., \frac{b_n}{M}, \frac{\alpha}{nL}\right\}.$$

Notăm cu $I = (x_0 - h, x_0 + h)$. Evident, $I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$. Procedând ca în demonstraţia Teoremei 2.8.1, se arată că rezolvarea problemei Cauchy (4.7) + (4.8) este echivalentă cu rezolvarea următorului sistem de ecuaţii integrale:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{10} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \qquad , \ x \in I. \\ y_n(x) = y_{n0} + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt \end{cases} \tag{4.11}$$

Rezultă că dacă arătăm că sistemul (4.11) are soluţie unică, atunci teorema este demonstrată.

Pentru început, vom arăta că există o soluţie a problemei Cauchy sau, echivalent, vom arăta că există o soluţie a sistemului de ecuaţii integrale (4.11) folosind *metoda aproximaţiilor succesive*, utilizată în demonstraţia teoremei de existenţă a soluţiei pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi (Teorema 2.8.1). Vom construi din aproape în aproape n şiruri de funcţii

$$y_{10}, y_1^{(1)}(x), y_1^{(2)}(x), ..., y_1^{(n)}(x), ...$$

.....

$$y_{n0}, y_n^{(1)}(x), y_n^{(2)}(x), ..., y_n^{(n)}(x), ...$$

uniform convergente către funcţiile $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ pe intervalul I.

Aproximaţiile de ordinul zero pentru cele n şiruri sunt numerele $y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Definim prima aproximaţie

$y_1^{(1)} = y_1^{(1)}(x)$, $y_2^{(1)} = y_2^{(1)}(x)$, $y_n^{(1)} = y_n^{(1)}(x)$, $x \in I$, astfel:

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_{10}, ..., y_{n0})\, dt \\ y_2^{(1)}(x) = y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2(t, y_{10}, ..., y_{n0})\, dt \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \qquad ... \\ y_n^{(1)}(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n(t, y_{10}, ..., y_{n0})\, dt \end{cases}, \ x \in I .$$

Deoarece funcţiile $f_i, i = 1, 2, ..., n$, sunt continue pe $\overline{D}$, rezultă că funcţiile $y_i^{(1)}$, $i = 1, 2, ..., n$, sunt continue pe I.

Pe de altă parte, pentru orice $i = 1, 2, ..., n$ şi pentru orice $x \in I$ avem:

$$\left| y_i^{(1)}(x) - y_{i0} \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i(t, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) \right| dt \right| \le M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| = \tag{4.12}$$

$$= M \left| x - x_0 \right| \le M\, h \le M \frac{b_i}{M} = b_i .$$

Aşadar, $y_i^{(1)} : I \to \left[y_{i0} - b_i,\ y_{i0} + b_i \right]$, deci $\left(t, y_1^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t) \right) \in \overline{D}, (\forall)\, t \in I$.

Construim aproximaţia a doua

$y_1^{(2)} = y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)} = y_2^{(2)}(x),\ y_n^{(2)} = y_n^{(2)}(x),\ x \in I$, astfel:

$$\begin{cases} y_1^{(2)}(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1\left(t, y_1^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t)\right) dt \\ y_2^{(2)}(x) = y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2\left(t, y_1^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t)\right) dt \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \qquad ... \\ y_n^{(2)}(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n\left(t, y_1^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t)\right) dt \end{cases}, \ x \in I .$$

Din continuitatea funcţiilor $f_i, i = 1, 2, ..., n$, precum şi din continuitatea funcţiilor $y_i^{(1)}$, $i = 1, 2, ..., n$, rezultă continuitatea funcţiilor $y_i^{(2)}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Pe de altă parte, se observă că pentru orice $i = 1, 2, ..., n$ şi pentru orice $x \in I$, avem:

$$\left| y_i^{(2)}(x) - y_{i0} \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(t, y_1^{(1)}(t), y_2^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t)\right) \right| dt \right| \le M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| =$$

$$= M \left| x - x_0 \right| \le M\ h \le M\ \frac{b_i}{M} = b_i\ .$$

Aşadar, $y_i^{(2)} : I \to \left[y_{i0} - b_i,\ y_{i0} + b_i \right]$, deci $\left(t, y_1^{(2)}(t), ..., y_n^{(2)}(t) \right) \in \overline{D}, (\forall)\ t \in I$.

În general, definim aproximaţia de ordinul k:

$y_1^{(k)} = y_1^{(k)}(x),\ y_2^{(k)} = y_2^{(k)}(x),\ y_n^{(k)} = y_n^{(k)}(x),\ x \in I$, astfel:

$$\begin{cases} y_1^{(k)}(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1\left(t, y_1^{(k-1)}(t), ..., y_n^{(k-1)}(t)\right) dt \\ y_2^{(k)}(x) = y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2\left(t, y_1^{(k-1)}(t), ..., y_n^{(k-1)}(t)\right) dt \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \qquad\qquad ... \\ y_n^{(k)}(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n\left(t, y_1^{(k-1)}(t), ..., y_n^{(k-1)}(t)\right) dt \end{cases},\ x \in I$$

şi constatăm că $y_i^{(k)} : I \to \left[y_{i0} - b_i,\ y_{i0} + b_i \right]$ sunt funcţii continue pe I, $i = 1, 2, ..., n$, deci $\left(t, y_1^{(k)}(t), ..., y_n^{(k)}(t) \right) \in \overline{D}, (\forall)\ t \in I$.

Procedeul continuă nedefinit şi se obţin n şiruri de funcţii $\left(y_1^{(k)} \right)_k, \left(y_2^{(k)} \right)_k, ...,$ $\left(y_n^{(k)} \right)_k$. Se demonstrează, ca în teoreme de existenţă şi unicitate pentru soluţia unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, că aceste şiruri sunt uniform convergente pe I către funcţiile continue $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$, când $k \to +\infty$ şi că funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ formează o soluţie a sistemului (4.11), deci a problemei Cauchy (4.7) + (4.8).

Pentru fiecare $i = 1, 2, ..., n$, se consideră următoarea serie de funcţii pe I:

$$y_{i0} + \left(y_i^{(1)} - y_{i0} \right) + ... + \left(y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)} \right) + ... \qquad \textbf{(4.13)}$$

şi observăm că şirul aproximaţiilor succesive $\left(y_i^{(k)} \right)_k$ este şirul sumelor parţiale al seriei (4.13), adică

$$s_i^{(k)}(x) = y_i^{(k)}(x), (\forall)\, x \in I$$

deci şirul aproximaţiilor succesive $\left(y_i^{(k)}\right)_k$ şi seria de funcţii (4.13) sunt convergente în acelaşi timp.

Dacă vom arăta că seria (4.13) este uniform convergentă pe I, va rezulta că şirul $\left(y_i^{(k)}\right)_k$ este uniform convergent pe I. Folosind ipoteza că funcţia f_i este lipschitziană pe $\overline{D}$ în raport cu $y_1,...,y_n$ şi ţinând seama de (4.12), avem:

$$\left| y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x) \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(t, y_1^{(1)}(t),..., y_n^{(1)}(t)\right) - f_i\left(t, y_{10},..., y_{n0}\right) \right| dt \right| \le$$

$$\le L \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_0}^{x} \left| y_j^{(1)}(t) - y_{j0} \right| dt \right| \le L\, n\, M \left| \int_{x_0}^{x} \left| t - x_0 \right| dt \right| = L\, n\, M \frac{|x - x_0|^2}{2} \le \frac{L\, n\, M}{2!} h^2 .$$

Aşadar, avem:

$$\left| y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x) \right| \le \frac{L\, n\, M}{2!} |x - x_0|^2 , (\forall)\, x \in I, i = 1,2,....,n . \qquad \textbf{(4.14)}$$

Folosind din nou faptul că f este lipschitziană şi ţinând seama de (4.14), rezultă:

$$\left| y_i^{(3)}(x) - y_i^{(2)}(x) \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(t, y_1^{(2)}(t),..., y_n^{(2)}(t)\right) - f_i\left(t, y_1^{(1)}(t),..., y_n^{(1)}(t)\right) \right| dt \right| \le$$

$$\le L \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_0}^{x} \left| y_j^{(2)}(t) - y_j^{(1)}(t) \right| dt \right| \le \frac{L^2 n^2 M}{2!} \left| \int_{x_0}^{x} \left| t - x_0 \right|^2 dt \right| =$$

$$= \frac{L^2 n^2 M}{2!} \frac{|x - x_0|^3}{3} \le \frac{L^2 n^2 M}{3!} h^3$$

deci

$$\left| y_i^{(3)}(x) - y_i^{(2)}(x) \right| \le \frac{L^2 n^2 M}{3!} |x - x_0|^3 , (\forall)\, x \in I, i = 1,2,....,n .$$

În general, avem:

$$\left| y_i^{(k)}(x) - y_i^{(k-1)}(x) \right| \le \frac{L^{k-1}\, n^{k-1}\, M}{k!} |x - x_0|^k \le \frac{L^{k-1}\, n^{k-1}\, M}{k!} h^k , \; x \in I . \qquad \textbf{(4.15)}$$

Observăm că seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\, n^{k-1} L^{k-1}}{k\,!} h^k$ este convergentă, aşa cum rezultă din criteriul raportului:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{M\, n^k L^k}{(k+1)!} h^{k+1} \cdot \frac{k\,!}{M\, n^{k-1} L^{k-1} h^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{n\, L\, h}{k+1} = 0 < 1 .$$

Conform (4.15), seria de funcţii (4.13) este majorată pe intervalul I de o serie numerică convergentă, deci seria (4.13) este uniform convergentă pe I, conform criteriului lui Weierstrass pentru serii de funcţii.

Aşadar, am demonstrat că pentru fiecare $i = 1, 2, ..., n$, şirul aproximaţiilor $\left(y_i^{(k)}\right)_k$ este uniform convergent pe intervalul I. Notăm cu φ_i limita acestui şir. Cum $y_i^{(k)} \xrightarrow[I]{u} \varphi_i$ şi $y_i^{(k)}$ sunt funcţii continue pe I, rezultă că φ_i sunt, de asemenea, continue pe I.

Dacă notăm cu

$$\left\| y_i^{(k)} - \varphi_i \right\|_\infty = \sup\left\{ \left| y_i^{(k)}(t) - \varphi_i(t) \right|;\ t \in I \right\}$$

atunci faptul că $y_i^{(k)} \xrightarrow[I]{u} \varphi_i$ revine la a spune că

$$\lim_{k\to\infty} \left\| y_i^{(k)} - \varphi_i \right\|_\infty = 0 .$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(k-1)}(t), ..., y_n^{(k-1)}(t)\right) dt - \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\right) dt \right| \le \\
&\le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(t, y_1^{(k-1)}(t), ..., y_n^{(k-1)}(t)\right) - f_i\left(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\right) \right| dt \right| \le \\
&\le L \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} \left| y_j^{(k-1)}(t) - \varphi_j(t) \right| dt \right| \le L \sum_{j=1}^{n} \left\| y_j^{(k-1)}(t) - \varphi_j(t) \right\|_\infty \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| \le \\
&\le L\, h \sum_{j=1}^{n} \left\| y_j^{(k-1)}(t) - \varphi_j(t) \right\|_\infty .
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Deoarece membrul drept tinde la 0 când $k \to \infty$, deducem că

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(k-1)}(t), ..., y_n^{(k-1)}(t)\right) dt = \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\right) dt .$$

Ţinând seama de acest fapt, când trecem la limită în relaţiile

$$y_i^{(k)}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(k-1)}(t), ..., y_n^{(k-1)}(t)\right) dt, \ (\forall)\ x \in I, \ (\forall)\ i = 1, 2, ..., n$$

rezultă că:

$$\varphi_i(x) = \lim_{k\to\infty} y_i^{(k)}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\right) dt, \ (\forall)\ x \in I, \ (\forall)\ i = 1, 2, ..., n .$$

Aşadar, funcţiile $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii integrale (4.11), deci sunt soluţii ale problemei Cauchy pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale considerat (4.7).

Pentru a demonstra unicitatea, să presupunem că ar mai exista o soluţie $\psi_1, ..., \psi_n$, cu proprietăţile

$$\psi_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \psi_1(t), ..., \psi_n(t)\right) dt, \ (\forall)\ x \in I, \ (\forall)\ i = 1, 2, ..., n .$$

Pentru orice $x \in I$, avem

$$\left|\varphi_i(x) - \psi_i(x)\right| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\right) dt - \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \psi_1(t), ..., \psi_n(t)\right) dt \right| \le$$

$$\le L\,h \sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j - \psi_j\right\|_\infty \le L\,\frac{\alpha}{nL} \sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j - \psi_j\right\|_\infty < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j - \psi_j\right\|_\infty .$$

În continuare, avem

$$\left\|\varphi_i - \psi_i\right\|_\infty = \sup\left\{\left|\varphi_i(x) - \psi_i(x)\right|;\ x \in I\right\} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j - \psi_j\right\|_\infty$$

şi mai departe

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|\varphi_i - \psi_i\right\|_\infty < n \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j - \psi_j\right\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} \left\|\varphi_i - \psi_i\right\|_\infty$$

ceea ce reprezintă o contradicţie.

Aşadar, $\varphi_i = \psi_i$, $i = 1, 2, ..., n$, şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Exemplul 4.1.2. Să se găsească o soluţie aproximativă a sistemului diferenţial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + z^2 \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y^2 \end{cases} \text{ pe } \overline{D} = [-1, 1]^3, \text{ cu condiţiile iniţiale } y(0) = 0,\ z(0) = 0.$$

Avem $f_1(x, y, z) = x^2 + z^2$ şi $f_2(x, y, z) = x + y^2$ funcţii continue pe $\overline{D} = [-1, 1]^3$ şi $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Se obţin

$\overline{D} = [-1, 1]^3 \Leftrightarrow x, y, z \in [-1, 1] \Leftrightarrow |x|, |y|, |z| \le 1$, deci $a = b_1 = b_2 = 1$.

Atunci $|f_1(x, y, z)| = |x^2 + z^2| \le 2$ şi $|f_2(x, y, z)| = |x + y^2| \le 2$, $(\forall)\ (x, y, z) \in \overline{D}$, deci funcţiile f_1 şi f_2 sunt mărginite pe $\overline{D}$. Rezultă $M = \max\{M_1, M_2\} = \max\{2, 2\} = 2$ şi

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z)\right| = 0 \qquad \left|\frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z)\right| = |2z| \le 2$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z)\right| = |2y| \le 2 \qquad \left|\frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z)\right| = 0 \qquad , (\forall)\ (x, y, z) \in \overline{D}$$

deci funcţiile f_1 şi f_2 sunt lipschitziene pe $\overline{D}$, în raport cu y şi z, iar constantele Lipschitz sunt $L_1 = L_2 = 2$. Atunci $L = \max\{L_1, L_2\} = 2$.

Luăm $h = \min\left\{a, \dfrac{b_1}{M}, \dfrac{b_2}{M}\right\} = \min\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}$, deci $I = (x_0 - h, x_0 + h) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Conform teoremei de existenţă şi unicitate pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale rezultă că există o unică soluţie $(y(x), z(x))$ a sistemului dat care verifică condiţiile iniţiale $y(0) = 0$ şi $z(0) = 0$.

Pentru orice $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ definim şirurile de aproximaţii succesive astfel:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_1, z_1)\,dt = \int_{x_0}^{x} t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f_1(t,y_1,z_1)\,dt \;=\int_{x_0}^{x}\left(t^2+\frac{t^4}{4}\right)dt \;=\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{20}$$

$$y_3(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f_1(t,y_2,z_2)\,dt \;=\int_{x_0}^{x}\left(t^2+\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^7}{63}\right)^2\right)dt \;=\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^{10}}{630}+\frac{x^{15}}{15\cdot 63^2}$$

şi

$$z_1(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} f_2(t,y_0,z_0)\,dt \;=\int_{x_0}^{x} t\,dt \;=\frac{x^2}{2}$$

$$z_2(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} f_2(t,y_1,z_1)\,dt \;=\int_{x_0}^{x}\left(t+\frac{t^6}{9}\right)dt \;=\frac{x^2}{2}+\frac{x^7}{63}$$

$$z_3(x)=z_0+\int_{x_0}^{x} f_2(t,y_2,z_2)\,dt \;=\int_{x_0}^{x}\left(t+\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{20}\right)^2\right)dt \;=\frac{x^2}{2}+\frac{x^7}{63}+\frac{x^9}{270}+\frac{x^{11}}{11\cdot 20^2}.$$

Dacă ne mulţumim cu aceste aproximări avem soluţia sistemului de forma:

$$y(x)\simeq y_3(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^{10}}{630}+\frac{x^{15}}{15\cdot 63^2}$$

$$z(x)\simeq z_3(x)\;=\frac{x^2}{2}+\frac{x^7}{63}+\frac{x^9}{270}+\frac{x^{11}}{11\cdot 20^2}\;,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Definiţia 4.1.9. Prin *ecuaţie diferenţială de ordinul* n *sub formă normală* (*explicită*) înţelegem o ecuaţie diferenţială de forma:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right) \qquad \textbf{(4.17)}$$

unde f este o funcţie reală continuă definită pe o mulţime deschisă $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $y=y(x)$ este funcţia necunoscută, iar $y^{(k)}$ este derivata de ordinul k a lui y, $k=1,2,\ldots,n-1$.

Prin *soluţie* a ecuaţiei (4.17) se înţelege orice funcţie $y=\varphi(x),\, x\in I,\, \varphi\in C^{n-1}(I)$, cu proprietăţile:

$$\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n-1)}(x)\right)\in D,\ (\forall)\ x\in I$$

şi

$$y^{(n)}(x)=f\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n-1)}(x)\right),\ (\forall)\ x\in I\ .$$

Fie $M_0\left(x_0,y_0,y_{10},...,y_{n-1,0}\right)\in D$ un punct oarecare fixat. *Problema Cauchy* pentru ecuaţia diferenţială (4.17) şi punctul M_0 constă în determinarea unei soluţii $y=\varphi(x),\ x\in I$, a ecuaţiei (4.17) care îndeplineşte condiţiile iniţiale (*condiţiile Cauchy*):

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x_0)=y_{10},\ ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1,0}\,. \qquad \textbf{(4.18)}$$

Teorema 4.1.3. Soluţia unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi de forma (4.7), cu $f_1,...,f_n$ funcţii de clasă C^1 pe un domeniu $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$, depinde de n constante reale arbitrare.

Demonstraţie. Deoarece $f_1,...,f_n$ sunt funcţii continue cu derivatele parţiale de ordinul întâi continue, atunci, conform Observaţiei 4.1.4, funcţiile $f_1,...,f_n$ sunt lipschitziene pe D, deci sunt îndeplinite condiţiile Teoremei 4.1.2 în D. În enunţul Teoremei de existenţă 4.1.2, $y_{10},\ y_{20},\ ...,\ y_{n0}$ sunt fixe, dar arbitrare, deci soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale (4.7), construită în demonstraţia Teoremei 4.1.2, depinde de n constante arbitrare.

Teorema 4.1.4. Rezolvarea unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi scris sub forma normală (4.7) se poate reduce la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n şi reciproc.

Demonstraţie. "$\Leftarrow$". Fie dată o ecuaţie diferenţială de ordinul n sub forma normală:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right). \qquad \textbf{(4.17)}$$

Prin introducerea de noi funcţii necunoscute $y_1(x),\ ...,y_n(x)$ prin relaţiile:

$$y_1=y,\ y_2=y',\ ...,\ y_n=y^{(n-1)}$$

ecuaţia diferenţială (4.17) se reduce la un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, cu n funcţii necunoscute:

$$\begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ ... & ... & ... \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & f\left(x,y_1,...,y_n\right) \end{cases}. \qquad \textbf{(4.19)}$$

Din modul cum s-a obţinut sistemul (4.19) se observă imediat că dacă y este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (4.17), atunci $y_1, ..., y_n$ este o soluţie a sistemului (4.19) şi reciproc, dacă $y_1, ..., y_n$ este o soluţie a sistemului (4.19), atunci y_1 este o soluţiei a ecuaţiei (4.17).

"$\Rightarrow$". Considerăm sistemul diferenţial (4.7) şi arătăm că este echivalent cu o ecuaţie diferenţială de ordinul n.

Alegem una din ecuaţiile sistemului (4.7), de exemplu $y'_1 = f_1(x, y_1, ..., y_n)$ şi o derivăm de $n-1$ ori în raport cu x. După fiecare derivare, înlocuim y'_i, $i = 1, 2, ..., n$, cu expresia corespunzătoare din sistemul (4.7):

$$y''_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y'_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y'_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot y'_n = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

sau

$$y''_1 = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$y'''_1 = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot y'_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot y'_n = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot f_n$$

sau

$$y'''_1 = F_3(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Continuând, se găseşte

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \qquad \textbf{(4.20)}$$

Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} y'_1 & = & f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y''_1 & = & F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & = & F_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad \textbf{(4.21)}$$

şi în ipoteza că Jacobianul $\frac{\partial(f_1, F_2, ..., F_{n-1})}{\partial(y_2, y_3, ..., y_n)} \neq 0$ se pot afla funcţiile $y_2, y_3, ..., y_n$. Aceste funcţii depind de $x, y_1, y'_1, ..., y_1^{(n-1)}$ şi înlocuind expresiile lor în ecuaţia (4.20) se obţine o ecuaţie diferenţială de ordinul n cu funcţia necunoscută $y_1(x)$ de forma:

$$y_1^{(n)} = F\left(x, y_1, y'_1, ..., y_1^{(n-1)}\right). \qquad \textbf{(4.22)}$$

Fie $y_1(x)$ o soluţie a ecuaţiei (4.22). Înlocuind funcţia y_1 şi derivatele sale până la ordinul $n-1$ în sistemul (4.21) şi rezolvând acest sistem obţinem soluţiile $y_2(x),..., y_n(x)$. Se poate arăta că funcţia y_1, soluţie a ecuaţiei (4.22), şi funcţiile $y_2, ..., y_n$, soluţiile sistemului (4.21), reprezintă o soluţie a sistemului diferenţial (4.7).

Observaţia 4.1.5.

1) Teorema 4.1.1 arată că studiul sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordin superior se reduce la studiul sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

2) Teorema 4.1.4 arată că studiul sistemelor de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi se reduce la studiul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n.

3) Din demonstraţia Teoremei 4.1.4 se deduce că dacă reuşim să găsim soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (4.22), atunci putem obţine soluţia generală a sistemului diferenţial (4.7) numai prin derivări şi operaţii algebrice.

Exemplul 4.1.3. Să se determine soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} y' + 3y + z = 0 \\ z' - y + z = 0 \end{cases}.$$

Derivăm (în raport cu x) a doua ecuaţiei şi obţinem $y' = z'' + z'$. Din a doua ecuaţie rezultă $y = z + z'$. Înlocuind aceste expresii în prima ecuaţie a sistemului se găseşte ecuaţia liniară omogenă cu coeficienţi constanţi de ordinul 2:

$z'' + 4z' + 4z = 0$.

Ecuaţia caracteristică este

$K_2(r) = r^2 + 4r + 4 = 0$, cu soluţiile $r_1 = r_2 = -2$.

Soluţia generală a ecuaţiei liniare de ordinul 2 este de forma:

$z = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Înlocuind soluţia z obţinută în relaţia $y = z' + z$ se determină soluţia sistemului:

$y = (C_2 - C_1)e^{-2x} - C_2 x e^{-2x}$

$z = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1.5. (Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordin superior)

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n dată sub forma normală

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{4.17}$$

care îndeplineşte condiţiile:

i) $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă pe $\overline{D}$, unde

$$D = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b_0, y_0 + b_0) \times \prod_{j=1}^{n-1} \left(y_{j0} - b_j, y_{j0} + b_j\right)$$

este un paralelipiped cu centrul în $M_0\left(x_0, y_0, y_{10}, ..., y_{n-1,0}\right) \in D$, $a,\ b_0, ..., b_{n-1} > 0$

ii) $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ este lipschitziană pe $\overline{D}$, în raport cu $y, y', ..., y^{(n-1)}$.

Atunci există o unică soluţie a ecuaţiei diferenţiale (4.17), şi anume $y = \varphi(x)$, $x \in I \subset (x_0 - a,\ x_0 + a)$, care verifică condiţiile iniţiale (condiţiile Cauchy):

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_{10},\ ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0}.$$

Demonstraţie. Dacă introducem notaţiile:

$$y_1 = y',\ y_2 = y'',\ ...,\ y_{n-1} = y^{(n-1)} \tag{4.23}$$

atunci ecuaţia (4.17) se înlocuieşte cu următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, ..., y_{n-1}) \end{cases}. \tag{4.24}$$

Cum sistemul (4.24) verifică condiţiile din Teorema 4.1.2, rezultă că există o soluţie unică a sistemului (4.24)

$$y = \varphi(x),\ y_1 = \varphi_1(x),\ ...,\ y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x),\ x \in I \tag{4.25}$$

care verifică condiţiile iniţiale

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi_1(x_0)=y_{10},\ ...,\ \varphi_{n-1}(x_0)=y_{n-1,0}\,. \qquad \textbf{(4.26)}$$

Dacă ţinem seama de notaţiile (4.23) şi de faptul că (4.25) este soluţie pentru sistemul (4.24) obţinem:

$$\varphi^{(n)}(x)=f\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),...,\varphi^{(n-1)}(x)\right),\ (\forall)\ x\in I$$

deci $y=\varphi(x),\ x\in I$ este soluţie pentru ecuaţia (4.17). Pe de altă parte din (4.23) şi (4.26) rezultă că $\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x_0)=y_{10},\ ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1,0}$. Aşadar, $y=\varphi(x),\ x\in I$, este soluţie unică pentru problema Cauchy (4.17) + (4.18).

Exemplul 4.1.4. Să se rezolve următoarea problemă Cauchy

$$y''+y=x,\ y(0)=1,\ y'(0)=3\,.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale $y''+y=x$ este $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$. Din condiţiile iniţiale $y(0)=1,\ y'(0)=3$, rezultă $C_1=1$ şi $C_2=2$. Soluţia problemei Cauchy este

$$y=\cos x+2\sin x+x\,.$$

4.2. Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare

Definiţia 4.2.1. Un *sistem de n ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi neomogen* este de forma următoare:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1+...+a_{1n}(x)y_n+f_1(x) \\ \quad ... \quad ... \qquad\qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1+...+a_{nn}(x)y_n+f_n(x) \end{cases} \qquad \textbf{(4.27)}$$

unde $a_{ij},\ i,\ j=1,2,...,n$ (coeficienţii sistemului) şi $f_i,\ i=1,2,...,n$ (termenii liberi) sunt funcţii reale continue definite pe un interval $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$, iar $y_1,...,y_n$ sunt funcţiile necunoscute.

Sistemul liniar omogen asociat sistemului (4.27) este de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1+...+a_{1n}(x)y_n \\ \quad ... \quad ... \qquad\qquad ... \qquad . \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1+...+a_{nn}(x)y_n \end{cases} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Observaţia 4.2.1. Pentru simplificarea scrierii, dacă introducem notaţiile vectoriale

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\ F(x)=\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix}$$

sistemul (4.27) se transcrie matriceal:

$$\frac{dY}{dx}=A(x)\,Y+F(x) \tag{4.29}$$

iar sistemul omogen asociat (4.28) se poate pune sub forma:

$$\frac{dY}{dx}=A(x)\,Y\,. \tag{4.30}$$

Observaţia 4.2.2. Dacă notăm cu $g_i(x)=a_{i1}(x)y_1+\dots+a_{in}(x)y_n+f_i(x),\ (\forall)\ x\in I$, $(\forall)\ i=1,2,\dots,n$, atunci $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}=a_{ij}(x)$. Fie $x_0\in(a,b)=I$ şi fie $J\subset I$ un interval închis care conţine punctul x_0. Deoarece funcţiile a_{ij} şi f_i sunt continue pe I, rezultă că aceste funcţii sunt mărginite pe J.

Din Observaţia 4.1.4, rezultă că funcţiile g_i sunt lipschitziene în raport cu $y_1,\dots,y_n$ pe domeniul $J\times\mathbb{R}^n$. Rezultă că pe o vecinătate suficient de mică a punctului $(x_0,y_{10},\dots,y_{n0})\in J\times\mathbb{R}^n$, Teorema 4.1.2 de existenţă şi unicitate este valabilă. De fapt, se poate demonstra mai mult, că oricare ar fi $a<x_0<b$ şi oricare ar fi $y_0=(y_{10},\dots,y_{n0})\in\mathbb{R}^n$, există o soluţie unică a sistemului liniar (4.27), $y_1=\varphi_1(x),\dots,y_n=\varphi_n(x),\ x\in I$, care verifică condiţia iniţială $\varphi_1(x_0)=y_{10},\dots,\varphi_n(x_0)=y_{n0}$.

Definiţia 4.2.2. Un set de n funcţii reale $y_{11}(x),y_{21}(x),\dots,y_{n1}(x),\ x\in I=(a,b)$, continue şi derivabile pe intervalul I care transformă sistemul (4.27) în identitate pe I formează o *soluţie* a sistemului (4.27).

Această soluţie a sistemului o vom nota matriceal $Y_1=\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}$, iar $y_{11},y_{21},\dots,y_{n1}$ le vom numi *componentele soluţiei* Y_1.

În continuare vom studia sistemul liniar omogen (4.28) (sau (4.30)).

Propoziţia 4.2.1. Mulţimea soluţiilor sistemului omogen (4.28) este un subspaţiu vectorial al spaţiului funcţiilor vectoriale $C^1\left(I,\mathbb{R}^n\right)=\left\{f:I\to\mathbb{R}^n\ ;\ f \text{ funcţie de clasă } C^1\right\}$, adică dacă Y_1 şi Y_2 sunt două soluţii ale sistemului omogen (4.30), atunci funcţia vectorială $Y=C_1Y_1+C_2Y_2$ este o soluţie a sistemului omogen (4.30), unde C_1, C_2 sunt constante reale arbitrare.

Demonstraţie. Deoarece operaţia de derivare este liniară rezultă:

$$\frac{dY}{dx}=\frac{d}{dx}\left(C_1Y_1+C_2Y_2\right)=C_1\frac{dY_1}{dx}+C_2\frac{dY_2}{dx}=C_1A(x)\,Y_1+C_2A(x)\,Y_2=$$

$$=A(x)\left(C_1Y_1+C_2Y_2\right)=A(x)\,Y$$

deci Y este o soluţie a sistemului omogen (4.30).

Remarcă 4.2.1. Dacă notăm cu $\mathcal{S}$ mulţimea soluţiilor sistemului omogen (4.30), din Propoziţia 4.2.1 rezultă că $\mathcal{S}$ este un spaţiu vectorial real.

Definiţia 4.2.3. Fie $Y_1=\begin{pmatrix} y_{11}\\ y_{21}\\ \vdots\\ y_{n1}\end{pmatrix}, Y_2=\begin{pmatrix} y_{12}\\ y_{22}\\ \vdots\\ y_{n2}\end{pmatrix},\ldots,Y_n=\begin{pmatrix} y_{1n}\\ y_{2n}\\ \vdots\\ y_{nn}\end{pmatrix}$ n funcţii vectoriale continue definite pe intervalul I. Spunem că $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sunt *liniar independente* pe I dacă o relaţie liniară între ele de forma

$$\lambda_1Y_1(x)+\lambda_2Y_2(x)+\ldots+\lambda_nY_n(x)=0_{\mathbb{R}^n},\ x\in I$$

are loc doar dacă $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ sunt toate nule.

În caz contrar, dacă există n numere $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ nu toate nule astfel încât să avem

$$\lambda_1Y_1(x)+\lambda_2Y_2(x)+\ldots+\lambda_nY_n(x)=0_{\mathbb{R}^n},\ (\forall)\ x\in I,$$

atunci spunem că funcţiile $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sunt *liniar dependente* pe I.

Definiţia 4.2.4. Fie $Y_1=\begin{pmatrix} y_{11}\\ y_{21}\\ \vdots\\ y_{n1}\end{pmatrix}, Y_2=\begin{pmatrix} y_{12}\\ y_{22}\\ \vdots\\ y_{n2}\end{pmatrix},\ldots,Y_n=\begin{pmatrix} y_{1n}\\ y_{2n}\\ \vdots\\ y_{nn}\end{pmatrix}$ n soluţii particulare ale sistemului omogen (4.30). Se numeşte *Wronskianul* soluţiilor $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ determinantul

$$W(x)=W(Y_1,Y_2,...,Y_n)(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & ... & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & ... & y_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & ... & y_{nn}(x) \end{vmatrix},\ x\in I.$$

Propoziţia 4.2.2. Dacă $Y_1,..., Y_n$ sunt n soluţii particulare ale sistemului (4.30), liniar dependente pe I, atunci $W(x)=W(Y_1,...,Y_n)(x)=0,\ (\forall)\ x\in I$.

Demonstraţie. Prin ipoteză, există $\lambda_1,..., \lambda_n\in\mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

$$\lambda_1 Y_1(x)+...+\lambda_n Y_n(x)=0_{\mathbb{R}^n},\ (\forall)\ x\in I$$

relaţie echivalentă cu:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_{11}(x) + ... + \lambda_n y_{1n}(x) = 0 \\ \quad ... \quad ... ... \quad ... \quad ... ... \\ \lambda_1 y_{n1}(x) + ... + \lambda_n y_{nn}(x) = 0 \end{cases},\ (\forall)\ x\in I. \qquad \textbf{(4.31)}$$

Deoarece (4.31) este un sistem algebric liniar omogen de n ecuaţii cu n necunoscute $\lambda_1,..., \lambda_n$, care nu sunt toate nule, atunci (4.31) admite şi soluţie nebanală, deci rezultă că determinantul coeficienţilor este zero. Dar, determinantul coeficienţilor este chiar Wronskianul soluţiilor $Y_1, ..., Y_n$. Aşadar, $W(Y_1,...,Y_n)(x)=0,\ (\forall)\ x\in I$.

Propoziţia 4.2.3. Dacă funcţiile vectoriale $Y_1,Y_2,...,Y_n$ sunt n soluţii particulare ale sistemului omogen (4.30), atunci ele sunt liniar independente pe I dacă şi numai dacă Wronskianul $W(Y_1,Y_2,...,Y_n)$ este diferit de zero pe I.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Presupunem că soluţiile $Y_1,Y_2,...,Y_n$ sunt liniar independente pe I. Mai mult, să presupunem prin absurd că există $x_0\in I$ astfel încât $W(Y_1,Y_2,...,Y_n)$ să se anuleze în x_0. Considerăm sistemul de ecuaţii liniar şi omogen:

$$\begin{cases} C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + ... + C_n y_{1n}(x_0) = 0 \\ C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + ... + C_n y_{2n}(x_0) = 0 \\ ... \quad ... ... \quad ... ... \quad ... ... \\ C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + ... + C_n y_{nn}(x_0) = 0. \end{cases}. \qquad \textbf{(4.32)}$$

Determinantul sistemului (4.32) este $W(Y_1,Y_2,...,Y_n)(x_0)=0$. Atunci sistemul admite şi soluţii diferite de soluţia banală. Fie $C_1,C_2,..., C_n$ o soluţie nebanală a sistemului (4.32),

deci numerele $C_1, C_2, ..., C_n$ nu sunt toate nule şi cu ajutorul lor se formează funcţia vectorială:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + ... + C_n Y_n$$

sau

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + ... + C_n y_{1n} \\ C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + ... + C_n y_{2n} \\ \vdots \\ C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + ... + C_n y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Din Propoziţia 4.2.1, rezultă că funcţia Y este o soluţie a sistemului omogen (4.30). Folosind ecuaţiile sistemului (4.32), deducem că funcţiile $y_1, y_2, ..., y_n$, componentele funcţiei Y, satisfac condiţiile:

$$y_1(x_0) = 0,\ y_2(x_0) = 0, ...,\ y_n(x_0) = 0. \qquad \textbf{(4.33)}$$

Este evident că funcţia $Y = 0$ este unica soluţie a sistemului (4.30) care satisface condiţiile (4.33) şi deci rezultă:

$$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + ... + C_n Y_n = 0. \qquad \textbf{(4.34)}$$

Numerele $C_1, C_2, ..., C_n$ nefiind toate nule, relaţia (4.34) arată că funcţiile $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sunt liniar dependente pe I, ceea ce contrazice ipoteza.

Atunci rezultă că $W(Y_1, Y_2, ..., Y_n)(x) \neq 0$ pe I.

"$\Leftarrow$". Presupunem că $W(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \neq 0$ pe I. Atunci soluţiile $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sunt liniar independente pe I, căci dacă ar fi liniar dependente pe I, atunci din Propoziţie 4.2.2 ar rezulta că $W(x) = W(Y_1, ..., Y_n)(x) = 0$ pe I.

Teorema 4.2.1. (Teorema Liouville)

Dacă Wronskianul a n soluţii particulare $Y_1, ..., Y_n$ ale sistemului omogen (4.30) este diferit de zero într-un punct $x_0 \in I$, atunci el este diferit de zero pe tot intervalul I.

Mai mult,

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} (a_{11}(t) + ... + a_{nn}(t))\, dt}, \ (\forall)\ x \in I. \qquad \textbf{(4.35)}$$

Demonstraţie. Pentru simplificarea scrierii, considerăm cazul particular $n=2$. Să presupunem că există $x_0 \in I$ astfel încât $W(x_0) \neq 0$. Fie $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$ şi $Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ două soluţii particulare pentru sistemul omogen (4.30), deci rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{11}}{dx} = a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} \\ \dfrac{dy_{21}}{dx} = a_{21}y_{11} + a_{22}y_{21} \end{cases} \text{şi} \begin{cases} \dfrac{dy_{12}}{dx} = a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} \\ \dfrac{dy_{22}}{dx} = a_{21}y_{12} + a_{22}y_{22} \end{cases}. \qquad \textbf{(4.36)}$$

Wronskianul acestor soluţii este:

$$W(x) = W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}, x \in I.$$

Ţinând seama de modul de derivare al unui determinant, folosind identităţile (4.36) şi proprietăţile determinanţilor, rezultă:

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} \dfrac{dy_{11}}{dx} & \dfrac{dy_{12}}{dx} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ \dfrac{dy_{21}}{dx} & \dfrac{dy_{22}}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21} & a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ a_{11}y_{11} + a_{22}y_{21} & a_{21}y_{12} + a_{22}y_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ a_{22}y_{21} & a_{22}y_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} + a_{22}) \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + a_{22}) W(x).$$

Aşadar, avem

$$\frac{dW}{dx} = \left(a_{11}(x) + a_{22}(x)\right) W(x), (\forall) x \in I. \qquad \textbf{(4.37)}$$

Observăm că (4.37) este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi omogenă.

Soluţia sa generală este de forma:

$$W(x) = C\, e^{\int_{x_0}^{x} \left(a_{11}(t) + a_{22}(t)\right) dt}, \quad x \in I$$

unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară. Deoarece $W(x_0) = C$, rezultă:

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \left(a_{11}(t) + a_{22}(t)\right) dt}, \quad (\forall)\, x \in I.$$

Definiţia 4.2.5. Se numeşte *sistem fundamental de soluţii* pe I ale sistemului omogen (4.30) orice set de n soluţii particulare ale acestui sistem, $Y_1,..., Y_n$, cu proprietatea că există $x_0 \in I$, astfel încât $W(Y_1,...,Y_n)(x_0) \neq 0$.

Teorema 4.2.2. Fie $Y_1,..., Y_n$ n soluţii particulare ale sistemului omogen (4.30). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $Y_1,..., Y_n$ este un sistem fundamental de soluţii pe I pentru sistemul (4.30)

2) $Y_1,..., Y_n$ sunt liniar independente pe I

3) $W(x) = W(Y_1,...,Y_n)(x) \neq 0, (\forall)\ x \in I$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din Propoziţia 4.2.3 şi Teorema Liouville.

Teorema 4.2.3. Dacă $Y_1,..., Y_n$ constituie un sistem fundamental de soluţii pe I pentru sistemul omogen (4.30), atunci oricare ar fi Y soluţie a acestui sistem, există $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + ... + C_n Y_n(x), (\forall)\ x \in I.$$

Demonstraţie. Fie $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, ..., Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ şi $x_0 \in I$ oarecare, fixat.

Considerăm următorul sistem:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_{11}(x_0) + ... + \lambda_n y_{1n}(x_0) = y_1(x_0) \\ \quad ... \quad ... ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \lambda_1 y_{n1}(x_0) + ... + \lambda_n y_{nn}(x_0) = y_n(x_0) \end{cases}. \tag{4.38}$$

Deoarece determinantul coeficienţilor sistemului (4.38) este chiar Wronskianul soluţiilor $Y_1,..., Y_n$ şi acesta este diferit de zero conform Teoremei 4.2.2, rezultă că sistemul (4.38) admite soluţie unică. Fie $C_1, ..., C_n$ soluţia unică a sistemului (4.38) şi fie

$$Z = C_1 Y_1 + ... + C_n Y_n.$$

Din Propoziţia 4.2.1, rezultă că Z este soluţie pentru sistemul omogen (4.30). Pe de altă parte, observăm că $Z(x_0) = Y(x_0)$. Din Teorema de existenţă 4.1.2, rezultă că $Z = Y$, deci

$$Y = C_1 Y_1 + ... + C_n Y_n.$$

Remarcă 4.2.2. Mulţimea tuturor soluţiilor sistemului omogen (4.30) (definite pe întregul interval I) este un spaţiu vectorial real izomorf cu spaţiul $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{S}$ spaţiul vectorial real al soluţiilor sistemului omogen (4.30) (Remarca 4.2.1). Fie $x_0 \in I$ un punct arbitrar fixat şi asociem fiecărei soluţii $Y \in \mathcal{S}$, vectorul $Y(x_0) \in \mathbb{R}^n$. Astfel se poate considera transformarea liniară $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$, $T(Y) = Y(x_0)$. Conform Teoremei 4.1.2, rezultă că T este bijectivă, deci T este izomorfism.

Cum $\dim \mathbb{R}^n = n$, atunci $\dim \mathcal{S} = n$, deci orice mulţime de n soluţii ale sistemului (4.30) liniar independente pe I, notate $Y_1, ..., Y_n$, formează o bază a lui $\mathcal{S}$. Atunci, orice soluţie Y a sistemului (4.30) se poate exprima unic de forma:

$Y = C_1 Y_1(x) + ... + C_n Y_n(x)$, $x \in I$, cu $C_1, ..., C_n$ constante reale.

Observaţia 4.2.4. Din Teorema 4.2.3, rezultă că dacă cunoaştem n soluţii particulare ale sistemului omogen (4.30), $Y_1, ..., Y_n$, care să formeze un sistem fundamental de soluţii pe I, atunci cunoaştem soluţia generală a sistemului omogen, şi aceasta este dată prin:

$$Y = C_1 Y_1 + ... + C_n Y_n \qquad \textbf{(4.39)}$$

unde $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$ sunt constante arbitrare.

Teorema 4.2.4. Soluţia generală a sistemului liniar neomogen (4.29) se obţine adăugând la soluţia generală a sistemului liniar omogen asociat (4.30) o soluţie particulară oarecare a sistemului neomogen (4.29), adică

$$Y_{GN} = Y_{GO} + Y_p$$

unde s-au notat cu

Y_{GN} soluţia generală a sistemului neomogen (4.29)

Y_{GO} soluţia generală a sistemului omogen (4.30)

Y_p o soluţie particulară a sistemului neomogen (4.29).

Demonstraţie. Fie Y_p o soluţie particulară a sistemului neomogen (4.29) pe I, deci verifică ecuaţia:

$$\frac{d\,Y_p}{d\,x} = A(x)\,Y_p + F(x),\ x \in I.$$

Fie Y_{GO} soluţia generală a sistemului omogen (4.30) pe I, deci rezultă:

$$\frac{d\,Y_{GO}}{d\,x} = A(x)\,Y_{GO}.$$

Soluţia generală Y_{GO} a sistemului omogen (4.30) depinde de n constante arbitrare (conform Observaţiei 4.2.4, (4.39)). Dacă notăm $Y = Y_{GO} + Y_p$, atunci şi Y va depinde de aceleaşi n constante arbitrare de care depinde Y_{GO}.

Se calculează:

$$\frac{d\,Y}{d\,x} = \frac{d\left(Y_{GO} + Y_p\right)}{d\,x} = \frac{d\,Y_{GO}}{d\,x} + \frac{d\,Y_p}{d\,x} = A(x)\,Y_{GO} + A(x)\,Y_p + F(x) =$$

$$= A(x)\left(Y_{GO} + Y_p\right) + F(x) = A(x)\,Y + F(x)$$

ceea ce arată că funcţia $Y = Y_{GO} + Y_p$ este soluţia generală a sistemului neomogen (4.29), dacă ţinem seama de definiţia soluţiei generale pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale.

Observaţia 4.2.5. Pentru a afla soluţia generală a sistemului neomogen (4.29) este suficient să se cunoască un sistem fundamental de soluţii al sistemului omogen asociat (4.30) şi o soluţie particulară a sistemului neomogen (4.29).

Aflarea unei soluţii particulare a sistemului neomogen (4.29) constituie o problemă, în general, dificilă. Dacă nu se cunoaşte o soluţie particulară a sistemului (4.29), dar se cunoaşte soluţia generală a sistemului omogen (4.30), atunci se poate afla soluţia generală a sistemului neomogen (4.29) prin *metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange*.

4.3. Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange

În continuare, prezentăm metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange pentru rezolvarea sistemelor neomogene.

Fie $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$ un sistem fundamental de soluţii al sistemului liniar omogen (4.30), deci soluţia generală a sistemului liniar omogen (4.30) este de forma:

$$Y = C_1\,Y_1(x) + C_2\,Y_2(x) + \ldots + C_n\,Y_n(x),\ x \in I = (a, b).$$

Se căută soluţia generală a sistemului neomogen (4.29) de aceeaşi formă cu soluţia generală a sistemului omogen (4.30), înlocuind constantele arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_n$ cu funcţiile reale derivabile ce depind de x, notate cu $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x),\ x \in I$.

Prin urmare, soluţia generală a sistemului neomogen (4.29) se caută de forma:

$$Y = C_1(x)\, Y_1(x) + C_2(x)\, Y_2(x) + \ldots + C_n(x) Y_n(x)$$

unde funcţiile $C_i(x),\ i = 1,2,\ldots,n$ sunt date prin:

$$C_i(x) = \int C_i'(x)\, dx + K_i,\ i = 1,\ 2,\ldots,\ n,\ K_i \in \mathbb{R}$$

iar funcţiile derivate $C_i'(x),\ i = 1,\ 2,\ldots,\ n$ reprezintă soluţia sistemului liniar neomogen:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_{11}(x) + C_2'(x) y_{12}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{1n}(x) = f_1(x) \\ C_1'(x) y_{21}(x) + C_2'(x) y_{22}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{2n}(x) = f_2(x) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x) y_{n1}(x) + C_2'(x) y_{n2}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{nn}(x) = f_n(x) \end{cases}. \qquad \textbf{(4.40)}$$

Demonstraţie. Se face demonstraţia în cazul particular $n = 2$.

Fie sistemul liniar neomogen:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + f_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + f_2 \end{cases} \qquad \textbf{(4.41)}$$

şi sistemul liniar omogen asociat

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{cases}. \qquad \textbf{(4.42)}$$

Fie $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$ şi $Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ un sistem fundamental de soluţii al sistemului omogen (4.42). Atunci rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{11}}{dx} = a_{11} y_{11} + a_{12} y_{21} \\ \dfrac{dy_{21}}{dx} = a_{21} y_{11} + a_{22} y_{21} \end{cases} \text{şi} \begin{cases} \dfrac{dy_{12}}{dx} = a_{11} y_{12} + a_{12} y_{22} \\ \dfrac{dy_{22}}{dx} = a_{21} y_{12} + a_{22} y_{22} \end{cases}. \qquad \textbf{(4.43)}$$

Soluţia generală a sistemului omogen (4.42) este de forma:

$$Y_{GO}=\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}=C_1 Y_1+C_2 Y_2=\begin{pmatrix} C_1 y_{11}+C_2 y_{12} \\ C_1 y_{21}+C_2 y_{22} \end{pmatrix},\ C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Construim funcţia vectorială

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=C_1(x)\,Y_1(x)+C_2(x)\,Y_2(x)=\begin{pmatrix} C_1(x)\,y_{11}+C_2(x)\,y_{12} \\ C_1(x)\,y_{21}+C_2(x)\,y_{22} \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

şi arătăm că este soluţia sistemului neomogene (4.41).

Din condiţia ca funcţia (4.44) să verifice sistemul (4.41) rezultă:

$$C_1'(x)\,y_{11}+C_1(x)\,y_{11}'+C_2'(x)\,y_{12}+C_2(x)\,y_{12}'=$$

$$=a_{11}\left(C_1(x)\,y_{11}+C_2(x)\,y_{12}\right)+a_{12}\left(C_1(x)\,y_{21}+C_2(x)\,y_{22}\right)+f_1$$

$$C_1'(x)\,y_{21}+C_1(x)\,y_{21}'+C_2'(x)\,y_{22}+C_2(x)\,y_{22}'=$$

$$=a_{21}\left(C_1(x)\,y_{11}+C_2(x)\,y_{12}\right)+a_{22}\left(C_1(x)\,y_{21}+C_2(x)\,y_{22}\right)+f_2\ .$$

Ţinem seama de relaţiile (4.43) şi rezultă:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_{11}+C_2'(x)\,y_{12}=f_1(x) \\ C_1'(x)\,y_{21}+C_2'(x)\,y_{22}=f_2(x) \end{cases},\ x\in I. \tag{4.45}$$

Sistemul liniar omogen (4.45) are 2 ecuaţii cu 2 necunoscute $C_1'(x)$ şi $C_2'(x)$. Determinatul acestui sistem este chiar $W(Y_1,Y_2)$ şi $W(Y_1,Y_2)\neq 0$ pe I (deoarece Y_1,Y_2 este un sistem fundamental de soluţii), deci sistemul (4.45) are soluţie unică $C_1'(x)$ şi $C_2'(x)$.

Rezultă

$$C_1(x)=\int C_1'(x)\,dx+K_1 \text{ şi } C_2(x)=\int C_2'(x)\,dx+K_2,\quad K_1,\,K_2\in\mathbb{R}.$$

Înlocuind $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ în soluţia (4.44) se obţine soluţia generală a sistemului neomogen (4.41), şi anume:

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K_1\,y_{11}+K_2\,y_{12}+y_{11}\int C_1'(x)\,dx+y_{12}\int C_2'(x)\,dx \\ K_1\,y_{21}+K_2\,y_{22}+y_{21}\int C_1'(x)\,dx+y_{22}\int C_2'(x)\,dx \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Observaţia 4.3.1. Funcţia (4.46) este soluţia generală a sistemului neomogen (4.41). Dacă notăm cu

$$Y_p = \begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}\int C_1'(x)\,dx + y_{12}\int C_2'(x)\,dx \\ y_{21}\int C_1'(x)\,dx + y_{22}\int C_2'(x)\,dx \end{pmatrix}$$

şi cu

$$Y_{GO} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1\,y_{11} + K_2\,y_{12} \\ K_1\,y_{21} + K_2\,y_{22} \end{pmatrix}$$

atunci se observă că Y_{GO} este soluţia generală a sistemului omogen (4.42), Y_p este o soluţie particulară a sistemului neomogen (4.41) şi soluţia generală a sistemului neomogen (4.41) este de forma

$$Y = Y_{GO} + Y_p.$$

Exemplul 4.3.1. Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale liniar neomogen

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}y - \dfrac{4}{x^2}z + \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - \dfrac{1}{x}z + x \end{cases}$$

ştiind că $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ şi $Y_2 = \begin{pmatrix} 2x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ sunt două soluţii particulare ale sistemului liniar omogen asociat.

Calculăm $W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2x^2 \\ x & x^3 \end{vmatrix} = -x^3 \neq 0, (\forall)\ x > 0$, deci Y_1, Y_2 formează un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul liniar omogen asociat, pe intervalul $(0, \infty)$.

Soluţia generală a sistemului liniar omogen asociat este:

$$Y_{GO} = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2 x^2 \\ C_1 x + C_2 x^3 \end{pmatrix},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Folosind metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange, se variază constantele $C_1 \to C_1(x)$ şi $C_2 \to C_2(x)$ iar soluţia generală a sistemului neomogen este de forma:

$$Y = C_1(x)Y_1 + C_2(x)Y_2 \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} C_1(x) + 2C_2(x)x^2 \\ C_1(x)x + C_2(x)x^3 \end{pmatrix}.$$

Se obţine sistemul:

$$\begin{cases} C_1'(x) + 2C_2'(x)x^2 = \dfrac{1}{x} \\ C_1'(x)x + C_2'(x)x^3 = x \end{cases}$$

cu soluţiile $C_1'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ şi $C_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$.

Atunci

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = \int \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx = 2x - \ln x + K_1$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = \int \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + K_2 .$$

Înlocuind $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ se va obţine soluţia generală a sistemului neomogen:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - \ln x + K_1 + 2x - 1 + 2K_2 x^2 \\ 2x^2 - x\ln x + K_1 x + x^2 - \dfrac{x}{2} + K_2 x^3 \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

$$y(x) = 2K_2 x^2 + 4x - \ln x + K_1 - 1$$

$$z(x) = K_2 x^3 + 3x^2 + \left(K_1 - \frac{1}{2}\right)x - x\ln x .$$

Observaţia 4.3.2. În principiu, rezolvarea sistemului neomogen (4.29) este întotdeauna posibilă dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen (4.30). În general, pentru sisteme liniare omogene cu coeficienţi variabili este dificil de aflat un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul omogen. Acest lucru este posibil în cazul sistemelor cu coeficienţi constanţi. În continuare, vom studia astfel de sisteme.

4.4. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Definiţia 4.4.1. Un *sistem de n ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi neomogen cu coeficienţi constanţi* este un sistem de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ \ldots \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + f_2(x) \end{cases} \tag{4.47}$$

unde $a_{ij}, i, j = 1,2,...,n$ sunt constante reale, $f_i, i = 1,2,...,n$ sunt funcţii continue definite pe un interval $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, iar $y_1, ..., y_n$ sunt funcţiile necunoscute.

Sistemul (4.47) admite următoarea reprezentare matriceală:

$$\frac{dY}{dx} = AY + F(x) \tag{4.48}$$

unde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ este vectorul funcţiilor necunoscute, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ este matricea coeficienţilor sistemului şi $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ este vectorul termenilor liberi.

Sistemul liniar omogen cu coeficienţi constanţi asociat sistemului (4.47) este de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n \\ ... \quad ... \qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{4.49}$$

sau

$$\frac{dY}{dx} = AY. \tag{4.50}$$

Toate rezultatele stabilite anterior pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili, omogene sau neomogene, rămân adevărate şi pentru sistemele liniare cu coeficienţi constanţi (4.47) şi (4.49).

Conform Teoremei 4.1.4, rezolvarea sistemului omogen (4.49) este echivalentă cu rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniară omogenă cu coeficienţi constanţi, care admite soluţii de forma e^{rx}. Este deci firesc să căutăm soluţiile sistemului (4.49) de forma:

$$y_1 = C_1 e^{rx},\ y_2 = C_2 e^{rx}, ..., y_n = C_n e^{rx} \tag{4.51}$$

sau echivalent

$$Y = e^{rx} C, \text{ unde } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

cu $C_1, C_2, ..., C_n$ şi r constante reale.

Dacă derivăm în raport cu x şi introducem aceste funcţii în sistemul (4.49) obţinem, în urma simplificării cu e^{rx} $\left(e^{rx} \neq 0\right)$, un sistem algebric omogen cu n ecuaţii şi n necunoscute $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-r)C_1 + a_{12}C_2 + ... + a_{1n}C_n = 0 \\ a_{21}C_1 + (a_{22}-r)C_2 + ... + a_{2n}C_n = 0 \\ ... ... \quad ... ... \quad ... ... \\ a_{n1}C_1 + a_{n2}C_2 + ... + (a_{nn}-r)C_n = 0 \end{cases}. \tag{4.52}$$

Dacă sistemul (4.49) admite soluţii de forma (4.51), atunci:

- r este valoare proprie a matricei A a sistemului;
- C este vectorul propriu corespunzător.

Problema rezolvării sistemului diferenţial omogen (4.49) se reduce astfel la determinarea valorilor şi vectorilor proprii pentru matricea asociată A.

Ne interesează soluţiile sistemului (4.52) care să nu fie identic nule, iar sistemul (4.52) admite o soluţie nebanală $C_1, C_2, ..., C_n$ dacă şi numai dacă determinantul său este nul, adică dacă r verifică ecuaţia:

$$\det\left(A - rI_n\right) = 0$$

unde I_n este matricea unitate de ordinul n, sau ecuaţia echivalentă:

$$K_n(r) = \begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0 \tag{4.53}$$

Ecuaţia (4.53) este o ecuaţie algebrică de gradul n şi se numeşte *ecuaţia caracteristică* asociată sistemului liniar omogen cu coeficienţi constanţi (4.49).

Ca şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n liniare omogene cu coeficienţi constanţi, determinarea soluţiei sistemului omogen (4.49) s-a redus la rezolvarea ecuaţiei algebrice (4.53).

În legătură cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice (4.53) considerăm cazurile:

Cazul I: $r = r_0$ este o rădăcină reală simplă a ecuaţiei caracteristice (4.53)

Sistemul (4.49) admite o soluţie de forma:

$y_1 = C_1 e^{r_0 x}$, $y_2 = C_2 e^{r_0 x}$, ..., $y_n = C_n e^{r_0 x}$.

Prin înlocuirea lui r cu r_0 în sistemul algebric (4.52) se determină C_2, C_3, ..., C_n în funcţie de C_1.

Cazul II: $r = \alpha + i\beta$ şi $\bar{r} = \alpha - i\beta$ sunt două rădăcini complexe conjugate simple ale ecuaţiei caracteristice (4.53)

Soluţia sistemului (4.49) relativă la aceste rădăcini este de forma:

$$y_1 = \left(A_1 \cos(\beta x) + B_1 \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x}$$

$$y_2 = \left(A_2 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x}$$

.....

$$y_n = \left(A_n \cos(\beta x) + B_n \sin(\beta x)\right) e^{\alpha x}$$

pe care dacă o înlocuim în (4.49) se obţine, prin identificare, un sistem algebric din care se determină $A_2, ..., A_n, B_2, ..., B_n$ în funcţie de A_1, B_1.

Cazul III: $r = r_0$ este rădăcină reală multiplă de ordinul $p \le n$ a ecuaţiei caracteristice (4.53)

Soluţia sistemului (4.49) relativă la această rădăcină este de forma:

$$y_1 = \left(A_{11} + A_{12}x + ... + A_{1p} x^{p-1}\right) e^{r_0 x}$$

$$y_2 = \left(A_{21} + A_{22}x + ... + A_{2p} x^{p-1}\right) e^{r_0 x}$$

.....

$$y_n = \left(A_{n1} + A_{n2}x + ... + A_{np} x^{p-1}\right) e^{r_0 x}$$

şi toate constantele A_{ij} se determină în funcţie de A_{11}, A_{12}, ..., A_{1p} prin înlocuire în sistemul (4.49) şi identificare.

Cazul IV: $r = \alpha + i\beta$ şi $\bar{r} = \alpha - i\beta$ sunt două rădăcini complexe conjugate ambele multiple de ordinul $p \le n$ ale ecuaţiei caracteristice (4.53)

Soluţia sistemului (4.49) relativă la aceste rădăcini este de forma

$$y_1=\left(A_{11}+A_{12}x+...+A_{1p}x^{p-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x+\left(B_{11}+B_{12}x+...+B_{1p}x^{p-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2=\left(A_{21}+A_{22}x+...+A_{2p}x^{p-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x+\left(B_{21}+B_{22}x+...+B_{2p}x^{p-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

.....

$$y_n=\left(A_{n1}+A_{n2}x+...+A_{np}x^{p-1}\right)e^{\alpha x}\cos\beta x+\left(B_{n1}+B_{n2}x+...+B_{np}x^{p-1}\right)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

şi toate constantele A_{ij}, B_{ij} se determină în funcţie de A_{11}, A_{12}, ..., A_{1p}, B_{11}, B_{12}, ..., B_{1p} prin înlocuire în sistemul (4.49) şi identificare.

Exemplul 4.4.1. Să se găsească soluţia generală a sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_2 + 4y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 - 4y_3 \end{cases}.$$

Căutăm soluţia sistemului sub forma:

$y_1=C_1e^{rx}$, $y_2=C_2e^{rx}$, $y_3=C_3e^{rx}$, $C_1, C_2, C_3\in\mathbb{R}$.

Ecuaţia caracteristică asociată sistemului este:

$$K_3(r)=\begin{vmatrix} -1-r & 1 & 0 \\ 0 & -1-r & 4 \\ 1 & 0 & -4-r \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow K_3(r)=-r^3-6r^2-9r=0$$

şi admite rădăcinile reale $r_1=0$, $r_2=r_3=-3$.

Soluţia generală a sistemului este de forma:

$y_1=A_1+A_2e^{-3x}+A_3xe^{-3x}$, $A_1, A_2, A_3\in\mathbb{R}$

$y_2=B_1+B_2e^{-3x}+B_3xe^{-3x}$, $B_1, B_2, B_3\in\mathbb{R}$

$y_3=C_1+C_2e^{-3x}+C_3xe^{-3x}$, $C_1, C_2, C_3\in\mathbb{R}$.

Se vor determina constantele $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ în funcţie de A_1, A_2, A_3. Prin derivarea ultimelor relaţii şi înlocuirea lor în sistemul omogen dat se găsesc egalităţile:

$$(A_3-3A_2)e^{-3x}-3A_3xe^{-3x}=B_1-A_1+(B_2-A_2)e^{-3x}+(B_3-A_3)xe^{-3x}$$

$$(B_3-3B_2)e^{-3x}-3B_3xe^{-3x}=4C_1-B_1+(4C_2-B_2)e^{-3x}+(4C_3-B_3)xe^{-3x}$$

$$(C_3-3C_2)e^{-3x}-3C_3xe^{-3x}=A_1-4C_1+(A_2-4C_2)e^{-3x}+(A_3-4C_3)xe^{-3x}.$$

Identificând coeficienţii ecuaţiilor unu şi trei se obţin:

$$\begin{cases} B_1 - A_1 = 0 \\ A_3 - 2A_2 - B_2 = 0 \\ 2A_3 + B_3 = 0 \\ A_1 - 4C_1 = 0 \\ A_2 - C_2 - C_3 = 0 \\ A_3 - C_3 = 0 \end{cases}, \text{ deci } \begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_3 - 2A_2 \\ B_3 = -2A_3 \\ C_1 = \frac{1}{4}A_1 \\ C_2 = A_2 - A_3 \\ C_3 = A_3 \end{cases}.$$

Observaţie: Era suficient să derivăm doar două dintre soluţiile y_1, y_2, y_3 şi să le înlocuim în ecuaţiile corespunzătoare ale sistemului dat.

Soluţia generală a sistemului este de forma:

$$y_1 = A_1 + A_2 e^{-3x} + A_3 x e^{-3x}$$

$$y_2 = A_1 + \left(A_3 - 2A_2\right)e^{-3x} - 2A_3 x e^{-3x}$$

$$y_3 = \frac{1}{4}A_1 + \left(A_2 - A_3\right)e^{-3x} + A_3 x e^{-3x},\ A_1,\ A_2,\ A_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 4.4.2. Să se găsească soluţia generală a sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_1 + 4y_3 \end{cases}.$$

Ecuaţia caracteristică asociată sistemului este:

$$K_3(r) = \begin{vmatrix} -r & -1 & 1 \\ 0 & -r & 1 \\ -1 & 0 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow K_3(r) = -r^3 + r^2 - r + 1 = 0$$

şi admite o rădăcină reală $r_1 = 1$ şi două rădăcini complexe conjugate $r_{2,3} = \pm i\ \left(\alpha = 0,\ \beta = 1\right)$.

Soluţia generală a sistemului este de forma:

$$y_1 = A_1 e^{x} + A_2 \cos x + A_3 \sin x,\ A_1,\ A_2,\ A_3 \in \mathbb{R}$$

$$y_2 = B_1 e^{x} + B_2 \cos x + B_3 \sin x,\ B_1,\ B_2,\ B_3 \in \mathbb{R}$$

$$y_3 = C_1 e^{x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x,\ C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Derivăm primele două soluţii, le înlocuim în sistemul omogen şi găsim egalităţile:

$$A_1 e^x - A_2 \sin x + A_3 \cos x = (C_1 - B_1) e^x + (C_2 - B_2) \cos x + (C_3 - B_3) \sin x$$

$$B_1 e^x - B_2 \sin x + B_3 \cos x = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Rezultă:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 - C_1 = 0 \\ A_2 - B_3 + C_3 = 0 \\ A_3 + B_2 - C_2 = 0 \\ B_1 - C_1 = 0 \\ B_2 + C_3 = 0 \\ B_3 - C_2 = 0 \end{cases}, \text{ deci } \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = C_2 - C_3 \\ A_3 = C_2 + C_3 \\ B_1 = C_1 \\ B_2 = -C_3 \\ B_3 = C_2 \end{cases}.$$

Soluţia generală a sistemului este de forma:

$$y_1 = (C_2 - C_3) \cos x + (C_2 + C_3) \sin x$$

$$y_2 = C_1 e^x - C_3 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_3 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x,\ C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 4.4.1. În Teorema 4.2.4, s-a arătat că soluţia generală a unui sistem liniar neomogen este egală cu suma dintre soluţia generală a sistemului omogen asociat şi o soluţie particulară a sa, adică $Y_{GN} = Y_{GO} + Y_p$, unde notăm cu

Y_{GN} soluţia generală a sistemului liniar neomogen (4.47)

Y_{GO} soluţia generală a sistemului liniar omogen (4.49)

Y_p o soluţie particulară a sistemului liniar neomogen (4.47).

O soluţie particulară Y_p a sistemului liniar neomogen cu coeficienţi constanţi (4.47) se poate determina întotdeauna prin metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange sau se caută ca şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior liniare cu coeficienţi constanţi cu termenul liber de formă specială.

În continuare vom exprima soluţia generală a sistemului liniar omogen cu coeficienţi constanţi (4.50) folosind exponenţiala de matrice.

Remarca 4.4.2. Reamintim că, prin definiţie, *derivata unei matrice* ale cărei elemente sunt funcţii derivabile, este matricea formată cu derivatele acestor elemente. Aşadar avem că

$$\begin{pmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}' \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f'_{11}(x) & \dots & f'_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{n1}(x) & \dots & f'_{nn}(x) \end{pmatrix},\ x \in I$$

dacă $f_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile, oricare $i, j = 1, 2, \dots, n$.

În particular, $(A\,x)' = A$.

Prin inducţie matematică se demonstrează imediat că

$$\left((A\,x)^k\right)' = k\,A\,(A\,x)^{k-1},\ k \geq 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Cum $e^{A\,x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\,x)^k}{k\,!}$, $x \in \mathbb{R}$ şi convergenţa este uniformă (Vezi [14], 3.6.1), rezultă că

$$\left(e^{A\,x}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,A\,(A\,x)^{k-1}}{k\,!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A\,x)^{k-1}}{(k-1)!} = A\,e^{A\,x}.$$

Aşadar, avem

$$\left(e^{A\,x}\right)' = A\,e^{A\,x},\ x \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(4.54)}$$

Teorema 4.4.1. Soluţia generală a sistemului liniar omogen (4.50) este de forma

$$Y = e^{A\,x}\,C \qquad \textbf{(4.55)}$$

unde $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ este un vector constant oarecare, cu $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Demonstraţie. Din (4.54), rezultă imediat că $\frac{d\,Y}{d\,x} = A\,e^{A\,x}\,C$. Înlocuind în (4.50), obţinem identitatea $A\,e^{A\,x}\,C = A\,e^{A\,x}\,C$, deci (4.55) este soluţie pentru (4.50).

Exemplul 4.4.3. Să se rezolve sistemul liniar neomogen

$$\begin{cases} \frac{d\,y}{d\,x} = -2\,y + z + 2\,x + 3 \\ \frac{d\,z}{d\,x} = -4y + 3z + 4x - 1 \end{cases}. \qquad \textbf{(4.56)}$$

Sistemul omogen asociat este:

$$\begin{cases} \frac{d\,y}{d\,x} = -2\,y + z \\ \frac{d\,z}{d\,x} = -4\,y + 3\,z \end{cases}. \qquad \textbf{(4.57)}$$

Conform Teoremei 4.4.1, soluţia generală a sistemului (4.57) este $Y = e^{Ax}C$, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ este matricea sistemului şi $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ este un vector oarecare constant.

Matricea e^{Ax} se calculează uşor, dacă matricea A se poate aduce la forma diagonală. În cazul nostru acest lucru este posibil. Într-adevăr, valorile proprii ale matricei A sunt: soluţiile ecuaţiei caracteristice $K_2(r) = \begin{vmatrix} -2-r & 1 \\ -4 & 3-r \end{vmatrix} = 0$, deci $r_1 = 2$, $r_2 = -1$.

Cum $r_1 \neq r_2$, există o bază formată din vectori proprii. O astfel de bază este:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea de trecere de la baza canonică la această nouă bază formată din vectori proprii este:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar } T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

În raport cu noua bază, matricea A are forma diagonală $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Din proprietăţile funcţiei $A \to e^A$ (vezi [14], 3.6.2) rezultă că

$$e^{Dx} = \begin{pmatrix} e^{r_1 x} & 0 \\ 0 & e^{r_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$$

şi deoarece $D = T^{-1} A T$, atunci

$$e^{Ax} = T\, e^{Dx}\, T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \\ -\frac{4}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{4}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului omogen (4.57) este:

$$Y_{GO} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = e^{Ax}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}C_1 e^{2x} + \frac{4}{3}C_1 e^{-x} + \frac{1}{3}C_2 e^{2x} - \frac{1}{3}C_2 e^{-x} \\ -\frac{4}{3}C_1 e^{2x} + \frac{4}{3}C_1 e^{-x} + \frac{4}{3}C_2 e^{2x} - \frac{1}{3}C_2 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dacă introducem notaţiile $K_1 = \frac{C_2 - C_1}{3}$, $K_2 = \frac{4C_1 - C_2}{3}$, rezultă:

$$\begin{cases} y_0 = K_1 e^{2x} + K_2 e^{-x} \\ z_0 = 4K_1 e^{2x} + K_2 e^{-x} \end{cases}. \qquad \textbf{(4.58)}$$

Pentru a găsi soluţia sistemului neomogen (4.56), folosim metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange. Căutăm soluţia sistemului neomogen de forma:

$$\begin{cases} y = K_1(x) e^{2x} + K_2(x) e^{-x} \\ z = 4K_1(x) e^{2x} + K_2(x) e^{-x} \end{cases}. \qquad \textbf{(4.59)}$$

Funcţiile $K_1'(x)$ şi $K_2'(x)$ verifică sistemul:

$$\begin{cases} K_1'(x)e^{2x} + K_2'(x)e^{-x} = 2x+3 \\ 4K_1'(x)e^{2x} + K_2'(x)e^{-x} = 4x-1 \end{cases}.$$

Rezolvând acest sistem, obţinem:

$$K_1'(x) = \frac{2x-4}{3} e^{-2x}, \quad K_2'(x) = \frac{4x+13}{3} e^{x}$$

şi mai departe, prin integrare:

$$K_1(x) = \frac{-2x+3}{6} e^{-2x} + K_3, \quad K_2(x) = \frac{4x+9}{3} e^{x} + K_4. \qquad \textbf{(4.60)}$$

Înlocuind (4.60) în (4.59), rezultă soluţia generală a sistemului (4.56):

$$\begin{cases} y = K_3 e^{2x} + K_4 e^{-x} + x + \frac{7}{2} \\ z = 4K_3 e^{2x} + K_4 e^{-x} + 5 \end{cases}.$$

Observaţia 4.4.2. La acelaşi rezultat se ajunge şi dacă se foloseşte *metoda eliminării*, pe care o vom descrie în continuare.

Se derivează una din ecuaţiile sistemului (4.56), de exemplu, prima şi se elimină z şi z' din ecuaţiile sistemului şi din ecuaţia derivată, obţinându-se în final o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi cu coeficienţi constanţi în necunoscuta y.

Să reluăm, folosind metoda eliminării, rezolvarea sistemului (4.56):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2y + z + 2x + 3 \\ \frac{dz}{dx} = -4y + 3z + 4x - 1 \end{cases}.$$

Derivând prima ecuaţie, obţinem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 2. \qquad \textbf{(4.61)}$$

Din prima ecuaţie a sistemului, deducem că

$$z = \frac{dy}{dx} + 2y - 2x - 3. \qquad \textbf{(4.62)}$$

Ţinând seama de a doua ecuaţie a sistemului, rezultă

$\frac{dz}{dx} = -4y + 3\left(\frac{dy}{dx} + 2y - 2x - 3\right) + 4x - 1$, şi mai departe

$$\frac{dz}{dx} = 3\frac{dy}{dx} + 2y - 2x - 10. \qquad \textbf{(4.63)}$$

Înlocuind (4.63) în (4.61), obţinem următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul doi:

$$y'' - y - 2y = -2x - 8. \qquad \textbf{(4.64)}$$

Ecuaţia omogenă asociată este $y'' - y - 2y = 0$, iar ecuaţia sa caracteristică este $r^2 - r - 2 = 0$. Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $r_1 = 2,\ r_2 = -1$, deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y_{GO} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Căutăm o soluţie a ecuaţiei neomogene (4.64) de forma membrului drept (pentru că nu avem rezonanţă):

$$y_p = Ax + B. \qquad \textbf{(4.65)}$$

Punând condiţia ca (4.65) să verifice ecuaţia (4.64), obţinem $A = 1,\ B = \frac{7}{2}$. Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei (4.64) este

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x + \frac{7}{2}. \qquad \textbf{(4.66)}$$

Înlocuind (4.66) în (4.62) rezultă:

$$z = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 5$$

În consecinţă, soluţia sistemului (4.56) este:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x + \frac{7}{2} \\ z = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 5 \end{cases}$$

aceeaşi soluţie ca şi cea obţinută cu metoda matriceală.

Observaţia 4.4.3. Metoda matriceală pentru rezolvarea sistemelor liniare omogene cu coeficienţi constanţi se aplică şi în cazul când matricea A nu se poate diagonaliza, folosindu-se în acest caz pentru calculul matricei e^{Ax} forma canonică Jordan a lui A. Pentru detalii vezi [1].

C A P I T O L U L 5

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

5.1. Integrale prime. Sisteme simetrice de ecuaţii diferenţiale

Definiţia 5.1.1. Prin *sistem autonom de ecuaţii diferenţiale* se înţelege un sistem de forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(y_1,...,y_n) \\ \quad ... \quad ... \qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(y_1,...,y_n) \end{cases} \tag{5.1}$$

unde $f_1,..., f_n$ sunt funcţii continue pe o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$. Se observă că în cazul sistemelor autonome, variabila independentă x nu apare printre argumentele funcţiilor f_i.

Definiţia 5.1.2 O funcţie $\psi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrală primă* pentru sistemul (5.1) dacă:

1) $\psi \in C^1(D)$;

2) ψ nu este o funcţie constantă pe D;

3) Pentru orice soluţie $y_1 = \varphi_1(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$, a sistemului (5.1), există o constantă reală $C \in \mathbb{R}$, care depinde de această soluţie, astfel încât $\psi(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) = C$, pentru orice $x \in I$.

Definiţia 5.1.3. Integralele prime distincte $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k$, $k \le n$, ale sistemului (5.1) se numesc *independente* dacă matricea jacobiană $\left(\dfrac{\partial \psi_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}$, $1 \le i \le k, 1 \le j \le n$, are rangul k.

Exemplul 5.1.1. Fie sistemul autonom de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 \end{cases}, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.2}$$

Folosind metoda eliminării se obţine imediat soluţia generală a sistemului (5.2), anume:

$$\begin{cases} y_1 = \ \ C_1\cos x + C_2\sin x \\ y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x \end{cases}. \qquad \textbf{(5.3)}$$

Se observă că funcţia $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin $\psi(y_1,y_2)=y_1^2+y_2^2$, pentru orice $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, este o integrală primă pentru sistemul (5.2). Într-adevăr:

$$\psi(C_1\cos x+C_2\sin x,\ -C_1\sin x+C_2\cos x)=C_1^2+C_2^2=\text{constant}.$$

Teorema 5.1.1. Dacă f_i sunt funcţii continue şi lipschitziene pe D, atunci o funcţie $\psi\in C^1(D)$ este integrală primă pentru sistemul (5.1) dacă şi numai dacă

$$f_1(y)\frac{\partial\psi}{\partial y_1}(y)+\ldots+f_n(y)\frac{\partial\psi}{\partial y_n}(y)=0,\ \ (\forall)\ y=(y_1,\ldots,y_n)\in D. \qquad \textbf{(5.4)}$$

Demonstraţie.

Necesitatea: Fie $x_0\in\mathbb{R}$ şi $y_0=(y_{10},\ldots,y_{n0})\in D$ oarecare fixat. Din Teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale, rezultă că există o soluţie unică a sistemului (5.1), $y_1=\varphi_1(x),\ldots,y_n=\varphi_n(x),\ x\in I$, cu proprietatea $\varphi_1(x_0)=y_{10},\ldots,\varphi_n(x_0)=y_{n0}$.

Dacă $\psi:D\to\mathbb{R}$ este integrală primă pentru (5.1), atunci

$$\psi(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))=C,\ \ (\forall)\ x\in I. \qquad \textbf{(5.5)}$$

Derivând (5.5), rezultă:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))\cdot\frac{d\varphi_1(x)}{dx}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))\cdot\frac{d\varphi_n(x)}{dx}=0,\ (\forall)\ x\in I.$$

Ţinând seama că $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ verifică sistemul (5.1), mai departe avem:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))\cdot f_1(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))+\ldots+$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))\cdot f_n(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))=0,\ (\forall)\ x\in I.$$

În particular, pentru $x=x_0$, rezultă

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}(y_0)f_1(y_0)+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}(y_0)f_n(y_0)=0.$$

Cum $y_0\in D$ a fost arbitrar, rezultă că ψ verifică (5.4) pe D.

Suficienţa. Fie $y_1=\varphi_1(x),\ldots,y_n=\varphi_n(x),\ x\in I$, o soluţie oarecare a sistemului (5.1).

Atunci $\left(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\right) \in D$, $(\forall)\, x \in I$ şi

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = f_1\left(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\right), ..., \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = f_n\left(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\right),\ (\forall)\, x \in I.$$

Dacă $\psi \in C^1(D)$ verifică (5.4) pentru orice $y \in D$, atunci avem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\left(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\right) \cdot \frac{d\varphi_1}{dx} + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}\left(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\right) \cdot \frac{d\varphi_n}{dx} = 0,\ (\forall)\, x \in I$$

relaţie echivalentă cu

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\right) = 0,\ (\forall)\, x \in I$$

de unde rezultă că

$$\psi\left(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\right) = C,\ (\forall)\, x \in I.$$

Aşadar, ψ este integrală primă pentru sistemul (5.1).

Teorema 5.1.2. Presupunem că funcţiile $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt continue, lipschitziene şi $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(y) \neq 0$, $(\forall)\, y = (y_1, ..., y_n) \in D$. Atunci sistemul (5.1) admite $(n-1)$ integrale prime independente $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$ şi orice altă integrală primă ψ se poate scrie sub forma

$$\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})$$

Φ unde este o funcţie arbitrară, cu derivate parţiale de ordinul întâi continue.

Demonstraţie. Fie $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$ integralele prime pentru sistemul (5.1) şi fie ψ altă integrală primă a sistemului. Din Teorema 5.1.1, rezultă:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(y) f_1(y) + ... + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}(y) f_n(y) = 0 \\ ... \quad ... ... \quad ... ... \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_1}(y) f_1(y) + ... + \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_n}(y) f_n(y) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y) f_1(y) + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}(y) f_n(y) = 0 \end{cases},\ (\forall)\, y = (y_1, ..., y_n) \in D. \qquad \textbf{(5.6)}$$

Am obţinut un sistem algebric liniar şi omogen în necunoscutele $f_1(y), f_2(y), ..., f_n(y)$. Cum funcţiile f_i nu pot fi simultan nule, sistemul admite soluţii nebanale, de unde

rezultă că determinantul coeficienţilor este zero. Dar determinantul sistemului este chiar determinantul funcţional:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}(y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y_n}(y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial \psi}{\partial y_2}(y) & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial y_n}(y) \end{vmatrix} = 0, \ (\forall)\ y \in D$$

deci rezultă că ψ depinde funcţional de $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$, adică are loc relaţia din enunţ.

Observaţia 5.1.1. Ţinând seama şi de Teorema 5.1.2, rezultă că sistemul (5.1) admite $(n-1)$ integrale prime independente şi $(n-1)$ este numărul maxim de integrale prime independente ale sistemului (5.1).

Definiţia 5.1.4. Dacă funcţiile reale $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt continue şi lipschitziene pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$, cu $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(y_1, ..., y_n) \neq 0$ pe D, atunci sistemul autonom (5.1) se poate pune sub forma simetrică echivalentă:

$$\frac{y'_1}{f_1(y_1,...,y_n)} = \frac{y'_2}{f_2(y_1,...,y_n)} = ... = \frac{y'_n}{f_n(y_1,...,y_n)} = 1. \qquad \textbf{(5.7)}$$

În continuare, prin *sistem simetric de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi* se înţelege un sistem scris sub forma:

$$\frac{dy_1}{f_1(y_1,...,y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(y_1,...,y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(y_1,...,y_n)} \qquad \textbf{(5.8)}$$

unde funcţiile reale $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt continue şi lipschitziene pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$ şi în plus $\sum_{i=1}^{n} f_i^2(y_1, ..., y_n) \neq 0$, $(\forall)\ (y_1,...,y_n) \in D$.

Exemplul 5.1.2. Fie $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial definit pe o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^3$. Dacă $M(x,y,z) \in D$ şi $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ este vectorul de poziţie al punctului M în reperul cartezian $\left(O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\right)$ (unde O este originea reperului şi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

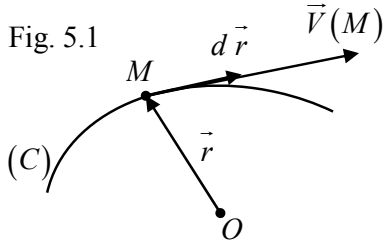
este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$), atunci componentele câmpului vectorial $\vec{V}(M)$ sunt trei câmpuri scalare $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ şi rezultă

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Se numeşte *linie de câmp* a câmpului vectorial $\vec{V}$ orice curbă în spaţiu $(C) \subset D$ cu proprietatea că este tangentă în fiecare punct M al său la vectorul de câmp $\vec{V}(M)$.

O curbă (C) va fi linie de câmp dacă şi numai dacă $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$, versorul tangentei la linia de câmp în punctul M, este coliniar cu vectorul $\vec{V}(M)$.

Fig. 5.1



Ecuaţia diferenţială a liniilor de câmp sub formă vectorială este:

$$d\vec{r} \times \vec{V} = \vec{0}.$$

Sistemul simetric de ecuaţii diferenţiale al liniilor de câmp este:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \qquad \textbf{(5.9)}$$

Integrala generală (soluţia generală implicită) a sistemului simetric (5.9) este formată din două integrale prime independente

$$\begin{cases} \psi_1(x,y,z) = C_1 \\ \psi_2(x,y,z) = C_2 \end{cases} \qquad \textbf{(5.10)}$$

iar aceste integrale prime reprezintă din punct de vedere geometric două familii de suprafeţe.

Un câmp vectorial admite o infinitate de linii de câmp formând o familie de curbe depinzând de doi parametrii de ecuaţii (5.10).

O metodă comodă pentru rezolvarea sistemului simetric (5.8) este *metoda combinaţiilor integrabile*, care permite aflarea integralelor prime independente ale sistemului prin mijloace directe.

Aplicând regulile obişnuite ale proporţiilor pentru sistemul (5.8), au loc egalităţile:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{\mu_1 dy_1}{\mu_1 f_1} = \frac{\mu_2 dy_2}{\mu_2 f_2} = \ldots = \frac{\mu_n dy_n}{\mu_n f_n} = \frac{\mu_1 dy_1 + \mu_2 dy_2 + \ldots + \mu_n dy_n}{\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_n f_n}$$

pentru $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$, unde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sunt n funcţii continue arbitrare pe D.

Definiţia 5.1.5. Un set de n funcţii reale $\mu_1 = \mu_1(y_1,...,y_n), ..., \mu_n = \mu_n(y_1,...,y_n)$ continue pe D se numeşte *combinaţie integrabilă* a sistemului simetric (5.8) dacă au loc condiţiile:

1. $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_n f_n = 0$ pe D
2. există $\psi \in C^1(D)$ astfel încât $\mu_1\, dy_1 + \mu_2\, dy_2 + ... + \mu_n\, dy_n = d\psi$ pe D.

Teoremă 5.1.3. Dacă $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ sunt n funcţii reale definite şi continue pe D care îndeplinesc proprietăţile din Definiţia 5.1.5, atunci funcţia $\psi : D \to \mathbb{R}$ este o integrală primă a sistemului simetric (5.8).

Demonstraţie. Dacă $y_1 = \varphi_1(y_n), y_2 = \varphi_2(y_n), ..., y_{n-1} = \varphi_{n-1}(y_n)$ este o soluţie a sistemului

$$\frac{dy_i}{dy_n} = \frac{f_i(y_1,...,y_n)}{f_n(y_1,...,y_n)}, i = 1,2,...,n-1$$

(sistem echivalent cu (5.8)), atunci

$$d\varphi_1 = \frac{f_1}{f_n}\, dy_n, ..., d\varphi_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{f_n}\, dy_n.$$

Înlocuind în relaţia 2) din Definiţia 5.15, se obţine:

$$d\psi\left(\varphi_1(y_n), \varphi_2(y_n), ..., \varphi_{n-1}(y_n), y_n\right) = \mu_1 d\varphi_1 + ... + \mu_{n-1} d\varphi_{n-1} + \mu_n dy_n =$$

$$= \frac{1}{f_n}(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_n f_n) dy_n = 0$$

deci

$$\psi\left(\varphi_1(y_n), \varphi_2(y_n), ..., \varphi_{n-1}(y_n), y_n\right) = C = \text{const.}$$

adică ψ este o integrală primă a sistemului (5.8).

Observaţia 5.1.2. Găsirea a $(n-1)$ combinaţii integrabile este echivalentă cu găsirea a $(n-1)$ integrale prime ale sistemului (5.8), adică cu obţinerea soluţiei generale a sistemului.

Dacă sistemul nu este dat sub forma simetrică, se scrie sub această formă şi după aceea se caută combinaţiile integrabile.

Exemplul 5.1.3. Să se afle două integrale prime independente ale sistemului simetric

$$\frac{dy_1}{y_2 - y_3} = \frac{dy_2}{y_3 - y_1} = \frac{dy_3}{y_1 - y_2}. \qquad \textbf{(5.11)}$$

Din proprietăţile unui şir de rapoarte egale deducem

$$\frac{dy_1+dy_2}{y_2-y_1}=\frac{dy_3}{y_1-y_2}.$$

După simplificare rezultă $d(y_1+y_2+y_3)=0$, deci $y_1+y_2+y_3=C_1$ şi atunci funcţia $\psi_1(y_1,y_2,y_3)=y_1+y_2+y_3$ este integrală primă pentru (5.11).

Pentru a obţine o altă integrală primă facem următoarea combinaţie integrabilă: amplificăm succesiv primul raport cu y_1, al doilea cu y_2, al treilea cu y_3 şi folosind proprietăţile şirurilor de rapoarte egale, rezultă:

$$\frac{y_1dy_1+y_2dy_2}{y_2y_3-y_1y_3}=\frac{y_3dy_3}{y_1y_3-y_2y_3}.$$

După ce simplificăm, obţinem $d\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=0$, deci $y_1^2+y_2^2+y_3^2=C_2$. Funcţia $\psi_2(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ este o altă integrală primă pentru sistemul (5.11).

5.2. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare şi omogene

Definiţia 5.2.1. Prin *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă* se înţelege o ecuaţie de forma:

$$P_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+P_2(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+P_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad \textbf{(5.12)}$$

unde P_i, $i=1,2,...,n$, sunt funcţii continue şi lipschitziene pe o mulţime deschisă $D\subset\mathbb{R}^n$ şi $\sum_{i=1}^{n}P_i^2(x)\neq 0$, $(\forall)\ x=(x_1,...,x_n)\in D$. Funcţia $u=u(x_1,...,x_n)$ este *funcţia necunoscută*.

Definiţia 5.2.2. Se numeşte *soluţie* a ecuaţiei cu derivate parţiale (5.12) orice funcţie φ definită pe o submulţime deschisă $D_1\subset D$, $\varphi\in C^1(D_1)$, cu proprietatea:

$$P_1(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)+P_2(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)++...+P_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)=0,\ (\forall)\ x=(x_1,...,x_n)\in D_1.$$

Problema determinării soluţiilor ecuaţiei cu derivate parţiale (5.12) se reduce la problema rezolvării unui sistem simetric de ecuaţii diferenţiale, numit *sistem caracteristic*.

Ecuaţiei cu derivate parţiale (5.12) i se asociază sistemul caracteristic următor:

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,...,x_n)}=\frac{dx_2}{P_2(x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{P_n(x_1,...,x_n)}. \qquad \textbf{(5.13)}$$

Observaţia 5.2.1. Din Teorema 5.1.1 rezultă că orice integrală primă a sistemului (5.13) este soluţie pentru ecuaţia cu derivate parţiale (5.12), şi reciproc.

Mai general, are loc următoarea teoremă:

Teorema 5.2.1. Fie $\psi_1, ..., \psi_k$, k integrale prime pentru sistemul (5.13) şi fie Φ o funcţie reală de clasă C^1 definită pe mulţimea deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Atunci, funcţia compusă

$$u(x) = \Phi(\psi_1(x),...,\psi_k(x)),\ x \in D_1 \subset D$$

este o integrală primă a sistemului simetric (5.13) şi deci o soluţie pentru ecuaţia cu derivate parţiale (5.12). (Se subînţelege că se presupune $(\psi_1(x),...,\psi_k(x)) \in \Omega$, $(\forall) x \in D_1$)

Demonstraţie. Pentru orice $x \in D_1$, folosind derivarea funcţiilor compuse, avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi_1}(y)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + ... + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi_k}(y)\dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... ... \quad ... \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi_1}(y)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) + ... + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \psi_k}(y)\dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \end{cases} \tag{5.14}$$

$(\forall)\ y = (\psi_1(x),...,\psi_k(x)) \in \Omega$.

Ţinând seama de (5.14) şi de Teorema 5.1.1, deducem:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1}(y) \cdot \left[P_1(x) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + ... + P_n(x) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \right] + ... +$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k}(y) \cdot \left[P_1(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \right] = 0,\ (\forall)\ x \in D_1.$$

Aşadar, $u(x) = \Phi(\psi_1(x),...,\psi_k(x))$, $x \in D_1$, este o integrală primă a sistemului (5.13) şi deci este o soluţie a ecuaţiei (5.12), $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$.

Următoarea teoremă ne arată că orice soluţie a ecuaţiei (5.12) este de această formă.

Teorema 5.2.2. Fie $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$ $(n-1)$ integrale prime independente ale sistemului (5.13) şi fie $u = \varphi(x_1, ..., x_n)$, $x = (x_1,...,x_n) \in D_1 \subset D$, o soluţie oarecare a ecuaţiei (5.12). Atunci, există o funcţie reală Φ de clasă C^1 pe o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ astfel încât $(\psi_1(x),...,\psi_{n-1}(x)) \in \Omega$, $(\forall)\ x \in D_1$ şi

$$\varphi(x) = \Phi(\psi_1(x),...,\psi_{n-1}(x)),\ (\forall)\ x \in D_1,\ \text{i.e. } u = \Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1}) \text{ pe } D_1.$$

Demonstraţie. Deoarece $\varphi, \psi_1, ..., \psi_{n-1}$ sunt soluţii pentru (5.12), rezultă:

$$\begin{cases} P_1(x)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) + ... + P_n(x)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) = 0 \\ P_1(x)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + ... + P_n(x)\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) = 0 \\ ... \quad ... ... \quad ... \quad ... ... \\ P_1(x)\dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) + ... + P_n(x)\dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) = 0 \end{cases}, \ (\forall)\ x = (x_1,...,x_n) \in D_1. \qquad \textbf{(5.15)}$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x) \neq 0,\ (\forall)\ x \in D_1$, rezultă că sistemul algebric liniar şi omogen (5.15) admite soluţii nebanale în D_1, deci determinantul coeficienţilor este zero:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} = 0,\ (\forall)\ x \in D_1.$$

Cum prin ipoteză, funcţiile $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$ sunt independente funcţional, rezultă că:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & ... & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = n-1,\ (\forall)\ x \in D_1.$$

Din Teorema 4.11.2 din [14], rezultă că φ depinde funcţional de $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$ pe D_1, deci că există $\Phi \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ astfel încât

$\varphi(x) = \Phi(\psi_1(x),...,\psi_{n-1}(x)),\ (\forall)\ x \in D_1$ sau

$u = \Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})$ pe D_1.

Definiţia 5.2.3. Funcţia $u = \Phi(\psi_1,...,\psi_{n-1})$, unde Φ este o funcţie arbitrară, dată în Teorema 5.2.2, se numeşte *soluţia generală* a ecuaţiei cu derivate parţiale omogenă (5.12).

Exemplul 5.2.1. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale omogenă

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Sistemul simetric asociat este:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}}.$$

Din $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$ deducem $\frac{y}{x}=C_1$, deci $\psi_1(x,y,z)=\frac{y}{x}$ este o integrală primă. Pentru a obţine o a doua integrală primă procedăm astfel: amplificăm primul raport cu x, al doilea raport cu y şi folosim proprietăţile şirurilor de rapoarte egale. Rezultă:

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\frac{z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ şi mai departe

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=z\,dz$$, egalitate echivalentă cu

$$d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=d\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

Integrând relaţia obţinem $\sqrt{x^2+y^2}-\frac{z^2}{2}=C_2$, deci $\psi_2(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-\frac{z^2}{2}$ este a doua integrală primă.

Soluţia generală a ecuaţiei va fi:

$$u(x,y,z)=\Phi\left(\frac{y}{x},\ \sqrt{x^2+y^2}-\frac{z^2}{2}\right)$$

unde $\Phi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ este o funcţie arbitrară, iar $xyz\neq 0$.

În general, în aplicaţii practice nu ne interesează soluţia generală a ecuaţiei (5.12), ci acele soluţii care îndeplinesc anumite condiţii iniţiale.

Definiţia 5.2.4. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ o mulţime deschisă cu $(x_1,\ldots,x_{n-1},a)\in D$, $(\forall)\,(x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$. Fie, de asemenea, $\varphi: A\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1.

Problema Cauchy pentru ecuaţia cu derivate parţiale liniară omogenă (5.12) şi funcţia φ constă în determinarea acelei soluţii $u = u(x_1,...,x_n)$ a ecuaţiei (5.12) care pentru $x_n = a$ se reduce la funcţia dată φ, adică satisface următoarea condiţie pe mulţimea A:

$$u(x_1, x_2,...,x_{n-1}, a) = \varphi(x_1, x_2,...,x_{n-1}), (\forall)\ (x_1, x_2,...,x_{n-1}) \in A. \qquad \textbf{(5.16)}$$

Remarcă 5.2.1. În cazul $n = 2$, problema Cauchy are o interpretare geometrică simplă: să se găsească suprafaţa $z = z(x, y)$, soluţie a ecuaţiei $P(x, y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, care trece prin curba de ecuaţii $y = a$, $z = \varphi(x)$.

Teorema 5.2.3. Dacă există $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$ $(n-1)$ integrale prime independente ale sistemului simetric asociat (5.12), atunci problema Cauchy (5.12) + (5.16) are o soluţie unică $u : D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 \subset D$, dată de:

$$u(x_1, x_2,...,x_n) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}),..., \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})).$$

Demonstraţie. Fie $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mulţime deschisă cu proprietatea că $(x_1,..., x_{n-1}, a) \in D$, $(\forall)\ (x_1,...,x_{n-1}) \in A$.

Fie $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$, $(n-1)$ integrale prime independente funcţional pe D. Rezultă că:

$$\frac{\partial(\psi_1,...,\psi_{n-1})}{\partial(x_1,...,x_{n-1})}(x_1,...,x_{n-1}, a) \neq 0, (\forall)\ (x_1,...,x_{n-1}) \in A.$$

Fie $F : A \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ definită astfel:

$$F(x_1,...,x_{n-1}) = (\psi_1(x_1,...,x_{n-1}, a),...,\psi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1}, a)),\ (x_1,...,x_{n-1}) \in A.$$

Din teorema de inversiune locală (Teorema 4.8.2, [14]), rezultă că pentru orice punct $M(x_1,...,x_{n-1}) \in A$, există o vecinătate deschisă A_1 a punctului M, $A_1 \subset A$ şi o vecinătate deschisă B_1 a punctului $F(M)$ astfel încât $F : A_1 \to B_1$ este difeomorfism.

Fie $F^{-1} = (\omega_1,..., \omega_{n-1}) : B_1 \to A_1$ inversa funcţiei $F : A_1 \to B_1$.

Definim

$$u(x) = \varphi(\omega_1(\psi_1(x),...,\psi_{n-1}(x)),..., \omega_{n-1}(\psi_1(x),...,\psi_{n-1}(x))) \qquad \textbf{(5.17)}$$

$(\forall)\ x = (x_1,...,x_{n-1}, x_n) \in D$, cu proprietatea că $(x_1,...,x_{n-1}) \in A_1$.

Din Teorema 5.2.1, rezultă că funcţia definită în (5.17) este soluţie pentru (5.12). Pe de altă parte, observăm că $u(x_1,...,x_{n-1}, a) = \varphi\left(\left(F^{-1} \circ F\right)(x_1,...,x_{n-1})\right) = \varphi(x_1,...,x_{n-1})$, oricare ar fi $(x_1,...,x_{n-1}) \in A_1$, deci funcţia definită în (5.17) este soluţia problemei Cauchy (5.12) + (5.16). Unicitatea rezultă din unicitatea funcţiilor $\omega_1,..., \omega_{n-1}$.

Exemplul 5.2.2. Să se determine soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale omogenă

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\ x > 0$$

care pentru $y = 0$ se reduce la funcţia $\varphi(x) = x$.

Sistemul simetric ataşat ecuaţiei este $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ sau $x\,dx + y\,dy = 0$, de unde rezultă integrala primă $x^2 + y^2 = C$. Soluţia generală a ecuaţiei este $z = \Phi\left(x^2 + y^2\right)$, unde Φ este o funcţie arbitrară de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

Din relaţiile $\begin{cases} x^2 + y^2 = C \\ y = 0 \end{cases}$, deducem $x = \sqrt{C}$.

Rezultă $\varphi = x = \sqrt{C}$, de unde $z = \sqrt{C}$ sau $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Aşadar, soluţia problemei Cauchy este $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x > 0$.

5.3. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniare

Definiţia 5.3.1. O *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară neomogenă* este de forma:

$$P_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + P_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x_1,...,x_n,u) \qquad \textbf{(5.18)}$$

unde P_i, $i = 1,2,...,n$, sunt funcţii continue şi lipschitziene pe o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ şi $\sum_{i=1}^{n+1} P_i^2(x_1,...,x_n,u) \neq 0$ pe D. Funcţia $u = u(x_1,...,x_n)$ este *funcţia necunoscută*.

Ecuaţiei cu derivate parţiale (5.18) i se asociază sistemul caracteristic următor:

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1,...,x_n,u)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1,...,x_n,u)} = ... = \frac{dx_n}{P_n(x_1,...,x_n,u)} = \frac{du}{P_{n+1}(x_1,...,x_n,u)}. \qquad \textbf{(5.19)}$$

Teorema 5.3.1. Soluţia generală a ecuaţiei (5.18) este dată sub formă implicită prin

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n) = 0 \tag{5.20}$$

unde Φ este o funcţie arbitrară de clasă C^1 în $\mathbb{R}^n$, iar $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ sunt integrale prime independente le sistemului simetric (5.19)

Demonstraţie. Folosind procedeul lui Jacobi, se caută pentru ecuaţia cvasiliniară (5.18) o soluţie $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ dată implicit printr-o relaţie de forma

$$V(x_1, x_2, ..., x_n, u(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0$$

unde V este o funcţie necunoscută ce trebuie determinată, de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ şi $\dfrac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ pe D.

Din Teorema funcţiilor implicite pentru funcţii reale de n variabile reale, rezultă că:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}. \tag{5.21}$$

Înlocuind (5.21) în (5.18), se găseşte ecuaţia:

$$P_1(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + ... + P_n(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1}(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \tag{5.22}$$

Am obţinut astfel o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară omogenă cu funcţia necunoscută $V = V(x_1, x_2, ..., x_n, u)$.

Rezolvarea ecuaţiei (5.22) revine la a determina n integrale prime independente ale sistemului caracteristic ataşat:

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, ..., x_n, u)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, ..., x_n, u)} = ... = \frac{dx_n}{P_n(x_1, ..., x_n, u)} = \frac{du}{P_n(x_1, ..., x_n, u)}$$

care nu este altul decât cel definit de relaţia (5.19).

Conform Teoremei 5.2.2, soluţia ecuaţiei omogene (5.22) este de forma:

$$V(x_1, ..., x_n, u) = \Phi(\psi_1(x_1, ..., x_n, u), ..., \psi_n(x_1, ..., x_n, u)),\ (x_1, ..., x_n, u) \in \Omega$$

unde Φ este o funcţie arbitrară, $\Phi \in C^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$, iar $\psi_1, ..., \psi_n$ sunt cele n integrale prime independente ale sistemului (5.19).

Soluţia ecuaţiei (5.18) este căutată de forma implicită $V(x_1, ..., x_n, u) = 0$, deci soluţia

generală a ecuaţiei (5.18) este

$$\Phi\left(\psi_1\left(x_1,...,x_n,u\right),...,\psi_n\left(x_1,...,x_n,u\right)\right)=0 .$$

Observaţia 5.3.1. Scriind detaliat relaţia (5.20), rezultă că soluţia ecuaţiei (5.18) este funcţia $u=u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ definită în mod implicit prin

$$\Phi\left(\psi_1\left(x_1,x_2,...,x_n,u\right),\psi_2\left(x_1,x_2,...,x_n,u\right)...,\psi_n\left(x_1,x_2,...,x_n,u\right)\right)=0 .$$

Exemplul 5.3.1. Fie $\vec{V}:D\to\mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă $D\subset\mathbb{R}^3$, $\vec{V}\left(x,y,z\right)=P\left(x,y,z\right)\vec{i}+Q\left(x,y,z\right)\vec{j}+R\left(x,y,z\right)\vec{k}$.

Se numeşte *suprafaţă de câmp* a câmpului $\vec{V}$ orice suprafaţă $\left(S\right)\subset D$ de clasă C^1 generată de o linie de câmp a câmpului.

Ecuaţia unei suprafeţe de câmp este de forma

$$\Phi\left(\psi_1\left(x,y,z\right),\psi_2\left(x,y,z\right)\right)=0 \text{ sau } \Phi\left(C_1,C_2\right)=0 \qquad \textbf{(5.23)}$$

unde C_1, C_2 sunt constantele din expresia integralelor prime (5.10), iar legătura Φ este stabilită prin condiţii suplimentare, de exemplu, suprafaţa de câmp să treacă printr-o curbă $\left(\Gamma\right)\subset D$ care nu este linie de câmp.

Suprafeţele de câmp ale câmpului vectorial $\vec{V}$ formează o familie de suprafeţe cu proprietatea că în fiecare punct M al lor sunt tangente la vectorul de câmp $\vec{V}\left(M\right)$ (deci vectorul $\vec{V}\left(M\right)$ este conţinut în planul tangent în M la suprafaţa de câmp care trece prin M, deoarece este tangent la linia de câmp care trece prin M şi care generează suprafaţa respectivă).

În aplicaţii practice, de regulă, nu ne interesează soluţia generală a ecuaţiei (5.18), ci acele soluţii care verifică anumite condiţii suplimentare.

Definiţia 5.3.2. Fie punctul arbitrar fixat $M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,u_0\right)\in D$, $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ o mulţime deschisă şi fie, de asemenea, $\varphi:A\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1.

Problema Cauchy pentru ecuaţia cu derivate parţiale cvasiliniară (5.18) şi funcţia φ constă în determinarea unei soluţii $u=u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ a ecuaţiei (5.18) care pentru $x_n=x_n^0$ se reduce la funcţia dată $\varphi\left(x_1,x_2,...,x_{n-1}\right)$, adică:

$$u\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0\right) = \varphi\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}\right) . \qquad \textbf{(5.24)}$$

Vom impune ca soluţia u să fie definită într-o vecinătate a punctului $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ şi $u\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = u_0$.

Problema Cauchy pentru ecuaţia cvasiliniară (5.18) se rezolvă analog cu problema Cauchy relativă la o ecuaţie cu derivate parţiale liniară şi omogenă.

Remarcă 5.3.1. În cazul $n = 2$, problema Cauchy are o interpretare geometrică simplă: să se găsească *suprafaţa integrală* $z = z(x, y)$, soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \qquad \textbf{(5.25)}$$

care trece prin curba definită de ecuaţiile

$$y = y_0,\ z = \varphi(x). \qquad \textbf{(5.26)}$$

Dacă $\psi_1(x, y, z) = C_1$ şi $\psi_2(x, y, z) = C_2$ sunt două integrale prime independente ale sistemului caracteristic ataşat ecuaţiei (5.25):

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

atunci problema Cauchy se reduce la găsirea legăturii între C_1 şi C_2 din sistemul algebric format cu integralele prime şi cu ecuaţiile (5.26):

$$\begin{cases} \psi_1(x, y, z) = C_1 \\ \psi_2(x, y, z) = C_2 \\ y = y_0 \\ z = \varphi(x) \end{cases}.$$

Eliminând x, y, z între ecuaţiile sistemului, rezultatul eliminării este o relaţie de forma

$$\Phi(C_1, C_2) = 0$$

numită *relaţie de compatibilitate*, în care dacă se înlocuiesc C_1 şi C_2 cu expresiile date de integralele prime se obţine soluţia problemei Cauchy, adică ecuaţia suprafeţei integrale:

$$\Phi\left(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)\right) = 0.$$

Observaţia 5.3.2. Curba $y = y_0,\ z = \varphi(x)$ din enunţul problemei Cauchy se poate înlocui cu orice curbă: $F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0$ situată în D (ecuaţiile curbei să nu fie soluţii ale sistemului caracteristic ataşat ecuaţiei (5.25)).

Exemplul 5.3.2. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei cvasiliniare

$$2y\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2\frac{\partial z}{\partial y}+6x^2y=0$$

şi să se determine ecuaţia suprafeţei integrale care trece prin curba de ecuaţii: $x=0,\ y^2=2z$.

Sistemul simetric ataşat este:

$$\frac{dx}{2y}=\frac{dy}{3x^2}=\frac{dz}{-6x^2y}.$$

Din $3x^2dx=2ydy$, se află prima integrală primă $x^3-y^2=C_1$, iar din $3x^2dx=-dz$, se obţine a doua integrală primă $x^3+z=C_2$.

Soluţia generală a ecuaţiei este funcţia $z=z(x,y)$, definită implicit de ecuaţia

$\Phi\left(x^3-y^2,\ x^3+z\right)=0$, unde $\Phi\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ este o funcţie arbitrară.

Pentru a rezolva problema Cauchy eliminăm variabilele $x,\ y,\ z$ între relaţiile:

$$\begin{cases} x^3-y^2=C_1 \\ x^3+z=C_2 \\ x=0 \\ y^2=2z \end{cases}$$

şi obţinem $C_1+2C_2=0$.

Înlocuind C_1 şi C_2 cu expresiile din integrale prime, se găseşte:

$$x^3-y^2+2x^3+2z=0.$$

Rezultă că $z=\frac{1}{2}\left(y^2-3x^3\right)$ este soluţia problemei Cauchy, adică ecuaţia suprafeţei integrale căutate.

C A P I T O L U L 6

ELEMENTE DE TEORIA FUNCŢIILOR COMPLEXE

6.1. Numere complexe

Numerele complexe au fost introduse în matematică în legătură cu rezolvarea ecuaţiilor algebrice. Imposibilitatea rezolvării în corpul numerelor reale a ecuaţiei

$$x^2+1=0$$

i-a determinat pe matematicieni să introducă un număr convenţional, anume unitatea imaginară i, definită prin egalitatea:

$$i^2=-1.$$

Numerele de forma $x+iy$, unde x şi y sunt numere reale se numesc *numere complexe*. Mulţimea numerelor complexe se notează cu $\mathbb{C}$. Aşadar,

$$\mathbb{C}=\{z=x+iy;\ x,y\in\mathbb{R}\}.$$

Pe $\mathbb{C}$ se definesc operaţiile de *adunare* şi *înmulţire*, astfel:

Fie $z_1=x_1+iy_1$, $x_1,y_1\in\mathbb{R}$, $z_2=x_2+iy_2$, $x_2,y_2\in\mathbb{R}$. Atunci

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Mulţimea $\mathbb{C}$ înzestrată cu aceste două operaţii are o structură de corp comutativ.

Elementul neutru la adunare este $0=0+0\cdot i$, iar elementul neutru la înmulţire este $1=1+0\cdot i$. Un număr complex $z=x+iy=0$ dacă şi numai dacă $x=0$ şi $y=0$. Orice număr complex $z=x+iy\neq 0$ este inversabil, inversul său fiind:

$$\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Deoarece funcţia $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, definită prin $\varphi(x)=x+0\cdot i$, este injectivă, rezultă că $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Pentru orice număr complex $z=x+iy$, notăm cu $x=\operatorname{Re}z$ şi $y=\operatorname{Im}z$.

Conjugatul numărului complex z este, prin definiţie, numărul complex $\overline{z} = x - iy$.

Au loc următoarele proprietăţi:

1) $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$;

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_2 \neq 0$.

Modulul numărului complex $z = x + iy$ este, prin definiţie, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sunt adevărate următoarele proprietăţi:

1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_2 \neq 0$;

4) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

5) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$;

6) $|z| = |\overline{z}|$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$.

Din proprietăţile modulului rezultă că funcţia

$$\|\cdot\| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+,\ \|z\| = |z|,\ (\forall)\ z \in \mathbb{C} \qquad \textbf{(6.1)}$$

este o normă.

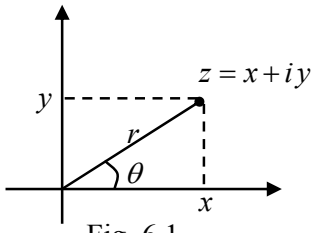


Fig. 6.1

Mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$, înzestrată cu norma (6.1), se identifică, din punct de vedere topologic, cu mulţimea $\mathbb{R}^2$, înzestrată cu norma euclidiană, prin aplicaţia bijectivă $z = x + iy \to (x, y) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$.

Definiţia 6.1.1. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. Se numeşte *bilă deschisă cu centrul în* z_0 *şi de rază* r mulţimea:

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r\}.$$

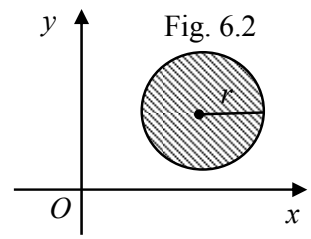


Fig. 6.2

Observaţia 6.1.1. Din punct de vedere geometric $B(z_0, r)$ este interiorul cercului cu centrul în z_0 şi de rază r (Fig. 6.2).

Reamintim următoarele definiţii:

Mulţimea $A \subset \mathbb{C}$ se numeşte *deschisă* dacă oricare ar fi $a \in A$, există $r > 0$ astfel încât $B(a, r) \subset A$. Mulţimea $A \subset \mathbb{C}$ se numeşte *închisă* dacă $\mathbb{C} \setminus A$ este deschisă. Mulţimea $A \subset \mathbb{C}$ este *mărginită* dacă există $M > 0$ astfel încât $|z| < M$, $(\forall)\ z \in A$. Mulţimea $K \subset \mathbb{C}$ se numeşte *compactă* dacă este închisă şi mărginită. Un punct $z \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct de acumulare* al mulţimii A dacă pentru orice $r > 0$, există $u \in A \cap B(z, r)$, $u \neq z$.

Vom nota cu A' mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A.

Forma trigonometrică a unui număr complex

Fie $z = x + iy \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ şi $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Relaţiile $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ definesc un unghi $\theta \in (-\pi, \pi]$, numit *argumentul redus* al lui z şi se notează $\theta = \arg z$ (Fig. 6.1).

Forma trigonometrică a numărului complex $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ este

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta).$$

În general, argumentul unui număr complex nenul este

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplul 6.1.1.

1) Dacă $z = 1 + i$, atunci $|z| = r = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, deci

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2) Pentru $z = 1 - i$, $\arg z = -\frac{\pi}{4}$, deci $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

3) Dacă $z=3$, atunci $\arg z=0$, deci $z=3\left(\cos 0+i\sin 0\right)$.

4) Când $z=-3$, $\arg z=\pi$, deci $z=3\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$.

6.2. Şiruri şi serii de numere complexe

Definiţia 6.2.1. Fie $\left(z_n\right)_n$ un şir de numere complexe. Şirul $\left(z_n\right)_n$ *converge* către $z\in\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\left|z_n-z\right|=0$.

Se folosesc notaţiile $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$ sau $z_n\xrightarrow{\mathbb{C}}z$.

Exemplu 6.2.1. Şirul $\left(z_n\right)_n$, unde $z_n=z^n$ converge la 0 dacă şi numai dacă $\left|z\right|<1$.

Teorema 6.2.1. Şirul $\left(z_n\right)_n\subset\mathbb{C}$, $z_n=x_n+i\,y_n$, $n\in\mathbb{N}$ converge la $z\in\mathbb{C}$, $z=x+i\,y$ dacă şi numai dacă $x_n\xrightarrow{\mathbb{R}}x$ şi $y_n\xrightarrow{\mathbb{R}}y$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din inegalităţile:

$\max\left\{\left|x_n-x\right|,\left|y_n-y\right|\right\}\le\left|z_n-z\right|\le\left|x_n-x\right|+\left|y_n-y\right|$, $\left(\forall\right)\,n\in\mathbb{N}$.

Definiţia 6.2.2. Un şir de numere complexe $\left(z_n\right)_n$ este *fundamental* dacă $\left(\forall\right)\,\varepsilon>0$, $\left(\exists\right)\,n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|z_n-z_m\right|<\varepsilon$, $\left(\forall\right)\,n,\,m\ge n_\varepsilon$.

Condiţia este echivalentă cu $\left|z_{n+p}-z_n\right|<\varepsilon$, $\left(\forall\right)\,n\ge n_\varepsilon$ şi $\left(\forall\right)\,p\in\mathbb{N}$.

Teorema 6.2.2. Şirul $\left(z_n\right)_n\subset\mathbb{C}$, $z_n=x_n+i\,y_n$, $n\in\mathbb{N}$ este fundamental dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $\left(x_n\right)_n$ şi $\left(y_n\right)_n$ sunt fundamentale.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din inegalităţile:

$\max\left\{\left|x_n-x_m\right|,\left|y_n-y_m\right|\right\}\le\left|z_n-z_m\right|\le\left|x_n-x_m\right|+\left|y_n-y_m\right|$, $\left(\forall\right)\,n,\,m\in\mathbb{N}^*$.

Teorema 6.2.3. Un şir de numere complexe $\left(z_n\right)_n$ este convergent dacă şi numai dacă este fundamental.

Cu alte cuvinte, spaţiul normat $\left(\mathbb{C},\|\cdot\|\right)$ este complet (*spaţiu Banach*).

Demonstraţie. Necesitatea. Dacă $z_n\xrightarrow{\mathbb{C}}z$, atunci $\left(\forall\right)\,\varepsilon>0$, $\left(\exists\right)\,n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\left|z_n-z\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\left(\forall\right)\,n\ge n_\varepsilon$. Pentru $m\ge n_\varepsilon$ avem, de asemenea, $\left|z_m-z\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Rezultă că

$$|z_n - z_m| \le |z_n - z| + |z_m - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ (\forall)\ n,\ m \ge n_\varepsilon$$

deci şirul $(z_n)_n$ este fundamental.

Suficienţa. Dacă şirul $(z_n)_n$ este fundamental în $\mathbb{C}$, atunci şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt fundamentale în $\mathbb{R}$ (Teorema 6.2.2). Din criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru şiruri de numere reale rezultă că şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ sunt convergente în $\mathbb{R}$.

Aşadar, există $x,\ y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x$ şi $y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} y$. Din Teorema 6.2.1 rezultă că

$$z_n = x_n + i\,y_n \xrightarrow{\mathbb{C}} z = x + i\,y.$$

Definiţia 6.2.3. Şirul $(z_n)_n$ are *limita infinită* şi se notează $z_n \xrightarrow{\mathbb{C}} \infty$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Exemplu 6.2.2. Şirul $\left((-5)^n\right)_n$ are limita infinită.

Mulţimea numerelor complexe se extinde introducând *punctul de la infinit*, ∞. Se notează cu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definiţia 6.2.4. Se numeşte *vecinătate* a lui ∞ orice mulţime V cu proprietatea că există $r > 0$ astfel încât $V \supset \{z \in \mathbb{C};\ |z| > r\} \cup \{\infty\}$ (Fig. 6.3).

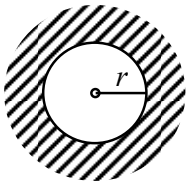


Fig. 6.3

Definiţia 6.2.5. Seria de numere complexe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ este *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$, unde $s_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n$, este convergent în $\mathbb{C}$.

Teorema 6.2.4. Condiţia necesară şi suficientă ca seria de numere complexe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ să fie convergentă în $\mathbb{C}$ este ca $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \ge n_\varepsilon \text{ şi } (\forall)\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstraţie. Dacă notăm $s_n = z_0 + z_1 + ... + z_n$, atunci avem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(s_n)_n$ este convergent în $\mathbb{C}$, deci dacă şi numai dacă şirul $(s_n)_n$ este fundamental în $\mathbb{C}$. Şirul sumelor parţiale este fundamental dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$|z_n - z_m| < \varepsilon,\ (\forall)\ n, m \geq n_\varepsilon$$

deci dacă şi numai dacă

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + ... + z_{n+p}| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq n_\varepsilon \text{ şi } (\forall)\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Definiţia 6.2.6. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ este *absolut convergentă* în $\mathbb{C}$ dacă seria de numere reale pozitive $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ este convergentă în $\mathbb{R}$.

Teorema 6.2.5. Orice serie absolut convergentă este convergentă.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din Teorema 6.2.4 şi din inegalitatea generalizată a modulului:

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + ... + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + ... + |z_{n+p}|.$$

Exemplu 6.2.3. În cazul *seriei geometrice* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, şirul sumelor parţiale este $(s_n)_n$, unde

$$s_n = 1 + z + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

În consecinţă, seria este convergentă dacă şi numai dacă $|z| < 1$ şi suma ei este $\frac{1}{1-z}$.

6.3. Funcţii elementare

Funcţiile care asociază unui număr $z \in \mathbb{C}$ o singură valoare din $\mathbb{C}$ se numesc *funcţii uniforme*, iar cele care asociază unui număr $z \in \mathbb{C}$ mai multe valori din $\mathbb{C}$ se numesc *funcţii multiforme*.

Funcţia exponenţială e^z

Fie $z \in \mathbb{C}$. Functia e^z se defineste astfel:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots .$$

Definiţia are sens, deoarece, conform criteriului raportului, seria din dreapta este absolut convergentă pe $\mathbb{C}$. Cum $\mathbb{C}$ este spaţiu Banach, rezultă că seria este convergentă pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Această funcţie are următoarele proprietăţi:

a) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$, $(\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

b) $e^0 = 1$.

c) $e^z \neq 0$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$ şi $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

d) Pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$ are loc *formula lui Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta .$$

e) Funcţia exponenţială este periodică, cu perioada $2\pi i$. În particular,

$e^{i\,2k\pi} = 1$, $(\forall)\ k \in \mathbb{Z}$.

Ţinând seama de dezvoltarea în serie Mac Laurin a funcţiei reale $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, se constată că funcţia de variabilă complexă $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, este generalizarea funcţiei g, în sensul că restricţia $f|_{\mathbb{R}} = g$.

Observaţia 6.3.1. Din proprietatea a) de mai sus şi din formula lui Euler rezultă că dacă $z = x + iy \in \mathbb{C}$, atunci

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y .$$

Observaţia 6.3.2. Ţinând seama de forma trigonometrică a numărului complex $z \in \mathbb{C}^*$ şi de formula lui Euler, rezultă:

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

relaţie cunoscută sub numele de *forma exponenţială* a numărului complex $z \in \mathbb{C}^*$.

Exemplul 6.3.1. $1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$; $-2=2\cdot e^{i\pi}$.

Funcţiile trigonometrice

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, definim:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots.$$

Cu argumentele din cazul funcţiei exponenţiale, se contată că funcţiile $z\mapsto\cos z:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ şi $z\mapsto\sin z:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ au sens pentru orice $z\in\mathbb{C}$ şi că aceste funcţii sunt generalizări ale funcţiilor de variabilă reală $x\mapsto\cos x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, respectiv $x\mapsto\sin x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Se poate arăta că au loc formulele:

1) $e^{iz}=\cos z+i\sin z$;

2) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$;

3) $\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$

4) $\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$;

5) $\sin 2z=2\sin z\cos z$, etc.

Exemplul 6.3.2. $\cos i=\dfrac{e^2+1}{2e}$;

$$\cos\frac{\pi}{2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}}{2}=0.$$

Funcţiile hiperbolice

Cu argumente similare celor de mai sus, pentru orice $z\in\mathbb{C}$, definim:

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

Funcţia logaritmică

Logaritmul unui număr complex $z \in \mathbb{C}^*$ este, prin definiţie, mulţimea:

$\operatorname{Ln} z = \{ \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z} \}$.

Atunci

$e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i \arg z} \cdot e^{i 2k\pi} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$, deci

$e^{\operatorname{Ln} z} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = z$.

Prin urmare, $\operatorname{Ln} z = \{ w \in \mathbb{C};\ e^w = z \}$.

Aşadar, funcţia $z \to \operatorname{Ln} z$ este o funcţie multiformă.

Exemplul 6.3.3.

1) $\operatorname{Ln}(1+i) = \left\{ \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right);\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2) $\operatorname{Ln}(-i) = \left\{ i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right);\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3) $\operatorname{Ln}(-5) = \{ \ln 5 + i(\pi + 2k\pi);\ k \in \mathbb{Z} \}$.

4) $\operatorname{Ln} 1 = \{ 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z} \}$.

Fie acum $T = \{ z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \le 0 \}$ (Fig. 6.4).

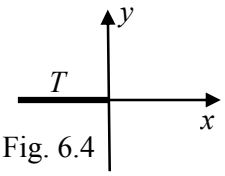


Fig. 6.4

Definim funcţia

$$\ln : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C},\ \ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Funcţia $z \to \ln z : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}$ este uniformă (univocă) şi se numeşte *ramura principală* a funcţiei Ln.

Exemplul 6.3.4. Evident $\ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$, $\ln(-i) = -\frac{\pi}{2}i$, dar $\ln(-5)$ nu are sens, deoarece $-5 \in T$.

Funcţia putere

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. *Funcţia putere* este o funcţie multiformă care se defineşte astfel:

$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$, $z \ne 0$

Exemplul 6.3.5. $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i\left[\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aşadar i^i este un număr real (*Euler*).

Funcţia radical

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Funcţia radical* este o funcţie multiformă, care se defineşte în modul următor. Fie $z \in \mathbb{C}^*$. Definim:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}},\ k = 0,1,\ldots,n-1 \right\} \text{ şi}$$

$$\sqrt[n]{0} = \{0\}.$$

Exemplul 6.3.6.

$$\sqrt[3]{1+i} = \left\{ \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}};\ k = 0,\ 1,\ 2 \right\} = \left\{ \sqrt[6]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}+i\frac{2k\pi}{3}};\ k = 0,\ 1,\ 2 \right\}. \text{ Aşadar}$$

$$\sqrt[3]{1+i} = \left\{ \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \right),\ \sqrt[6]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12} \right) \right\}.$$

6.4. Funcţii olomorfe

Fie $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă de variabilă complexă. Dacă $z = x + iy \in A$, atunci

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y),$$

unde

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy),\ v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy).$$

Funcţiile u şi v sunt funcţii reale definite pe mulţimea

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ z = x+iy \in A \right\} \text{ şi } f = u + iv.$$

Exemplul 6.4.1.

1) Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Dacă $z = x + iy$, atunci

$$f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Rezultă că $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

2) Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$, $z = x + iy$. Atunci, deoarece

$$e^z = e^x \cos y + i\, e^x \sin y,$$

rezultă că $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$.

3) Fie $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z = x + i\,y$. Deoarece

$$\frac{1}{z} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2},$$

rezultă $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

Definiţia 6.4.1. Fie $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in A'$.

Funcţia f *are limita* $l = a + i\,b$ şi vom scrie $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b$.

Funcţia f este *continuă* în z_0 dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Aşadar, funcţia f este continuă în z_0 dacă şi numai dacă funcţiile u şi v sunt continue în (x_0, y_0).

Definiţia 6.4.2. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{C}$ şi $z_0 \in A$. Spunem că f este *olomorfă* (*monogenă*, *analitică*) în z_0 dacă există şi este finită limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \qquad \textbf{(6.2)}$$

Limita (6.2) se numeşte *derivata complexă* a lui f în z_0 şi se notează cu $f'(z_0)$.

Funcţia f se numeşte *olomorfă* pe A dacă este olomorfă în orice punct $z_0 \in A$.

Exemplul 6.4.2.

1) Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$. Într-adevăr, dacă $z_0 \in \mathbb{C}$, atunci

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left(z^2 + z\,z_0 + z_0^2 \right) = 3 z_0^2,$$

deci $f'(z) = 3z^2$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$.

2) În general, funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ şi

$f'(z)=n\,z^{n-1}$, $(\forall)\ z\in\mathbb{C}$.

Observaţia 6.4.1. Se demonstrează uşor că dacă f este olomorfă în z_0, atunci f este continuă în z_0.

Teorema 6.4.1. Fie $A\subset\mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f:A\to\mathbb{C}$. Dacă funcţia $f=u+i\,v$ este olomorfă în $z_0=x_0+i\,y_0\in A$, atunci funcţiile u şi v au derivate parţiale de ordinul întâi în punctul (x_0,y_0) şi acestea verifică *condiţiile Cauchy-Riemann*:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{cases}.$$

Demonstraţie. Deoarece există $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$, această limită nu depinde de direcţia după care $z\to z_0$ în planul complex.

Astfel, dacă $z\to z_0$ pe dreapta $y=y_0$ (Fig. 6.5), deci dacă $z=x+i\,y_0$, avem:

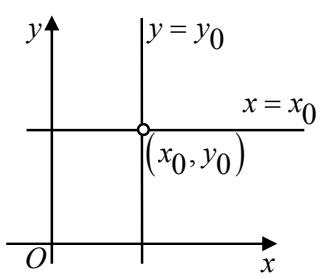


Fig. 6.5

$$f'(z_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x+i\,y_0)-f(x_0+i\,y_0)}{x+i\,y_0-x_0-i\,y_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)+i\,v(x,y_0)-u(x_0,y_0)-i\,v(x_0,y_0)}{x-x_0}=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Aşadar

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \qquad \textbf{(6.3)}$$

Pe de altă parte, dacă $z\to z_0$ pe dreapta $x=x_0$, deci dacă $z=x_0+i\,y$, avem

$$f'(z_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0+i\,y)-f(x_0+i\,y_0)}{i(y-y_0)}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Aşadar

$$f'(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0). \qquad \textbf{(6.4)}$$

Din (6.3) şi (6.4) rezultă condiţiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{cases}.$$

Corolarul 6.4.1. Dacă o funcţie $f=u+i\,v$ nu satisface condiţiile Cauchy–Riemann într-un punct, atunci această funcţie nu este olomorfă în acel punct.

Exemplul 6.4.3. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\overline{z}=x-i\,y$. Atunci $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$, deci $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$. Aşadar, f nu este olomorfă în niciun punct.

Observaţia 6.4.2. Afirmaţia reciprocă Teoremei 6.4.1 nu este în general adevărată.

Există funcţii care satisfac condiţiile Cauchy–Riemann într-un punct, dar nu sunt olomorfe în acel punct.

Exemplul 6.4.4. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2-\overline{z}^2}{z\cdot\overline{z}}, & \text{dacă } z\neq 0\\[2ex] 0, & \text{dacă } z=0\end{cases}$.

Atunci $f=u+i\,v$, unde

$$u(x,y)=0 \text{ şi } v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0\\[2ex] 0, & \text{dacă } x=0 \text{ şi } y=0\end{cases}.$$

Este clar că

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0}=0 \text{ şi } \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=0.$$

Rezultă că f satisface condiţiile Cauchy-Riemann în $(0,0)$.

Cum v nu este continuă în $(0,0)$, rezultă că f nu este continuă în $(0,0)$, deci f nu este olomorfă în $(0,0)$.

Teorema 6.4.2. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f = u + i\,v : A \to \mathbb{C}$ şi $z_0 = x_0 + i\,y_0$ din A. Dacă u, v sunt de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0) şi u şi v satisfac relaţiile Cauchy-Riemann în (x_0, y_0), atunci f este olomorfă în z_0.

Demonstraţie. Deoarece u şi v sunt diferenţiabile în (x_0, y_0), atunci

$$u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + \varphi(h, k),$$

$$v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k + \psi(h, k), \text{ unde}$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{\varphi(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{\psi(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Fie $w = h + i\,k$. Atunci

$$f(z_0 + w) - f(z_0) = u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) + i\,\big(v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0)\big) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \cdot h + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot k +$$

$$+ \varphi(h, k) + i\,\psi(h, k).$$

Ţinând seama de condiţiile Cauchy-Riemann, rezultă că

$$f(z_0 + w) - f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \cdot h + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \cdot k +$$

$$+ \varphi(h, k) + i\,\psi(h, k) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \cdot (h + i\,k) + \varphi(h, k) + i\,\psi(h, k).$$

În consecinţă

$$\frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\varphi + i\,\psi}{|w|} \cdot \frac{|w|}{w} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\varphi + i\,\psi}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cdot e^{i\theta}.$$

Atunci

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

deci f este olomorfă în z_0.

Exemplul 6.4.5. Funcţia exponenţială $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^z$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ şi $f'(z)=e^z$, $(\forall)\ z\in\mathbb{C}$.

Într-adevăr, dacă $z=x+iy$ şi $f=u+iv$, atunci

$u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\sin y$.

Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\ (\forall)\ z\in\mathbb{C}.$$

Aceste derivate sunt continue în orice punct şi satisfac condiţiile Cauchy-Riemann, deci funcţia exponenţială este olomorfă pe $\mathbb{C}$. Ţinând seama de (6.3), rezultă că

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(\cos y+i\,\sin y)=e^z.$$

Observaţia 6.4.3. Fie $A\subset\mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f=u+iv:A\to\mathbb{C}$ şi $z_0=x_0+iy_0$ din A. Se poate arăta că f este olomorfă în z_0 dacă şi numai dacă u şi v sunt diferenţiabile în (x_0,y_0) şi derivatele lor parţiale de ordinul întâi satisfac condiţiile Cauchy-Riemann în acest punct.

Fie $A\subset\mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă. Reamintim că o funcţie $u:A\to\mathbb{R}$ de clasă C^2 se numeşte *armonică* pe A dacă în orice punct din A are loc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

sau

$$\Delta u=0.$$

Fie $D\subset\mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+iy\in D\right\}$.

Teorema 6.4.3. Dacă $f=u+iv$ este o funcţie olomorfă pe D şi $u,v\in C^2(A)$, atunci funcţiile u şi v sunt armonice pe A.

Demonstraţie. Ţinând seama de condiţiile Cauchy-Riemann, obţinem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0,$$

conform teoremei lui Schwarz. Similar se arată că funcţia v este armonică pe A.

Ne punem acum problema inversă şi anume: dacă se dă o funcţie $u : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, armonică pe mulţimea deschisă A, există o funcţie olomorfă pe $D = \{x + i\,y;\ (x, y) \in A\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ astfel încât $f = u + i\,v$? Răspunsul depinde de mulţimea D, fiind afirmativ în cazul domeniilor simplu conexe.

Definiţia 6.4.3. O mulţime deschisă şi conexă $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte *domeniu*. Un domeniu $D \subset \mathbb{C}$ se numeşte *simplu conex* dacă oricare ar fi curba simplă şi închisă $\Gamma \subset D$, domeniul mărginit Δ a cărui frontieră este curba Γ este inclus în D (Fig. 6.6). Un domeniu care nu este simplu conex se numeşte *multiplu conex*.

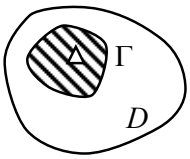


Fig. 6.6

Exemplul 6.4.6.

1) Bila deschisă de centru z_0 şi de rază r, $B(z_0, r)$, este un domeniu simplu conex.

2) Semiplanul superior $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ este de asemenea un domeniu simplu conex.

3) $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ este un domeniu dublu conex.

4) Dacă $0 < r < R$, atunci coroana circulară $\{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < R\}$ este un domeniu dublu conex.

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + i\,y \in D\}$.

Teorema 6.4.4. Fie funcţia $u : A \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(A)$ armonică pe A. Atunci există o funcţie f olomorfă pe D astfel încât $u = \operatorname{Re} f$.

Demonstraţie. Considerăm forma diferenţială de ordinul întâi pe A:

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

unde

$$P(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y},\ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Deoarece funcţia u este armonică, vom avea $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, deci forma diferenţială ω

este închisă. Domeniul A fiind simplu conex, rezultă că ω este exactă, deci că există o funcţie $v: A \to \mathbb{R}$, $v \in C^1(A)$, astfel încât

$\omega = dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$. În plus, avem

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

adică tocmai condiţiile Cauchy-Riemann. Conform Teoremei 6.4.2, funcţia $f = u + iv$ este olomorfă pe D.

Definiţia 6.4.4. Dacă funcţia $f = u + iv$ este olomorfă pe D, atunci funcţiile u şi v se numesc *armonic conjugate* pe D.

Observaţia 6.4.4. Funcţia v din Teorema 6.4.4, pentru care $\omega = dv$, este unică până la adăugarea unei constante reale, deci funcţia olomorfă f dată de teoremă este unică până la adăugarea unei constante pur imaginare. În mod asemănător, se poate arăta că o funcţie olomorfă este determinată de partea sa imaginară în mod unic până la adăugarea unei constante reale.

Exemplul 6.4.7.

1) Să se găsească o funcţie olomorfă $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ ştiind că

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - x.$$

Evident, funcţia u este armonică pe $\mathbb{R}^2$. Din condiţiile Cauchy-Riemann obţinem că

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1, \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Integrând prima relaţie, avem

$$v(x, y) = 2xy - y + \varphi(x).$$

Funcţia φ se determină folosind cea de a doua condiţie de mai sus. Rezultă că $\varphi'(x) = 0$, deci $\varphi(x) = C = \text{const.}$ Prin urmare, $v(x, y) = 2xy - y + C$.

Dacă $z = x + iy$, atunci

$$f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C).$$

Făcând $y = 0$, obţinem $f(x) = x^2 - x + iC$, deci

$$f(z) = z^2 - z + iC.$$

2) Să se găsească o funcţie olomorfă $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f=u+i\,v$ ştiind că

$u(x,y)=e^x\cos y$ şi satisfăcând $f(0)=1$.

Se constată uşor că funcţia u este armonică pe $\mathbb{R}^2$. Din condiţiile Cauchy-Riemann obţinem că

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\sin y.$$

Integrând prima relaţie, avem

$$v(x,y)=e^x\sin y+\varphi(x).$$

Derivând această relaţie în raport cu x şi folosind cea de a doua condiţie Cauchy-Riemann, rezultă că $\varphi'(x)=0$, deci $\varphi(x)=C=\text{const.}$ Prin urmare, $v(x,y)=e^x\sin y+C$. Dacă $z=x+i\,y$, atunci

$$f(z)=e^x\cos y+i\left(e^x\sin y+C\right).$$

Făcând $y=0$, obţinem $f(x)=e^x+i\,C$, deci

$$f(z)=e^z+i\,C.$$

Cum $f(0)=1$, rezultă că $C=0$, deci

$$f(z)=e^z.$$

Observaţia 6.4.5. Forma diferenţială $\omega=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\,dx+\dfrac{\partial u}{\partial x}\,dy$ fiind exactă, putem obţine funcţia v a cărei diferenţială este ω, integrând forma diferenţială pe un drum poligonal de la un punct convenabil (x_0,y_0) la (x,y) şi adăugând o constantă arbitrară.

Alegând ca drum linia poligonală formată din segmentul care uneşte (x_0,y_0) cu (x,y_0) şi din segmentul care uneşte (x,y_0) cu (x,y), obţinem:

$$v(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(t,y_0)\right)dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt+C.$$

Exemplul 6.4.8. Să se găsească o funcţie olomorfă $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f=u+i\,v$, ştiind că

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+2x.$$

Din condiţiile Cauchy-Riemann obţinem că

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-6xy-2.$$

Totodată $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=6y-6y=0$, deci funcţia v este armonică pe $\mathbb{R}^2$. Vom determina funcţia u procedând ca în observaţia anterioară, deci

$$u(x,y)=\int_0^x \frac{\partial v}{\partial y}(t,0)\,dt+\int_0^y -\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,dt+k.$$

Aşadar

$$u(x,y)=\int_0^x 3t^2dt+\int_0^y(-6xt-2)dt+k=x^3-3xy^2-2y+k,$$

deci

$$f(z)=x^3-3xy^2-2y+k+i\left(3x^2y-y^3+2x\right).$$

Făcând $y=0$ şi $x=z$, obţinem

$$f(z)=z^3+2zi+k.$$

6.5. Integrala funcţiilor de o variabilă complexă

Fie $A\subset\mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $\gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t\in[a,b]$, o curbă netedă sau netedă pe porţiuni, orientată pozitiv (în sensul creşterii parametrului), astfel încât $\gamma\subset A$.

Considerăm o funcţie continuă $f:A\to\mathbb{C}$, $f=u+iv$. Prin definiţie

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_+}u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int_{\gamma_+}v(x,y)dx+u(x,y)dy=$$

$$=\int_a^b\left[u(x(t),y(t))\cdot x'(t)-v(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right]dt+$$

$$+\ i\int_a^b\left[v(x(t),y(t))\cdot x'(t)+u(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right]dt.$$

Dacă notăm cu $z(t)=x(t)+i\,y(t)$, atunci

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=\int_{a}^{b} f\big(z(t)\big)\cdot z'(t)\,dt\,. \qquad \textbf{(6.5)}$$

Următorul exerciţiu va fi util în cele ce urmează.

Exemplul 6.5.1. Fie $a\in\mathbb{C}$, $r>0$ şi $\gamma=\{z\in\mathbb{C};\,|z-a|=r\}$. Să se arate că

$$\int_{\gamma}(z-a)^n\,dz=\begin{cases}0, & \text{dacă } n\neq -1\\ 2\pi i, & \text{dacă } n=-1\end{cases}.$$

Curba γ se scrie parametric sub forma $z=a+re^{it}$, $t\in[0,\,2\pi]$. Dacă $n\neq -1$ atunci, folosind (6.5), rezultă

$$\int_{\gamma}(z-a)^n\,dz=i\,r^{n+1}\cdot\int_{0}^{2\pi}e^{i(n+1)t}\,dt=\frac{r^{n+1}}{n+1}\cdot e^{i(n+1)t}\Big|_{0}^{2\pi}=0\,.$$

Similar, pentru $n=-1$ obţinem

$$\int_{\gamma}\frac{1}{z-a}\,dz=i\cdot\int_{0}^{2\pi}dt=2\pi i\,.$$

Se poate demonstra că integrala complexă are următoarele proprietăţi:

1) $\displaystyle\int_{\gamma_-} f(z)\,dz=-\int_{\gamma_+} f(z)\,dz$;

2) $\displaystyle\int_{\gamma}(\alpha f+\beta g)(z)\,dz=\alpha\int_{\gamma} f(z)\,dz+\beta\int_{\gamma} g(z)\,dz$, $\alpha,\,\beta\in\mathbb{C}$;

3) Dacă $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ este juxtapunerea curbelor γ_1 şi γ_2, atunci

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,;$$

4) $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right|\le\int_{\gamma}|f(z)|\,dz$;

5) $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le M\,L$, unde $M = \sup\limits_{z\in\gamma}\left|f(z)\right|$, iar L este lungimea lui γ.

Teorema 6.5.1. (Teorema fundamentală a lui Cauchy)

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D. Atunci, pentru orice curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni $\gamma \subset D$ avem

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Demonstraţie. Fie $f = u + i\,v$. Vom demonstra teorema în cazul particular când $u,\, v \in C^1(D)$. Fie Δ domeniul mărginit a cărui frontieră este curba γ (Fig. 6.7). Ţinând seama de formula Green-Riemann şi de condiţiile Cauchy-Riemann are loc

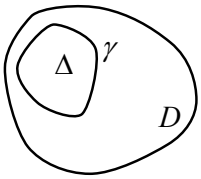


Fig. 6.7

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int\limits_{\gamma} v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\Delta}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + i\iint\limits_{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy = 0.$$

Corolarul 6.5.1. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D şi $\gamma_1,\, \gamma_2 \subset D$ drumuri simple, netede pe porţiuni, care au aceleaşi capete. Atunci

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Demonstraţie. Considerăm drumul închis $\gamma = \gamma_1 \cup \overline{\gamma}_2$ (Fig. 6.8).

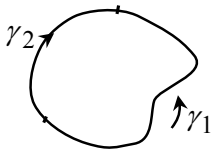


Fig. 6.8

Conform teoremei fundamentale a lui Cauchy avem

$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$, deci

$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$, de unde rezultă corolarul.

Observaţia 6.5.1. Conform Corolarului 6.5.1, integrala unei funcţii f olomorfă pe un domeniu simplu conex este *independentă de drum*, ceea ce ne permite să notăm cu

$$\int_{z_0}^{z} f(u)\,du$$

integrala pe un drum arbitrar de la z_0 la z, conţinut în acest domeniu.

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 6.5.2. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D şi $z_0 \in D$ fixat. Atunci funcţia

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(u)\,du \qquad \textbf{(6.6)}$$

este olomorfă pe D şi $F'(z) = f(z)$.

Definiţia 6.5.1. În condiţiile Teoremei 6.5.2, funcţia F dată de (6.6) se numeşte *primitivă* a funcţiei f pe domeniul D.

Cu alte cuvinte, Teorema 6.5.2 asigură existenţa unei primitive pentru o funcţie olomorfă pe un domeniu simplu conex, dată de formula (6.6).

În continuare, prezentăm fără demonstraţie Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe.

Teorema 6.5.3. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $\Gamma \subset D$ o curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni, orientată pozitiv şi Δ domeniul mărginit care are frontiera Γ. Fie $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \subset \Delta$ curbe simple, închise, netede pe porţiuni, orientate pozitiv şi $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ domeniile mărginite care au frontierele $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$. Fie $\widetilde{D} \subset D$ cu proprietatea $\widetilde{D} \supset \supset \overline{\Delta} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup ... \cup \Delta_n)$ şi fie $f : \widetilde{D} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

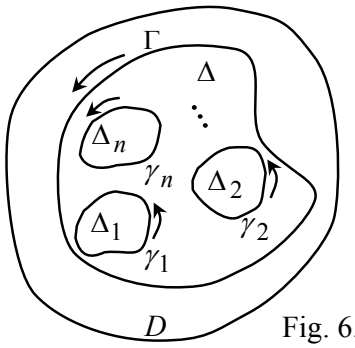


Fig. 6.9

Teorema 6.5.4. (Formula integrală a lui Cauchy)

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D. Fie $\gamma \subset D$ o curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni, orientată pozitiv şi fie Δ domeniul simplu conex şi mărginit a cărui frontieră este γ. Atunci, pentru orice $z_0 \in \Delta$ avem

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \qquad \textbf{(6.7)}$$

Demonstraţie. Fie $z_0 \in \Delta$. Mulţimea Δ fiind deschisă, există $r > 0$, suficient de mic, astfel încât $\overline{B(z_0, r)} \subset \Delta$. Notăm cu C frontiera orientată pozitiv a acestei bile (Fig. 6.10).

Funcţia $z \to \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ este olomorfă pe domeniul dublu conex $\Delta \setminus \overline{B(z_0, r)}$. Conform Teoremei lui Cauchy pentru domenii dublu conexe, rezultă că

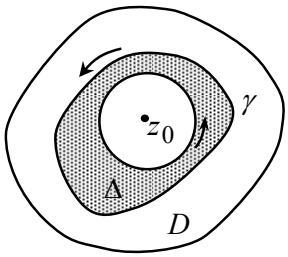


Fig. 6.10

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{C} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Dar

$$\int_{C} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{C} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz + f(z_0) \cdot \int_{C} \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

Vom arăta că prima integrală este egală cu 0. Într-adevăr, deoarece funcţia f este continuă pe D, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice z care satisface $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Alegem $r < \delta(\varepsilon)$. Atunci

$$\left| \int_{C} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \le \int_{C} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}\, ds < \frac{\varepsilon}{r} \cdot \int_{C} ds = \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, rezultă că

$$\int_{C} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Deoarece $\displaystyle\int_{C} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i$, obţinem

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i \cdot f(z_0),$$

de unde rezultă (6.7).

Pentru domenii multiplu conexe formula lui Cauchy se enunţă în modul următor:

Teorema 6.5.5. Fie $\Delta \subset \mathbb{C}$ un domeniu mărginit, multiplu conex, cu frontiera $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_p$, unde $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_p$ sunt curbe simple, închise, netede pe porţiuni, orientate pozitiv şi Δ_k, $1 \le k \le p$, sunt domeniile mărginite de curbele Γ_k, $1 \le k \le p$ (Fig. 6.11). Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $D \supset \overline{\Delta} \setminus \bigcup_{k=1}^{p} \Delta_k$ şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci, pentru orice $z_0 \in \Delta$, avem:

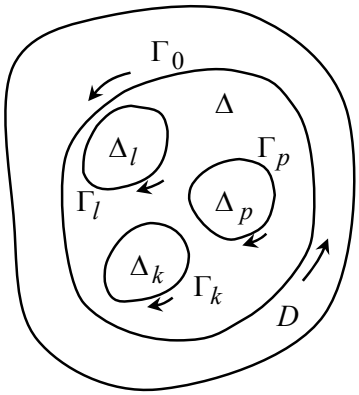


Fig. 6.11

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{k=1}^{p} \int_{\Gamma_k} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz .$$

Derivatele unei funcţii olomorfe

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $z_0 \in D$. Vom determina expresia derivatei $f'(z_0)$.

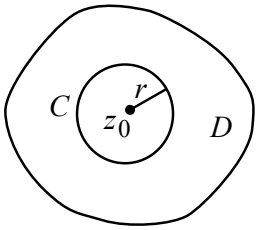


Fig. 6.12

Fie $r > 0$ astfel încât $B(z_0, r) \subset D$. Notăm cu C frontiera orientată pozitiv a acestei bile (Fig. 6.12).

Fie $h \in \mathbb{C}$ astfel încât $z_0 + h \in B(z_0, r)$. Din formula lui Cauchy, obţinem:

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\int_C \frac{f(z)}{z-z_0-h}\,dz - \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \right) =$$

$$= \frac{h}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}\,dz =$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\cdot\left(\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz+h\cdot\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\,dz\right).$$

Atunci

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\left(\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz+h\cdot\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\,dz\right).$$

Pe de altă parte, funcţia f, fiind continuă, este mărginită pe C. Dacă $M=\sup\limits_{z\in C}|f(z)|$, avem

$$\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\,dz\right|\le\frac{M}{r^2(r-|h|)}\cdot 2\pi r=\frac{2\pi M}{r(r-|h|)}.$$

În consecinţă

$$\frac{h}{2\pi i}\cdot\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}\,dz\to 0,\text{ când } h\to 0,$$

deci

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$

Aşadar

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$

În general, se poate demonstra teorema:

Teorema 6.5.6. Fie $D\subset\mathbb{C}$ un domeniu şi $f:D\to\mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci f admite derivate de orice ordin.

Mai precis, dacă $z_0\in D$, iar $\Gamma\subset D$ este o curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni, astfel încât domeniul Δ mărginit de curba Γ este inclus în D şi conţine z_0, atunci

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\cdot\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

6.6. Şiruri şi serii de funcţii complexe

Definiţia 6.6.1. Fie $f_n,\ f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$. Şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *uniform convergent* pe D la funcţia f dacă şi numai dacă

$$\|f_n - f\| = \sup\left\{\left|f_n(z) - f(z)\right|;\ z \in \mathrm{D}\right\} \to 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Fie acum seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, unde $u_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$. Putem considera şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\geq 0}$, unde $s_n : D \to \mathbb{C}$, $s_n(z) = \sum_{i=0}^{n} u_i(z)$.

Definiţia 6.6.2. Seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se numeşte *convergentă* într-un punct $z \in D$, dacă şirul $(s_n(z))_{n\geq 0}$ este convergent. Mulţimea A a punctelor $z \in D$ în care seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergentă se numeşte *mulţimea de convergenţă* a seriei de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Funcţia $s : A \to \mathbb{C}$, definită prin $s(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z),\ (\forall)\ z \in D$, se numeşte *suma seriei* de funcţii. Vom scrie $s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sau $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z),\ z \in A$.

Definiţia 6.6.3. Seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se numeşte *uniform convergentă* pe D dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$ este uniform convergent.

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 6.6.1. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ o serie de funcţii uniform convergentă pe D şi s suma sa. Atunci:

1) Dacă funcţiile u_n sunt continue pe D, atunci şi suma s este continuă. În plus, pentru orice curbă simplă $\gamma \subset D$, netedă sau netedă pe porţiuni avem

$$\int_{\gamma} s(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} u_n(z)\, dz .$$

2) Dacă funcţiile u_n sunt olomorfe pe D, atunci şi suma s este olomorfă pe D şi

$$s'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(z),\ (\forall)\ z \in D .$$

6.7. Serii de puteri

Definiţia 6.7.1. O serie de funcţii de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,\ z \in \mathbb{C}, \qquad \textbf{(6.8)}$$

unde $(c_n)_n$ este un şir de numere complexe, se numeşte *serie de puteri*.

Dacă notăm cu A mulţimea de convergenţă a seriei de puteri (6.8), atunci se observă că $0 \in A$, deci $A \neq \varnothing$. Are loc teorema:

Teorema 6.7.1. (Teorema Abel)

Pentru orice serie de puteri există un număr real ρ, $0 \le \rho \le \infty$, cu proprietăţile:

1) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| < \rho$, seria de puteri (6.8) este absolut convergentă;

2) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| > \rho$, seria de puteri (6.8) este divergentă;

3) Pentru orice r satisfăcând $0 < r < \rho$, seria de puteri (6.8) este uniform convergentă pe domeniul $B(0, r)$;

4) Dacă $\rho = 0$, atunci $A = \{0\}$;

5) Dacă $\rho = \infty$, atunci $A = \mathbb{C}$.

Definiţia 6.7.2. Numărul ρ se numeşte *raza de convergenţă* a seriei de puteri, iar bila $B(0, \rho)$ se numeşte *mulţimea de convergenţă* a seriei de puteri.

Pentru calculul razei de convergenţă se utilizează următoarele teoreme.

Teorema 6.7.2. (Teorema Cauchy-Hadamard)

Dacă ρ este raza de convergenţă a seriei de puteri (6.8) şi $\omega = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, atunci:

1) Dacă $0<\omega<\infty$, atunci $\rho=\frac{1}{\omega}$;

2) Dacă $\omega=0$, atunci $\rho=\infty$;

3) Dacă $\omega=\infty$, atunci $\rho=0$.

În continuare facem convenţia $\frac{1}{0}=\infty$ şi $\frac{1}{\infty}=0$.

În practică se foloseşte următorul rezultat mai puţin general, dar satisfăcător pentru seriile de puteri întâlnite în aplicaţii.

Teorema 6.7.3. Fie ρ raza de convergenţă a seriei de puteri (6.8).

1) Dacă există $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\rho=\frac{1}{l}$;

2) Dacă există $l_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\rho=l_1$.

Exemplul 6.7.1. Fie seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots.$$

Folosind Teorema 6.7.3, 2), raza de convergenţă este $\rho=1$. Conform Teoremei lui Abel, seria este absolut convergentă pentru $|z|<1$ şi divergentă dacă $|z|>1$. Pentru $|z|=1$ seria de puteri este, evident, divergentă.

În acest caz,

$$s_n(z)=1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)=\frac{1}{1-z}$, dacă $|z|<1$. Aşadar, pentru $|z|<1$ putem scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}.$$

6.8. Serii Taylor

Teorema 6.8.1. Fie $D\subset\mathbb{C}$ un domeniu, $f:D\to\mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D, $z_0\in D$ şi $\rho>0$ astfel încât $\overline{B(z_0,\rho)}\subset D$. Atunci

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n,\ (\forall)\ z\in B(z_0,\rho)$$

unde

$$c_n=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(z_0).$$

Demonstraţie. Fie $z_0\in D$ şi $\rho>0$ astfel încât $\overline{B(z_0,\rho)}\subset D$ (Fig. 6.13). Notăm $C=\{z\in\mathbb{C};\,|z-z_0|=\rho\}$. Fie $z\in B(z_0,\rho)$. Atunci

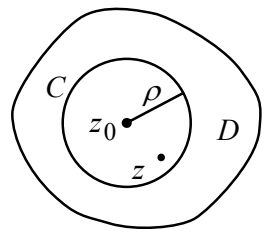


Fig. 6.13

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{u-z}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)-(z-z_0)}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{u-z_0}\right)}\,du.$$

Dar $\dfrac{|z-z_0|}{|u-z_0|}=\dfrac{|z-z_0|}{\rho}<1$, deci

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{u-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n.$$

În consecinţă

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du\right)(z-z_0)^n.$$

Dacă notăm

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du,$$

atunci

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n.$$

Pe de altă parte, conform Teoremei 6.5.6, avem

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du$$

deci

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\, du = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Definiţia 6.8.1. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D şi $z_0 \in D$. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{6.9}$$

unde coeficienţii c_n sunt daţi de

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{6.10}$$

se numeşte *seria Taylor a funcţiei* f *în jurul punctului* z_0.

Din Teorema 6.8.1 rezultă că

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \ (\forall)\ z \in B(z_0, \rho).$$

Propoziţia 6.8.1. Fie f o funcţie olomorfă pe domeniul D, $z_0 \in D$ şi $\rho > 0$ astfel încât $\overline{B(z_0,\rho)} \subset D$. Dacă $C = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = \rho\}$, atunci

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0) + (z-z_0)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^2 (u-z)}\, du.$$

Demonstraţie. Conform formulei integrale Cauchy, $(\forall)\ z \in B(z_0,\rho)$ avem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{u-z}\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{u-z_0}\right)}\, du.$$

Alegând $q = \frac{z-z_0}{u-z_0}$ în egalitatea evidentă $\frac{1}{1-q} = 1 + q + \frac{q^2}{1-q}$ obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{u-z_0} \left[1 + \frac{z-z_0}{u-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(u-z_0)(u-z_0-(z-z_0))} \right] du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{u-z_0}\, du + \frac{z-z_0}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^2}\, du + \frac{(z-z_0)^2}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^2 (u-z)}\, du.$$

În sfârşit, din Teorema 6.5.6 deducem:

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+(z-z_0)^2\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^2(u-z)}\,du .$$

Teorema 6.8.2. (Inegalităţile lui Cauchy)

Fie f o funcţie olomorfă pe D, $z_0\in D$ şi $\rho>0$ astfel încât $\overline{B(z_0,\rho)}\subset D$. Dacă $C=\{z\in\mathbb{C};\,|z-z_0|=\rho\}$ şi $M=\sup\{|f(z)|;\,z\in C\}$, atunci

$$|c_n|\le\frac{M}{\rho^n},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}.$$

Se obţin imediat următoarele consecinţe.

Teorema 6.8.3. (Teorema Liouville)

Orice funcţie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ olomorfă şi mărginită este constantă.

Demonstraţie. Fie $z_0\in\mathbb{C}$ şi $C=\{z\in\mathbb{C};\,|z-z_0|=\rho\}$, cu $\rho>0$ arbitrar. Funcţia f fiind mărginită pe $\mathbb{C}$, există $M>0$ finit astfel încât $M=\sup\{|f(z)|;\,z\in\mathbb{C}\}$. Făcând $\rho\to\infty$ în inegalităţile lui Cauchy, obţinem că $c_n=0$, $(\forall)\ n\ge 1$. Din Teorema 6.8.1 rezultă că $f(z)=c_0$, $(\forall)\ z\in B(z_0,\rho)$, deci $f(z)=c_0$, $(\forall)\ z\in\mathbb{C}$.

Teorema 6.8.4. (Teorema fundamentală a algebrei)

Orice polinom $P\in\mathbb{C}[X]$ de grad mai mare sau egal cu 1 are cel puţin o rădăcină în $\mathbb{C}$.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $P(z)\ne 0$, $(\forall)\ z\in\mathbb{C}$. Atunci funcţia $f(z)=\dfrac{1}{P(z)}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ şi $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$. În consecinţă, există $\rho>0$ astfel încât pentru orice $z\in\mathbb{C}$, cu $|z|>\rho$, $|f(z)|\le 1$. Pe de altă parte, funcţia f fiind olomorfă este continuă pe mulţimea compactă $\overline{B(0,\rho)}$, deci f este mărginită pe $\overline{B(0,\rho)}$.

Fie $M=\sup\{|f(z)|;\,z\in\overline{B(0,\rho)}\}$. Atunci $|f(z)|\le M+1$, $(\forall)\ z\in\mathbb{C}$, deci funcţia f este mărginită pe $\mathbb{C}$. Conform teoremei lui Liouville, rezultă că $f(z)=c$, $(\forall)\ z\in\mathbb{C}$, unde c este o constantă nenulă. Atunci $P(z)=\dfrac{1}{c}$, deci polinomul P are gradul zero, ceea ce contrazice ipoteza.

6.9. Serii Laurent

Definiţia 6.9.1. Se numeşte *serie Laurent centrată în punctul* $z_0 \in \mathbb{C}$ orice serie de funcţii de forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \; c_n \in \mathbb{C}. \tag{6.11}$$

Seria $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ se numeşte *partea principală a seriei Laurent* (6.11), iar seria $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ se numeşte *partea Taylor a seriei Laurent* (6.11).

Evident

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Definiţia 6.9.2. Seria Laurent (6.11) se numeşte *convergentă* într-un punct dacă cele două serii sunt simultan convergente în acel punct.

Teorema 6.9.1. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R$, $\Delta = \{ z \in \mathbb{C};\, r < |z - z_0| < R \}$ şi $f : \Delta \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci, pentru orice $z \in \Delta$ avem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}}\, du \tag{6.12}$$

iar C este un cerc cu centrul în z_0 şi cu raza ρ, conţinut în Δ. Mai mult, dezvoltarea în serie Laurent este unică.

Demonstraţie. Fie $z \in \Delta$ un punct oarecare fixat şi C_1 şi C_2 cercurile de centru z_0, de raze r', respectiv R', orientate pozitiv, cu $r < r' < R' < R$, punctul z aflându-se în coroana circulară determinată de cercurile C_1 şi C_2 (Fig. 6.14).

Fie C un cerc cu centrul z_0 şi de rază ρ conţinut în această coroană circulară. Din formula lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe, rezultă că:

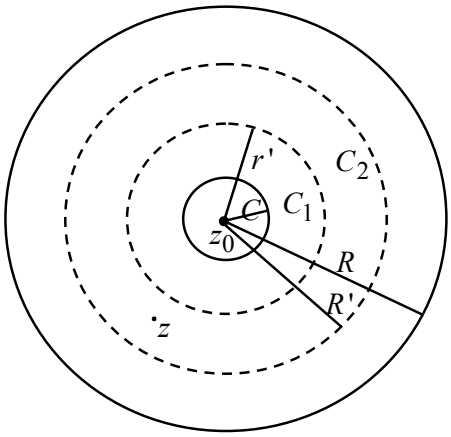


Fig. 6.14

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{u-z}\,du-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,du.$$

Dar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{u-z}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{(u-z_0)-(z-z_0)}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{(u-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{u-z_0}\right)}\,du.$$

Deoarece $\dfrac{|z-z_0|}{|u-z_0|}<1$, obţinem $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{u-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^n}$. Atunci

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{u-z}\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du\right)(z-z_0)^n.$$

Folosind formula lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe, rezultă că pentru $n\geq 0$ avem

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du.$$

În ceea ce priveşte integrala pe C_1, obţinem succesiv:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(u)}{u-z}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{z-u}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{(z-z_0)-(u-z_0)}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{u-z_0}{z-z_0}\right)}\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{-n}}\,du\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Schimbând indicele de sumare, rezultă că

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{u-z}du=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{-n+1}}du\right)\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

deoarece $\frac{|u-z_0|}{|z-z_0|}<1$.

Folosind din nou formula lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe, rezultă că pentru $n\geq 1$ avem

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^{-n+1}}du\,.$$

În final

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-z_0)^n\,,$$

cu coeficienţii c_n din enunţul teoremei.

Vom arăta acum că dezvoltarea unei funcţii în serie Laurent este unică.

Să presupunem că

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n(z-z_0)^n\,.$$

Atunci

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n-c'_n)(z-z_0)^n=0\,. \qquad \textbf{(6.13)}$$

Fie $k\in\mathbb{Z}$. Înmulţind (6.13) cu $(z-z_0)^{-k-1}$, obţinem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n-c'_n)(z-z_0)^{n-k-1}=0\,.$$

Integrând pe C, rezultă că

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n-c'_n)\int_C(z-z_0)^{n-k-1}\,dz=0\,. \qquad \textbf{(6.14)}$$

Dar

$$\int_C (z-z_0)^{n-k-1}\,dz=\begin{cases}0, & \text{dacă } n-k-1\neq -1\\ 2\pi i, & \text{dacă } n-k-1=-1\end{cases},$$

adică

$$\int_C (z-z_0)^{n-k-1}\,dz=\begin{cases}0, & \text{dacă } n\neq k\\ 2\pi i, & \text{dacă } n=k\end{cases}.$$

Atunci din (6.14) avem

$$0=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(c_n-c'_n)\int_C (z-z_0)^{n-k-1}\,dz=2\pi i\,(c_k-c'_k)$$

deci

$$c_k=c'_k,\ (\forall)\ k\in\mathbb{Z}.$$

Prin urmare, dezvoltarea unei funcţii în serie Laurent este unică.

Calculul coeficienţilor din dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii, folosind (6.12), este dificil, motiv pentru care formulele (6.12) sunt puţin folosite. De obicei, în practică, se folosesc dezvoltări elementare în serie Taylor. Datorită unicităţii coeficienţilor seriei Laurent, orice procedeu de dezvoltare este bun.

Exemplul 6.9.1. Fie $f:\mathbb{C}\setminus\{-2,1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$. Să se dezvolte în serie după puterile lui z, în următoarele domenii:

a) interiorul cercului $C=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}$;

b) coroana circulară $\{z\in\mathbb{C};\ 1<|z|<2\}$;

c) exteriorul cercului $C=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=2\}$.

Vom folosi dezvoltarea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$, valabilă dacă $|z|<1$.

a) Funcţia f este olomorfă în interiorul cercului $C=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}$, deci se poate dezvolta în serie Taylor în jurul punctului $z_0=0$. Deoarece, în domeniul considerat, $|z|<1$, vom avea

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2\left(1+\dfrac{z}{2}\right)}-\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n\ .$$

b) Conform Teoremei 6.9.1, f se poate dezvolta în serie Laurent în coroana circulară dată. În acest caz vom avea $\frac{1}{|z|}<1$ şi $\frac{|z|}{2}<1$, deci

$$\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\ ,\ \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\ .$$

În consecinţă

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\ .$$

c) În domeniul considerat vom avea $\frac{2}{|z|}<1$, deci şi $\frac{1}{|z|}<1$. Prin urmare

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{z^n}\ .$$

Pe de altă parte, conform b) are loc $\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$, deci

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}2^{n-1}+1\right)\cdot\frac{1}{z^n}\ .$$

Exemplul 6.9.2. Aceeaşi problemă pentru domeniul $\{z\in\mathbb{C};\ 0<|z-1|<3\}$.

Dezvoltăm după puterile lui $z-1$. Deoarece $\frac{|z-1|}{3}<1$, putem scrie

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-1)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n}\ ,$$

deci

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}\ .$$

Partea principală a seriei Laurent conţine un singur termen, iar partea Taylor conţine o infinitate de termeni.

Exemplul 6.9.3. Fie $f:\mathbb{C}\setminus\{-1,2\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z+1)^4}$. Să se dezvolte în serie după puterile lui $z+1$, în următoarele domenii:

a) coroana circulară $\{z\in\mathbb{C};\ 0<|z+1|<1\}$;

b) exteriorul cercului $C=\{z\in\mathbb{C};\ |z+1|=3\}$.

a) Deoarece

$$\frac{z}{z-2}=1+\frac{2}{z-2}=1+\frac{2}{(z+1)-3}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{3}}=1-\frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n},$$

rezultă că

$$f(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z+1)^4}-\frac{2}{3^2}\cdot\frac{1}{(z+1)^3}-\frac{2}{3^3}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{2}{3^4}\cdot\frac{1}{(z+1)}-$$
$$-\frac{2}{3^5}-\frac{2}{3^6}\cdot(z+1)-\frac{2}{3^7}\cdot(z+1)^2-\ldots-\frac{2}{3^{n+5}}\cdot(z+1)^n-\ldots.$$

Partea principală conţine 4 termeni, iar partea Taylor conţine o infinitate de termeni.

b) În acest caz vom avea $\dfrac{3}{|z+1|}<1$.

Prin urmare

$$\frac{z}{z-2}=1+\frac{2}{(z+1)-3}=1+\frac{2}{z+1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{z+1}}=1+\frac{2}{z+1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z+1)^n}.$$

În consecinţă

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)^4}+2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z+1)^{n+5}}.$$

Exemplul 6.9.4. Fie $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. Să se dezvolte în serie după puterile lui z pe $\mathbb{C}^*$.

Deoarece $e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{u^n}{n!}$, $(\forall)\ u\in\mathbb{C}$, rezultă că $e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\cdot z^n}$, $(\forall)\ z\in\mathbb{C}^*$. Partea principală a seriei Laurent conţine o infinitate de termeni, iar partea Taylor se reduce la un singur termen.

6.10. Puncte singulare. Reziduuri

6.10.1. Puncte singulare

Definiţia 6.10.1. Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă nevidă şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct singular izolat* al funcţiei f dacă există $r > 0$ astfel încât $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset D$ (adică funcţia f este olomorfă pe $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$).

Funcţia f poate să nu fie definită în z_0.

Exemplul 6.10.1.

1) Punctul $z_0 = 1$ este punct singular izolat pentru următoarele funcţii:

$$f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z-1},\ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = z^3,\ h : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C},\ h(z) = \frac{\sin \pi z}{z-1}.$$

2) Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{-2i, 0, 2i\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{1}{z^3 + 4z}$. În acest caz, punctele $z_1 = -2i$, $z_2 = 0$, $z_3 = 2i$ sunt puncte singulare izolate.

Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat al lui f. Atunci funcţia f se dezvoltă în serie Laurent în coroana circulară $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z - z_0| < r\}$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Definiţia 6.10.2. Punctul $z = z_0$ se numeşte *punct singular aparent* dacă $c_{-n} = 0$, $(\forall)\ n \geq 1$. Punctul $z = z_0$ se numeşte *pol de ordinul m* dacă $c_{-m} \neq 0$ şi $c_{-n} = 0$, $(\forall)\ n > m$. Punctul $z = z_0$ se numeşte *punct singular esenţial* dacă $c_{-n} \neq 0$, $(\forall)\ n$.

Prin urmare, partea principală a seriei Laurent este nulă în cazul unui punct singular aparent, are un număr finit de termeni nenuli în cazul unui pol şi are o infinitate de termeni nenuli în cazul unui punct singular esenţial.

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 6.10.1. Fie $f : B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Atunci:

1) Punctul $z = z_0$ este punct singular aparent pentru f dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ şi este finită.

2) Punctul $z = z_0$ este pol pentru f dacă şi numai dacă $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

3) Punctul $z = z_0$ este punct singular esenţial pentru f dacă şi numai dacă nu există $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

6.10.2. Reziduuri. Teorema reziduurilor

Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă, $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat al lui f şi $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ seria Laurent a funcţiei f pe coroana circulară $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Definiţia 6.10.3. Coeficientul c_{-1} din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f pe coroana circulară $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ se numeşte *reziduul funcţiei f în punctul singular z_0* şi se notează $\mathrm{Rez}(f, z_0)$.

Pentru calculul reziduului unei funcţii într-un punct singular sunt utile următoarele consideraţii.

Fie un cerc $C = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \rho\}$ de rază $\rho < r$, orientat pozitiv. Atunci, din formula de calcul a coeficienţilor seriei Laurent a funcţiei f pe coroana circulară $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ (Teorema 6.9.1), rezultă că

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{-1+1}} \, du = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \, dz .$$

Deci

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \, dz . \qquad \textbf{(6.15)}$$

Observaţia 6.10.1. Dacă $z = z_0$ este punct singular aparent, atunci $c_{-1} = 0$, deci $\mathrm{Rez}(f, z_0) = 0$.

Propoziţia 6.10.1. Dacă $z = z_0$ este pol de ordinul m, atunci

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]^{(m-1)} . \qquad \textbf{(6.16)}$$

Demonstraţie. Dacă $z = z_0$ este pol de ordinul m, atunci dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f pe coroana circulară $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ este

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots$$

deci

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \ldots .$$

Derivând de $m-1$ ori obţinem:

$$\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)} = c_{-1} \cdot (m-1)! + (z-z_0) \cdot [2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot c_0 + \ldots].$$

Rezultă imediat că

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

şi propoziţia este demonstrată.

Putem enunţa acum următoarea teoremă:

Teorema 6.10.2. (Teorema reziduurilor) (Cauchy)

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_p\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $\Gamma \subset D$ o curbă simplă, închisă, netedă pe porţiuni, astfel încât domeniul mărginit de curba Γ conţine punctele z_j, $1 \le j \le p$. Atunci

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Rez}(f, z_j). \qquad \textbf{(6.17)}$$

Demonstraţie. Fie γ_j, $1 \le j \le p$, cercurile cu centrele z_j şi raze suficient de mici, astfel încât bilele închise determinate de aceste cercuri să fie incluse în domeniul mărginit de curba Γ şi să nu aibă puncte comune. Funcţia f fiind olomorfă, din Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe rezultă că

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{p} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz. \qquad \textbf{(6.18)}$$

Pe de altă parte, din (6.15) avem

$$\int_{\gamma_j} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}\left(f, z_j\right),\ 1 \le j \le p. \tag{6.19}$$

Ţinând seama de (6.18) şi (6.19), obţinem (6.17) şi teorema este demonstrată.

Exemplu 6.10.2. Să se calculeze $I = \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)^2}\, dz$, unde Γ este cercul de ecuaţie $|z| = 2$.

Fie funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)^2}$. Punctul $z_1 = 0$ este pol simplu al acestei funcţii, iar punctele $z_2 = i$, $z_3 = -i$ sunt poli dubli ai funcţiei f. Ţinând seamă de Propoziţia 6.10.1, obţinem succesiv

$$\mathrm{Rez}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+1\right)^2} = 1$$

$$\mathrm{Rez}(f, i) = \lim_{z \to i} \left[(z-i)^2 \cdot \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2 (z-i)^2} \right]' = -\frac{3}{4e}$$

$$\mathrm{Rez}(f, -i) = -\frac{e}{4}.$$

Folosind teorema reziduurilor, rezultă că

$$I = 2\pi i \left(1 - \frac{3}{4e} - \frac{e}{4}\right) = \frac{\pi i}{2e}\left(-e^2 + 4e - 3\right).$$

6.10.3. Aplicaţii ale teoremei reziduurilor

Prezentăm acum aplicaţii ale teoremei reziduurilor la calculul unor integrale reale. Vom folosi următorul rezultat:

Lema 6.10.1. (Lema lui Jordan)

Fie sectorul $D = \left\{ z \in \mathbb{C};\ 0 \le |z| < \infty,\ \arg z \in [\theta_1, \theta_2] \right\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă şi $C_R = \left\{ z \in \mathbb{C};\ |z| = R,\ \arg z \in [\theta_1, \theta_2] \right\}$. Dacă $\lim_{|z| \to \infty} z f(z) = 0$, atunci

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0.$$

Demonstraţie. Fie $M(R)=\sup\left\{\left|f(z)\right|;\ z\in C_R\right\}$. Atunci

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le M(R)\cdot R\cdot(\theta_2-\theta_1).$$

Deoarece $\lim\limits_{|z|\to\infty} z\,f(z)=0$, rezultă că $\lim\limits_{R\to\infty} M(R)\cdot R=0$, deci

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0.$$

Corolarul 6.10.1. Fie $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ o funcţie raţională, deci P şi Q sunt polinoame. Presupunem că $Q(x)\ne 0$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ şi că $\operatorname{grad}Q\ge\operatorname{grad}P+2$. Atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{p}\operatorname{Rez}\left(f,z_j\right)$$

unde z_j, $1\le j\le p$, sunt polii funcţiei f situaţi în semiplanul superior.

Demonstraţie. Condiţiile din corolar asigură convergenţa integralei, deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

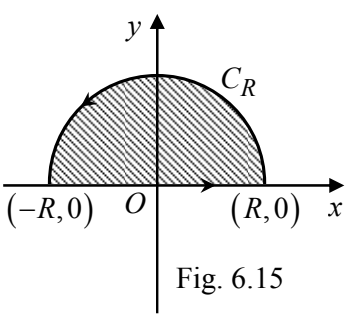


Fig. 6.15

Fie Γ curba închisă formată din semicercul cu centrul în origine, de rază R, situat în semiplanul superior, notat C_R, completat cu segmentul $[-R,R]$, ca în Fig. 6.15.

Raza R se alege suficient de mare astfel încât domeniul mărginit de Γ să conţină toţi polii funcţiei f situaţi în semiplanul superior. Conform Teoremei reziduurilor

$$\int_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx+\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz=2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{p}\operatorname{Rez}\left(f,z_j\right). \qquad \textbf{(6.20)}$$

Deoarece $\lim\limits_{|z|\to\infty} z\cdot\dfrac{P(z)}{Q(z)}=0$, din Lema lui Jordan rezultă că $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\,dz=0$.

Făcând $R\to\infty$ în egalitatea (6.20), se obţine corolarul.

Exemplul 6.10.2. Să se calculeze integrala $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\, dx$.

Funcţia $f : \mathbb{C} \setminus \{-2i,\ 2i\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z^2}{\left(z^2+4\right)^2}$, are polii dubli $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$.

Dintre aceştia numai z_1 se află în semiplanul superior. Folosind formula (6.16), rezultă că $\operatorname{Rez}(f, 2i) = \frac{1}{8i}$. Conform Corolarului 6.10.1, obţinem $I = 2\pi i \cdot \frac{1}{8i} = \frac{\pi}{4}$.

Integrale de forma $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$

unde $R(x, y)$ este o funcţie raţională. Mai precis, $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, unde P şi Q sunt polinoame, cu $Q(x, y) \neq 0$ pe cercul cu centrul în O şi de rază 1, $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Notăm $z = e^{it}$. Atunci

$$dt = \frac{1}{iz}\, dz,\ \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z},\ \sin z = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Când $t \in [0,\ 2\pi]$, punctul z parcurge cercul C. Atunci

$$I = \int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z},\ \frac{z^2-1}{2iz}\right) \cdot \frac{dz}{iz}. \qquad \textbf{(6.21)}$$

Exemplul 6.10.3. Să se calculeze $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5} + \sin t}\, dt$.

Folosind (6.21), obţinem

$$I = 2 \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2i\sqrt{5}\, z - 1}.$$

Funcţia de sub integrală are polii simpli $z_1 = i\left(2 - \sqrt{5}\right)$, $z_2 = -i\left(2 + \sqrt{5}\right)$. Dintre aceştia numai z_1 se află în interiorul cercului unitate.

Deoarece $\operatorname{Rez}\left(f, z_1\right)=\dfrac{1}{4i}$, rezultă că $I=4\pi i \cdot \dfrac{1}{4i}=\pi$.

Lema 6.10.2. (Lema a doua a lui Jordan)

Fie $D=\left\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z \geq 0\right\}$ şi $f: D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă cu excepţia unui număr finit de puncte singulare izolate. Dacă $\lim\limits_{|z| \to \infty} f(z)=0$, uniform în raport cu $\arg z$ $(0 \leq \arg z \leq \pi)$, atunci pentru orice $a>0$ avem:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} e^{i a z} f(z)\, dz=0$$

unde $C_R=\left\{z \in \mathbb{C};\ |z|=R,\ \operatorname{Im} z>0\right\}$.

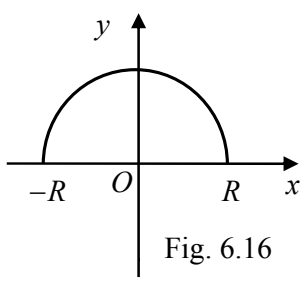


Fig. 6.16

Demonstraţie. Fie $M_R=\sup\left\{\left|f(z)\right|;\ z \in C_R\right\}$.

Dacă $z \in C_R$, atunci

$$z=R e^{i \theta}=R(\cos \theta+i \sin \theta) \text{ şi}$$

$$\int_{C_R} e^{i a z} f(z)\, dz=\int_0^{\pi} e^{-a R \sin \theta}\, e^{i a R \cos \theta}\, f\left(R e^{i \theta}\right) R i e^{i \theta}\, d \theta$$

de unde rezultă că

$$\left|\int_{C_R} e^{i a z} f(z)\, dz\right| \leq R M_R \int_0^{\pi} e^{-a R \sin \theta}\, d \theta . \tag{6.22}$$

Observăm că dacă facem schimbarea de variabilă $\theta=\pi-\varphi$ în integrala $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ obţinem:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-a R \sin \theta}\, d \theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}-e^{-a R \sin \varphi}\, d \varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a R \sin \varphi}\, d \varphi . \tag{6.23}$$

Din (6.22) şi (6.23) rezultă că

$$\left|\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz\right| \le 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}\,d\theta. \qquad \textbf{(6.24)}$$

Pe de altă parte, pentru orice $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem:

$$\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)' = \frac{\cos\theta}{\theta^2}(\theta - \operatorname{tg}\theta) < 0$$

de unde deducem că

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \ge \frac{2}{\pi} \text{ sau } \sin\theta \ge \frac{2\theta}{\pi}. \qquad \textbf{(6.25)}$$

Ţinând seama de (6.25) în (6.24) rezultă

$$\left|\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz\right| \le 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}}\,d\theta = 2RM_R \left.\frac{e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}}}{-\frac{2aR}{\pi}}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi M_R}{a}\left(1 - e^{-aR}\right).$$

Cum $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{\pi M_R}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) = 0$, deducem că

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz = 0.$$

Observaţia 6.10.1. Lema a doua a lui Jordan rămâne valabilă şi dacă domeniul D se înlocuieşte cu domeniul $D' = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ şi $C'_R = \{z \in \mathbb{C};\ |z - iy_0| = R,\ \operatorname{Im} z \ge y_0\}$.

Demonstraţia este asemănătoare cu demonstraţia precedentă, alegând $z = iy_0 + R\mathrm{e}^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

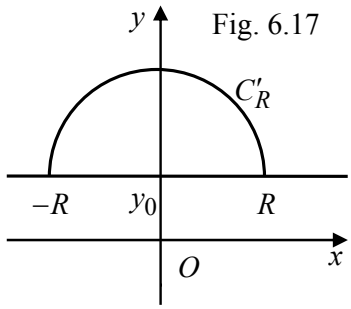


Fig. 6.17

Observaţia 6.10.2. Lema a doua a lui Jordan rămâne adevărată şi dacă domeniul D se înlocuieşte cu sectorul $D'' = \{z \in \mathbb{C};\ 0 \le |z| < \infty,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Exemplul 6.10.4. Să se calculeze integrala $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+1}\, dx$.

Considerăm conturul din Fig. 6.15 şi funcţia $f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2+1}$. Prin calcul, obţinem că $\operatorname{Rez}(f, i) = \frac{1}{2e}$. Pe de altă parte

$$2\pi i \cdot \operatorname{Rez}(f, i) = \int\limits_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+1}\, dx + \int\limits_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2+1}\, dz. \qquad \textbf{(6.26)}$$

Dar

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{|z|}{|z^2+1|} \le \lim_{|z|\to\infty} \frac{|z|}{|z|^2-1} = 0, \text{ deci } \lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0.$$

Conform Lemei a doua a lui Jordan

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2+1}\, dz = 0.$$

Din (6.26) prin trecere la limită cu $R \to \infty$, avem

$$\frac{\pi i}{e} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+1}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}\, dx + i \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\, dx.$$

În consecinţă

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}\, dx = 0 \text{ şi } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\, dx = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

deci

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2e}.$$

C A P I T O L U L 7

SERII FOURIER

7.1. Serii trigonometrice

Definiţia 7.1.1. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numeşte *periodică* de perioadă $T>0$ dacă $f(x+T)=f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

Exemplul 7.1.1.

1) Funcţia $f(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}$ este periodică de perioadă $T=2\pi$, pentru că $\sin(x+2\pi)=\sin x,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

De asemenea, funcţia $f(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$ este periodică de perioadă $T=2\pi$.

2) Funcţia $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x\neq\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in\mathbb{N}$ este periodică de perioadă $T=\pi$.

Analog $f(x)=\operatorname{ctg} x,\ x\neq n\pi,\ n\in\mathbb{N}$ este periodică de perioadă $T=\pi$.

3) Funcţiile constante $f(x)=c,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$ sunt periodice, pentru orice perioadă $T>0$.

Evident, $f(x+T)=c=f(x),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R},\ (\forall)\ T>0$.

Lema 7.1.1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă, periodică de perioadă $T>0$. Atunci

$$\int_0^T f(x)\,dx=\int_a^{a+T} f(x)\,dx,\ (\forall)\ a\in\mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Ţinând seama de proprietăţile integralei avem:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^T f(x)\,dx+\int_T^{a+T} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(7.1)}$$

Pe de altă parte, dacă facem schimbarea de variabilă $x=t+T$, rezultă:

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^a f(t+T)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt=-\int_a^0 f(t)\,dt. \qquad \textbf{(7.2)}$$

Ţinând seama de (7.2) în (7.1) obţinem:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Definiţia 7.1.2. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Seria de funcţii:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(7.3)}$$

se numeşte *serie trigonometrică* de coeficienţi a_n, $n \geq 0$ şi b_n, $n \geq 1$.

Sumele parţiale ale unei astfel de serii:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ n \in \mathbb{N}$$

se numesc *polinoame trigonometrice*.

Deoarece polinomul trigonometric s_n este o combinaţie liniară a funcţiilor:

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx$

rezultă că s_n este o funcţie periodică de perioadă 2π, adică

$s_n(x+2\pi) = s_n(x),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Pe de altă parte, dacă presupunem că seria (7.3) este convergentă în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$, atunci suma sa s va fi, la rândul său, o funcţie periodică de perioadă 2π, deci

$s(x+2\pi) = s(x),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Definiţia 7.1.3. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică de perioadă 2π se dezvoltă într-o serie trigonometrică pe $\mathbb{R}$ dacă $f(x) = s(x),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$, adică

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

Definiţie 7.1.4. Două funcţii integrabile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numesc *ortogonale* pe intervalul $[a, b]$ dacă

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Un şir de funcţii integrabile $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ se numeşte *ortogonal* pe intervalul $[a, b]$ dacă

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\, dx = 0, (\forall)\ m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq n.$$

Propoziţia 7.1.1. Sistemul trigonometric de forma:

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ...$

este ortogonal pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

Demonstraţie. Avem succesiv:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = -\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(k-n)x + \cos(k+n)x\right] dx = 0, \text{ dacă } n \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(k-n)x - \cos(k+n)x\right] dx = 0, \text{ dacă } n \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sin(k+n)x + \sin(k-n)x\right] dx = 0, \text{ dacă } n \neq k.$$

Observaţia 7.1.1. Au loc evaluările:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\, dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\, dx = \pi.$$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă, periodică de perioadă 2π. Să presupunem că f se dezvoltă într-o serie trigonometrică, adică

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Presupunem, în plus, că seria din membrul drept este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. Atunci aceasta se poate integra termen cu termen, de unde deducem că:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

Ţinând seama de Propoziţia 7.1.1, rezultă:

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi$ şi mai departe că:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

În mod analog, amplificând ambii termeni cu $\cos kx$ şi integrând termen cu termen, obţinem:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,dx\right).$$

Ţinând din nou seama de Propoziţia 7.1.1 şi de Observaţia 7.1.1 deducem că:

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=a_k\cdot\pi$ şi deci că:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx.$$

În sfârşit, amplificând cu $\sin kx$ şi integrând termen cu termen obţinem:

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx.$$

În concluzie, dacă funcţia f se dezvoltă în serie trigonometrică, atunci coeficienţii acestei serii sunt daţi de formulele următoare:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \end{cases} \qquad \textbf{(7.4)}$$

Evident, formulele (7.4) au sens şi dacă funcţia f nu este continuă, ci doar integrabilă.

7.2. Serii Fourier

Definiţia 7.2.1. Fie $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă. Coeficienţii daţi de formulele (7.4) se numesc *coeficienţii Fourier* ai funcţiei f, iar seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

în care $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei f se numeşte *seria Fourier* ataşată funcţiei f.

Aşadar, oricărei funcţii f integrabilă pe $[-\pi,\pi]$ îi corespunde o serie Fourier:

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Evident, dacă f este doar integrabilă pe intervalul $[-\pi,\pi]$, nu putem înlocui semnul „$\approx$” cu cel de egalitate „$=$”, deoarece suma seriei din dreapta, dacă aceasta este uniform convergentă, este o funcţie continuă.

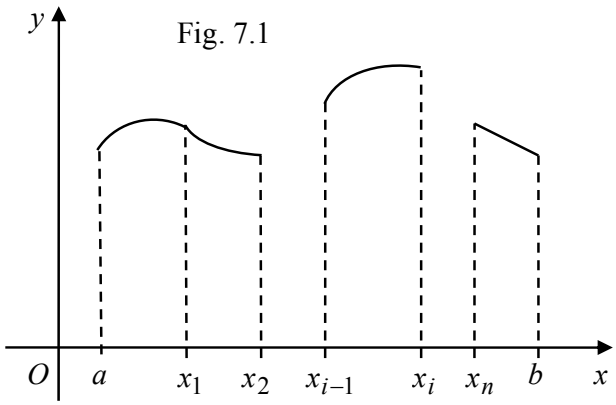
În continuare vom analiza când o funcţie f se dezvoltă în serie Fourier.

Definiţia 7.2.2. O funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *monotonă pe porţiuni* dacă există o partiţie a intervalului $[a,b]$, anume:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$

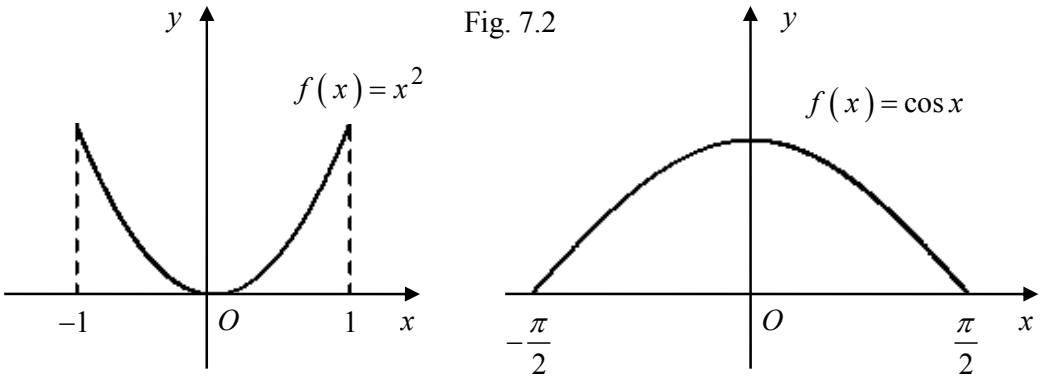
astfel încât f este monotonă pe fiecare subinterval (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, ..., n$ (Fig. 7.1).

Fig. 7.1



De exemplu, funcţia $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ este monotonă pe porţiuni pe intervalul $[-1, 1]$, deoarece este descrescătoare pe $[-1, 0]$ şi crescătoare pe $[0, 1]$. Analog, funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ este monotonă pe porţiuni pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deoarece pe $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ este crescătoare, iar pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este descrescătoare (Fig. 7.2).

Fig. 7.2



Observăm că dacă f este monotonă pe porţiuni pe intervalul $[a, b]$ şi este şi mărginită pe acest interval, ea nu poate avea puncte de discontinuitate decât de speţa întâi. Într-adevăr, dacă $x = c$ este un punct de discontinuitate pentru f, atunci există limitele

$$f(c-0) = \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) \text{ şi } f(c+0) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) \text{ şi sunt finite.}$$

Precizăm de asemenea că o funcţie monotonă pe porţiuni şi mărginită pe intervalul $[a, b]$ este integrabilă pe acest interval.

Teorema 7.2.1. (Teorema Dirichlet)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $T=2\pi$, monotonă pe porţiuni şi mărginită pe intervalul $[-\pi, \pi]$. Atunci seria Fourier ataşată funcţiei f este convergentă în fiecare punct al intervalului $[-\pi, \pi]$.

Dacă notăm cu s suma seriei Fourier, adică

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$$

atunci:

i) $s(x_0)=f(x_0)$, dacă $-\pi<x_0<\pi$ şi f este continuă în x_0

ii) $s(x_0)=\frac{1}{2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right]$, dacă $-\pi<x_0<\pi$ şi f este discontinuă în x_0

iii) $s(-\pi)=s(\pi)=\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]$.

Pentru demonstraţie recomandăm [2], pagina 275.

Exemplul 7.2.1. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $(-\pi, \pi)$ funcţia

$f(x)=\pi-x$.

Avem succesiv:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\,dx=-\left.\frac{(\pi-x)^2}{2\pi}\right|_{-\pi}^{\pi}=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left.(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right]=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=-\left.\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right]=\frac{1}{n\pi}\cdot 2\pi\cdot(-1)^n=\frac{2\cdot(-1)^n}{n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Cum funcţia f este continuă pe $(-\pi,\pi)$ rezultă că

$$\pi-x=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx,\ (\forall)\ x\in(-\pi,\pi).$$

Pe de altă parte:

$s(-\pi)=s(\pi)=\pi$

$f(\pi-0)=0$ şi $f(-\pi+0)=2\pi$, deci

$s(-\pi)=s(\pi)=\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]$.

Observaţia 7.2.1. Dacă funcţia f este pară, atunci

$$b_n=0,\ n\geq 1 \text{ şi } a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ n\geq 0.$$

Dacă funcţia f este impară, atunci

$$a_n=0,\ n\geq 0 \text{ şi } b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n\geq 1.$$

Afirmaţia rezultă din faptul că dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $l>0$, atunci:

$$\int_{-l}^{l}g(x)\,dx=\begin{cases}2\int_0^{l}g(x)\,dx, & \text{dacă } g \text{ este pară}\\ 0, & \text{dacă } g \text{ este impară}\end{cases}.$$

Exemplul 7.2.2. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi,\pi]$ funcţia

$f(x)=x^2$.

Fie $f^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţia periodică de perioadă $T=2\pi$, obţinută prin prelungirea funcţiei $f(x)=x^2$, $x\in[-\pi,\pi]$.

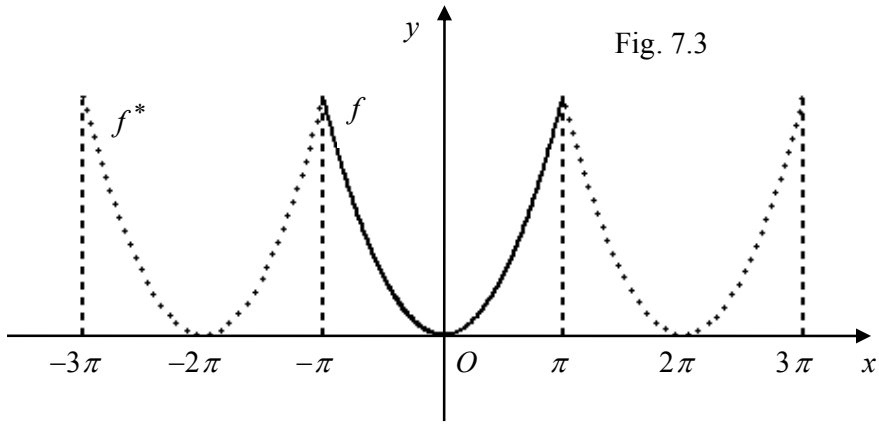


Fig. 7.3

Graficul funcţiei f^* este prezentat mai sus (Fig. 7.3):

$f^*(x) = (x - 2k\pi)^2$, dacă $x \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dacă $k = 0$, atunci $f^*(x) = f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Dacă $k = 1$, atunci $f^*(x) = (x - 2\pi)^2$, $x \in [\pi, 3\pi]$.

Dacă $k = -1$, atunci $f^*(x) = (x + 2\pi)^2$, $x \in [-3\pi, -\pi]$, etc.

Evident, funcţia f^* este continuă pe $\mathbb{R}$ şi monotonă pe porţiuni. În plus, $f(-x) = f(x)$, dacă $x \in [-\pi, \pi]$, deci f este pară pe $[-\pi, \pi]$.

Din Observaţia 7.2.1 rezultă că $b_n = 0$ şi $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$, $n \geq 0$. Avem:

$a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \, dx = \dfrac{2\pi^2}{3}$. Integrând prin părţi, pentru $n \geq 1$ obţinem:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2}{n}\left(-x \frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right)\right] = \frac{4\pi \cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \; n \geq 1.$$

Prin urmare coeficienţii Fourier sunt:

$a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$; $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$; $b_n = 0$, $n \geq 1$, şi deci

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \ (\forall)\ x \in [-\pi, \pi].$$

În particular, pentru $x = \pi$, obţinem:

$\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ şi mai departe

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \qquad \textbf{(7.5)}$$

Relaţia (7.5) poartă numele de *identitatea lui Euler*.

Exemplul 7.2.3. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi, \pi]$ funcţia

$f(x) = x$.

Deoarece funcţia f este impară, rezultă că $a_n = 0$, $n \geq 0$ şi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\left[-x \left.\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \ n \geq 1$$

şi mai departe

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \ -\pi < x < \pi.$$

Graficul funcţiei f^* este prezentat mai jos (Fig. 7.4):

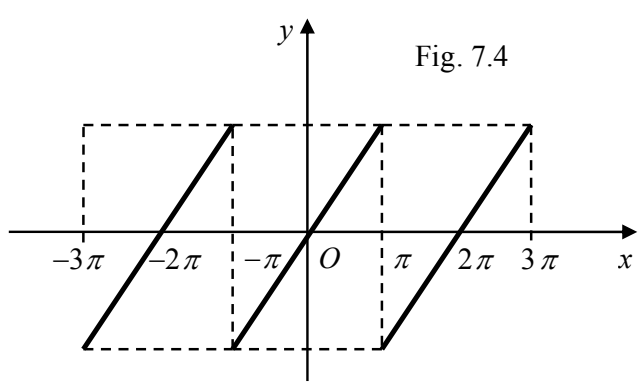


Fig. 7.4

$f^*(x) = x - 2k\pi$, dacă $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observăm că f^* nu este continuă în $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$:

$f^*(\pi - 0) = \pi$ şi $f^*(-\pi + 0) = -\pi$. Rezultă că

$$s(\pi) = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 \neq f(\pi) = \pi.$$

7.3. Serii Fourier pentru funcţii de perioadă arbitrară $(T = 2l)$

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $T = 2l$, $l > 0$. Pentru a dezvolta funcţia f în serie Fourier pe intervalul $[-l, l]$, facem schimbarea de variabilă

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(t) = \frac{l}{\pi} t,$$

şi constatăm că funcţia compusă $g = f \circ h$ este periodică de perioadă 2π.

Într-adevăr,

$$g(t + 2\pi) = f(h(t + 2\pi)) = f\left(\frac{l}{\pi} t + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = f(h(t)) = g(t).$$

Dacă f este monotonă pe porţiuni şi mărginită pe intervalul $[-l, l]$, atunci $g = f \circ h$ este monotonă pe porţiuni şi mărginită pe intervalul $[-\pi, \pi]$, deci se poate dezvolta în serie Fourier pe acest interval. În punctele de continuitate ale lui f avem:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \text{ unde}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt \, dt,\ n \in \mathbb{N} \text{ şi } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt \, dt,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{l} x$, atunci avem:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx,\ n \geq 0 \text{ şi}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx,\ n \geq 1.$$

Exemplul 7.3.1. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x)=|x|$, pe intervalul $[-l, l]$.

Funcţia f^* periodică de perioadă $T=2l$, care prelungeşte funcţia f pe $\mathbb{R}$, este reprezentată în Fig. 7.5. Evident $f^*(x)=f(x)$, $x\in[-l, l]$.

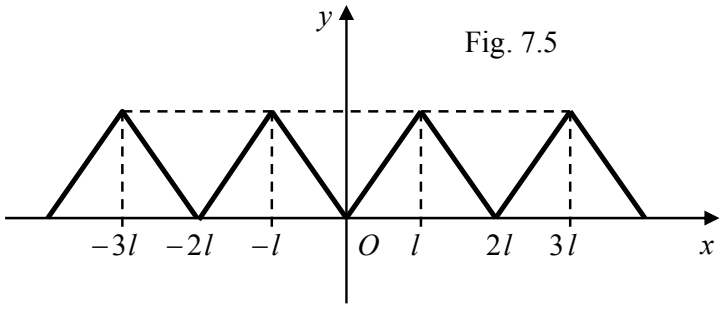


Fig. 7.5

Deoarece funcţia f este pară rezultă $b_n=0$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi

$a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$. Avem:

$a_0=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l x\,dx=l$ şi integrând prin părţi obţinem

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\left[\frac{l}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l-\frac{l}{n\pi}\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{2l}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right].$$

Aşadar, avem:

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{dacă } n=2k\\ \dfrac{-4l}{n^2\pi^2}, & \text{dacă } n=2k+1\end{cases}.$$

În final obţinem

$$|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}x,\ -l\le x\le l.$$

7.4. Forma complexă a seriilor Fourier

Să presupunem că f se poate dezvolta în serie Fourier pe intervalul $[-l, l]$. Atunci avem:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x+b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right),\ x\in[-l, l].$$

Dacă notăm cu $\omega=\frac{\pi}{l}$, atunci din formulele lui Euler rezultă:

$$\cos n\omega x=\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}$$

$$\sin n\omega x=\frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i}.$$

În continuare avem:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}+b_n \frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}-ib_n \frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega x}+\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega x}\right).$$

Dacă notăm cu $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_n=\frac{a_n+ib_n}{2}$, $c_{-n}=\frac{a_n-ib_n}{2}$ rezultă:

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-in\omega x}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n} e^{in\omega x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-in\omega x}.$$

Ţinând seama de expresiile coeficienţilor Fourier, obţinem:

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)(\cos n\omega x+i \sin n\omega x)\,dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{in\omega x}\,dx.$$

În concluzie, forma complexă a seriilor Fourier este:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-i\frac{n\pi}{l}x}, \text{ unde}$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{i\frac{n\pi}{l}x}\, dx,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Exemplul 7.4.1. Să se dezvolte în serie Fourier complexă funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{dacă } 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Avem $l = \pi$ şi

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{inx}\, dx = \frac{1}{2n\pi i}\, e^{inx}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2n\pi i}\left(e^{in\pi} - 1\right).$$

Dar $e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n$. Aşadar, avem:

$$c_n = \frac{1}{2n\pi i}\left(e^{in\pi} - 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{dacă n este par} \\ \dfrac{i}{n\pi}, & \text{dacă n este impar} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, e^{-i(2n+1)x},\ x \in (-\pi, \pi),\ x \neq 0 \text{ şi } f(0) = \frac{1}{2}.$$

7.5. Serii Fourier generalizate

Fie $\mathfrak{R}([a, b])$ spaţiul vectorial al funcţiilor integrabile Riemann pe intervalul $[a, b]$. Pentru orice pereche $f, g \in \mathfrak{R}([a, b])$ vom defini produsul scalar dintre f şi g prin formula:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx. \qquad \textbf{(7.6)}$$

Propoziţia 7.5.1. Produsul scalar definit de (7.6) are următoarele proprietăţi:

1) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, (\forall)\ f, g \in \mathfrak{R}([a, b])$

2) $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle, (\forall)\ f, g \in \mathfrak{R}([a, b]), (\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle, (\forall)\ f_1, f_2, g \in \mathfrak{R}([a, b])$

4) $\langle f, f \rangle \geq 0, (\forall)\ f \in \mathfrak{R}([a, b])$.

Demonstraţia rezultă imediat din proprietăţile integralei definite.

Propoziţia 7.5.2. (Inegalitatea lui Schwartz)

$$\langle f, g\rangle^2 \le \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle, (\forall)\ f, g \in \mathfrak{R}([a, b]). \tag{7.7}$$

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrar. Din Propoziţia 7.5.1 deducem:

$$0 \le \langle \lambda f + g, \lambda f + g\rangle = \lambda^2 \langle f, f\rangle + 2\lambda \langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle. \tag{7.8}$$

Dacă $\langle f, f\rangle \ne 0$, atunci membrul drept al inegalităţii (7.8) este o funcţie de gradul al doilea în λ, care păstrează semn constant pe $\mathbb{R}$ numai dacă:

$\Delta = 4\langle f, g\rangle^2 - 4\langle f, f\rangle \langle g, g\rangle \le 0$, deci.

$\langle f, g\rangle^2 \le \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle$.

Dacă $\langle f, f\rangle = 0$, atunci membrul drept al inegalităţii (7.8) devine $2\lambda\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle$, adică o funcţie de gradul întâi în λ, care nu poate avea semn constant pe $\mathbb{R}$ decât dacă se reduce la o constantă, adică dacă $\langle f, g\rangle = 0$.

Aşadar, avem:

$0 = \langle f, g\rangle^2 \le \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle = 0 \cdot \langle g, g\rangle = 0$.

În continuare, pentru orice funcţie f integrabilă pe $[a, b]$ vom nota cu

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}. \tag{7.9}$$

Formula (7.9) defineşte o seminormă pe spaţiul funcţiilor integrabile pe $[a, b]$.

Propoziţia 7.5.3.

(1) $\|f\| \ge 0,\ f \in \mathfrak{R}([a, b])$

(2) $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|, (\forall)\ f \in \mathfrak{R}([a, b]), (\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|,\ f, g \in \mathfrak{R}([a, b])$.

Demonstraţie. Primele două afirmaţii rezultă imediat din Propoziţia 7.5.1. Pentru a dovedi (3) folosim inegalitatea lui Schwartz. Avem:

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \langle f + g, f + g\rangle = \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \le \\ &\le \langle f, f\rangle^2 + 2\sqrt{\langle f, f\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle} + \langle g, g\rangle = \\ &= \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2\end{aligned}$$

şi mai departe

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|.$$

Definiţia 7.5.1. Două funcţii f şi g integrabile pe $[a, b]$ se numesc *ortogonale* pe $[a, b]$ dacă

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx = 0.$$

Observaţia 7.5.1. Din proprietăţile produsului scalar (Propoziţia 7.5.1) rezultă că dacă f este ortogonală pe g_i, $i = \overline{1, p}$, atunci f este ortogonală pe orice combinaţie liniară a funcţiilor $g_1, g_2, ..., g_p$.

Într-adevăr, $\left\langle f, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i g_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle f, g_i \rangle = 0$.

Definiţia 7.5.2. Un sistem de funcţii integrabile pe $[a, b]$, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ se numeşte *ortogonal* pe $[a, b]$ dacă $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0, (\forall)\ n \ne m$.

Dacă în plus, $\|\varphi_n\| = 1, (\forall)\ n$, sistemul $\{\varphi_n\}$ se numeşte *ortonormal* pe $[a, b]$.

Observaţia 7.5.2. Din Propoziţia 7.1.1 deducem că sistemul trigonometric

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...$

este ortogonal pe $[-\pi, \pi]$.

Pe de altă parte, avem:

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \text{ deci } \|1\| = \sqrt{2\pi}$$

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi, \text{ deci } \|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$$

$$\|\sin nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi, \text{ deci } \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}.$$

Rezultă că sistemul de funcţii:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, ...$$

este ortonormal pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

Definiţia 7.5.3. Fie $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ un sistem ortonormal de funcţii integrabile pe $[a, b]$ şi fie f o funcţie oarecare integrabilă pe $[a, b]$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu

$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\, dx. \tag{7.10}$$

Numerele c_n definite de (7.10) poartă numele de *coeficienţii Fourier* (*generalizaţi*) ai funcţiei f în raport cu sistemul ortonormal $\{\varphi_n\}$, iar seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\ \varphi_n \tag{7.11}$$

se numeşte *seria Fourier* ataşată funcţie f în raport cu sistemul ortonormal $\{\varphi_n\}$.

Teorema 7.5.1. Pentru orice numere reale $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ avem:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i\ \varphi_i \right\| \le \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \varphi_i \right\|.$$

Demonstraţie.

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \varphi_i \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \varphi_i, f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\ \varphi_j \right\rangle =$$

$$= \langle f, f \rangle - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle f, \varphi_i \rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle.$$

Cum $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \ne j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}$, mai departe avem:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \varphi_i \right\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \alpha_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2. \tag{7.12}$$

Este evident că membrul drept al acestei egalităţi este minim dacă $\alpha_i = c_i$, $i = \overline{1, n}$, adică atunci când α_i sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei f în raport cu sistemul ortonormal $\{\varphi_n\}$. Rezultă că:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i \ \varphi_i \right\| \le \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \varphi_i \right\|, \ (\forall)\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Teorema 7.5.2. (Inegalitatea lui Bessel)

Dacă $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei f în raport cu sistemul ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$, atunci are loc *inegalitatea lui Bessel*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \ \le \|f\|^2. \qquad \textbf{(7.13)}$$

Demonstraţie. Dacă în relaţia (7.12) din demonstraţia precedentă alegem $\alpha_i = c_i$ obţinem:

$$0 \le \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i \ \varphi_i \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \ \text{şi mai departe}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \le \|f\|^2, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultă că seria $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ este convergentă şi suma sa $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \le \|f\|^2$.

Definiţia 7.5.4. Un sistem ortonormal $\{\varphi_n\}$ se numeşte *închis* dacă spaţiul vectorial real generat de acest sistem este dens în $\mathcal{R}([a, b])$, adică dacă $(\forall)\ f \in \mathcal{R}([a, b])$ şi $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \varphi_i \right\| < \varepsilon.$$

Teorema 7.5.2. (Identitatea lui Parseval)

Dacă sistemul de funcţii $\{\varphi_n\}$ ortonormal pe $[a, b]$ este închis, atunci are loc *identitatea lui Parseval*:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \,. \qquad \textbf{(7.14)}$$

Demonstraţie. Ţinând cont de inegalitatea lui Bessel este suficient să arătăm că

$$\|f\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \,.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece sistemul $\{\varphi_n\}$ este închis, rezultă că există o combinaţie liniară $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \varphi_i$ astfel încât

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \varphi_i \right\| < \varepsilon \,.$$

Folosind din nou relaţia (7.12) deducem:

$$\varepsilon^2 > \sum_{i=1}^{n} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \varphi_i \right\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - c_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \ge \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

şi mai departe

$$\|f\|^2 \le \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + \varepsilon^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 + \varepsilon^2 \,.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă că $\|f\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$.

În cazul particular al sistemului trigonometric, coeficienţii Fourier generalizaţi sunt: $c_0, c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_n, d_n, \ldots$, unde

$$c_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0$$

$$c_n = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \sqrt{\pi} \ a_n$$

$$d_n = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \sqrt{\pi} \, b_n$$

unde a_n, b_n sunt coeficienţii Fourier definiţi de (7.4). Cu aceste precizări, inegalitatea Bessel devine:

$$\frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx \text{ sau}$$

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx . \qquad \textbf{(7.15)}$$

În sfârşit, se poate arăta că sistemul trigonometric este închis, deci are loc egalitatea lui Parseval:

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx . \qquad \textbf{(7.16)}$$

Exemplul 7.5.1. Să se scrie egalitatea lui Parseval pentru funcţia

$f(x) = \dfrac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \cdot e^x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Coeficienţii Fourier sunt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2 \operatorname{sh} \pi} = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\operatorname{sh} \pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx .$$

Integrând de două ori prin părţi obţinem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx = \frac{1}{n} e^x \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx =$$

$$= -\frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} e^x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} (-1)^n \left(e^{\pi} - e^{-\pi} \right) - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx$$

şi mai departe

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{(-1)^n}{n^2}\cdot 2\operatorname{sh}\pi .$$

Rezultă că

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{(-1)^n}{1+n^2}\cdot 2\operatorname{sh}\pi \text{ şi } a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

În mod asemănător deducem că $b_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{1+n^2}$.

Pe de altă parte avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{\pi^2}{4\operatorname{sh}^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\, dx = \frac{\pi^2}{4\operatorname{sh}^2\pi}\cdot\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\operatorname{sh}^2\pi}\cdot\operatorname{sh}2\pi = \frac{\pi^2}{4\operatorname{sh}^2\pi}\cdot 2\operatorname{sh}\pi\operatorname{ch}\pi = \frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}.$$

Aşadar, identitatea lui Parseval este:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(1+n^2\right)^2}+\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}\right) = \frac{\pi\operatorname{ch}\pi}{2\operatorname{sh}\pi} \text{ sau}$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi\operatorname{ch}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}.$$

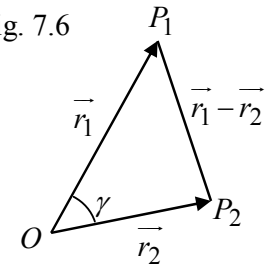
Din această ultimă relaţie deducem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi\operatorname{ch}\pi-\operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}.$$

7.6. Polinoame Legendre

Polinoamele Legendre au fost introduse în anul 1782 de către Adrien-Marie Legendre în legătură cu dezvoltarea în serie a potenţialului newtonian. Fie P_1 şi P_2 două puncte de vectori de poziţie $\overrightarrow{r_1}$ şi $\overrightarrow{r_2}$. Dacă notăm cu $r_i = \left\|\overrightarrow{r_i}\right\|$, $i=1,2$ şi cu γ unghiul P_1OP_2, atunci din teorema cosinusului rezultă:

Fig. 7.6



$$\left\|\vec{r_1}-\vec{r_2}\right\| = \sqrt{r_1^2 - 2\,r_1\,r_2\cos\gamma + r_2^2}\ .$$

Pe de altă parte, se ştie că potenţialul în punctul P_1 datorat unităţii de masă situată în punctul P_2 este dat de:

$$\phi = \frac{C}{\left\|\vec{r_1}-\vec{r_2}\right\|}\text{, unde este } C \text{ o constantă.}$$

În continuare avem:

$$\phi = \frac{C}{r_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2\,\dfrac{r_2}{r_1}\cos\gamma+\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2}}\ .$$

Notând cu $r = \dfrac{r_2}{r_1}$ şi cu $x = \cos\gamma$, obţinem:

$$\phi = \frac{C}{r_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2\,r\,x+r^2}}\ .$$

Dacă presupunem că $r_2 < r_1$, deci că $r < 1$, funcţia $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2\,r\,x+r^2}}$ admite următoarea dezvoltare în serie de puteri:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\,r\,x+r^2}} = \left[1-\left(2rx-r^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2\cdot 1!}\left(2rx-r^2\right)+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\left(2rx-r^2\right)^2+$$
$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\left(2\,rx-r^2\right)^3+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\left(2\,rx-r^2\right)^n+\ldots\ . \qquad \textbf{(7.17)}$$

Seria din membrul drept se poate ordona după puterile lui r^n, adică:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,r^n = P_0(x)+P_1(x)\,r+P_2(x)\,r^2+\ldots+P_n(x)\,r^n+\ldots\ .$$

Polinoamele $P_n(x)$, care sunt coeficienţii lui r^n în seria din membrul drept, se numesc *polinoame Legendre*. Pentru a obţine expresia polinomului $P_n(x)$ să observăm că ultimul termen din dezvoltarea (7.17) care conţine r^n este

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\left(2\,rx-r^2\right)^n$$

iar primul termen din (7.17) care conţine r^n este

$$u_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}, \text{ unde } \left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\frac{n}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par}\\ \frac{n+1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar}\end{cases}.$$

Aşadar, termenii din dezvoltarea (7.17) care conţin r^n sunt termenii

u_{n-k}, $0 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right]$.

Pe de altă parte, din binomul lui Newton deducem:

$$u_{n-k}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^{n-k}\cdot(n-k)!}\left(2rx-r^2\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^{n-k}\cdot(n-k)!}\sum_{p=0}^{n-k}C_{n-k}^{p}(2rx)^{n-k-p}\left(-r^2\right)^p=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^{n-k}\cdot(n-k)!}\sum_{p=0}^{n-k}(-1)^p C_{n-k}^{p}(2r)^{n-k-p}r^{n-k+p}.$$

Observăm că în această sumă, termenul care conţine r^n se obţine pentru $p=k$.

Aşadar, coeficientul lui r^n din termenul u_{n-k} este

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^{n-k}\cdot(n-k)!}(-1)^k C_{n-k}^{k}(2r)^{n-2k}=(-1)^k C_{n-k}^{k}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^{n-k}\cdot(n-k)!}x^{n-2k}.$$

În sfârşit, coeficientul lui r^n din întreaga serie (7.17), care prin definiţie este polinomul Legendre, are expresia:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n-k}^{k}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1)}{2^{n-k}\cdot(n-k)!}x^{n-2k}. \qquad \textbf{(7.18)}$$

În continuare vom prelucra formula (7.18) în scopul obţinerii formulei Olinde-Rodrigues.

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!\cdot(n-2k)!}\cdot\frac{1}{2^k\cdot(n-k)!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2k)}x^{n-2k}=$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{1}{2^k \cdot k! \cdot (n-2k)!} \cdot \frac{(2n-2k)!}{2^{n-k} \cdot (n-k)!} x^{n-2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n \cdot k! \cdot (n-k)! \cdot (n-2k)!} x^{n-2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{1}{2^n \cdot k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(2n-2k)!}{\left[(2n-2k)-n\right]!} x^{(2n-2k)-n}.$$

Ţinând seama de faptul că:

$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^p\right) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$, $p \geq n$, deducem că:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{1}{2^n \cdot k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \left(x^2\right)^{n-k} \right).$$

Se observă că în suma din dreapta, limita superioară $\left[\frac{n}{2}\right]$ poate fin înlocuită cu n. Într-adevăr, dacă $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, atunci $2n-2k < n$ şi $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2n-2k}\right) = 0$. Aşadar, avem:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \cdot \left(x^2\right)^{n-k} \right).$$

În sfârşit, ţinând seama din nou de binomul lui Newton, obţinem formula Olinde-Rodrigues pentru polinomul Legendre de ordinul n:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]. \qquad \textbf{(7.19)}$$

În cele ce urmează vom prezenta proprietăţile de bază ale polinoamelor Legendre. Pentru început reamintim formula de derivare a lui Leibniz:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(n-k)} \, g^{(k)} \tag{7.20}$$

cu precizarea că $f^{(0)} = f$ şi $g^{(0)} = g$.

Propoziţia 7.6.1. $P_n(1) = 1$.

Demonstraţie. Din formulele (7.19) şi (7.20) deducem:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \left[(x+1)^n (x-1)^n \right]^{(n)} = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[(x+1)^n \right]^{(n-k)} \left[(x-1)^n \right]^{(k)}.$$

Deoarece $\left[(x-1)^n \right]^{(k)} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(x-1)^{n-k}$, rezultă că

$$\left[(x-1)^n \right]^{(k)}(1) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k < n \\ n!, & \text{pentru } k = n \end{cases}.$$

Cum $P_n(1) = \dfrac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[(x+1)^n \right]^{(n-k)}(1) \left[(x-1)^n \right]^{(k)}(1)$, deducem că:

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot C_n^k \cdot \left[(x+1)^n \right](1) \cdot n! = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot 2^n \cdot n! = 1.$$

Propoziţia 7.6.2. Polinomul Legendre P_n este soluţie a ecuaţiei diferenţiale:

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Demonstraţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem:

$$\left(x^2 - 1\right) \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]' = 2nx \left(x^2 - 1\right)^n. \tag{7.21}$$

Derivând de $n+1$ ori relaţia (7.21) cu regula de derivare a lui Leibniz obţinem:

$$\left(x^2 - 1\right) \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]^{(n+2)} + C_{n+1}^1 \, 2x \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]^{(n+)} + C_{n+1}^2 \, 2 \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]^{(n)} =$$

$$= 2nx \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]^{(n+1)} + C_{n+1}^1 \, 2n \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]^{(n)}$$

şi mai departe

$$\left(x^2 - 1\right) P_n''(x) + 2(n+1)x \, P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) =$$

$$= 2nx P_n'(x) + 2n(n+1) P_n(x).$$

Aşadar, avem:

$$\left(x^2-1\right) P_n''(x)+2x\, P_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0$$

ceea ce trebuia dovedit.

Propoziţia 7.6.3. Polinoamele lui Legendre satisfac relaţia de recurenţă:

$$(n+1)\, P_{n+1}(x)-(2n+1)\, x\, P_n(x)+n\, P_{n-1}(x)=0,\ n\in\mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(7.22)}$$

Demonstraţie. Conform definiţiei polinoamelor Legendre avem:

$$\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, r^n. \qquad \textbf{(7.23)}$$

Derivând în raport cu r relaţia (7.23) obţinem:

$$\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{3}{2}}(x-r)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, n\, r^{n-1}. \qquad \textbf{(7.24)}$$

Amplificând cu $x-r$ relaţia (7.23) rezultă:

$$\left(1-2xr+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}(x-r)=(x-r)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, r^n. \qquad \textbf{(7.25)}$$

Din (7.24) şi (7.25) deducem:

$$(x-r)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, r^n=\left(1-2xr+r^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, n\, r^{n-1}.$$

Identificând coeficientul lui r^n din membrul stâng cu coeficientul lui r^n din membrul drept rezultă:

$$x\, P_n(x)-P_{n-1}(x)=(n+1)\, P_{n+1}(x)-2nx\, P_n(x)+(n-1)P_{n-1}(x)$$

şi mai departe

$$(n+1)\, P_{n+1}(x)-(2n+1)\, x\, P_n(x)+n\, P_{n-1}(x)=0,\ n\in\mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(7.26)}$$

Observaţia 7.6.1. Relaţia (7.26) ne permite să explicităm primele polinoame Legendre.

Întra-adevăr, din (7.19) deducem:

$P_0(x)=1;\ P_1(x)=x$, iar din (7.26) pentru $n=1$, avem:

$2P_2(x)-3x^2+1=0$, de unde rezultă că

$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$.

În mod analog, înlocuind în (7.26) pe n cu $2,3,...$ obţinem:

$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$; $P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$; etc.

Propoziţia 7.6.4. Polinomul Legendre $P_n(x)$ este un polinom de gradul n care are toate rădăcinile reale şi distincte cuprinse în intervalul $(-1, 1)$.

Demonstraţie. Prima afirmaţie este evidentă din formula Olinde-Rodrigues (7.19). Celelalte afirmaţii rezultă din teorema lui Rolle.

Într-adevăr, ecuaţia $\left(x^2-1\right)^n=0$ are rădăcinile -1 şi 1 multiple de ordinul n.

Din teorema lui Rolle rezultă că ecuaţia $\frac{d}{dx}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]=0$ admite pe lângă rădăcinile -1 şi 1 multiple de ordinul $n-1$ şi o rădăcină reală $c\in(-1, 1)$.

În mod analog, ecuaţia $\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]=0$ admite pe de o parte rădăcinile -1 şi 1 cu ordinul de multiplicitate $n-2$, iar pe de altă parte, din teorema lui Rolle, admite o rădăcină reală în intervalul $(-1, c)$ şi o rădăcină reală în intervalul $(c, 1)$ şi aşa mai departe.

În final rezultă că ecuaţia $P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]=0$ admite n rădăcini reale distincte în intervalul $(-1, 1)$.

Propoziţia 7.6.5. Polinomul Legendre P_n este ortogonal pe orice polinom de grad mai mic ca n.

Demonstraţie. Vom arăta că:

$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,Q(x)\,dx=0$, pentru orice polinom Q cu $\operatorname{grad} Q=m<n$. Într-adevăr, integrând prin părţi obţinem:

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]Q(x)\,dx=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]Q(x)\Bigg|_{-1}^{1}-$$

$$-\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] Q'(x)\, dx.$$

Cum $\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ se anulează în -1 şi 1 pentru orice $m<n$, rezultă că:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] Q(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\left(x^2-1\right)Q'(x)\right] dx\ .$$

Continuând să integrăm prin părţi, în final obţinem:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right] Q(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n Q^{(n)}(x)\, dx\ .$$

Cum grad $Q<n$, rezultă că $Q^{(n)}(x)=0$, deci că

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, Q(x)\, dx = 0.$$

Propoziţia 7.6.6. Polinoamele Legendre satisfac condiţia:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{dacă } m = n \end{cases}. \qquad \textbf{(7.27)}$$

Demonstraţie. Afirmaţia $\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0$, dacă $m \neq n$, rezultă din Propoziţia 7.6.5. În particular, acest lucru ne arată că polinoamele Legendre formează un sistem ortogonal de funcţii pe intervalul $[-1, 1]$.

Pentru a verifica afirmaţia în cazul $m=n$, scriem relaţia de recurenţă (7.26) pentru n şi $n-1$ şi obţinem:

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) - (2n+1)\, x P_n(x) + n\, P_{n-1}(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots. \qquad \textbf{(7.28)}$$

$$n\, P_n(x) - (2n-1)\, x P_{n-1}(x) + (n-1) P_{n-2}(x) = 0,\ n = 2, 3, \ldots. \qquad \textbf{(7.29)}$$

Înmulţind relaţia (7.28) cu P_{n-1} şi integrând rezultă:

$$(n+1)\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)\,P_{n-1}(x)\,dx-(2n+1)\int_{-1}^{1} x\,P_n(x)\,P_{n-1}(x)\,dx+n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,dx=0.$$

Cum prima integrală este 0, rezultă:

$$n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,dx=(2n+1)\int_{-1}^{1} x\,P_n(x)\,P_{n-1}(x)\,dx. \qquad \textbf{(7.30)}$$

În mod analog, înmulţind relaţia (7.29) cu P_n şi integrând rezultă:

$$n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx=(2n-1)\int_{-1}^{1} x\,P_n(x)\,P_{n-1}(x)\,dx. \qquad \textbf{(7.31)}$$

Din (7.30) şi (7.31) deducem:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx=\frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\,dx,\ n=2,3,\ldots. \qquad \textbf{(7.32)}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\int_{-1}^{1} P_0^2(x)\,dx=\int_{-1}^{1} dx=2$$

$$\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\frac{2}{3}.$$

Din (7.32) rezultă succesiv:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx=\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} P_0^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}.$$

Observaţia 7.6.2. Dacă funcţia continuă f se dezvoltă în serie după polinoamele Legendre şi convergenţa seriei este uniformă, atunci coeficienţii Fourier sunt daţi de:

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx,\ n=0,1,2,\ldots.$$

Într-adevăr, integrând termen cu termen seria $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$ şi ţinând seama de relaţia de ortogonalitate (7.27) rezultă:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx = C_n \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = C_n \frac{2}{2n+1}, \text{ deci}$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx.$$

C A P I T O L U L 8

TRANSFORMATA FOURIER

8.1. Formula integrală Fourier

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $T=2l$. Dacă f satisface condiţiile lui Dirichlet şi în plus îndeplineşte condiţia:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right],\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$$

atunci f admite reprezentarea:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{-in\omega x} \tag{8.1}$$

unde

$$\omega=\frac{\pi}{l}\ \text{şi}\ c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{in\omega t}\ dt\ . \tag{8.2}$$

Înlocuind (8.2) în (8.1) obţinem:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{in\omega(t-x)}\ dt\ . \tag{8.3}$$

Să presupunem acum că f nu mai este periodică. Fie g restricţia funcţiei f la intervalul $[-l,l)$ şi fie $f^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţia periodică de perioadă $T=2l$, care prelungeşte funcţia g. Aşadar, avem:

$$f^*(x)=g(x)=f(x),\ (\forall)\ x\in[-l,l).$$

Cum f^* admite reprezentarea (8.3), atunci

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{in\omega(t-x)}\ dt,\ (\forall)\ x\in(-l,l).$$

Dacă notăm cu $\omega_n = n\omega$, atunci

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega\int_{-l}^{l}f(t)e^{i\,\omega_n(t-x)}\,dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)e^{i\,\omega_n(t-x)}\,dt\right)(\omega_n-\omega_{n-1}).$$

J.B. Fourier a asimilat seria din membrul drept cu o sumă Riemann pentru intervalul $(-\infty,\infty)$ şi trecând la limită când $l\to\infty$, a dedus că:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\omega(t-x)}\,dt,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(8.4)}$$

Formula (8.4) poartă numele de *formula de reprezentare integrală Fourier.* Aşadar, funcţiile periodice pe $\mathbb{R}$ se dezvoltă în serie Fourier, în timp ce funcţiile care nu sunt periodice se pot reprezenta (în anumite condiţii) ca o integrală dublă improprie (formula (8.4)). Atragem atenţia că prima integrală din formula (8.4) este în sensul valorii principale a lui Cauchy, adică:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{u\to\infty}\int_{-u}^{u}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\omega(t-x)}\,dt\right)d\omega.$$

Definiţia 8.1.1. O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numeşte *local integrabilă* dacă este integrabilă pe orice interval compact $[a,b]\subset\mathbb{R}$, respectiv se numeşte *absolut integrabilă* dacă $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ este convergentă.

Vom nota cu $L_1(\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al funcţiilor local integrabile şi absolut integrabile pe $\mathbb{R}$.

Definiţia 8.1.2. O funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *continuu diferenţiabilă pe porţiuni* pe $[a,b]$ dacă există o diviziune a intervalului $[a,b]$, anume

$$\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

astfel încât f este derivabilă pe orice subinterval (x_{i-1},x_i), $i=\overline{1,n}$ şi f şi f' au limite laterale finite la dreapta în x_{i-1} şi la stânga în x_i, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$. Cu alte cuvinte există $f(x_{i-1}+0)$, $f'(x_{i-1}+0)$, $f(x_i-0)$ şi $f'(x_i-0)$, $(\forall)\ i=\overline{1,n}$.

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 8.1.1. (Formula integrală Fourier)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietăţile:

(i) $f\in L_1(\mathbb{R})$

(ii) f este continuu diferenţiabilă pe orice interval compact $[a,b]\subset\mathbb{R}$

(iii) $f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right],\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

Atunci:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-t)}\,dt\,.$$

Observaţia 8.1.1. Dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$, atunci condiţia (iii) este automat satisfăcută.

8.2. Transformata Fourier

Definiţia 8.2.1. Fie $f\in L_1(\mathbb{R})$. Funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definită prin

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx \tag{8.5}$$

se numeşte *transformata Fourier* a funcţiei f.

Lema 8.2.1. (Riemann-Lebesque)

Transformata Fourier F definită de (8.5) este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ şi

$$\lim_{|\omega|\to\infty}\left|F(\omega)\right|=0\,.$$

Demonstraţie. Pentru orice $\lambda>0$ şi orice $h\in\mathbb{R}$ avem:

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,e^{-ix(\omega+h)}\,dx-\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,e^{-ix\omega}\,dx\right|\le$$

$$\le\int_{-\lambda}^{\lambda}\left|f(x)\right|\left|e^{-ix\omega}\right|\left|e^{-ixh}-1\right|dx=\int_{-\lambda}^{\lambda}\left|f(x)\right|\left|e^{-ixh}-1\right|dx.$$

Pe de altă parte avem:

$$\left|e^{-i\,x\,h}-1\right|=\left|\cos x\,h-i\sin x\,h-1\right|=\left|-2\sin^2\frac{x\,h}{2}-2\,i\sin\frac{x\,h}{2}\cos\frac{x\,h}{2}\right|=$$

$$=\left|2\,i\sin\frac{x\,h}{2}\right|\left|\cos\frac{x\,h}{2}-i\sin\frac{x\,h}{2}\right|=2\left|\sin\frac{x\,h}{2}\right|\le\left|x\,h\right|\le\lambda\,\left|h\right|$$

dacă $x\in\left[-\lambda,\,\lambda\right]$.

Aşadar, avem:

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda}f\left(x\right)e^{-i\,x\left(\omega+h\right)}\,dx-\int_{-\lambda}^{\lambda}f\left(x\right)e^{-i\,x\,\omega}\,dx\right|\le\lambda\,\left|h\right|\int_{-\lambda}^{\lambda}\left|f\left(x\right)\right|\,dx$$

de unde rezultă că pentru orice $\lambda>0$, integrala $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}f\left(x\right)e^{-i\,\omega\,x}\,dx$ este continuă în raport cu parametrul ω.

Dacă notăm cu $I_n\left(\omega\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}f\left(x\right)e^{-i\,\omega\,x}\,dx$, $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\left\{I_n\right\}$ este un şir de funcţii continue pe $\mathbb{R}$.

Pe de altă parte

$$\left|I_n\left(\omega\right)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n}^{n}\left|f\left(x\right)\right|\,dx,\ \left(\forall\right)\,\omega\in\mathbb{R}.$$

Cum $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|\,dx$ este convergentă, rezultă că şirul $\left\{I_n\right\}$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$, deci

$$I_n\xrightarrow[\mathbb{R}]{u}F.$$

Rezultă că F este continuă pe $\mathbb{R}$.

Pentru a demonstra partea a doua a afirmaţiei folosim din nou faptul că $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|\,dx$ este convergentă. Rezultă că pentru $\left(\forall\right)\,\varepsilon>0,\,\left(\exists\right)\,u>0$ astfel încât

$$\int_{-\infty}^{-u} |f(x)|\, dx + \int_{u}^{\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pe de altă parte, folosind faptul că f este integrabilă pe $[-u, u]$, rezultă că există o diviziune a intervalului $[-u, u]$,

$$\Delta : -u = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = u$$

astfel încât

$$0 < S_\Delta - \int_{-u}^{u} f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

unde cu S_Δ am notat suma Darboux superioară ataşată lui f şi diviziunii Δ. Dacă notăm cu M_i marginea superioară a funcţiei f pe intervalul (x_{i-1}, x_i), atunci

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \geq \int_{-u}^{u} f(x)\, dx .$$

Fie $g_\Delta : [-u, u] \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$g_\Delta(x) = \begin{cases} M_i, & \text{dacă } x \in [x_{i-1}, x_i) \\ 0, & \text{dacă } x = x_i \end{cases}, \; i = \overline{1, n}.$$

Evident, g_Δ este integrabilă pe $[-u, u]$ şi

$$\int_{-u}^{u} g_\Delta(x)\, dx = S_\Delta .$$

În continuare avem:

$$\int_{-u}^{u} |g_\Delta(x) - f(x)| dx = \int_{-u}^{u} [g_\Delta(x) - f(x)] dx = S_\Delta - \int_{-u}^{u} f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

şi mai departe:

$$\left| \int_{-u}^{u} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right| \leq \left| \int_{-u}^{u} e^{-i\omega x} [f(x) - g_\Delta(x)]\, dx \right| + \left| \int_{-u}^{u} g_\Delta(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{-u}^{u} \left| f(x) - g_{\Delta}(x) \right| dx + \left| \sum_{i=1}^{n} M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-i\omega x}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{n} \left| M_i \right| \cdot \frac{2}{|\omega|}.$$

Cum $|\omega| \to \infty$, putem alege ω astfel încât $|\omega| > \frac{6}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} M_i$, de unde rezultă că

$$\left| \int_{-u}^{u} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

În definitiv, am arătat că pentru ω suficient de mare avem:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right| < \int_{-\infty}^{-u} \left| f(x) \right| dx + \int_{u}^{\infty} \left| f(x) \right| dx + \left| \int_{-u}^{u} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

deci

$$\lim_{|\omega| \to \infty} \left| F(\omega) \right| = 0.$$

Corolarul 8.2.1. Dacă $f \in L_1(\mathbb{R})$, atunci:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx = 0.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, din formula lui Euler avem:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx \right| =$$

$$= \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx \right)^2}$$

de unde, conform Lemei 8.2.1, deducem că:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \right| \to 0, \text{ când } \lambda \to \infty.$$

Rezultă că $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx = 0$ şi analog $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx = 0$.

Fie f ca în Teorema 8.1.1. Atunci are loc formula de reprezentare integrală a lui Fourier:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-t)}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right) e^{i\omega x}\, dx\ .$$

Ţinând seama de definiţia transformatei Fourier rezultă:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\ . \qquad \textbf{(8.6)}$$

Formula (8.6) poartă numele de *transformata Fourier inversă*.

O funcţie $f\in L_1(\mathbb{R})$ poate fi interpretată ca un semnal în timp, iar transformata sa Fourier $F=\mathfrak{F}(f)$ ca spectrul în frecvenţă al lui f. Prin transformata Fourier inversă se recuperează semnalul f.

Exemplul 8.2.1. Să se afle transformata Fourier a funcţiei

$f(x)=e^{-ax^2}$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Transformata Fourier va fi

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, e^{-i\omega x}\, dx\ .$$

Derivând în raport cu parametrul ω obţinem:

$$F'(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (-ix)\, e^{-ax^2}\, e^{-i\omega x}\, dx\ .$$

Integrând prin părţi avem:

$$F'(\omega)=\frac{i}{2a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ax^2}\right)'\, e^{-i\omega x}\, dx =$$

$$= \frac{i}{2a\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ax^2} e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-ax^2} e^{-i\omega x} \, dx \right)$$

şi mai departe

$$F'(\omega) = \frac{-\omega}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} \, dx = -\frac{\omega}{2a} F(\omega).$$

S-a obţinut o ecuaţie diferenţială a cărei soluţie generală este

$$F(\omega) = C\, e^{-\int \frac{\omega}{2a} d\omega} = C\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Dar

$$C = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx. \qquad \textbf{(8.7)}$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $\sqrt{a}\, x = t$ şi ţinem seama de integrala Poisson $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$, deducem că

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} dt = \frac{1}{\sqrt{2a}}. \qquad \textbf{(8.8)}$$

În final avem $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.

Exemplul 8.2.2. Să se afle transformata Fourier a funcţiei

$f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Avem

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} \, dx.$$

Ţinând seama de relaţiile lui Euler, deducem:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\cos\omega x\,dx - i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\sin\omega x\,dx\right).$$

Deoarece funcţia $x\to e^{-a|x|}\sin\omega x$ este impară şi funcţia $x\to e^{-a|x|}\cos\omega x$ este pară, rezultă:

$$F(\omega)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos\omega x\,dx.$$

Integrând de două ori prin părţi obţinem:

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2}.$$

Transforma Fourier inversă este:

$$e^{-a|x|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{a^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\,d\omega.$$

S-a obţinut astfel următoarea egalitate interesantă:

$$e^{-a|x|}=\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}\,d\omega,\ x\in\mathbb{R}.$$

Observaţia 8.2.1. Pentru existenţa transformatei Fourier este esenţial ca funcţia f să fie absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$. Funcţiile elementare ca $f(x)=1$, $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=e^x$, etc., nu au transformate Fourier. În cazul Exemplului 8.2.1, $f(x)=e^{-ax^2}$, $a>0$ este absolut integrabilă. Într-adevăr, din (8.7) şi (8.8) rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

În cazul funcţiei din Exemplul 8.2.2 avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,dx=\lim_{\substack{u\to-\infty\\ v\to\infty}}\int_{u}^{v} e^{-a|x|}\,dx=\lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0} e^{ax}\,dx+\lim_{v\to\infty}\int_{0}^{v} e^{-ax}\,dx=$$

$$= \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{a} e^{ax}\Big|_u^0 + \lim_{v\to\infty} \frac{-1}{a} e^{-ax}\Big|_0^v = \frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}.$$

Observaţia 8.2.2. Transformata Fourier $F(\omega)$ este un număr complex pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$. Modulul său $|F(\omega)|$ se numeşte *amplitudinea în frecvenţă* a semnalului $f(t)$ şi se măsoară în decibeli, iar argumentul său redus se numeşte *faza în frecvenţă* a lui $f(t)$ şi se măsoară în radiani.

Exemplul 8.2.3. Fie funcţia $f(t)=\begin{cases} e^{-at}, & \text{dacă } t>0 \\ 0, & \text{dacă } t<0 \end{cases}$, $a>0$ (această funcţie exprimă modul în care se descarcă un condensator electric printr-o rezistenţă).

Să se afle amplitudinea în frecvenţă şi faza în frecvenţă a semnalului $f(t)$.

Transformata Fourier a funcţie f este

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a+i\omega}$$

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{a}{a^2+\omega^2}-i\,\frac{\omega}{a^2+\omega^2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a^2+\omega^2}$$

$$\arg F(\omega)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\omega}{a}\right).$$

8.3. Transformatele Fourier prin cos şi sin

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care îndeplineşte condiţiile din Teorema 8.1.1 şi care, în plus, este pară. Din formula integrală Fourier şi din formulele lui Euler rezultă:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,d\omega + i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(x-t)\,d\omega\right].$$

Ţinând seama că funcţia $\omega\to f(t)\sin\omega(x-t)$ este impară în raport cu ω, rezultă că a doua integrală este 0. Aşadar, avem:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega x-\omega t)\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)\cos\omega x\cos\omega t+f(t)\sin\omega x\sin\omega t\right]dt.$$

Deoarece f este pară rezultă că funcţia $t\to f(t)\sin\omega t$ este impară şi deci că doua integrală este 0. În continuare avem:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega x\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega x\,d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt.$$

Transformata Fourier prin cosinus se defineşte astfel:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt. \qquad \textbf{(8.9)}$$

În mod analog, dacă funcţia f este impară se poate defini *transformata Fourier prin sinus*:

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \qquad \textbf{(8.10)}$$

Transformatele Fourier inverse vor fi:

$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega x\,d\omega$, dacă f este pară şi

$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega$, dacă f este impară.

Exemplul 8.3.1. Să se afle transformata Fourier prin cosinus a funcţiei:

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{dacă } |t|<\alpha\\ 0, & \text{dacă } |t|>\alpha\end{cases},\ \alpha>0.$$

Evident funcţia f este pară. Conform (8.9) avem:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\alpha}\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left.\frac{\sin\omega t}{\omega}\right|_{0}^{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\omega\alpha}{\omega}.$$

Graficul funcţiei F_c este reprezentat mai jos (Fig. 8.1):

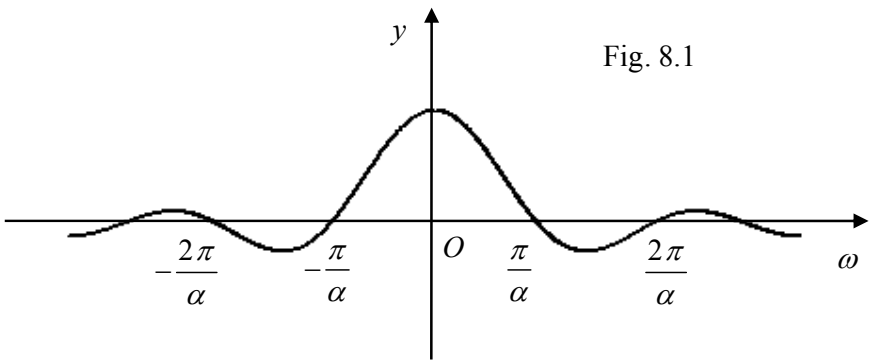


Fig. 8.1

Transformata Fourier inversă prin cosinus este

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\alpha}{\omega}\cos\omega t\,d\omega\,.$$

Pentru $t=0$ obţinem:

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\alpha}{\omega}\,d\omega\,.$$

În sfârşit, dacă facem schimbarea de variabilă $\omega\alpha=t$, rezultă

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt \text{ şi mai departe } \int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

Am obţinut astfel rezultatul lui Dirichlet.

Reamintim că primitiva funcţiei:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ 1, & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

nu se poate calcula, deşi ştim că există, fiind o funcţie continuă. Se obişnuieşte să se noteze cu:

$$S_i(x)=\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt \text{ (sinusul integral).}$$

Integrala lui Dirichlet se mai notează cu:

$$S_i(\infty)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Fie funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$. Atunci f se poate prelungi pe $\mathbb{R}$ fie la o funcţie pară fie la o funcţie impară. Rezultă că, în acest caz, putem vorbi atât de transformata sa Fourier prin cosinus, cât şi de transformata sa Fourier prin sinus.

Exemplul 8.3.2. Să se afle transformatele Fourier prin cosinus, respectiv prin sinus ale funcţiei:

$$f(x)=e^{-x},\ x\in[0,\infty).$$

Avem:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}.$$

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}\sin\omega t\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

Transformatele Fourier inverse sunt:

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega,\ x\in[0,\infty)$$

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}\,d\omega,\ x\in[0,\infty).$$

8.4. Proprietăţile transformatei Fourier

1) **Liniaritatea**

Fie $f,g\in L_1(\mathbb{R})$, $F=\mathfrak{F}(f)$ transformata Fourier a lui f, respectiv $G=\mathfrak{F}(g)$ transformata Fourier a lui g. Atunci:

$$\mathfrak{F}(\alpha f+\beta g)=\alpha\,\mathfrak{F}(f)+\beta\,\mathfrak{F}(g),\ (\forall)\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Într-adevăr,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)e^{-i\omega x}\,dx=$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx+\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,e^{-i\omega x}\,dx\,.$$

2) **Mărginirea**

$$\left|F(\omega)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx=\frac{M}{\sqrt{2\pi}}\text{, unde } M=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx\,.$$

3) **Teorema deplasării**

Fie $h>0$ şi fie $f_h(x)=f(x-h)$. Atunci

$$\mathfrak{F}(f_h)(\omega)=e^{-i\omega h}\,\mathfrak{F}(f)(\omega).$$

Într-adevăr,

$$\mathfrak{F}(f_h)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t-h)\,e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Dacă notăm cu $u=t-h$ obţinem:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t-h)\,e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,e^{-i\omega(u+h)}\,du=e^{-i\omega h}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,e^{-i\omega u}\,du\,.$$

4) **Transformata Fourier a derivatei**

Fie $f\in L_1(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0$. Presupunem că f este derivabilă şi $f'\in L_1(\mathbb{R})$. Atunci:

$$\mathfrak{F}(f')(\omega)=i\,\omega\,\mathfrak{F}(f)(\omega).$$

Într-adevăr, fie:

$$F(\omega)=\mathfrak{F}(f)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \text{ şi}$$

$$G(\omega)=\mathfrak{F}(f')(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Integrând prin părţi obţinem:

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\,\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt\right)=i\,\omega\,F(\omega).$$

Dacă $f,\ f',\ f'',\ ...,\ f^{(m)}$ sunt absolut integrabile şi $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left|f(x)\right|=0$, atunci:

$$\mathfrak{F}\left(f^{(k)}\right)(\omega)=(i\,\omega)^k\ \mathfrak{F}(f)(\omega),\ (\forall)\ k=\overline{0,\,m}.$$

În plus avem:

$$\left|\mathfrak{F}(f)(\omega)\right|\le\frac{\left|\mathfrak{F}\left(f^{(k)}\right)(\omega)\right|}{|\omega|^k}\le\frac{C}{|\omega|^k},\ C>0.$$

5) **Transformata Fourier a convoluţiei**

Convoluţia a două funcţii se defineşte astfel:

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,g(t-x)\,dx,\ t\in\mathbb{R}.$$

Fie $f,\ g\in L_1(\mathbb{R})$ continue. Atunci:

$$\mathfrak{F}(f*g)=\sqrt{2\pi}\ \mathfrak{F}(f)\,\mathfrak{F}(g).$$

Într-adevăr,

$$\mathfrak{F}(f)(\omega)\,\mathfrak{F}(g)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\,\omega\,x}\,dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)\,e^{-i\,\omega\,y}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,g(y)\,e^{-i\,\omega\,(x+y)}\,dy\right)dx.$$

Dacă facem schimbarea de variabile $x+y=t$, atunci obţinem:

$$\mathfrak{F}(f)(\omega)\,\mathfrak{F}(g)(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,g(t-x)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt\right)dx=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,t}\, (f * g)(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathfrak{F}(f * g)(\omega).$$

C A P I T O L U L 9

TRANSFORMATA LAPLACE

9.1. Definiţiile de bază

Transformata Laplace este o funcţie de variabilă complexă $F(p)$, care se asociază unei funcţii de variabilă reală $f(t)$, numită şi funcţie original. În anumite condiţii, această asociere $f \to F$ este inversabilă. Transformata Laplace este utilă în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Într-adevăr, prin corespondenţa $f \to F$ o ecuaţie diferenţială liniară se transformă într-o ecuaţie algebrică, iar o ecuaţie cu derivate parţiale într-o ecuaţie diferenţială. Rezolvarea ecuaţiei transformate este mai simplă decât rezolvarea ecuaţiei iniţiale. Odată găsită soluţia în transformata Laplace, prin inversarea $F \to f$ se obţine soluţia ecuaţiei iniţiale.

Definiţia 9.1.1. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numeşte *funcţie original* dacă are următoarele proprietăţi:

1) $f(t) = 0$, pentru $t < 0$

2) f are pe orice interval finit din $[0, \infty)$ un număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi, i.e. puncte în care limitele laterale există, sunt finite, dar diferite

3) există $M > 0$ şi $s > 0$ astfel încât

$$|f(t)| \le M e^{st}, \ (\forall)\ t > 0. \qquad \textbf{(9.1)}$$

Cea mai mică valoare $s_0 \ge 0$ pentru care inegalitatea (9.1) are loc se numeşte *indicele de creştere* al funcţiei f. Notăm cu $\mathcal{O}$ mulţimea funcţiilor original.

Exemplul 9.1.1.

1) Funcţia treaptă $u(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ 1, & \text{dacă } t \ge 0 \end{cases}$ este o funcţie original cu indicele de creştere $s_0 = 0$.

2) Funcţia $f(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{t}, & \text{dacă } t\geq 0\end{cases}$ este o funcţie original cu indicele de creştere $s_0=1$.

3) Funcţiile $f(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ e^{t^2}, & \text{dacă } t\geq 0\end{cases}$ nu este o funcţie original, pentru că nu satisface condiţia 3) din Definiţia 9.1.1.

Observaţia 9.1.1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie elementară. Dacă există $a\geq 0$ astfel încât $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\,e^{-at}=0$, atunci funcţia fu este o funcţie original, unde u este funcţia treaptă din Exemplul 9.1.1, 1) (funcţia unitate).

Evident, funcţia produs fu îndeplineşte condiţiile 1) şi 2) din Definiţia 9.1.1. Dacă există $a\geq 0$ astfel încât $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\,e^{-at}=0$, atunci pentru $\varepsilon=1$, există $\delta>0$ astfel încât

$$\left|f(t)\right|e^{-at}<1,\ (\forall)\ t>\delta \text{ sau } \left|f(t)\right|<e^{at},\ (\forall)\ t>\delta.$$

Pe de altă parte, f este mărginită pe intervalul compact $[0,\delta]$, deci există $M'>0$ astfel încât:

$$\left|f(t)\right|\leq M',\ (\forall)\ t\in[0,\delta].$$

Dacă notăm cu $M=\max\{1, M'\}$, atunci

$$\left|f(t)u(t)\right|=\left|f(t)\right|\leq M\,e^{at},\ (\forall)\ t>0.$$

deci fu îndeplineşte şi condiţia 3) din Definiţia 9.1.1.

În particular, dacă P este o funcţie polinomială, rezultă că $Pu\in\mathcal{O}$, deoarece

$$\lim_{t\to\infty} t^n\,e^{-t}=0,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}.$$

De asemenea, funcţiile $t\to u(t)\sin\omega t$ şi $t\to u(t)\cos\omega t$ sunt funcţii original cu indicele de creştere $s_0=0$.

În continuare, pentru simplificare, vom nota cu f produsul fu. De exemplu, prin funcţia $f(t)=\sin\omega t$ înţelegem funcţia

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } t<0\\ \sin\omega t, & \text{dacă } t\geq 0\end{cases}.$$

Propoziţia 9.1.1. Dacă $f,\ g \in \mathcal{O}$, atunci:

i) $f \cdot g \in \mathcal{O}$

ii) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{O},\ (\forall)\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$.

Demonstraţie. i) Fie $M_1 > 0,\ M_2 > 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0$ astfel încât

$$\left|f(t)\right| \leq M_1\, e^{s_1 t},\ \left|g(t)\right| \leq M_2\, e^{s_2 t},\ (\forall)\ t > 0.$$

Evident avem

$$\left|f(t)g(t)\right| \leq M_1 M_2\, e^{(s_1+s_2)t},\ (\forall)\ t > 0$$

de unde deducem că $f \cdot g \in \mathcal{O}$.

ii) $\left|\alpha f(t) + \beta g(t)\right| \leq \left|\alpha\right| M_1 e^{s_1 t} + \left|\beta\right| M_2 e^{s_2 t},\ (\forall)\ t > 0$.

Dacă $s_3 = \max\{s_1,\ s_2\}$ şi $M_3 = \left|\alpha\right| M_1 + \left|\beta\right| M_2$, atunci

$\left|\alpha f(t) + \beta g(t)\right| \leq M_3\, e^{s_3 t},\ (\forall)\ t > 0$, deci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{O}$.

În particular, rezultă că $\mathcal{O}$ este un spaţiu vectorial complex.

Definiţia 9.1.2. Fie $f \in \mathcal{O}$ şi s_0 indicele său de creştere. *Transformata Laplace* a funcţiei f este funcţia de variabilă complexă $F(p)$ definită astfel:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,\ p \in \mathbb{C}. \qquad \textbf{(9.2)}$$

Exemplul 9.1.2. Să se afle transformata Laplace a funcţiei treaptă

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0 \\ 1, & \text{dacă } t \geq 0 \end{cases}.$$

Conform Definiţiei 9.1.2 avem $F(p) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\, dt$.

Dacă $p = s + i\sigma$, atunci

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t}\, dt \text{ şi } \left|F(p)\right| \leq \int_0^\infty e^{-st}\, dt .$$

Observăm că integrala din membrul drept este convergentă pentru $s = \operatorname{Re} p > 0$. Rezultă că $F(p)$ este convergentă pentru $\operatorname{Re} p > 0$.

Pe de altă parte, $F(p) = -\dfrac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty} = -\dfrac{1}{p}\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{-pt}-1\right)$.

Cum $p = s + i\sigma$, $s, \sigma \in \mathbb{R}$, rezultă $e^{-pt} = e^{-st}\cdot e^{-i\sigma t} = e^{-st}(\cos\sigma t - i\sin\sigma t)$.

Atunci

$$\left|e^{-i\sigma t}\right| = \left|\cos\sigma t - i\sin\sigma t\right| = 1$$

de unde

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{-pt}\right| = \lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0, \text{ fiindcă } s = \operatorname{Re} p > 0.$$

Aşadar, transformata Laplace a funcţiei treaptă u este

$$F(p) = \frac{1}{p}, \ \operatorname{Re} p > 0.$$

Exemplul 9.1.3. Să se afle transformata Laplace a funcţiei $f(t) = e^{\omega t}$, unde $\omega \in \mathbb{C}$.

Avem

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\omega t} e^{-pt}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\omega)t}\, dt = -\frac{e^{-(p-\omega)t}}{p-\omega}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\omega},$$

dacă $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\omega$.

Aşadar, transformata Laplace a funcţiei $f(t) = e^{\omega t}$, $t \in \mathbb{R}$ este

$$F(p) = \frac{1}{p-\omega}, \ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\omega.$$

Teorema 9.1.1. Integrala (9.2) este convergentă în domeniul $D_0 = \{p \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} p > s_0\}$, unde s_0 este indicele de creştere al funcţiei f, iar funcţia F definită de (9.2) este olomorfă în D_0.

Demonstraţie. Prima afirmaţie rezultă din inegalităţile:

$$\left|\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| \le \int_0^{\infty} \left|f(t)\right| e^{-st}\, dt \le M\int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t}\, dt = \frac{M}{s-s_0}$$

$\left(s = \operatorname{Re} p > s_0\right)$.

Pentru a demonstra a doua afirmaţie, fie $D_\alpha = \left\{ p \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} p > s_0 + \alpha \right\}$.

Vom arăta că F este olomorfă în D_α, $(\forall)\ \alpha > 0$. Fie $p \in D_\alpha$ şi $\rho > 0$ astfel încât $\overline{B(p,\rho)} \subset D_\alpha$. Notăm cu $C = \left\{ z \in \mathbb{C};\ |z - p| = \rho \right\}$ (Fig. 9.1).

Pentru orice $z \in B(p,\rho)$ avem:

$$F(z) - F(p) = \int_0^\infty f(t)\left(e^{-zt} - e^{-pt}\right) dt\,. \tag{9.3}$$

Pe de altă parte, din Propoziţia 6.8.1, pentru $f(z) = e^{-zt}$ şi $z_0 = p$ deducem că:

$$e^{-zt} - e^{-pt} = (z-p)(-t)e^{-pt} + (z-p)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-ut}}{(u-p)^2 (u-z)}\, du\,. \tag{9.4}$$

Din (9.3) şi (9.4) rezultă:

$$\frac{F(z) - F(p)}{z-p} = \int_0^\infty \left[-t\, f(t)\right] e^{-pt}\, dt + (z-p) \int_0^\infty f(t)\, R(p,t,z)\, dt \tag{9.5}$$

unde

$$R(p,t,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-ut}}{(u-p)^2 (u-z)}\, du\,.$$

Ţinând seama de proprietăţile integralei complexe, avem următoarele majorări:

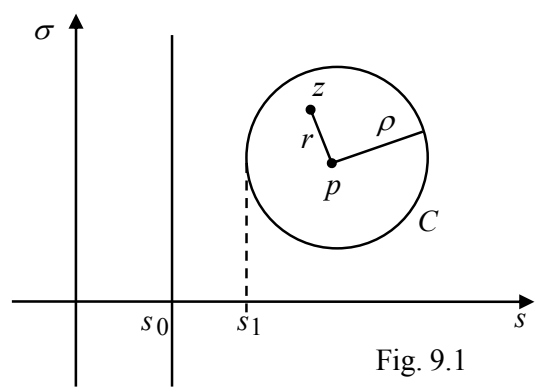


Fig. 9.1

$$\left|R(p,t,z)\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{e^{-ut}}{(u-p)^2 \left(u - p - (z-p)\right)} \right| du \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-s_1 t}}{\rho^2 (\rho - r)} \cdot 2\pi\rho = \frac{e^{-s_1 t}}{\rho(\rho - r)}$$

unde $s_1 = \inf \left\{ x \in \mathbb{R},\ x + iy \in C \right\}$.

Dacă notăm cu $r = |z-p|$, atunci:

$$\left|(z-p)\int_0^\infty f(t)\,R(p,t,z)\,dt\right| \le \frac{r}{\rho(\rho-r)}\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-s_1 t}\,dt \le$$

$$\le \frac{r}{\rho(\rho-r)}\int_0^\infty M\,e^{s_0 t}e^{-s_1 t}\,dt = \frac{M\,r}{\rho(\rho-r)}\int_0^\infty e^{-(s_1-s_0)t}\,dt = \frac{M\,r}{\rho(\rho-r)(s_1-s_0)}.$$

Dacă $z \to p$, atunci membrul drept tinde la 0.

Din (9.5) deducem că există

$$F'(p) = \lim_{z\to p}\frac{F(z)-F(p)}{z-p} = \int_0^\infty \left[-t\,f(t)\right]e^{-p\,t}\,dt.$$

Cum $\alpha > 0$ a fost ales arbitrar, rezultă că F este olomorfă în D_0 şi

$$F'(p) = \int_0^\infty \left[-t\,f(t)\right]e^{-p\,t}\,dt.$$

Observaţia 9.1.2. Dacă $f \in \mathcal{O}$ şi F este transformata sa Laplace, atunci:

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p) = 0.$$

Într-adevăr, dacă s_0 este indicele de creştere al funcţiei f atunci:

$$|F(p)| \le \int_0^\infty |f(t)|\,e^{-s\,t}\,dt \le M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\,dt = \frac{M}{s-s_0}$$

unde $s = \operatorname{Re} p > s_0$. Dacă $s = \operatorname{Re} p \to \infty$, atunci $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{M}{s-s_0} = 0$, de unde deducem că

$$\lim_{s\to\infty} F(p) = 0.$$

9.2. Proprietăţile transformatei Laplace

În continuare, pentru orice funcţie original f, vom nota cu $\mathcal{L}(f)$ transformata sa Laplace. Aşadar,

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt,\ \operatorname{Re} p>0.$$

Teorema 9.2.1. (liniaritatea)

Dacă f şi g sunt două funcţii original , atunci $(\forall)\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ avem:

$$\mathcal{L}(\alpha f+\beta g)=\alpha\,\mathcal{L}(f)+\beta\,\mathcal{L}(g).$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}(\alpha f+\beta g)(p)=\int_0^{\infty}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right] e^{-pt}\, dt=$$

$$=\alpha\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt+\beta\int_0^{\infty} g(t)\, e^{-pt}\, dt=\alpha\,\mathcal{L}(f)(p)+\beta\,\mathcal{L}(g)(p).$$

Exemplul 9.2.1. Să se afle transformatele Laplace ale funcţiilor $f(t)=\sin\omega t$ şi $g(t)=\cos\omega t,\ t\in\mathbb{R},\ \omega\in\mathbb{C}$.

Conform formulelor Euler avem:

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\ \text{şi}\ \cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}.$$

Pe de altă parte, folosind Teorema 9.2.1 şi Exemplul 9.1.3, avem:

$$\mathcal{L}(\sin\omega t)(p)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos\omega t)(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Exemplul 9.2.2. Să se afle transformatele Laplace ale funcţiilor hiperbolice $\operatorname{sh} t$ şi $\operatorname{ch} t$.

Deoarece $\operatorname{sh} t=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}$ şi $\operatorname{ch} t=\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}$, avem:

$$\mathcal{L}(\operatorname{sh} t)(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{p^2-1}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{ch} t)(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right)=\frac{p}{p^2-1}.$$

Teorema 9.2.2. (de asemănarea)

Fie $f\in\mathcal{O}$, $\alpha>0$ şi $g(t)=f(\alpha t)$, $(\forall)\ t\in\mathbb{R}$. Atunci

$$\mathcal{L}(g)(p)=\frac{1}{\alpha}\ \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Demonstraţie. Dacă facem schimbarea de variabilă $\alpha t=x$, atunci

$$\mathcal{L}(g)(p)=\int_0^\infty f(\alpha t)\,e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty f(x)\,e^{-\frac{p}{\alpha}x}\cdot\frac{1}{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha}\ \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Exemplul 9.2.3. Să se afle transformatele Laplace ale funcţiilor hiperbolice $\operatorname{sh}\omega t$ şi $\operatorname{ch}\omega t$, $\omega>0$.

Din Teorema 9.2.2 şi Exemplul 9.2.2, deducem:

$$\mathcal{L}(\operatorname{sh}\omega t)(p)=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2-1}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{ch}\omega t)(p)=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2-1}=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

Teorema 9.2.3. (de întârziere)

Fie $f\in\mathcal{O}$, $\alpha>0$ şi $g(t)=f(t-\alpha)$, $(\forall)\ t\in\mathbb{R}$. Atunci

$$\mathcal{L}(g)(p)=e^{-\alpha p}\ \mathcal{L}(f)(p).$$

Demonstraţie. Deoarece $g(t)=0$, dacă $t<\alpha$, rezultă

$$\mathcal{L}(g)(p)=\int_\alpha^\infty f(t-\alpha)\,e^{-pt}\,dt.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x=t-\alpha$ obţinem:

$$\mathcal{L}(g)(p)=\int_0^\infty f(x)\,e^{-p(\alpha+x)}\,dx=e^{-p\alpha}\int_0^\infty f(x)\,e^{-px}\,dx=e^{-p\alpha}\mathcal{L}(f)(p).$$

Exemplul 9.2.4. Să se afle transformata Laplace a funcţiei

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă} \quad t<0\\ 1, & \text{dacă} \quad t\in[0,1)\\ -1, & \text{dacă} \quad t\in[1,2]\\ 0, & \text{dacă} \quad t>2\end{cases}.$$

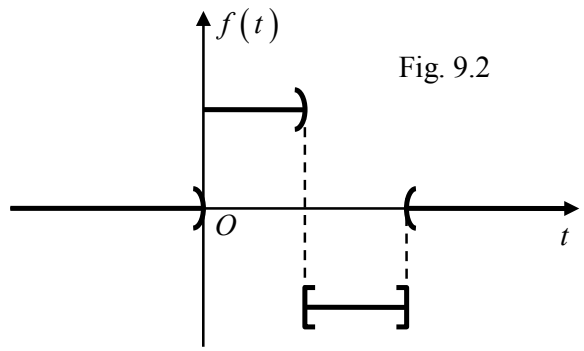


Fig. 9.2

Se observă, prin calcul direct că

$$f(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$$

unde $u=u(t)$ este funcţia treaptă.

Din Teorema 9.2.3 şi Exemplul 9.1.2 rezultă că

$$\mathcal{L}(f)(p)=\frac{1}{p}-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}e^{-2p}.$$

Teorema 9.2.4. (de deplasare)

Fie $f\in\mathcal{O}$, $\omega\in\mathbb{C}$ şi $g(t)=e^{\omega t}f(t)$, $(\forall)\ t\in\mathbb{R}$. Atunci

$$\mathcal{L}(g)(p)=\mathcal{L}(f)(p-\omega).$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}(g)(p)=\int_0^\infty e^{\omega t}f(t)\,e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty f(t)\,e^{-(p-\omega)t}\,dt=\mathcal{L}(f)(p-\omega).$$

Exemplul 9.2.5. Să se afle transformatele Laplace ale funcţiilor $f(t)=e^{-\lambda t}\sin\omega t$ şi $g(t)=e^{\lambda t}\cos\omega t$.

Din Teorema 9.2.4 şi Exemplul 9.2.1 rezultă că

$$\mathcal{L}\left(e^{-\lambda t}\sin\omega t\right)(p)=\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \quad \text{şi} \quad \mathcal{L}\left(e^{\lambda t}\cos\omega t\right)(p)=\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}.$$

Teorema 9.2.5. (derivarea originalului)

Dacă $f, f', f'', ..., f^{(n)}\in\mathcal{O}$ şi $\tilde{s}=\max\{s_0, s_1, ..., s_n\}$, unde s_k este indicele de creştere al funcţiei $f^{(k)}$, atunci

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\,\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$$
$$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\,\mathcal{L}(f)(p) - p f(0) - f'(0)$$
....
$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(p) = p^n\,\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad \textbf{(9.6)}$$

Demonstraţie. Integrând prin părţi obţinem

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt = f(t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Deoarece

$$\left|f(t)\, e^{-pt}\right| = \left|f(t)\right| e^{-st} \le M_1\, e^{s_0 t}\, e^{-st} = M_1\, e^{-(s-s_0)t}$$

rezultă că dacă $s = \operatorname{Re} p > s_0$, atunci

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) e^{-pt} = 0$ şi mai departe că

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\,\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

Formula generală (9.6) se demonstrează cu uşurinţă prin inducţie matematică.

Exemplul 9.2.6. Să se afle transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \sin^2 t$, $t \in \mathbb{R}$.

Din Teorema 9.2.5 rezultă că

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\,\mathcal{L}(f)(p) - f(0) = p\,\mathcal{L}(f)(p). \quad \textbf{(9.7)}$$

Pe de altă parte, $f'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t$ şi din Exemplul 9.2.1, deducem că

$$\mathcal{L}(f')(p) = \frac{2}{p^2+4}.$$

In sfârşit, din (9.7) rezultă că

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$$

Teorema 9.2.6. (derivarea imaginii)

Dacă $f \in \mathcal{O}$ şi notăm cu $g_n(t) = t^n f(t)$, atunci $g_n \in \mathcal{O}$ şi

$$\mathcal{L}(g_n)(p) = (-1)^n \left[\mathcal{L}(f)\right]^{(n)}(p),\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, din Teorema 9.1.1 rezultă că transformata Laplace $F = \mathcal{L}(f)$ a funcţiei f este olomorfă în domeniul $\operatorname{Re} p > s_0$, unde s_0 este indicele de creştere al funcţiei original f şi

$$\left[\mathcal{L}(f)\right]'(p) = F'(p) = \int_0^\infty \left[-t\,f(t)\right] e^{-pt}\,dt = -\int_0^\infty g_1(t)\,e^{-pt}\,dt = -\mathcal{L}(g_1)(p).$$

Cum funcţia t^n este o funcţie original, având indicele de creştere $s_0 = 1$, deducem că funcţia produs $g_n(t) = t^n f(t)$ este funcţie original, cu indicele de creştere $s_1 = 1 + s_0$. Procedând ca în demonstraţia Teoremei 9.1.1 vom avea:

$$\left[\mathcal{L}(f)\right]''(p) = F''(p) = \int_0^\infty t^2 f(t)\,e^{-pt}\,dt = \left[\mathcal{L}(g_2)\right](p)$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\left[\mathcal{L}(f)\right]^{(n)}(p) = F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t)\,e^{-pt}\,dt = (-1)^n \left[\mathcal{L}(g_n)\right](p).$$

Exemplul 9.2.7. Să se afle transformata Laplace a funcţiei $g_n(t) = t^n$.

Conform Exemplului 9.1.2, transformata Laplace a funcţiei treaptă $f(t) = 1$ este $F(p) = \dfrac{1}{p}$. Mai departe avem:

$$F'(p) = -\frac{1}{p^2} = \int_0^\infty -t\,e^{-pt}\,dt$$

de unde deducem că transformata Laplace a funcţiei $g_1(t) = t$ este $\dfrac{1}{p^2}$. Derivând în continuare obţinem

$$F''(p) = \frac{2}{p^3} = \int_0^\infty t^2\,e^{-pt}\,dt$$

de unde rezultă că transformata Laplace a funcţiei $g_2(t) = t^2$ este $\dfrac{2}{p^3}$.

În final, rezultă că transformata Laplace a funcţiei $g_n(t)=t^n$ este $\frac{n!}{p^{n+1}}$.

Teorema 9.2.7. (integrarea originalului)

Fie $f\in\mathcal{O}$ şi fie $g(t)=\int_0^t f(u)\,du$. Atunci

$$\mathcal{L}(g)(p)=\frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p).$$

Demonstraţie. Observăm că $g'(t)=f(t)$ (g este o primitivă pentru f).

Din Teorema 9.2.5 rezultă:

$$\mathcal{L}(f)(p)=\mathcal{L}(g')(p)=p\mathcal{L}(g)(p)-g(0).$$

Cum $g(0)=0$, deducem că:

$$\mathcal{L}(g)(p)=\frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p).$$

Exemplul 9.2.7. Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei $g(t)=\int_0^t \sin 3u\,du$.

Din Teorema 9.2.7 deducem că

$\mathcal{L}(g)(p)=\frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$, unde $f(t)=\sin 3t$.

Cum $\mathcal{L}(f)(p)=\frac{3}{p^2+9}$ (conform Exemplului 9.2.1) rezultă că

$$\mathcal{L}(g)(p)=\frac{3}{p\left(p^2+9\right)}.$$

Teorema 9.2.8. (integrarea imaginii)

Fie f o funcţie original cu indicele de creştere s_0, fie $F=\mathcal{L}(f)$ transformata sa Laplace şi fie G o primitivă a funcţiei F, cu $G(\infty)=0$. Dacă $g(t)=\frac{f(t)}{t}$, $t>0$ este de asemenea o funcţie original şi $\int_p^\infty F(q)\,dq$ este convergentă, atunci:

$$\int_p^{\infty} F(q)\, dq = \mathcal{L}(g)(p).$$

Demonstraţie. Fie domeniul simplu conex $D_0 = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} p > s_0\}$. Din Teorema 9.1.1 rezultă că transformata Laplace F este olomorfă în D_0, deci admite primitive în acest domeniu. Fie G o primitivă a sa, cu $G(\infty) = 0$ şi fie $H(p) = \int_p^{\infty} F(q)\, dq$. Deoarece $\int_p^{\infty} F(q)\, dq$ este convergentă, rezultă că

$$H(p) = \lim_{r \to \infty} \int_p^{r} F(q)\, dq = \lim_{r \to \infty} G(r) - G(p) = -G(p), \text{ deci}$$

$$H'(p) = -G'(p) = -F(p). \tag{9.8}$$

Pe de altă parte, din Teorema 9.2.6 avem:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{\infty} t\, g(t)\, e^{-pt}\, dt = -\left[\mathcal{L}(g)\right]'(p). \tag{9.9}$$

Din (9.8) şi (9.9) deducem că

$H'(p) = \left[\mathcal{L}(g)\right]'(p)$ şi mai departe că

$H(p) = \mathcal{L}(g)(p) + C$.

Cum $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} H(p) = 0$ şi $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} \mathcal{L}(g)(p) = 0$, conform Observaţiei 9.1.2 rezultă că $C = 0$, deci

$$H(p) = \int_p^{\infty} F(q)\, dq = \mathcal{L}(g)(p).$$

Exemplul 9.2.8. Să se afle transformata Laplace a funcţiei $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, $t > 0$.

Din Teoremei 9.2.8, transformata Laplace a funcţiei $g(t)$ este egală cu $\int_p^\infty F(q)\,dq$,

unde F este transformata Laplace a funcţiei $f(t)=\sin t$. Conform Exemplul 9.2.1 ştim că

$$F(q)=\frac{1}{q^2+1}.$$

Aşadar, transformata Laplace a funcţiei g este

$$\int_p^\infty \frac{1}{q^2+1}\,dq=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p.$$

Teorema 9.2.9. (transformata convoluţiei)

Dacă $f,\ g\in\mathcal{O}$ şi $h=f*g$, atunci $h\in\mathcal{O}$ şi

$$\mathcal{L}(h)=\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

Demonstraţie. Fie $M_1,\ M_2,\ s_1$ şi s_2 cu proprietăţile:

$$|f(t)|\le M_1\,e^{s_1 t},\ |g(t)|\le M_2\,e^{s_2 t},\ (\forall)\,t>0.$$

Dacă $h=f*g$, atunci $h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ şi

$$|h(t)|\le M_1M_2\int_0^t e^{s_1\tau}e^{s_2(t-\tau)}\,d\tau=M_1M_2\,e^{s_2 t}\int_0^t e^{(s_1-s_2)\tau}\,d\tau=$$

$$=M_1M_2\,e^{s_2 t}\cdot\frac{1}{s_1-s_2}\left[e^{(s_1-s_2)t}-1\right]=\frac{M_1M_2}{s_1-s_2}\left(e^{s_1 t}-e^{s_2 t}\right).$$

Fie $\tilde{s}=\max\{s_1,\ s_2\}$. Atunci

$$|h(t)|\le\frac{M_1M_2}{|s_1-s_2|}\left(e^{\tilde{s}t}-e^{s_2 t}\right)\le\frac{M_1M_2}{|s_1-s_2|}\,e^{\tilde{s}t}.$$

Rezultă că $h\in\mathcal{O}$ şi are indicele de creştere $\tilde{s}=\max\{s_1,\ s_2\}$. În continuare avem:

$$\mathcal{L}(h)(p)=\int_0^\infty\left(e^{-pt}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right)dt.$$

Folosind faptul că

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

deoarece $g(t-\tau)=0$, pentru $\tau > t$, rezultă

$$\mathcal{L}(h)(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt.$$

Schimbând ordinea de integrare, operaţie permisă dacă $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \tilde{s} = \max\{s_1, s_2\}$, obţinem:

$$\mathcal{L}(h)(p) = \int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty e^{-pt}g(t-\tau)dt\right)d\tau.$$

Pe de altă parte, din Teorema 9.2.3 rezultă că

$\int_0^\infty e^{-pt}g(t-\tau)dt = e^{-\tau p}\mathcal{L}(g)(p)$ şi mai departe

$$\mathcal{L}(h)(p) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-\tau p}\mathcal{L}(g)(p)d\tau = \mathcal{L}(g)(p)\int_0^\infty f(\tau)e^{-\tau p}d\tau =$$
$$= \mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p).$$

Exemplul 9.2.9. Să se afle transformata Laplace a funcţiei $h(t) = \int_0^t \tau\sin(t-\tau)\,d\tau$.

Fie $f(t)=t$ şi $g(t)=\sin t$. Atunci $h = f * g$ şi

$$\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = \frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

9.3. Determinarea funcţiei original pornind de la transformata Laplace

Se pune problema următoare: dată fiind o funcţie $F(p)$ să se găsească o funcţie original $f(t)$, a cărei transformată Laplace să fie $F(p)$. Este clar că nu orice funcţie

$F(p)$ este transformata Laplace a unei funcţii original f. Într-adevăr, din Teorema 9.1.1 rezultă că o asemenea funcţie trebuie să fie olomorfă în domeniul $D_0 = \{ p \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, p > s_0 \}$. De asemenea, din Observaţia 9.1.2, rezultă că trebuie să satisfacă condiţia $\lim\limits_{\mathrm{Re}\, p \to \infty} F(p) = 0$. Se pot preciza un set de condiţii suficiente pe care trebuie să le îndeplinească o funcţie $F(p)$ pentru a fi transformata Laplace a unei funcţii original.

În continuare, vom presupune că $F(p)$ este transformata Laplace a funcţiei original f, adică

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

şi ne întrebăm cum putem rezolva această ecuaţie integrală, pentru a găsi funcţia necunoscută $f(t)$. Răspunsul este dat de următoarea teoremă:

Teorema 9.3.1. (Formula de inversare Mellin-Fourier)

Fie $F = \mathcal{L}(f)$ transformata Laplace a funcţiei original f, având indicele de creştere s_0. Presupunem de asemenea că f este derivabilă pe porţiuni pe orice interval compact $[0, a]$, $a > 0$. Atunci, în orice punct de continuitate al lui f avem:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp \qquad \textbf{(9.10)}$$

cu $a > s_0$ şi $t \in (0, \infty)$.

Demonstraţie. Considerăm funcţia $\varphi(t) = f(t) e^{-at}$, cu $a > s_0$. Observăm că φ îndeplineşte condiţiile din formula integrală Fourier . Într-adevăr, φ este derivabilă pe porţiuni, are aceleaşi puncte de discontinuitate ca şi f şi este absolut integrabilă pentru că:

$$|\varphi(t)| \le e^{-at} M e^{s_0 t} = M e^{-(a-s_0)t},\ (\forall)\ t \in (0, \infty),\ a > s_0$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt = \int_0^\infty |\varphi(t)|\, dt \le M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a-s_0)t}\, dt = \frac{M}{a-s_0}.$$

Din formula integrală Fourier rezultă:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-i\omega x}\,dx\right)e^{i\omega t}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\left(\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-ax}e^{-i\omega x}\,dx\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\left(\int_{0}^{\infty}f(x)\,e^{-(a+i\omega)x}\,dx\right)d\omega.$$

Amplificând ambii membrii cu e^{at} obţinem:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+i\omega)t}\left(\int_{0}^{\infty}f(x)e^{-(a+i\omega)x}\,dx\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+i\omega)t}\,F(a+i\omega)\,d\omega.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $p=a+i\omega$, atunci $dp=i\,d\omega$ şi integrala din membrul drept devine:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp\,.$$

Observaţia 9.3.1. Integrala din membrul drept al formulei (9.10) este înţeleasă în sensul valorii principale, adică

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dp=\lim_{R\to\infty}\int_{a-iR}^{a+iR}F(p)\,e^{pt}\,dp\,.$$

Corolarul 9.3.1. Dacă f şi g sunt funcţii continue, îndeplinesc condiţiile din Teorema 9.3.1 şi $\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}(g)$, atunci $f=g$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat din formula Mellin-Fourier (9.10).

Integrala din membrul drept al formulei (9.10) se poate calcula folosind teorema reziduurilor.

Teorema 9.3.2. Fie $f \in \mathcal{O}$ continuă şi $F(p)$ transformata sa Laplace. Presupunem că $F(p)$ este o funcţie raţională, adică $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$, unde P şi Q sunt funcţii polinomiale. Atunci

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}\left(F(p)\, e^{pt}, p_k\right)$$

unde $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt polii funcţiei $F(p)$.

Demonstraţie. Cum $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$, rezultă că $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$. Fie $a > 0$ astfel încât $a > \operatorname{Re} p_k$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$ şi fie

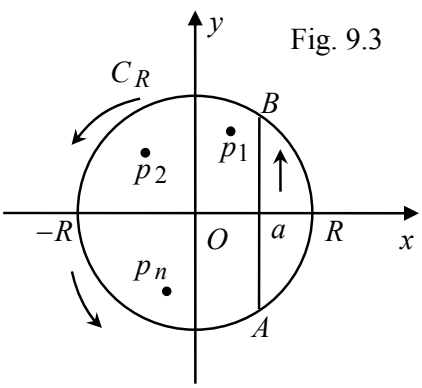


Fig. 9.3

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C};\ |z| < R,\ \operatorname{Re} z < a \right\}.$$

Alegem $R > 0$ suficient de mare astfel încât $p_k \in D$, $(\forall)\ k = \overline{1, n}$. Fie

$$C_R = \left\{ z \in \mathbb{C};\ |z| = R,\ \operatorname{Re} z < a \right\} \text{ (Fig. 9.3).}$$

Din teorema reziduurilor avem:

$$\int_{\overline{AB}} F(p)\, e^{pt}\, dp + \int_{C_R} F(p)\, e^{pt}\, dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}\left(F(p)\, e^{pt}, p_k\right). \qquad \textbf{(9.11)}$$

Prima integrală se mai scrie:

$$\int_{\overline{AB}} F(p)\, e^{pt}\, dp = \int_{a - i\sqrt{R^2 - a^2}}^{a + i\sqrt{R^2 - a^2}} F(p)\, e^{pt}\, dp. \qquad \textbf{(9.12)}$$

Pentru a doua integrală aplicăm Lema a II-a a lui Jordan cu iz în loc de p şi obţinem:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} F(p)\, e^{pt}\, dp = 0. \qquad \textbf{(9.13)}$$

(Lema se poate aplica deoarece $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$ şi deci $\lim\limits_{|p| \to \infty} F(p) = 0$).

Trecând la limită în (9.11) şi ţinând seama de (9.12) şi (9.13) deducem că:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}\left(F(p)\, e^{pt}, p_k\right) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iR}^{a+iR} F(p)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp .$$

În sfârşit, din formula Mellin-Fourier (9.10) rezultă:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Rez}\left(F(p)\, e^{pt}, p_k\right).$$

Exemplul 9.3.1. Să se afle funcţia original $f(t)$ a cărei transformată Laplace este $F(p) = \dfrac{p}{p^2+4}$.

Polii funcţiei $F(p)$ sunt $p_1 = -2i$ şi $p_2 = 2i$. Atunci:

$$\operatorname{Rez}\left(F(p)\, e^{pt}, -2i\right) = \lim_{p\to -2i} (p+2i)\, e^{pt} \frac{p}{(p+2i)(p-2i)} = \frac{1}{2}\, e^{-2it}$$

$$\operatorname{Rez}\left(F(p)\, e^{pt}, 2i\right) = \lim_{p\to 2i} (p-2i)\, e^{pt} \frac{p}{(p+2i)(p-2i)} = \frac{1}{2}\, e^{2it} .$$

Rezultă că $f(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) = \cos 2t$.

Observaţia 9.3.2. Reamintim că dacă $z = z_0$ este pol de ordinul m pentru funcţia $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, atunci din Propoziţia 6.10.1 avem:

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)} .$$

Dacă $z = z_0$ este pol simplu, adică $m = 1$, atunci:

$$\operatorname{Rez}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)\, P(z)}{Q(z)} = P(z_0) \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{Q(z)} = P(z_0)\, \frac{1}{Q'(z_0)} .$$

Corolarul 9.3.2. Dacă $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ este o funcţie raţională cu proprietăţile:

(i) grad $P <$ grad Q

(ii) Q are rădăcinile simple p_1, p_2, ..., p_n care nu se află pe axa Ox

atunci

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din Teorema 9.3.2 şi Observaţia 9.3.2.

Exemplul 9.3.2. Să se afle funcţia original $f(t)$ a cărei transformată Laplace este

$$F(p)=\frac{p^2+5}{(p-1)\left(p^2+4\right)}.$$

Avem $P(p)=p^2+5$, $Q(p)=(p-1)\left(p^2+4\right)$, $Q'(p)=3p^2-2p+4$. Rădăcinile numitorului sunt simple, anume:

$p_1=1,\ p_2=-2i,\ p_3=2i.$

Din Corolarul 9.3.2 rezultă:

$$f(t)=\frac{P(1)}{Q'(1)}e^{t}+\frac{P(-2i)}{Q'(-2i)}e^{-2it}+\frac{P(2i)}{Q'(2i)}e^{2it}=$$

$$=\frac{6}{5}e^{t}+\frac{1}{-8+4i}e^{-2it}+\frac{1}{-8-4i}e^{2it}=$$

$$=\frac{6}{5}e^{t}-\frac{2+i}{20}e^{-2it}-\frac{2-i}{20}e^{2it}=\frac{1}{5}\left(6e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

9.4. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi cu ajutorul transformatei Laplace

Considerăm următoarea problemă Cauchy:

Să se afle soluţia $x(t)$, $t>0$ a ecuaţiei diferenţiale

$$a_0 x''(t)+a_1 x'(t)+a_2 x(t)=f(t) \tag{9.14}$$

cu condiţiile iniţiale:

$$x(0)=x_0 \text{ şi } x'(0)=x_1. \tag{9.15}$$

Presupunem că $f(t)$ admite transformata Laplace $F(p)$. Fie de asemenea $X(p)$ transformata Laplace a funcţiei $x(t)$.

Din Teorema 9.2.5 rezultă că

$$\mathcal{L}\left(x'(t)\right)=pX(p)-x_0 \text{ şi } \mathcal{L}\left(x''(t)\right)=p^2X(p)-px_0-x_1. \tag{9.16}$$

Aplicând transformata Laplace ecuaţiei (9.14), folosind proprietatea sa de liniaritate şi ţinând cont de (9.16) obţinem:

$$a_0\left(p^2 X(p) - p\,x_0 - x_1\right) + a_1\left(p\,X(p) - x_0\right) + a_2 X(p) = F(p)$$

şi mai departe:

$$\left(a_0 p^2 + a_1 p + a_2\right) X(p) = F(p) + a_0 x_0 p + a_0 x_1 + a_1 x_0 . \qquad \textbf{(9.17)}$$

Observăm că (9.17) este o ecuaţie algebrică a cărei soluţie este:

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 x_0 p + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} . \qquad \textbf{(9.18)}$$

In sfârşit, inversând transformata $X(p)$ obţinem soluţia problemei Cauchy $x = x(t)$.

Exemplul 9.4.1. Să se rezolve problema Cauchy: $\begin{cases} x''(t) + x(t) = 2\cos t \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1 \end{cases}$.

Avem $f(t) = 2\cos t$. Cum $\mathcal{L}(\cos t) = \dfrac{p}{p^2+1}$ rezultă că $F(p) = \dfrac{2p}{p^2+1}$.

Fie $X(p) = \mathcal{L}(x(t))$. Atunci

$\mathcal{L}(x'(t)) = p\,X(p)$ şi $\mathcal{L}(x''(t)) = p^2 X(p) - 1$.

Aplicând transformata Laplace ecuaţiei diferenţiale obţinem:

$p^2 X(p) - 1 + X(p) = \dfrac{2p}{p^2+1}$ şi mai departe:

$$X(p) = \frac{(p+1)^2}{\left(p^2+1\right)^2} .$$

Funcţia din membrul drept are polii dublii: $p_1 = i$ şi $p_2 = -i$.

Din Teorema 9.3.2 deducem că:

$$x(t) = \mathrm{Rez}\left(X(p)\,e^{pt}, i\right) + \mathrm{Rez}\left(X(p)\,e^{pt}, -i\right) =$$

$$= \lim_{p \to i}\left[(p-i)^2 \frac{(p+1)^2}{\left(p^2+1\right)^2} e^{pt}\right]' + \lim_{p \to -i}\left[(p+i)^2 \frac{(p+1)^2}{\left(p^2+1\right)^2} e^{pt}\right]' =$$

$$= \lim_{p \to i}\left[\left(\frac{p+1}{p+i}\right)^2 e^{pt}\right]' + \lim_{p \to -i}\left[\left(\frac{p+1}{p-i}\right)^2 e^{pt}\right]' .$$

Calculând prima limită obţinem:

$$\lim_{p\to i}\left[\left(\frac{p+1}{p+i}\right)^2 e^{pt}\right]' = \lim_{p\to i}\left[2\left(\frac{p+1}{p+i}\right)\frac{i-1}{(p+i)^2}\,e^{pt}+\left(\frac{p+1}{p+i}\right)^2 t\,e^{pt}\right]=-\frac{i}{2}\left(e^{it}+te^{it}\right).$$

În mod analog,

$$\lim_{p\to -i}\left[\left(\frac{p+1}{p-i}\right)^2 e^{pt}\right]' = \frac{i}{2}\left(e^{-it}+te^{-it}\right).$$

În final rezultă:

$$x(t)=-\frac{i}{2}\left(e^{it}-e^{-it}\right)-\frac{it}{2}\left(e^{it}-e^{-it}\right)=-\frac{i}{2}\cdot 2i\sin t-\frac{it}{2}\cdot 2i\sin t=\sin t+t\sin t.$$

Aşadar, soluţia problemei Cauchy căutată este:

$x(t)=\sin t+t\sin t$.

Calculul este destul de greoi, de aceea inversarea funcţiei $X(p)$ se poate face mai simplu, folosind descompunerea în fracţii simple şi utilizând tabloul transformatelor Laplace.

Într-adevăr, $X(p)=\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}+\dfrac{1}{p^2+1}$.

Deoarece $\dfrac{1}{p^2+1}$ este transformata Laplace a funcţiei $\sin t$ şi $-\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)=$ $=\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$ este transformata Laplace a funcţiei $t\sin t$, conform Teoremei 9.2.6, deducem că

$x(t)=\sin t+t\sin t$.

Exemplul 9.4.2. Să se rezolve problema Cauchy: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x+2y\end{cases}$, cu $\begin{cases}x(0)=1\\ y(0)=1\end{cases}$.

Fie $X(p)$ transformata Laplace a funcţiei $x(t)$ şi $Y(p)$ transformata Laplace a funcţiei $y(t)$. Avem:

$$\begin{cases}pX(p)-1=-Y(p)\\ pY(p)-1=2X(p)+2Y(p)\end{cases}.$$

Rezolvând acest sistem algebric găsim:

$$X(p)=\frac{p-3}{p^2-2p+2}=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}-\frac{2}{(p-1)^2+1}$$

$$Y(p)=\frac{p+2}{p^2-2p+2}=\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+\frac{3}{(p-1)^2+1}.$$

Din tabloul transformatelor Laplace avem:

$$\mathcal{L}\left(e^t\cos t\right)=\frac{p-1}{(p-1)^2+1},\ \mathcal{L}\left(e^t\sin t\right)=\frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Soluţia problemei Cauchy este:

$$\begin{cases} x(t)=e^t\left(\cos t-2\sin t\right) \\ y(t)=e^t\left(\cos t+3\sin t\right) \end{cases}.$$

Tabloul transformatelor Laplace

Funcţia original	**Transformata Laplace**
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

Funcţia original	**Transformata Laplace**
$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$\sin(t-\alpha),\ \alpha>0$	$\dfrac{e^{-\alpha p}}{p^2+1}$
$\cos(t-\alpha),\ \alpha>0$	$\dfrac{p\,e^{-\alpha p}}{p^2+1}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$

C A P I T O L U L 10

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL DOI

10.1. Introducere. Generalităţi

O multitudine de fenomene fizice, de vibraţie, de difuzie, hidrodinamice, ondulatorii, electromagnetice, etc., conduc prin modelare matematică la relaţii între o funcţie de mai multe variabile şi derivatele sale parţiale de ordinele întâi şi doi. O astfel de relaţie se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi*.

Vom exemplifica cele de mai sus analizând micile vibraţii transversale ale unei coarde elastice (Fig. 10.1). Considerăm în planul xOu o coardă AB, fixată în capetele A şi B, care în poziţia de echilibru este situată pe axa Ox. Ne propunem să studiem oscilaţiile transversale ale coardei în jurul poziţiei de echilibru.

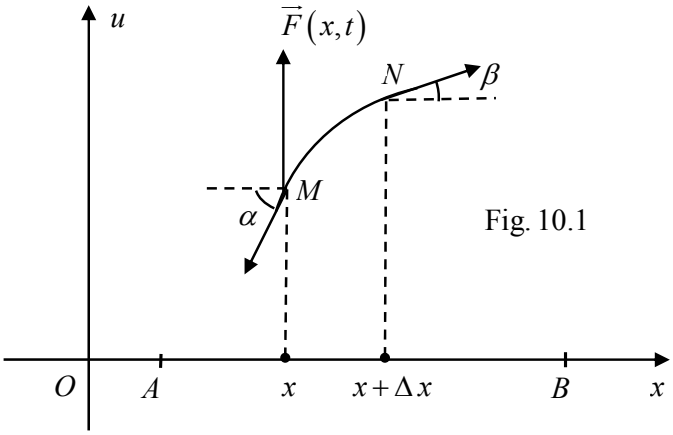


Fig. 10.1

Notăm cu $u(x,t)$ deplasarea (abaterea) punctului de abscisă x faţă de poziţia de echilibru, la momentul t. Vom presupune că deplasările punctelor coardei faţă de poziţia de echilibru sunt mici, astfel încât puterile mai mari ca 1 ale lui $u(x,t)$ şi ale derivatelor sale parţiale pot fi neglijate. De asemenea, presupunem că analizăm o coardă elastică, ceea ce implică faptul că tensiunea în fiecare punct este dirijată după tangentă.

Fie $\widehat{MN}$ poziţia deformată, la momentul t, a porţiunii de coardă cuprinsă între punctele $M(x,u(x,t))$ şi $N(x+\Delta x,u(x+\Delta x,t))$. Lungimea acestei porţiuni de coardă este:

$$\Delta L = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx .$$

Conform primei ipoteze simplificatoare, putem presupune că $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$, deci $\Delta L = \Delta x$. Aşadar, coarda este inextensibilă. Cum coarda este inextensibilă în timp, din legea lui Hooke rezultă că tensiunile nu depind de timp, deci $\vec{T} = \vec{T}(x)$. Mai mult, deplasările fiind mici, putem presupune că mărimea tensiunii este constantă, deci că

$\left|\vec{T}(x)\right| = T_0$, pentru orice x.

Forţa perturbatoare $\vec{F}(x,t)$, care acţionează asupra fiecărui punct al arcului $\widehat{MN}$ este presupusă dirijată perpendicular pe axa Ox:

$\vec{F}(x,t) = F(x,t)\,\vec{u}$, unde cu $\vec{u}$ am notat versorul axei Ou.

Asupra porţiunii de coardă deformată acţionează forţele de tensiune în extremităţile M şi N, precum şi forţa perturbatoare în fiecare punct ale arcului $\widehat{MN}$.

Proiecţia pe axa Ou a rezultantei acestor forţe este egală cu :

$$R_u = T_0 \sin\beta - T_0 \sin\alpha + \int_x^{x+\Delta x} F(z,t)\,dz .$$

Ţinând seama că Δx este mic, putem presupune că

$$\int_x^{x+\Delta x} F(z,t)\,dz \approx F(x,t)\Delta x .$$

De asemenea, deoarece α şi β sunt mici, rezultă

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \text{ şi } \sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t).$$

În continuare, avem:

$$R_u = T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + F(x,t)\,\Delta x \cong T_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Delta x + F(x,t)\Delta x .$$

Conform legii a doua a lui Newton, această forţă este egală cu produsul dintre masă şi acceleraţie. Aşadar avem:

$$T_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Delta x + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\,\Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

Dacă presupunem coarda omogenă $\left(\rho(x)=\rho\right)$, atunci obţinem ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=\frac{T_0}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+\frac{F(x,t)}{\rho}.$$

În sfârşit, notând cu $a^2=\frac{T_0}{\rho}$ şi cu $f(x,t)=\frac{1}{\rho}\cdot F(x,t)$, rezultă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t). \qquad \textbf{(10.1)}$$

Aceasta este ecuaţia micilor vibraţii transversale ale unei coarde elastice.

În cazul particular când asupra coardei nu acţionează forţe perturbatoare $\left(F(x,t)=0\right)$, ecuaţia (10.1) devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(10.2)}$$

Ecuaţia (10.2) se numeşte *ecuaţia coardei vibrante omogene*, iar ecuaţia (6.1) este *ecuaţia coardei vibrante neomogene*.

Procedeul descris aici se poate aplica şi la studiul micilor vibraţii transversale ale unei membrane elastice. Să presupunem că avem o membrană elastică, care în poziţia de echilibru se află în planul xOy. Dacă notăm cu $u(x,y,t)$ deplasarea punctului (x,y), faţă de poziţia de echilibru, la momentul t, atunci se obţine ecuaţia cu derivate parţiale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t). \qquad \textbf{(10.3)}$$

În sfârşit, studiul propagării sunetului sau a luminii în spaţiu conduce la ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t). \qquad \textbf{(10.4)}$$

În concluzie, coardele vibrante, membranele vibrate, oscilaţiile electromagnetice sunt descrise de ecuaţii cu derivate parţiale de tipul (10.1), (10.3) şi (10.4).

10.2. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniare Clasificare

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu (o mulţime deschisă şi conexă). O *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară* este o ecuaţie de forma:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad \textbf{(10.5)}$$

unde $(x,y)\in\Omega$, A, B, C sunt funcţii continue pe Ω, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ pe Ω, iar D este o funcţie continuă în argumentele sale, pentru $(x,y)\in\Omega$. Funcţia necunoscută este funcţia $u\in C^2(\Omega)$.

Prin *soluţie* a ecuaţiei (10.5) se înţelege orice funcţie $\varphi=\varphi(x,y)$ de clasă C^2 pe Ω, care verifică ecuaţia (10.5):

$$A(x,y)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}+C(x,u)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+D\left(x,\ y,\ \varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=0,\ (\forall)\ (x,y)\in\Omega.$$

În vederea clasificării ecuaţiilor (10.5), analizăm cum se transformă coeficienţii părţii liniare a ecuaţiei (A, B şi C) la o schimbare de variabile.

Fie $\Omega'\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu şi fie $F:\Omega\to\Omega'$, $F(x,y)=(\xi(x,y),\eta(x,y))$, $(x,y)\in\Omega$, o schimbare de variabile, adică o funcţie cu proprietăţile:

1) $F\in C^2(\Omega)$

2) $F:\Omega\to\Omega'$ este bijectivă

3) $\det J_F(x,y)=\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0,\ (\forall)\ (x,y)\in\Omega.$

Dacă notăm cu $\tilde{u}=u\circ F^{-1}:\Omega'\to\mathbb{R}^2$, atunci

$$u(x,y)=\tilde{u}(F(x,y))=\tilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$$

$(\forall)\ (x,y)\in\Omega$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, shift left, "F"] \arrow[dr, "u"'] & & \Omega' \arrow[ll, shift left, "F^{-1}"] \arrow[dl, "\tilde{u}"] \\
& \mathbb{R}^2 &
\end{tikzcd}$$

În urma acestei schimbări de variabile, ecuaţia (10.5) se va transforma tot într-o ecuaţie cu derivate parţiale, cu funcţia necunoscută $\tilde{u}$.

Ţinând seama de formulele de calcul ale derivatelor parţiale de ordinele întâi şi doi ale funcţiilor compuse de două variabile rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \\ \qquad + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \cdot \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \cdot \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \end{cases} \tag{10.6}$$

Înlocuind formulele (10.6) în ecuaţia (10.5) obţinem:

$$\widetilde{A}(\xi,\eta)\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\widetilde{B}(\xi,\eta)\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \widetilde{C}(\xi,\eta)\,\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \widetilde{D}\left(\xi,\, \eta,\, \tilde{u},\, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi},\, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{10.7}$$

unde

$$\begin{cases} \widetilde{A} = A \cdot \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + C \cdot \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\ \widetilde{B} = A \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + B \cdot \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \\ \widetilde{C} = A \cdot \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + C \cdot \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \end{cases} \tag{10.8}$$

Un calcul direct arată că

$$\widetilde{B}^2 - \widetilde{A} \cdot \widetilde{C} = \left(B^2 - A \cdot C\right) \cdot \left[\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right]^2. \tag{10.9}$$

Din (10.9) rezultă că expresiile $B^2 - A \cdot C$, respectiv $\widetilde{B}^2 - \widetilde{A} \cdot \widetilde{C}$ au acelaşi semn sau sunt simultan nule.

Definiţia 10.2.1. Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară (10.5) este:

a) de *tip hiperbolic* în Ω, dacă $B^2 - A \cdot C > 0$ pe Ω.

b) de *tip parabolic* în Ω, dacă $B^2 - A \cdot C = 0$ pe Ω.

c) de *tip eliptic* în Ω, dacă $B^2 - A \cdot C < 0$ pe Ω.

Observaţia 10.2.1. Ecuaţia (10.5) poate să nu aibă acelaşi tip pe întreg domeniul Ω. De exemplu, ecuaţia lui Tricomi: $y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, este de tip hiperbolic dacă $y < 0$, de tip parabolic dacă $y = 0$ şi de tip eliptic dacă $y > 0$.

Definiţia 10.2.2. Se numeşte *curbă caracteristică* a ecuaţiei (10.5) orice curbă plană $\Gamma \subset \Omega$, de ecuaţie implicită $\varphi(x, y) = 0$, nesingulară, de clasă C^1, care verifică ecuaţia:

$$A \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0. \qquad \textbf{(10.10)}$$

Fie $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$. Deoarece curba este nesingulară, putem presupune că $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Din teorema funcţiilor implicite rezultă că local, într-o vecinătate a punctului M_0, curba Γ este graficul funcţiei explicite $y = y(x)$. Din identitatea

$\varphi(x, y(x)) = 0$, rezultă că:

$y'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}$ şi mai departe că:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'. \qquad \textbf{(10.11)}$$

Înlocuind (10.11) în (10.10) obţinem

$$A\, y'^2 - 2B\, y' + C = 0. \qquad \textbf{(10.12)}$$

Ecuaţia (10.12) poartă numele de *ecuaţia diferenţială a curbelor caracteristice asociată ecuaţiei* (10.5).

Aşadar, dacă $\varphi(x, y) = 0$ este o curbă caracteristică a ecuaţiei (10.5) şi $y = y(x)$ este funcţia implicită definită de ecuaţia acestei curbe, atunci y' verifică ecuaţia (10.12).

Observaţia 10.2.2. Fie

$$y' = \lambda(x, y) \tag{10.13}$$

o soluţie a ecuaţiei (10.12).

Evident (10.13) este o ecuaţie diferenţială. Dacă $\varphi(x, y) = C$ este soluţia sa generală sub formă implicită, atunci φ verifică ecuaţia (10.10).

Într-adevăr, dacă $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, atunci

$$y' = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \lambda(x, y). \tag{10.14}$$

Ţinând seama că λ verifică ecuaţia (10.12), din (10.14) deducem că

$$A \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

deci că $\varphi(x, y) = C$ este o curbă caracteristică a ecuaţiei (10.5).

Observaţie 10.2.3. Coeficientul A din ecuaţia (10.5) poate fi presupus întotdeauna nenul.

Într-adevăr, dacă $A = 0$ şi $C \neq 0$, făcând schimbarea de variabile $x' = y$ şi $y' = x$, obţinem o ecuaţie echivalentă cu $A' \neq 0$.

Dacă $A = C = 0$, atunci $B \neq 0$, deoarece, prin ipoteză, cel puţin unul dintre coeficienţii A, B şi C este nenul. Făcând schimbarea de variabile $x' = x + y$ şi $y' = x - y$, obţinem o ecuaţie echivalentă cu $A' \neq 0$.

10.3. Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip hiperbolic

În acest caz $B^2 - A \cdot C > 0$, de unde rezultă că ecuaţia (10.12) are două rădăcini reale distincte:

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - A \cdot C}}{A} \text{ şi } y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - A \cdot C}}{A}. \qquad \textbf{(10.15)}$$

Fie $\varphi_1(x, y) = C_1$, respectiv $\varphi_2(x, y) = C_2$ soluţiile generale sub formă implicită ale ecuaţiilor diferenţiale (10.15). Din Observaţia 10.2.2 rezultă că φ_1 şi φ_2 verifică ecuaţia (10.10).

Dacă în ecuaţia (10.5) facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases} \qquad \textbf{(10.16)}$$

rezultă $\widetilde{A} = \widetilde{C} = 0$ şi ecuaţia (10.5) devine

$$2\widetilde{B}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \widetilde{D}\left(\xi, \eta, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right) = 0$$

care se mai scrie sub forma:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + D^*\left(\xi, \eta, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right) = 0. \qquad \textbf{(10.17)}$$

Ecuaţia (10.17) este forma canonică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul doi de tip hiperbolic.

Exemplul 10.3.1. Să se reducă la forma canonică ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \textbf{(10.18)}$$

şi să se găsească soluţia care satisface condiţiile:

$u(x, 0) = 3x^2$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$.

Avem $A = 1$, $B = 1$, $C = -3$ şi $B^2 - A \cdot C = 4 > 0$, deci ecuaţia este de tip hiperbolic.

Ecuaţia diferenţială a curbelor caracteristice este:

$y'^2 - 2y' - 3 = 0$

şi are soluţiile $y' = 3$, respectiv $y' = -1$. Integrând aceste ecuaţii diferenţiale obţinem soluţiile lor generale:

$3x - y = C_1$, respectiv $y + x = C_2$.

Făcând schimbarea de variabile: $\begin{cases} \xi = 3x - y \\ \eta = x + y \end{cases}$ obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 6 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}.$$

Înlocuind expresiile acestor derivate parţiale în ecuaţia (10.18) obţinem forma canonică:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0 \text{ sau } \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Din ultima ecuaţie deducem că $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$ nu depinde de ξ, deci este o funcţie de η.

Aşadar $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \psi_1(\eta)$. Integrând în raport cu η obţinem:

$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int \psi_1(\eta) d\eta + \varphi(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, unde cu $\psi(\eta)$ am notat $\int \psi_1(\eta) d\eta$.

Revenind la variabilele iniţiale x şi y, obţinem soluţia generală a ecuaţiei date:

$$u(x, y) = \varphi(3x - y) + \psi(x + y)$$

unde φ şi ψ sunt funcţii arbitrare.

Condiţia $u(x, 0) = 3x^2$ conduce la egalitatea

$$\varphi(3x) + \psi(x) = 3x^2,$$

iar condiţia $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$, conduce la egalitatea

$$-\varphi'(3x) + \psi'(x) = 0$$

şi mai departe, prin integrare, obţinem

$$-\frac{1}{3}\varphi(3x)+\psi(x)=C.$$

Se obţine astfel sistemul: $\begin{cases} \varphi(3x)+\psi(x)=3x^2 \\ -\frac{1}{3}\varphi(3x)+\psi(x)=C \end{cases}$.

În sfârşit, rezolvând acest sistem, rezultă:

$\varphi(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}C$ şi $\psi(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}C$.

Prin urmare, soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale date, cu condiţiile specificate este:

$$u(x,y)=\varphi(3x-y)+\psi(x+y)=3x^2+y^2.$$

Exemplul 10.3.2. Să se reducă la forma canonică ecuaţia:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x>y>0. \qquad \textbf{(10.19)}$$

Avem: $A=x^2$, $2B=-\left(x^2+y^2\right)$, $C=y^2$ şi

$$B^2-A\cdot C=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{4}>0.$$

Ecuaţia caracteristică este:

$x^2\cdot y'^2+\left(x^2+y^2\right)y'+y^2=0$. Rezolvând această ecuaţie obţinem

$$y'=\frac{-\left(x^2+y^2\right)\pm\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2-4x^2y^2}}{2x^2}$$

şi mai departe

$y'=-\frac{y^2}{x^2}$ şi $y'=-1$.

Prima ecuaţie este o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Separând variabilele şi integrând rezultă:

$\frac{y'}{y^2}=-\frac{1}{x^2}$, $-\frac{1}{y}=\frac{1}{x}-C_1$ şi mai departe:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=C_1$.

Integrând a doua ecuaţie diferenţială rezultă

$y=-x+C_2$, deci $x+y=C_2$.

Facem schimbarea de variabile: $\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\\ \eta=x+y\end{cases}$. În continuare avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{x^4}\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+\frac{2}{x^3}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x^2y^2}\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{y^4}\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}-\frac{2}{y^2}\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+\frac{2}{y^3}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}.$$

Înlocuind în ecuaţia cu derivate parţiale (10.19) obţinem

$$\left[\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)-4\right]\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}=0. \qquad \textbf{(10.20)}$$

Pe de altă parte, din schimbarea de variabile rezultă:

$$xy=\frac{\eta}{\xi}$$

$$x^2+y^2=\left(x+y\right)^2-2xy=\eta^2-2\cdot\frac{\eta}{\xi}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-2\frac{1}{xy}=\xi^2-2\cdot\frac{\xi}{\eta}.$$

Înlocuind în (10.20) obţinem

$\xi\eta\left(\xi\eta-4\right)\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+2\xi\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}=0$ şi mai departe

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{2}{\eta\left(4-\xi\eta\right)}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}. \qquad \textbf{(10.21)}$$

(10.21) este forma canonică a ecuaţiei (10.19).

10.4. Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip parabolic

În cazul ecuaţiilor de tip parabolic avem $B^2 - A \cdot C = 0$, de unde rezultă că ecuaţia curbelor caracteristice (10.12) are o singură soluţie:

$$y' = \frac{B}{A}. \qquad \textbf{(10.22)}$$

Dacă $\varphi(x, y) = C_1$ este soluţia generală a ecuaţiei (10.22) şi $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, atunci

$y' = -\dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} = \dfrac{B}{A}$, de unde deducem că φ satisface ecuaţia:

$$A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \qquad \textbf{(10.23)}$$

Putem presupune că $B \neq 0$, pentru că dacă $B = 0$, atunci $A = 0$ sau $C = 0$ şi ecuaţia (10.5) are deja forma canonică.

În continuare, înmulţind ecuaţia (10.23) cu C, ţinând seama că $A \cdot C = B^2$ şi împărţind cu B, obţinem ecuaţia echivalentă:

$$B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \qquad \textbf{(10.24)}$$

Facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = h(x, y) \end{cases}$$

unde h este o funcţie arbitrară, de clasă C^2, astfel încât $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$. De regulă, h se alege cât mai simplu, de exemplu $h(x, y) = x$ sau $h(x, y) = y$.

Din Observaţia 10.2.2 deducem că $\widetilde{A} = 0$.

Pe de altă parte, din (10.23), (10.24) şi din faptul că

$$\widetilde{B} = \left(A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(B \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + C \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

rezultă că şi $\widetilde{B} = 0$.

Aşadar, în urma schimbării de variabile, ecuaţia (10.5) devine:

$$\widetilde{C}(\xi,\eta)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+\widetilde{D}\left(\xi,\eta,\tilde{u},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right)=0 \text{ sau}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}+D^*\left(\xi,\eta,\tilde{u},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi},\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\right)=0. \qquad \textbf{(10.25)}$$

Ecuaţia (10.25) reprezintă forma canonică a ecuaţiei (10.5) în cazul parabolic.

Exemplul 10.4.1. Să se aducă la forma canonică ecuaţia:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\frac{\partial u}{\partial x}=0. \qquad \textbf{(10.26)}$$

Avem $A=x^2$, $B=-xy$, $C=y^2$ şi rezultă că $B^2-A\cdot C=0$, deci că ecuaţia este de tip parabolic. Ecuaţia caracteristică este:

$x^2y'^2+2xy\,y'+y^2=0$. Rezolvând ecuaţia obţinem

$$y'=-\frac{y}{x}. \qquad \textbf{(10.27)}$$

Observăm că (10.27) este o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Separând variabilele rezultă:

$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ şi mai departe $\ln y=-\ln x+\ln C_1$ sau $\ln xy=\ln C_1$.

Aşadar, soluţia generală este

$xy=C_1$.

Vom face schimbarea de variabile: $\begin{cases}\xi=xy\\ \eta=y,\ y\neq 0\end{cases}$. În continuare avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xy\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+y\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2x\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}.$$

Înlocuind în ecuaţia cu derivate parţiale (10.26) obţinem forma canonică:

$y^2 \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = 0$ sau

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = 0. \qquad \textbf{(10.28)}$$

Din forma canonică (10.28) se obţine cu uşurinţă şi soluţia generală a ecuaţiei (10.26).

Într-adevăr, din (10.28) deducem că $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$ nu depinde de η, deci $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \varphi(\xi)$.

Integrând în raport cu η, rezultă:

$\tilde{u}(\xi, \eta) = \varphi(\xi) \cdot \eta + \psi(\xi)$

unde funcţiile φ şi ψ sunt de clasă C^2, altfel arbitrare. Revenind la variabilele iniţiale x şi y, obţinem soluţia generală a ecuaţiei (10.26):

$$u(x, y) = \varphi(xy) \cdot y + \psi(xy). \qquad \textbf{(10.29)}$$

Un exerciţiu simplu de derivare ne permite să verificăm că într-adevăr (10.29) este soluţia ecuaţiei (10.26). Avem succesiv:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \cdot \varphi'(xy) + y \cdot \psi'(xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(xy) + xy \cdot \varphi'(xy) + x \cdot \psi'(xy)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^3 \cdot \varphi''(xy) + y^2 \cdot \psi''(xy)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \cdot \varphi'(xy) + xy^2 \cdot \varphi''(xy) + \psi'(xy) + xy \cdot \psi''(xy)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x \cdot \varphi'(xy) + x^2 y \cdot \varphi''(xy) + x^2 \cdot \psi''(xy).$$

Înlocuind în (10.26) constatăm imediat că (10.29) verifică această ecuaţie.

Diverse soluţii particulare se obţin particularizând funcţiile φ şi ψ. De exemplu, pentru

$\varphi(t) = 2t$ şi $\psi(t) = t^2$, rezultă soluţia particulară

$u(x, y) = 2xy^2 + x^2 y^2$.

10.5. Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip eliptic

În cazul eliptic avem $B^2 - A\cdot C < 0$. Rezolvând ecuaţia caracteristică (10.12) rezultă:

$$y' = \frac{B}{A} \pm i\,\frac{\sqrt{A\cdot C - B^2}}{A}$$

şi mai departe, prin integrare:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) + i\varphi_2(x,y) = C_1 \\ \varphi_1(x,y) - i\varphi_2(x,y) = C_2 \end{cases}.$$

Considerăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \alpha = \varphi_1(x,y) + i\varphi_2(x,y) \\ \beta = \varphi_1(x,y) - i\varphi_2(x,y) \end{cases}, (x,y)\in\Omega. \qquad \textbf{(10.30)}$$

Notăm cu $F(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y)), (x,y)\in\Omega$ şi cu $\tilde{u} = u\circ F^{-1}$.

Atunci avem

$$u(x,y) = \tilde{u}(\alpha(x,y), \beta(x,y))$$

şi exact ca şi în cazul hiperbolic, în urma schimbării de variabile (10.30) obţinem ecuaţia:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "u"'] & \Omega' \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\tilde{u}"] & \Omega_1 \arrow[dl, "v"] \\ & \mathbb{R}^2 & \end{tikzcd}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \widetilde{D}\left(\alpha,\ \beta,\ \tilde{u},\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta}\right) = 0. \qquad \textbf{(10.31)}$$

Considerăm acum o nouă schimbare de variabile:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ \eta = \frac{1}{2i}(\alpha-\beta) \end{cases}, (\alpha,\beta)\in\Omega'. \qquad \textbf{(10.32)}$$

Fie $G:\Omega'\to\Omega_1$, $G(\alpha,\beta) = (\xi(\alpha,\beta), \eta(\alpha,\beta))$ şi $v = \tilde{u}\circ G^{-1}$. Cum

$$\tilde{u}(\alpha,\beta) = v(\xi(\alpha,\beta), \eta(\alpha,\beta))$$

în continuare avem:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{1}{2i}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\beta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}\right)$$

Înlocuind în (10.31) obţinem forma canonică în cazul eliptic:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+D^*\left(\xi,\,\eta,\,v,\,\frac{\partial v}{\partial\xi},\,\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=0. \qquad \textbf{(10.33)}$$

Pe de altă parte din (10.30) şi (10.32) rezultă că

$$\begin{cases}\xi\;=\;\varphi_1(x,y)\\ \eta\;=\;\varphi_2(x,y)\end{cases},\ (x,y)\in\Omega. \qquad \textbf{(10.34)}$$

Prin urmare, în cazul eliptic, forma canonică se obţine în urma schimbării de variabile (10.34).

Exemplul 10.5.1. Să se aducă la forma canonică ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \textbf{(10.35)}$$

Avem $A=1$, $B=2$, $C=5$ şi $B^2-A\cdot C=-1<0$.

Rezolvând ecuaţia caracteristică (10.12), obţinem

$y'=2\pm i$

şi mai departe, prin integrare:

$y=(2+i)x-C_1$ sau $2x-y+ix=C_1$. Aşadar, $\varphi_1(x,y)=2x-y$ şi $\varphi_2(x,y)=x$.

Suntem conduşi la schimbarea de variabile: $\begin{cases}\xi\;=\;2x-y\\ \eta\;=\;x\end{cases}$.

În continuare, avem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+4\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}.$$

Înlocuind în (10.35) obţinem forma canonică

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0.$$

10.6. Problema Cauchy pentru coarda infinită. Soluţia lui D'Alembert

Ne propunem să studiem micile vibraţii ale unei „coarde infinite", cunoscându-se poziţia iniţială a punctelor coardei şi viteza iniţială a acestora. Prin „*coardă infinită*" se înţelege o coardă suficient de lungă astfel încât vibraţiile la capete nu influenţează semnificativ comportarea punctelor coardei aflate la o distanţă mare de capete.

Problema Cauchy pentru ecuaţia coardei vibrante omogene constă în determinarea unei funcţii $u=u(x,t)$ de clasă C^2, care verifică ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(10.36)}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x),\ x\in\mathbb{R}. \end{cases} \qquad \textbf{(10.37)}$$

Vom presupune că f este de clasă C^2 şi g de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$. Pentru a rezolva această problemă, aducem ecuaţia (10.36) la forma canonică.

Ecuaţia diferenţială a curbelor caracteristice este:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-a^2=0,$$

de unde rezultă ecuaţiile diferenţiale:

$$\frac{dx}{dt}=a \text{ şi } \frac{dx}{dt}=-a.$$

Soluţiile generale ale acestor ecuaţii sunt:

$x-at=C_1$ şi $x+at=C_2$.

Dacă facem schimbarea de variabile: $\begin{cases} \xi = x-at \\ \eta = x+at \end{cases}$

rezultă:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+a\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}-2a^2\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+a^2\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}+2\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}.$$

Înlocuind în ecuaţia (10.36) obţinem ecuaţia:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\,\partial\eta}=0. \qquad \textbf{(10.38)}$$

Din (10.38) deducem că $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}$ nu depinde de ξ, deci

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}=\psi_1(\eta).$$

Integrând, în raport cu η rezultă

$\tilde{u}(\xi,\eta)=\int\psi_1(\eta)\,d\eta+\varphi(\xi)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$, unde $\psi(\eta)=\int\psi_1(\eta)\,d\eta$.

Revenind la variabilele iniţiale x şi t obţinem soluţia generală a ecuaţiei (10.36):

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at) \qquad \textbf{(10.39)}$$

unde φ şi ψ sunt funcţii arbitrare de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$.

Aşadar, ecuaţia (10.36) are o infinitate de soluţii. Din condiţiile iniţiale (10.37) deducem:

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x)+\psi(x)=f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-a\cdot\varphi'(x)+a\cdot\psi'(x)=g(x). \end{cases}$$

Integrând a doua relaţie obţinem:

$\varphi(x)-\psi(x)=-\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}g(z)\,dz+C$, unde $x_0\in\mathbb{R}$ este un punct arbitrar şi C este o constantă arbitrară.

Se obţine astfel sistemul:

$$\begin{cases} \varphi(x)+\psi(x)=f(x) \\ \varphi(x)-\psi(x)=-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz+C. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz+\frac{C}{2} \text{ şi}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz-\frac{C}{2}.$$

Ţinând seama că $u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$, în final rezultă:

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(z)\,dz. \qquad \textbf{(10.40)}$$

Formula (10.40) rezolvă problema (10.36) + (10.37) şi se numeşte *formula lui D'Alembert*.

Exemplul 10.6.1. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0)=x^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=x. \end{cases}$$

Avem $a=1$; $f(x)=x^2$; $g(x)=x$.

Aplicând formula D'Alembert (10.40) obţinem:

$$u(x,t)=\frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} z\,dz=$$

$$=x^2+t^2+\frac{1}{4}\left((x+t)^2-(x-t)^2\right)=x^2+t^2+xt.$$

Observaţia 10.6.1. Analizând soluţia generală

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$$

constatăm că aceasta este suma a două funcţii $u_1=\varphi(x-at)$ şi $u_2=\psi(x+at)$, care la rândul lor sunt soluţii ale ecuaţiei (10.36), reprezentând forme particulare de vibraţii.

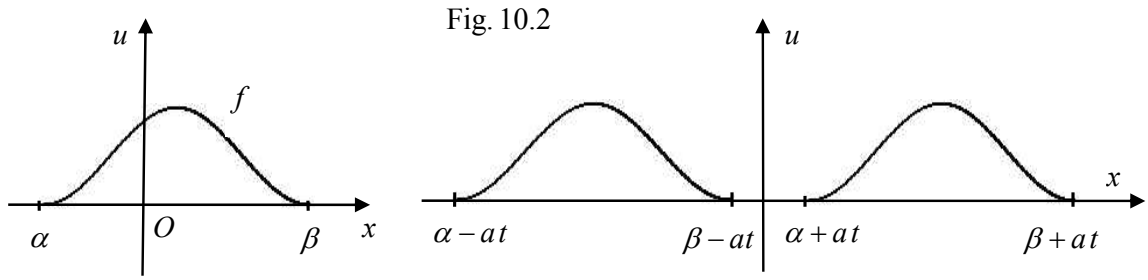
În planul xOu, ecuaţia $x-at=C_1$ reprezintă o dreaptă cu panta pozitivă $m=a$, iar funcţia u_1 este constantă pe această dreaptă. În mod analog, u_2 este constantă pe dreapta $x+at=C_2$, de pantă negativă $m=-a$. Dreptele $x\pm at=\text{ct}$ sunt curbele caracteristice ale ecuaţiei (10.36) şi au proprietatea că amplitudinile vibraţiei coardei în punctul (x,t) (adică $u_1(x,t)$, respectiv $u_2(x,t)$) sunt aceleaşi ca la momentul iniţial $(x,0)$.

Observaţia 10.6.2. Să considerăm cazul particular când $f(x)\neq 0$, dacă $x\in[\alpha,\beta]$, $f(x)=0$, dacă $x\notin[\alpha,\beta]$ şi $g(x)=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$ (Fig. 10.2). Presupunem, de asemenea, că f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$. Conform formulei D'Alembert, rezultă:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right].$$

La momentul t, graficele funcţiilor $f(x-at)$ şi $f(x+at)$ se obţin din graficul funcţiei f prin translaţii pe axa Ox, prima în sensul pozitiv al axei Ox, a doua în sens opus.

Fig. 10.2



Contribuţia termenului $f(x-at)$ corespunde undei directe, care se propagă în sensul pozitiv al axei Ox cu viteza constantă a, iar termenul $f(x+at)$ corespunde undei inverse, care se propagă cu viteza constantă a, dar în sens opus.

Soluţia problemei în acest caz are următoarea interpretare: perturbarea iniţială a coardei, reprezentată de funcţia f, se propagă de-a lungul coardei în ambele sensuri, prin două unde cu viteza a.

10.7. Coarda vibrantă cu capete fixe. Metoda Fourier

Ne propunem să studiem micile vibraţii transversale ale unei coarde elastice finite, de lungime l, care are capetele fixe, cunoscând poziţia iniţială a punctelor coardei şi viteza acestora.

Din punct de vedere matematic problema constă în determinarea soluţiei ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (\forall)\ x \in [0, l],\ t > 0 \qquad \textbf{(10.41)}$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ (\forall)\ t \geq 0 \qquad \textbf{(10.42)}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ (\forall)\ x \in [0, l]. \qquad \textbf{(10.43)}$$

Vom presupune că f este de clasă C^2 şi g este de clasă C^1 pe $[0, l]$.

Pentru rezolvarea problemei folosim *metoda separării variabilelor a lui Fourier*.

Căutăm soluţia ecuaţiei (10.41) de forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \qquad \textbf{(10.44)}$$

Ţinând seama de (10.42) deducem:

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \\ X(l)T(t) = 0,\ (\forall)\ t \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(10.45)}$$

de unde rezultă că:

$$X(0) = X(l) = 0. \qquad \textbf{(10.46)}$$

Punând condiţia ca (10.44) să verifice ecuaţia (10.41) obţinem

$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),\ (\forall)\ x \in [0, l],\ (\forall)\ t \in [0, \infty)$.

Evident, există $x_0 \in [0, l]$ astfel încât $X(x_0) \neq 0$ şi există $t_0 \geq 0$ astfel încât $T(t_0) > 0$, pentru că, în caz contrar, ar rezulta $u(x,t) = 0$, pentru orice x şi t, deci coarda nu vibrează. Rezultă că pe o vecinătate a punctului (x_0, t_0) avem:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)}. \qquad \textbf{(10.47)}$$

Egalitatea (10.47) nu poate avea loc decât dacă ambii membri ai săi coincid cu o constantă. Aşadar

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}=\lambda\ (\text{constant}).$$

Obţinem astfel două ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

$$X''(x)-\lambda X(x)=0 \qquad \textbf{(10.48)}$$

$$T''(t)-\lambda a^2 T(t)=0. \qquad \textbf{(10.49)}$$

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei (10.48) este $r^2-\lambda=0$.

Observăm că dacă $\lambda>0$, atunci $r=\pm\sqrt{\lambda}$ şi soluţia generală este

$$X(x)=C_1e^{-\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{\lambda}x}.$$

Din condiţiile $X(0)=X(l)=0$ deducem că $C_1=C_2=0$, deci $X(x)=0$, pentru orice $x\in[0,l]$. Rezultă că $u(x,t)=0$, $(\forall)\ x$ şi t, deci coarda nu vibrează.

Dacă $\lambda=0$, atunci $X(x)=C_1x+C_2$ şi din nou, din condiţiile $X(0)=X(l)=0$, rezultă $C_1=C_2=0$.

Prin urmare, λ trebuie să fie o constantă strict negativă $\left(\lambda=-\mu^2,\ \mu\neq 0\right)$.

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt $r=\pm i\mu$ şi soluţia generală a ecuaţiei (10.48) este:

$$X(x)=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x.$$

Din (10.46) deducem că

$$C_1=X(0)=0 \text{ şi } C_2\sin\mu l=X(l)=0.$$

Cum $C_2\neq 0$, pentru că altfel ajungem din nou la soluţia nulă, rezultă că $\sin\mu l=0$ şi deci că $\mu l=n\pi$, $n\in\mathbb{N}^*$. Aşadar, ecuaţia (10.48) are o infinitate de soluţii:

$$X_n(x)=C_n\ \sin\frac{n\pi}{l}x,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte, soluţia generală a ecuaţiei (10.49) este:

$$T(t)=D\cos a\mu t+E\sin a\mu t.$$

Ţinând seama că $\mu = \frac{n\pi}{l}$, obţinem o infinitate de soluţii:

$T_n(t) = D_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + E_n \sin \frac{n\pi a}{l} t$, unde D_n şi E_n sunt constante arbitrare.

În sfârşit, dacă notăm cu $A_n = C_n D_n$ şi cu $B_n = C_n E_n$, obţinem o infinitate de soluţii ale ecuaţiei (10.41) cu condiţiile la limită (10.42):

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,\ n \in \mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(10.50)}$$

Ecuaţia (10.41) fiind liniară, orice sumă finită de soluţii ale sale este de asemenea o soluţie.

Dacă presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ este uniform convergentă şi de două ori derivabilă termen cu termen atât în raport cu x cât şi cu t, atunci suma sa este soluţie a ecuaţiei (10.41).

Într-adevăr, dacă $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$, atunci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Rămâne să determinăm coeficienţii A_n şi B_n. Pentru aceasta folosim condiţiile iniţiale (10.43):

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Rezultă că A_n sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei f, deci că:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx,\ n \in \mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(10.51)}$$

Pe de altă parte avem:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\pi a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-A_n \sin \frac{n\pi a}{l} t + B_n \cos \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$ şi mai departe

$$g(x)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{\pi a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n\,B_n\,\sin\frac{n\pi}{l}x\,.$$

Din dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei g rezultă

$$\frac{n\pi a}{l}B_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\text{, deci}$$

$$B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(10.52)}$$

Aşadar, dacă presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ este de două ori derivabilă, termen şi cu termen, atât în raport cu x cât şi cu t, soluţia problemei (10.41) + (10.42) + (10.43) este:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(10.53)}$$

unde A_n şi B_n sunt daţi de (10.51) şi (10.52).

Se poate demonstra următoare teoremă:

Teoremă 10.7.1. Dacă $f\in C^3[0,l]$ şi îndeplineşte condiţiile $f(0)=f(l)=0$, respectiv $f''(0)=f''(l)=0$ şi $g\in C^2[0,l]$ şi îndeplineşte condiţiile $g(0)=g(l)=0$, atunci $u(x,t)$, suma seriei (10.53) în care A_n şi B_n au expresiile date de (10.51) şi (10.52), este soluţia problemei (10.41) + (10.42) + (10.43).

Exemplul 10.7.1. Să se afle soluţia ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

şi condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} u(x,0)=h\cdot\left(x^4-2x^3+x\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \end{cases}.$$

Pentru început să observăm că sunt îndeplinite condiţiile Teoremei 10.7.1.

Funcţia $f(x)=h\cdot\left(x^4-2x^3+x\right)$, $x\in[0,1]$ este de clasă C^3 astfel încât

$f(0)=f(1)=0$

$f'(x)=h\cdot\left(4x^3-6x^2+1\right)$, $f''(x)=h\cdot\left(12x^2-12x\right)$

$f''(0)=f''(1)=0$

$g(x)=0$, $(\forall)\ x\in[0,1]$, de unde rezultă că $B_n=0$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ şi

$$A_n=2h\int_0^1\left(x^4-2x^3+x\right)\sin n\pi x\,dx.$$

Integrând prin părţi avem succesiv:

$$A_n=2h\left(\underbrace{-\frac{1}{n\pi}\left(x^4-2x^3+x\right)\cos n\pi x\Big|_0^1}_{0}+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\left(4x^3-6x^2+1\right)\cos n\pi x\,dx\right)=$$

$$=\frac{2h}{n\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{n\pi}\left(4x^3-6x^2+1\right)\sin n\pi x\Big|_0^1}_{0}-\frac{12}{n\pi}\int_0^1\left(x^2-x\right)\sin n\pi x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{24h}{n^2\pi^2}\left(\underbrace{-\frac{1}{n\pi}\left(x^2-x\right)\cos n\pi x\Big|_0^1}_{0}+\frac{1}{n\pi}\int_0^1(2x-1)\cos n\pi x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{24h}{n^3\pi^3}\left(\underbrace{\frac{1}{n\pi}(2x-1)\sin n\pi x\Big|_0^1}_{0}-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 2\sin n\pi x\,dx\right)=$$

$$=\frac{48h}{n^4\pi^4}\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1\right)=\frac{48h}{n^5\pi^5}\left((-1)^{n+1}+1\right).$$

Aşadar avem: $A_n=\begin{cases}0, & \text{dacă } n=2k\\ \dfrac{96h}{n^5\pi^5}, & \text{dacă } n=2k+1\end{cases}.$

Rezultă că soluţia problemei este:

$$u(x,t)=\frac{96h}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\cos(2k+1)\pi at\,\sin(2k+1)\pi x.$$

Observaţie 10.7.1. Fiecare termen al soluţiei (10.53),

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

reprezintă o vibraţie proprie a coardei.

Dacă notăm cu $H_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$, atunci există $\varphi_n\in\mathbb{R}$ astfel încât

$\frac{A_n}{H_n}=\sin\varphi_n$ şi $\frac{B_n}{H_n}=\cos\varphi_n$.

Cu aceste notaţii, soluţia particulară u_n se mai scrie:

$$u_n(x,t)=H_n\sin\frac{n\pi}{l}x\,\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t+\varphi_n\right). \qquad \textbf{(10.54)}$$

Din (10.54) rezultă că amplitudinea vibraţiei este $H_n\sin\frac{n\pi}{l}x$, frecvenţa este $\frac{n\pi a}{l}$ şi faza este φ_n. Observăm că amplitudinea maximă se realizează când $\sin\frac{n\pi}{l}x=\pm 1$. De exemplu, dacă $n=1$, punctul de amplitudine maximă este $\frac{l}{2}$; dacă $n=2$, avem 3 puncte de amplitudine maximă $\frac{l}{4},\frac{l}{2},\frac{3l}{4}$; etc. Înălţimea sunetului este cu atât mai mare cu cât frecvenţa $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$ este mai mare, iar intensitatea sunetului este direct proporţională cu amplitudinea. Fiecare vibraţie a coardei $u_n(x,t)$ corespunde unui ton simplu. Tonul fundamental este tonul frecvenţă minimă care corespunde soluţiei $u_1(x,t)$. Celelalte tonuri $u_n(x,t)$, $n\geq 2$ se numesc armonice. Soluţia problemei constând din suprapunerea armonicelor peste tonul fundamental, creând ceea ce numim timbrul sunetului emis de coardă.

Observaţia 10.7.2. (**Soluţii generalizate**)

În multe situaţii concrete nu sunt îndeplinite condiţiile Teoremei 10.7.1. De exemplu, nu este satisfăcută condiţia $f''(0)=f''(l)=0$ sau funcţia f nu este derivabilă, etc. În astfel de cazuri se caută soluţii generalizate (slabe).

Soluţiile problemelor la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale sunt presupuse suficient de netede (sunt funcţii derivabile şi cu derivate parţiale continue de un anumit ordin) şi satisfac ecuaţia cu derivate parţiale în fiecare punct al domeniului de definiţie. Astfel de soluţii le vom numi *soluţii clasice*, iar formulările problemei la limită corespunzătoare le vom numi *formulări clasice.* În formulările clasice, se presupune a priori continuitatea coeficienţilor ecuaţiei cu derivate parţiale în domeniul de definiţie, precum şi continuitatea membrului drept în domeniul de definiţie.

Există însă numeroase probleme la limită care descriu fenomene fizice concrete, în care, încă de la început, se observă că nu putem avea soluţii clasice. Cu toate acestea, procesul fizic respectiv se produce şi trebuie să găsim o soluţie a problemei.

De exemplu, în cazul coardei vibrante descris de ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \textbf{(10.55)}$$

constanta a^2 depinde de proprietăţile fizice ale coardei (tensiunea în coardă şi densitatea acesteia).

În situaţia în care coarda este alcătuită din două bucăţi de densităţi diferite, coeficientul a^2 este egal, în porţiunile corespunzătoare, cu constante diferite. De aceea, ecuaţia (10.55) nu poate avea, în general, soluţii clasice (cu derivate de ordinul întâi şi al doilea continue). Chiar când coeficientul a^2 este constant se poate întâmpla, în poziţia iniţială, coarda să aibă forma unei linii frânte, definită de condiţia $u(x,0) = f(x)$. Într-un vârf al liniei frânte, funcţia f nu are derivată. În acest caz, se poate arăta că nu există o soluţie clasică a ecuaţiei (10.55) care să corespundă condiţiilor iniţiale:

$$u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

De asemenea, în cazurile cele mai interesante, funcţia $f(x,t)$ (care caracterizează intensitatea acţiunilor exterioare) are singularităţi.

Prin urmare, formulările clasice sunt insuficiente. Este necesară admiterea discontinuităţilor de prima speţă la derivatele soluţiilor: acestea satisfac ecuaţia peste tot cu excepţia punctelor de discontinuitate.

În acest scop se impune principiul următor: soluţia admisă trebuie să verifice în locul ecuaţiei cu derivate parţiale o anumită identitate integrală, în care intervine o funcţie arbitrară φ, suficient de netedă.

Această identitate se obţine astfel: înmulţim ecuaţia cu o funcţie arbitrară φ, având derivate parţiale continue în raport cu toate argumentele sale până la un anumit ordin, funcţia φ anulându-se în afara unui domeniu finit în care este definită ecuaţia. Integrăm egalitatea obţinută în acest domeniu şi apoi o transformăm cu ajutorul integrării prin părţi, transferând derivatele funcţiei u la derivatele funcţiei φ.

Funcţia u care satisface identitatea integrală astfel obţinută, pentru orice funcţie arbitrară φ, suficient de netedă, se va numi *soluţie generalizată* sau *soluţie slabă* a problemei la limită considerate.

Vom exemplifica aceste consideraţii în cazul problemei la limită dată de (10.41) + (10.42) + (10.43).

Numim *soluţia clasică* a problemei mixte (10.41) + (10.42) + (10.43), funcţia $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, unde $D = [0, l] \times (0, \infty)$, care satisface ecuaţia (10.41) în domeniul D, condiţiile iniţiale (10.43) şi condiţiile la limită (10.42).

Fie $\varphi \in C^1(D)$, nulă în afara unui domeniu mărginit conţinut în D. Presupunem deci că $\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = 0$ şi că există un număr $T > 0$ astfel ca $\varphi(x,T) = 0,\ x \in [0, l]$. Notăm cu $D_T = [0, l] \times (0, T)$.

Înmulţim ecuaţia (10.41) cu φ, integrăm pe D_T şi transferăm derivatele de la u la φ, folosind integrarea prin părţi:

$$\iint_{D_T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\varphi\,dx\,dt = \int_0^l \left(\int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\varphi\,dt \right) dx = \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\varphi \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dt \right) dx =$$

$$= -\int_0^l g(x)\varphi(x,0)\,dx - \iint_{D_T} \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt$$

$$\iint_{D_T} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\varphi\,dx\,dt = \int_0^T \left(\int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\varphi \right) - \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx \right) dt =$$

$$= \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}\,\varphi \Big|_{x=0}^{x=l} dt - \iint_{D_T} \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx\,dt = -\iint_{D_T} \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx\,dt.$$

Prin urmare, dacă u este soluţie clasică a problemei (10.41) + (10.42) + (10.43), atunci u satisface identitatea integrală:

$$-\iint_{D_T} \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx\,dt + a^2 \iint_{D_T} \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx\,dt - \int_0^l g(x)\varphi(x,0)\,dx = 0 \qquad \textbf{(10.56)}$$

unde φ este o funcţie arbitrară ce satisface condiţiile de mai sus.

Vom spune că u este *soluţie slabă* (*soluţie generalizată*) dacă $u \in C^1(D)$ satisface (10.56) pentru orice φ satisfăcând condiţiile de mai sus şi $u(x,0) = f(x)$.

Folosind metoda Fourier, soluţia „formală” a problemei (10.41) + (10.42) + (10.43) este dată de:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad \textbf{(10.57)}$$

unde

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\,dx \text{ şi}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\,dx.$$

Pentru ca u să fie soluţie clasică este suficient să se arate că seria (10.57) şi seriile care se deduc din ea prin derivare dublă în raport cu x şi t sunt uniform convergente pe $[0, l]$, oricare ar fi t.

Aceste serii converg uniform dacă sunt îndeplinite condiţiile din Teorema 10.7.1

Pentru ca u să fie soluţie generalizată, trebuie să arătăm că: seria converge uniform, seriile obţinute prin derivare converg uniform, sunt satisfăcute condiţiile iniţiale, iar suma seriei satisface identitatea (10.56).

Vom arăta că u dată de (10.57) este soluţie generalizată a problemei (10.41) + (10.42) + (10.43) în condiţii mai slabe decât cele cerute de Teorema 10.7.1.

În general, se poate demonstra că seria (10.57) converge uniform, seria obţinută prin derivarea acesteia în raport cu t converge uniform, seria obţinută prin derivare în raport cu x converge uniform. Acest lucru rezultă din teoria generală a seriilor Fourier şi nu îl vom aborda aici. Pe exemple concrete, aceasta rezultă uşor din Teorema lui Weierstrass.

Vom arăta că u satisface identitatea (10.56).

Se fac următoarele notaţii:

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$v_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t$$

şi atunci rezultă:

$$u_n(x,t)=v_n(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

iar derivatele funcţiei u în raport cu x şi t devin:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(t)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\cdot\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,.$$

Atunci:

$$-\iint_{D_T}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\iint_{D_T}v_n'(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt=-\sum_{n=1}^{\infty}E_n\,.$$

Dar

$$E_n=\iint_{D_T}v_n'(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt=\int_0^l\left(\int_0^T v_n'(t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dt\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=$$

$$=\int_0^l\left(v_n'(t)\,\varphi(x,t)\Big|_{t=0}^{t=T}-\int_0^T v_n''(t)\,\varphi(x,t)\,dt\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Cum $\varphi(x,T)=0$, rezultă:

$$E_n = -\iint\limits_{D_T} v_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\varphi(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_0^l v_n'(0)\,\varphi(x,0)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

De asemenea:

$$\iint\limits_{D_T}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\iint\limits_{D_T}\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\iint\limits_{D_T} v_n(t)\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}F_n.$$

Dar

$$F_n = \iint\limits_{D_T} v_n(t)\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= \frac{n\pi}{l}\int\limits_0^T v_n(t)\left(\int\limits_0^l \cos\frac{n\pi}{l}x\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dx\right)dt =$$

$$= \frac{n\pi}{l}\int\limits_0^T v_n(t)\left(\varphi(x,t)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_{x=0}^{x=l} + \int\limits_0^l \frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,\varphi(x,t)\,dx\right)dt.$$

Prin urmare:

$$F_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\iint\limits_{D_T} v_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\varphi(x,t)\,dx\,dt,$$

deoarece $\varphi(0,t) = \varphi(l,t) = 0$.

Atunci:

$$-E_n + a^2F_n = \iint\limits_{D_T}\left[v_n''(t) + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}v_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x\,\varphi(x,t)\,dx\,dt +$$

$$+\int\limits_0^l v_n'(0)\,\varphi(x,0)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \int\limits_0^l v_n'(0)\,\varphi(x,0)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

deoarece $v_n''(t) + \dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}v_n(t) = 0$.

În consecinţă, dacă

$$E=-\iint\limits_{D_T}\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt+a^2\iint\limits_{D_T}\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dt-\int\limits_0^l g(x)\varphi(x,0)\,dx$$

obţinem

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-E_n+a^2F_n\right)-\int\limits_0^l g(x)\varphi(x,0)\,dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^l v_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\varphi(x,0)dx-\int\limits_0^l g(x)\varphi(x,0)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^l\left[\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x-g(x)\right]\varphi(x,0)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^l\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)-g(x)\right]\varphi(x,0)\,dx=0.$$

Exemplul 10.7.2. Să se determine soluţia generalizată a ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ (\forall)\ t$$

şi condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases}u(x,0)=h\cdot x(l-x)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ (\forall)\ x\in[0,l].\end{cases}$$

Constatăm că nu sunt îndeplinite condiţiile Teoremei 10.7.1. De exemplu, nu este satisfăcută condiţia $f''(0)=f''(l)=0$, unde $f(x)=h\cdot x(l-x)$.

Avem $g(x)=0$, deci $B_n=0,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ şi

$$A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l h\cdot x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Integrând prin părţi obţinem:

$$A_n = \frac{2h}{l}\left(\underbrace{-\frac{l}{n\pi}x(l-x)\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l}_{0} + \frac{l}{n\pi}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \right) =$$

$$= \frac{2h}{n\pi}\left(\underbrace{\frac{l}{n\pi}(l-2x)\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l}_{0} + \frac{2l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \right) =$$

$$= \frac{4lh}{n^2\pi^2}\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l \right) = \frac{4l^2h}{n^3\pi^3}\left((-1)^{n+1}+1 \right).$$

Aşadar, avem:

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2k \\ \dfrac{8l^2h}{n^3\pi^3}, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}.$$

Obţinem astfel soluţia generalizată a problemei:

$$u(x,t) = \frac{8l^2h}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi a}{l}t\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x. \qquad \textbf{(10.58)}$$

Analizând soluţia (10.58) constatăm că seria din membrul drept este uniform convergentă şi derivabilă termen cu termen atât în raport cu x cât şi cu t.

Într-adevăr, pentru orice $x \in [0, l]$ şi orice $t > 0$ avem inegalităţile:

$$|u_k(x,t)| \le \frac{8l^2h}{\pi^3}\cdot\frac{1}{(2k+1)^3}$$

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x}(x,t)\right| \le \frac{8lh}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial t}(x,t)\right| \le \frac{8lha}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Cum seriile numerice $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}, \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ sunt convergente, din criteriul de convergenţă uniformă al lui Weierstrass rezultă că seria (10.58) este uniform convergentă şi derivabilă termen cu termen atât în raport cu x cât şi în raport cu t. Rezultă că suma sa

verifică condiţiile la limită (10.42) şi condiţiile iniţiale (10.43). Nu ştim însă dacă (10.58) verifică şi ecuaţia (10.41) pentru că nu ştim dacă este de două ori derivabilă termen cu termen în raport cu x şi cu t. Pe de altă parte, sumele parţiale ale seriei (10.53) sunt soluţii clasice pentru (10.41) + (10.42) + (10.43). Se justifică astfel de ce suma seriei este acceptată ca soluţie „generalizată" a problemei.

10.8. Studiul vibraţiilor forţate ale unei coarde finite cu capete fixe

Studiul micilor vibraţii transversale ale unei coarde elastice finite de lungime l, cu capete fixe, asupra căreia acţionează forţa perturbatoare f, conduce la următoarea problemă matematică:

Să se determine soluţia ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{10.59}$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0 \tag{10.60}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),\ x \in [0,\ l] \end{cases}. \tag{10.61}$$

Căutăm soluţia problemei (10.59) + (10.60) + (10.61) de forma:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

unde v este soluţie pentru ecuaţia omogenă:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{10.62}$$

cu condiţiile la limită:

$$v(0,t) = v(l,t) = 0,\ t > 0 \tag{10.63}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} v(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x),\ x \in [0,\ l] \end{cases} \tag{10.64}$$

iar w este soluţie pentru ecuaţia neomogenă:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \textbf{(10.65)}$$

cu condiţiile la limită:

$$w(0,t) = w(l,t) = 0 \qquad \textbf{(10.66)}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} w(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}. \qquad \textbf{(10.67)}$$

Se verifică imediat că dacă v este soluţie a problemei (10.62) + (10.63) + (10.64) şi w este soluţie a problemei (10.65) + (10.66) + (10.67), atunci $u = v + w$ este soluţie a problemei (10.59) + (10.60) + (10.61).

Pe de altă parte, din secţiunea 10.7 ştim că

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \text{ unde}$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \text{ şi } B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Rămâne să determinăm funcţia w. Vom căuta funcţia w de forma:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x. \qquad \textbf{(10.68)}$$

Presupunem că seria din dreapta este uniform convergentă şi de două ori derivabilă termen cu termen atât în raport cu x cât şi în raport cu t.

Se observă imediat că $w(0,t) = w(l,t) = 0$.

Punând condiţia ca funcţia w definită prin (10.68) să verifice ecuaţia neomogenă (10.65) deducem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + a^2 \cdot \frac{n^2\pi^2}{l^2} T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x,t). \qquad \textbf{(10.69)}$$

Dacă presupunem că pentru orice $t>0$, funcţia $f(x,t)$ se dezvoltă, pe intervalul $[0, l]$, în serie Fourier, după sinusuri, atunci:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(10.70)}$$

unde

$$b_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \qquad \textbf{(10.71)}$$

Din (10.69), (10.70) şi (10.71) rezultă că:

$$T_n''(t)+a^2\cdot\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=b_n(t). \qquad \textbf{(10.72)}$$

Din condiţia iniţială $w(x,0)=0$ deducem că:

$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=0$ şi mai departe că”

$$T_n(0)=0,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(10.73)}$$

De asemenea, din condiţia $\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=0$ obţinem că:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l}T_n'(0)\cos\frac{n\pi}{l}x=0$ şi mai departe că:

$$T_n'(0)=0,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(10.74)}$$

În concluzie, funcţiile $T_n(t)$ se obţin în mod univoc ca soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale liniare (10.72) cu condiţiile iniţiale (10.73) şi (10.74).

Exemplul 10.8.1. Să se determine soluţia ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin t$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t)=u(l,t)=0$$

şi condiţiile iniţiale:

$$u(x,0)=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\,.$$

Conform (10.71) avem:

$$b_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \sin t\ \sin\frac{n\pi}{l}x\ dx=\frac{2\sin t}{l}\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_0^l\right)=\frac{2\sin t}{n\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right).$$

Aşadar $b_n(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } n=2k\\ \dfrac{4\sin t}{n\pi}, & \text{dacă } n=2k+1\end{cases}$.

Din (10.72) rezultă pe de o parte, că

$$T''_{2k}(t)+\frac{4k^2\pi^2a^2}{l^2}T_{2k}(t)=0 \qquad \textbf{(10.75)}$$

iar pe de altă parte

$$T''_{2k+1}(t)+\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}T_{2k+1}(t)=\frac{4\sin t}{(2k+1)\pi}\,. \qquad \textbf{(10.76)}$$

Soluţia generală a ecuaţie (10.75) este

$$T_{2k}(t)=c_{2k}\cos\frac{2k\pi a}{l}t+d_{2k}\sin\frac{2k\pi a}{l}t$$

unde c_{2k} şi d_{2k} sunt constante arbitrare.

Din condiţiile (10.73) şi (10.74) rezultă $c_{2k}=d_{2k}=0$ şi deci că

$T_{2k}(t)=0,\ (\forall)\ k$.

Soluţia generală a ecuaţie (10.76) se compune din soluţia generală a ecuaţiei omogene asociată plus o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Soluţia generală a ecuaţie omogene este

$$T_0(t)=\alpha_{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi a}{l}t+\beta_{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi a}{l}t$$

unde α_{2k+1} şi β_{2k+1} sunt constante arbitrare.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei (10.76) de forma:

$$T_p(t)=\gamma_{k+1}\sin t+\delta_{k+1}\cos t\,. \qquad \textbf{(10.77)}$$

Punând condiţia ca (10.77) să verifice ecuaţia (10.76) obţinem:

$$\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}-1\right)\gamma_{k+1}\sin t+\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}-1\right)\delta_{k+1}\cos t=\frac{4\sin t}{(2k+1)\pi}$$

de unde rezultă $\delta_{k+1}=0$ şi

$$\gamma_{k+1}=\frac{4}{(2k+1)\pi\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}-1\right)}.$$

Aşadar

$$T_p(t)=\frac{4\sin t}{(2k+1)\pi\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}-1\right)}. \qquad \textbf{(10.78)}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (10.75) este:

$$T_{2k+1}(t)=\alpha_{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi a}{l}t+\beta_{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi a}{l}t+$$
$$+\frac{4\sin t}{(2k+1)\pi\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}-1\right)}.$$

Din condiţia (10.73) rezultă $\alpha_{2k+1}=0$, iar din condiţia (10.74)

$$\beta_{2k+1}=-\frac{4l}{a(2k+1)^2\pi^2\left(\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}-1\right)}.$$

Aşadar, soluţia căutată este:

$$u(x,t)=-\frac{4l^3}{a\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\left[(2k+1)^2\pi^2a^2-l^2\right]}\sin\frac{(2k+1)\pi a}{l}t\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x+$$
$$+\frac{4l^2\sin t}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\left[(2k+1)^2\pi^2a^2-l^2\right]}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Seria de mai sus este uniform convergentă şi derivabilă termen cu termen atât în raport cu t cât şi cu x, aşa cum rezultă din criteriul lui Weierstrass. Suma seriei este soluţia generalizată a problemei.

10.9. Ecuaţia propagării căldurii într-o bară

Ne propunem să găsim ecuaţia propagării căldurii într-o bară rectilinie de lungime l, de grosime neglijabilă şi izolată termic lateral.

Notăm cu $u(x,t)$ temperatură în punctul de abscisă x al barei la momentul t şi cu $k(x)$ coeficientul de conductibilitate termică.

Conform legii lui Fourier, cantitatea de căldură ce trece prin segmentul $[x_1,x_2]$ al barei, în intervalul de timp (t_1,t_2) este egală cu:

$$Q_1=-\int_{t_1}^{t_2}k(x)\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t)\right]dt.$$

Din teorema de medie a integralei definite şi din teorema creşterilor finite a lui Lagrange, rezultă că există $\theta\in[t_1,t_2]$ şi $\xi\in(x_1,x_2)$ astfel încât

$$Q_1=-k(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi,\theta)(x_2-x_1)(t_2-t_1). \qquad \textbf{(10.79)}$$

Pe de altă parte, cantitatea de căldură Q_2 necesară porţiunii $[x_1,x_2]$ a barei pentru ca temperatura să varieze cu $\Delta u=u(x,t_2)-u(x,t_1)$ este egală cu:

$$Q_2=\int_{x_1}^{x_2}c(x)\rho(x)\left[u(x,t_2)-u(x,t_1)\right]dx$$

unde $c(x)$ este căldura specifică în punctul de abscisă x, iar $\rho(x)$ este densitatea barei în acest punct. Aplicând din nou teoremele de medie amintite rezultă că există $\xi_1\in[x_1,x_2]$ şi $\theta_1\in(t_1,t_2)$ astfel încât

$$Q_2=c(\xi_1)\rho(\xi_1)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi_1,\theta_1)(x_2-x_1)(t_2-t_1). \qquad \textbf{(10.80)}$$

În sfârşit, dacă notăm cu $F(x,t)$ intensitatea surselor de căldură la momentul t, în punctul de abscisă x, atunci cantitatea de căldură primită de segmentul de bară $[x_1,x_2]$ este egală cu:

$$Q_3 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} F(x,t)\,dt \right) dx .$$

Din teorema de medie a integralei rezultă că există $\xi_2 \in [x_1, x_2]$ şi $\theta_2 \in (t_1, t_2)$ astfel încât

$$Q_3 = F(\xi_2, \theta_2)(x_2 - x_1)(t_2 - t_1). \qquad \textbf{(10.81)}$$

Bilanţul termic implică:

$Q_1 + Q_2 = Q_3$.

Ţinând seama de (10.79), (10.80) şi (10.81) obţinem

$$-k(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi,) + c(\xi_1)\rho(\xi_1)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi_1, \theta_1) = F(\xi_2, \theta_2). \qquad \textbf{(10.82)}$$

La limită, când $x_1 \to x,\ x_2 \to x,\ t_1 \to t,\ t_2 \to t$, rezultă:

$$-k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(x,t).$$

În cazul unei bare omogene, conductibilitatea termică, densitatea şi căldura specifică sunt constante:

$k(x) = k,\ \rho(x) = \rho,\ c(x) = c,\ (\forall)\ x$.

Dacă notăm cu $a^2 = \dfrac{k}{c\rho} > 0$ şi cu $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$, atunci obţinem ecuaţia:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \qquad \textbf{(10.83)}$$

Ecuaţia (10.83) se numeşte *ecuaţia căldurii* în cazul unidimensional. Dacă $f(x,t) = 0$ se obţine ecuaţia omogenă a căldurii care corespunde situaţiei când nu avem surse de căldură.

Ecuaţia propagării căldurii într-un corp omogen spaţial este următoarea:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z,t) \qquad \textbf{(10.84)}$$

unde $u(x,y,z,t)$ reprezintă temperatura în punctul (x,y,z) la momentul t.

10.10. Metoda Fourier pentru ecuaţia căldurii

Studiul propagării căldurii într-o bară finită omogenă de lungime l, cunoscând distribuţia temperaturii la momentul iniţial $t=0$ şi cu temperatura la capetele barei nulă, ne conduce la următoarea problemă matematică:

Să se găsească soluţia $u=u(x,t)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x\in(0,\,l),\ t>0 \qquad \textbf{(10.85)}$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ t>0 \qquad \textbf{(10.86)}$$

şi condiţia iniţială:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,\,l]. \qquad \textbf{(10.87)}$$

Metoda Fourier sau metoda separării variabilelor presupune să căutăm soluţii de forma:

$$u(x,t)=X(x)T(t). \qquad \textbf{(10.88)}$$

Din condiţiile la limită (10.86) deducem:

$$\begin{cases} X(0)T(t)=0 \\ X(l)T(t)=0,\ (\forall)\ t>0. \end{cases} \qquad \textbf{(10.89)}$$

Din (10.89) rezultă că $X(0)=X(l)=0$ pentru că, în caz contrar, $T(t)=0$, pentru $(\forall)\ t>0$ şi deci $u(x,t)=0,\ (\forall)\ t>0$, situaţie neinteresantă din punct de vedere fizic.

Punând condiţia ca (10.88) să verifice ecuaţia (10.85) deducem:

$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t),\ (\forall)\ 0<x<l,\ (\forall)\ t>0.$

Evident, există $x_0\in(0,\,l)$ şi $t_0>0$ astfel încât $X(x_0)\neq 0$, $T(t_0)\neq 0$, pentru că altfel obţinem soluţia nulă, neinteresantă fizic.

Cum X şi T sunt funcţii de clasă C^2, rezultă că există o vecinătate W a punctului (x_0,t_0) astfel încât $X(x)\neq 0,\ T(t)\neq 0,\ (\forall)\ (x,t)\in W$.

În continuare avem:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\,\frac{T'(t)}{T(t)},\ (\forall)\ (x,t)\in W. \qquad \textbf{(10.90)}$$

Deoarece membrul stâng depinde de x iar membrul drept de t, egalitatea (10.90) nu poate avea loc decât dacă cele două rapoarte sunt egale cu o aceeaşi constantă. Fie $\mu \in \mathbb{R}$ această constantă.

Obţinem astfel două ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi:

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \qquad \textbf{(10.91)}$$

$$T'(t) - \mu a^2 T(t) = 0. \qquad \textbf{(10.92)}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (6.92) este:

$T(t) = Ke^{\mu a^2 t}$, $K \in \mathbb{R}$.

Observăm că dacă $\mu > 0$, atunci $|T(t)| \to \infty$ când $t \to \infty$, lucru inacceptabil din punct de vedere fizic. De asemenea, dacă $\mu = 0$, T se reduce la o constantă, ceea ce presupune că temperatura rămâne constantă în timp, fapt inacceptabil fizic. Prin urmare, pentru ca soluţia să fie interesantă din punct de vedere fizic, trebuie să presupunem că $\mu = -\lambda^2 < 0$, de unde rezultă că

$$T(t) = Ke^{-\lambda^2 a^2 t},\ t > 0. \qquad \textbf{(10.93)}$$

Ţinând seama că $\mu = -\lambda^2$, soluţia generală a ecuaţiei (10.91) va fi:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \qquad \textbf{(10.94)}$$

Din $X(0) = 0$ deducem că $C_1 = 0$ şi mai departe că

$X(x) = C_2 \sin \lambda x$.

Pe de altă parte, din $X(l) = 0$ rezultă că $\sin \lambda l = 0$, pentru că altfel am avea $C_2 = 0$, ceea ce ar conduce la soluţia nulă.

Prin urmare, $\sin \lambda l = 0$, ceea ce implică $\lambda = \dfrac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi mai departe că:

$$\begin{cases} X_n(x) = C_n \sin \dfrac{n\pi}{l} x \\ T_n(t) = K_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t}, \ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Dacă notăm cu $A_n = C_n K_n$, rezultă că funcţiile

$$u_n(x,t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x,\ n\in\mathbb{N}^* \tag{10.95}$$

sunt soluţii ale problemei (10.85) + (10.86) + (10.87).

Fie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{10.96}$$

Pentru moment presupunem formal că seria din dreapta este uniform convergentă şi cerem ca suma sa să verifice condiţia iniţială (10.87):

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{10.97}$$

Presupunând că funcţia φ se dezvoltă în serie Fourier pe intervalul $[0, l]$, după sinusuri, din (10.97) rezultă că:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{10.98}$$

În continuare, presupunem că $\varphi\in C^2[0, l]$. Cum $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, aşa cum rezultă din condiţiile (10.86) şi (10.87), deducem că φ se dezvoltă în serie Fourier pe $[0, l]$ şi deci că seria (10.97) este absolut şi uniform convergentă şi are suma $\varphi(x)$.

Pe de altă parte, ţinând seama că şirul $\{A_n\}$ dat de relaţia (10.98) este mărginit $\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0\right)$ şi că $0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \le 1$, pentru $t\ge 0$, deducem că seria (10.96) este absolut şi uniform convergentă pentru $0\le x\le l$ şi $t>0$. Rezultă că suma sa este continuă şi verifică condiţiile la limită (10.86) şi condiţia iniţială (10.87). Rămâne să arătăm că verifică şi ecuaţia (10.85).

Pentru aceasta este suficient să observăm că seria (10.96) este o dată diferenţiabilă termen cu termen în raport cu t şi de două ori în raport cu x. Acest lucru rezultă din faptul că:

$$0 < \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1 \text{ şi}$$

$$0 < \frac{n^2\pi^2}{l^2} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, \text{ pentru } (\forall)\ t > 0.$$

În concluzie, am arătat că dacă φ este de clasă C^2 pe $[0, l]$, atunci problema (10.85) + (10.86) + (10.87) are soluţie unică şi aceasta este dată de (10.96).

Exemplul 10.10.1. Să se afle soluţia ecuaţiei:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ 0 < x < \pi$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0$$

şi condiţia iniţială:

$$u(x,0) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi.$$

Avem $l = \pi$, $\varphi(x) = \sin x$, de unde rezultă

$A_1 = 1$ şi $A_n = 0$, pentru $n > 1$.

Conform (10.96) soluţia problemei este

$$u(x,t) = e^{-a^2 t} \sin x,\ 0 \le x \le \pi,\ t > 0.$$

Să considerăm acum ecuaţia neomogenă:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \textbf{(10.99)}$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t > 0 \qquad \textbf{(10.100)}$$

şi condiţia iniţială:

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l. \qquad \textbf{(10.101)}$$

Ca şi în cazul ecuaţiei coardei vibrante neomogene vom căuta soluţia problemei (10.99) + (10.100) + (10.101) sub forma unei sume:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \qquad \textbf{(10.102)}$$

unde v este soluţie pentru ecuaţia omogenă:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

cu condiţiile la limită:

$$v(0,t)=v(l,t)=0,\ t>0$$

şi condiţia iniţială:

$$v(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l$$

iar w este soluţie pentru ecuaţia neomogenă cu condiţiile la limită şi condiţia iniţială nule:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad \textbf{(10.103)}$$

$$w(0,t)=w(l,t)=0,\ t>0 \qquad \textbf{(10.104)}$$

$$w(x,0)=0,\ 0\le x\le l\,. \qquad \textbf{(10.105)}$$

Din prima parte a acestei secţiuni ştim că

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\ \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(10.106)}$$

unde

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(10.107)}$$

Rămâne să rezolvăm problema (10.103) + (10.104) + (10.105). Pentru aceasta căutăm soluţia de forma:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,. \qquad \textbf{(10.108)}$$

Presupunem că seria din membrul drept este uniform convergentă, derivabilă termen cu termen o dată în raport cu t şi de două ori în raport cu x.

Punând condiţia ca (10.108) să verifice ecuaţia (10.103) obţinem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+a^2\cdot\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x,t)\,. \qquad \textbf{(10.109)}$$

Presupunând că $f(x,t)$ se dezvoltă în serie Fourier pe intervalul $[0,l]$, după sinusuri, rezultă că:

$$T_n'(t)+a^2\cdot\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=b_n(t) \qquad \textbf{(10.110)}$$

unde

$$b_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \qquad \textbf{(10.111)}$$

Ecuaţia (10.110) este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi neomogenă. Soluţia sa generală este:

$$T_n(t)=e^{-\int_0^t\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 d\tau}\cdot\left(C_n+\int_0^t b_n(\tau)e^{\int_0^\tau\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 ds}d\tau\right).$$

Pe de altă parte, din condiţia iniţială (10.105) deducem că $T_n(0)=0$, de unde rezultă că $C_n=0$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$. În continuare avem:

$$T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\cdot\int_0^t b_n(\tau)\,e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\tau}\,d\tau=\int_0^t b_n(\tau)\,e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\,d\tau$$

şi soluţia căutată este:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t b_n(\tau)\,e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)}\,d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \textbf{(10.112)}$$

unde $b_n(\tau)$ sunt daţi de (10.111).

Exemplul 10.10.2. Să se afle soluţia ecuaţiei:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\sin 2x,\ 0<x<\pi,\ t>0$$

cu condiţiile la limită:

$$u(0,t)=u(\pi,\ t)=0$$

şi condiţia iniţială:

$$u(x,0)=\sin x,\ x\in[0,\ \pi].$$

Căutăm soluţia de forma:

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

unde v verifică ecuaţia omogenă, cu condiţii la capete nule şi condiţia iniţială

$$v(x,0)=\sin x$$

iar w este soluţie pentru (10.103) + (10.104) + (10.105).

Observăm că v este soluţia din Exemplul 10.10.1, deci

$$v(x,t)=e^{-a^2t}\sin x,\ 0\le x\le\pi,\ t>0.$$

Rămâne să determinăm funcţia w. Avem

$$b_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\ \sin 2x\ \sin nx\ dx=\begin{cases} t, & \text{dacă } n=2\\ 0, & \text{dacă } n\ne 2\end{cases}.$$

Rezultă că $T_n(t)=0$ dacă $n\ne 2$ şi

$$T_2(t)=\int_0^t \tau\ e^{-4a^2(t-\tau)}\ d\tau=\frac{1}{4a^2}t+\frac{1}{16a^4}\left(e^{-4a^2t}-1\right) \text{ şi mai departe}$$

$$w(x,t)=\left(\frac{1}{4a^2}t-\frac{1}{16a^4}+\frac{1}{16a^4}\ e^{-4a^2t}\right)\sin\ 2x.$$

În final soluţia căutată este:

$$u(x,t)=e^{-a^2t}\sin x+\frac{1}{4a^2}\left(t-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}\ e^{-4a^2t}\right)\sin\ 2x.$$

10.11. Problema Cauchy pentru ecuaţia căldurii

Problema constă în determinarea unei funcţii u de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$ care satisface ecuaţia:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ x\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(10.113)}$$

şi verifică condiţia iniţială:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(10.114)}$$

Din punct de vedere fizic, problema revine la determinarea temperaturii $u(x,t)$ la momentul $t>0$, în punctul de abscisă x al unei bare infinită omogenă, izolată termic, identificată cu axa Ox, a cărei temperatură la momentul iniţial $t=0$ este $\varphi(x)$.

Pentru rezolvarea problemei vom folosi transformata Fourier. Vom presupune, în acord cu semnificaţia fizică, că $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,t)=0$ şi $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0$. De asemenea, presupunem că funcţiile $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ şi φ sunt continue şi absolut integrabile pe $\mathbb{R}$. Această ipoteză ne asigură că admit transformate Fourier. Notăm cu $U(\omega,t)$ şi cu $\Phi(\omega)$ transformatele Fourier ale funcţiile $u(x,t)$, respectiv $\varphi(x)$. Aşadar avem:

$$U(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx \text{ şi}$$

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

Integrând prin părţi obţinem:

$$U(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}u(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{-i\omega x}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i\omega}\left(\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-i\omega x}\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$

şi mai departe:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-i\omega x}\,dx=-\omega^2 U(\omega,t). \qquad \textbf{(10.115)}$$

Pe de altă parte, din teorema de derivare a integralei cu parametru rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-i\omega x}\,dx. \qquad \textbf{(10.116)}$$

Ţinând seama de (10.115) şi (10.116) şi de faptul că u verifică ecuaţia (10.113) deducem:

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)e^{-i\omega x}\,dx=\frac{\partial U}{\partial t}(\omega,t)+a^2\omega^2U(\omega,t).$$

Am obţinut astfel ecuaţia diferenţială:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\omega,t)+a^2\omega^2U(\omega,t)=0$$

a cărei soluţie generală este:

$$U(\omega,t)=C\,e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Pentru determinarea constantei C folosim condiţia iniţială (10.114) şi obţinem:

$$C=U(\omega,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}\,dx=\Phi(\omega).$$

Aşadar avem:

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}. \qquad \textbf{(10.117)}$$

Pe de altă parte, se ştie că transformata Fourier a funcţiei $e^{-\alpha x^2}$, cu $\alpha>0$ este $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$, deci $\mathfrak{F}\left\{e^{-\alpha x^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$. Dacă notăm cu $t=\frac{1}{4a^2\alpha}$, atunci obţinem

$$e^{-a^2\omega^2 t}=\mathfrak{F}\left\{\sqrt{2\alpha}\;e^{-\alpha x^2}\right\}=\mathfrak{F}\left\{\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right\}.$$

Ţinând seama de transformata Fourier a produsului de convoluţie avem:

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathfrak{F}\left\{\varphi(x)\;*\;\frac{1}{a\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right\}.$$

Cum $U(\omega,t)=\mathfrak{F}\{u(x,t)\}$ rezultă:

$$\mathfrak{F}\{u(x,t)\}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathfrak{F}\left\{\varphi(x)\;*\;e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right\}$$ şi mai departe că:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi,\ t>0. \qquad \textbf{(10.118)}$$

Această formulă se numeşte *formula integrală Poisson* şi rezolvă problema (10.113) + (10.114).

Exemplul 10.11.1. Să se afle soluţia ecuaţiei:

$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in\mathbb{R},\ t>0$, dacă

$$u(x,0)=\begin{cases}c, & \text{pentru } x\in[\alpha,\ \beta]\\ 0, & \text{pentru } x\notin[\alpha,\ \beta]\end{cases}.$$

Din formula integrală Poisson (10.118) avem:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\beta}c\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi\ .$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=\lambda$ obţinem

$$u(x,t)=-\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-\alpha}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-\beta}{2a\sqrt{t}}}e^{-\lambda^2}\,d\lambda\,.$$

Acest rezultat se poate exprima şi cu ajutorul funcţiei Laplace. Funcţia Laplace se defineşte astfel:

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Se verifică imediat că $\Phi(0)=0,\ \Phi(\infty)=1$ şi Φ este impară.

Această funcţie joacă un rol important în teoria probabilităţilor şi este tabelată.

Folosind funcţia Laplace Φ, soluţia problemei este:

$$u(x,t)=\frac{c}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-\beta}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-\alpha}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

10.12. Probleme la limită pentru ecuaţii eliptice. Soluţii fundamentale pentru ecuaţia Laplace. Formule Green

Ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul doi, de tip eliptic modelează procese fizice staţionare, adică procese în care funcţia necunoscută nu depinde de timp.

Cea mai simplă ecuaţie de tip eliptic este ecuaţia lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\,. \qquad \textbf{(10.119)}$$

Dacă notăm cu Δ operatorul diferenţial al lui Laplace:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

atunci ecuaţia lui Laplace se scrie mai concis:

$$\Delta u=0\,. \qquad \textbf{(10.120)}$$

Ecuaţia lui Laplace în plan este:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \textbf{(10.121)}$$

iar ecuaţia lui Laplace în cazul unidimensional este:

$$\Delta u=u''(x)=0\,. \qquad \textbf{(10.122)}$$

Evident, soluţia generală a aceste ecuaţii este:

$$u(x)=C_1x+C_2$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare.

Procesele fizice staţionare în care intervin şi forţe exterioare, exprimate prin funcţia f, sunt modelate de ecuaţia Poisson:

$$\Delta u=f\,. \qquad \textbf{(10.123)}$$

Definiţia 10.12.1. Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu (o mulţime deschisă şi conexă) şi u o funcţie de clasă C^2 pe Ω. Dacă u este soluţie pentru ecuaţia Laplace (10.119), atunci u se numeşte *armonică.*

Exemplul 10.12.1. Fie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vectorul de poziţie al punctului $M(x, y, z)$ şi fie $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ norma sa. Atunci funcţia

$$u_0 = \frac{1}{r} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

este funcţie armonică pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Într-adevăr:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \text{ şi}$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = -\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Din motive de simetrie avem

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \text{ şi } \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Rezultă că $\Delta u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0$.

Funcţia $u_0(r) = \frac{1}{r}$ se numeşte *soluţia fundamentală* a ecuaţiei Laplace în spaţiu.

Exemplul 10.12.2. Fie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ şi $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Atunci funcţia

$$u_0(r) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

este funcţie armonică pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Într-adevăr: $u_0 = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{x}{x^2 + y^2} \text{ şi } \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

În mod analog

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \text{ şi deci } \Delta u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0.$$

Funcţia $u_0(r) = \frac{1}{r}$, $r \neq 0$ se numeşte *soluţia fundamentală* a ecuaţiei Laplace în plan.

Pentru descrierea completă a unui proces fizic este nevoie ca, pe lângă ecuaţia acestui proces, să specificăm şi anumite condiţii suplimentare (condiţii la limită) pe frontiera domeniului.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi fie $\Sigma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ frontiera sa (suprafaţa care mărgineşte domeniul Ω). Presupunem că Σ este o suprafaţă netedă sau netedă pe porţiuni.

Problemele specifice pentru ecuaţia Laplace constau în determinarea unei funcţii $u = u(x, y, z)$ armonică în Ω care să satisfacă pe Σ o condiţie de forma:

(1) $u\big|_{\Sigma} = f_1$ (*problema Dirichlet*)

(2) $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f_2$ (*problema Newmann*)

(3) $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_{\Sigma} = f_3$ (*problema mixtă*).

Aici, f_1, f_2, f_3 şi h sunt funcţii cunoscute, iar $\frac{\partial u}{\partial n}$ reprezintă derivata după normala exterioară la suprafaţa Σ.

În cazul unidimensional, problema Dirichlet constă în determinarea unei funcţii $u = u(x)$ care verifică ecuaţia:

$$u''(x) = 0, \; x_1 < x < x_2. \tag{10.124}$$

şi condiţiile la limită:

$$\begin{cases} u(x_1) = y_1 \\ u(x_2) = y_2 \end{cases}. \tag{10.125}$$

Cum soluţia generală a ecuaţiei (10.124) este

$u(x) = C_1 x + C_2$ şi reprezintă geometric o dreaptă, rezolvarea problemei Dirichlet revine la determinarea dreptei care trece prin punctele: $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$.

Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} C_1 x_1 + C_2 = y_1 \\ C_1 x_2 + C_2 = y_2 \end{cases}$$

obţinem $C_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ şi $C_2 = \dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$.

Prin urmare soluţia problemei Dirichlet este:

$$u = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

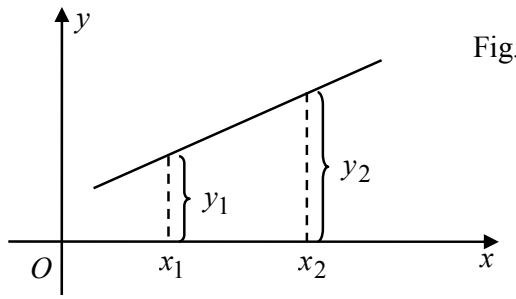


Fig. 10.3

Teorema 10.12.1. (Prima formulă a lui Green)

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit şi fie $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Atunci:

$$\iiint_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + v \Delta u\right) dx\, dy\, dz = \iint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma .$$

Demonstraţie. Din formula Gauss-Ostrogradski deducem:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\left(v \operatorname{grad} u\right) dx\, dy\, dz = \iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot v \operatorname{grad} u\, d\sigma . \qquad \textbf{(10.126)}$$

Pe de altă partea avem:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\left(v \operatorname{grad} u\right) = \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u + v \Delta u \text{ şi} \\ &\vec{n} \cdot v \operatorname{grad} u = v\, \vec{n} \cdot \operatorname{grad} u = v \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(10.127)}$$

Înlocuind (10.127) în (10.126) obţinem formula din enunţul teoremei.

Pentru a obţine cea de a doua formulă Green procedăm astfel: schimbăm rolul funcţiilor u şi v în prima formulă Green şi apoi scădem noua formulă din prima.

Aşadar avem

$$\iiint_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u\,\Delta v\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} u\,\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma \quad \text{şi}$$

$$\iiint_{\Omega} \left(v\,\Delta u - u\,\Delta v\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma\ . \qquad \textbf{(10.128)}$$

(10.128) poartă numele de *a doua formulă Green*.

În sfârşit, dacă în prima formulă Green alegem $u = v$ obţinem:

$$\iiint_{\Omega} \left(\left(\operatorname{grad} u\right)^2 + u\,\Delta u\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma} u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\ . \qquad \textbf{(10.129)}$$

Formula (10.129) poartă numele de *a treia formulă a lui Green*.

10.13. Formula celor trei potenţiale

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit, Σ frontiera sa şi $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in \Omega$. Fie de asemenea $M\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3$, $M \neq M_0$ şi

$$r = r_{M_0M} = \left\|\overrightarrow{M_0M}\right\| = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2}\ .$$

Ca de obicei, presupunem că Σ este o suprafaţă închisă, netedă sau netedă pe porţiuni şi notăm cu $\vec{n}$ versorul normalei exterioare la suprafaţa Σ.

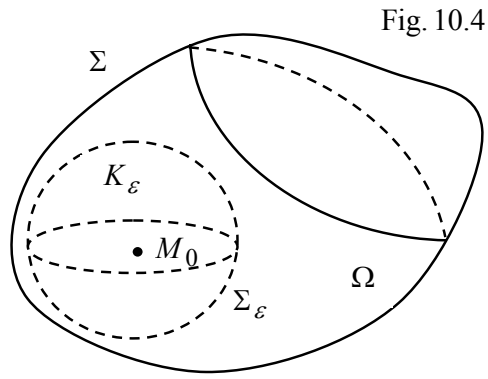
Teorema 10.13.1. Dacă $u \in C^2\left(\Omega\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, atunci:

$$u\left(M_0\right) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma - \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r}\,dx\,dy\,dz$$

unde $r = r_{M_0M}$, iar $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ reprezintă derivata funcţiei u după normala exterioară la Σ.

Demonstraţie. Fie $K_\varepsilon = B\left(M_0, \varepsilon\right)$ o bilă deschisă cu centrul în M_0 şi de rază ε, inclusă în Ω (Fig. 10.4). Evident funcţia $v\left(M\right) = \dfrac{1}{r_{M_0M}}$ este armonică în $\Omega \setminus K_\varepsilon$. Dacă notăm cu Σ_ε frontiera lui K_ε, atunci $\operatorname{fr}\left(\Omega \setminus K_\varepsilon\right) = \Sigma \cup \Sigma_\varepsilon$.

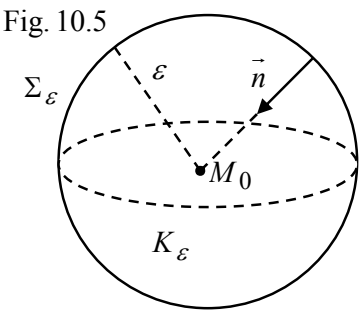
Fig. 10.4



Aplicând a doua formulă a lui Green pentru funcţiile u, $v=\frac{1}{r}$ şi domeniul $\Omega\setminus K_\varepsilon$ obţinem:

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus K_\varepsilon}\left(u\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\Sigma}\left(u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma+$$
$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\,d\sigma-\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma. \qquad \textbf{(10.130)}$$

Fig. 10.5



Observăm că normala exterioară la Σ_ε este coliniară cu vectorul

$$\vec{r}=\vec{r}_{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$$

de unde deducem că $\vec{n}=-\frac{\vec{r}}{r}$ (Fig. 10.5) şi mai departe că

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Cum $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=\operatorname{grad}\dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}=$

$$=-\left(\frac{x-x_0}{r^3}\,\vec{i}+\frac{y-y_0}{r^3}\,\vec{j}+\frac{z-z_0}{r^3}\,\vec{k}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

rezultă că

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{r^2}{r^4}=\frac{1}{r^2}.$$

Aşadar avem $\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right|_{\Sigma_\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}$ şi mai departe

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\,d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\,d\sigma.$$

Conform teoremei de medie, există un punct $P\in\Sigma_\varepsilon$ astfel încât

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\,d\sigma=u(P)\operatorname{aria}(\Sigma_\varepsilon)=u(P)4\pi\varepsilon^2. \qquad \textbf{(10.131)}$$

Ţinând seama de această evaluare rezultă:

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\,d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}u(P)\,4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u(P),\ P\in\Sigma_\varepsilon .$$

Pe de altă parte, aplicând din nou teorema de medie pentru integrala de suprafaţă rezultă că există $\widetilde{P}\in\Sigma_\varepsilon$ astfel încât

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial u}{\partial n}\left(\widetilde{P}\right)4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial n}\left(\widetilde{P}\right). \qquad \textbf{(10.132)}$$

Din (10.130), (10.131), (10.132) şi din faptul că $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$, deducem că:

$$\iiint_{\Omega\setminus K_\varepsilon} -\frac{1}{r}\Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma}\left(u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma + 4\pi u(P) - 4\pi\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial n}\left(\widetilde{P}\right). \qquad \textbf{(10.133)}$$

Cum u este continuă în M_0 rezultă că $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(P) = u(M_0)$.

Pe de altă parte, deoarece $u\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ rezultă că

$\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ este mărginită şi deci că

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\,\dfrac{\partial u}{\partial n}\left(\widetilde{P}\right) = 0$.

Trecând la limită în (10.133) obţinem:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Omega\setminus K_\varepsilon} -\frac{1}{r}\Delta u\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Sigma}\left(u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma + u(M_0).$$

Aşadar, integrala improprie $-\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\Delta u}{r}\,dx\,dy\,dz$ este convergentă şi are loc formula:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)d\sigma - \iiint_{\Omega}\frac{\Delta u}{r}\,dx\,dy\,dz \qquad \textbf{(10.134)}$$

care poartă numele de *formula celor trei potenţiale*. Cele trei integrale din membrul drept se numesc:

$-\dfrac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\Delta u}{r}\,dx\,dy\,dz$ – *potenţialul de volum*

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma \quad -\textit{potenţialul de primul strat}$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma \quad -\textit{potenţialul de dublu strat.}$$

Corolarul 10.13.1. Dacă u este armonică în Ω, atunci

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)d\sigma\ . \qquad \textbf{(10.135)}$$

Din formula (10.135) rezultă că valoarea unei funcţii armonice într-un punct din interiorul domeniului se exprimă cu ajutorul valorilor sale şi ale derivatei sale după normală, pe frontiera domeniului.

În cazul unui domeniu plan, pentru funcţii armonice are loc formula:

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\left(\left(\ln\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial n}-u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\right)ds$$

unde $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $\Gamma=\operatorname{fr}\Omega$, $M_0\in\Omega$ (Fig. 10.6).

$\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$ se numeşte *potenţialul logaritmic de simplu strat*, iar $\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}u\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)ds$ se numeşte *potenţialul logaritmic de dublu strat*

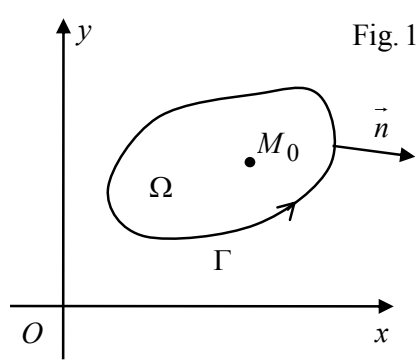


Fig. 10.6

10.14. Proprietăţile funcţiilor armonice

Teorema 10.14.1. Dacă o funcţie u este armonică în domeniul Ω şi este continuă, împreună cu derivatele sale de ordinul întâi în $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$, atunci

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0 .$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din formula a doua a lui Green pentru $v = 1$ şi u armonică. Într-adevăr:

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma \text{ , deci}$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0 .$$

Teorema 10.14.2. (Gauss)

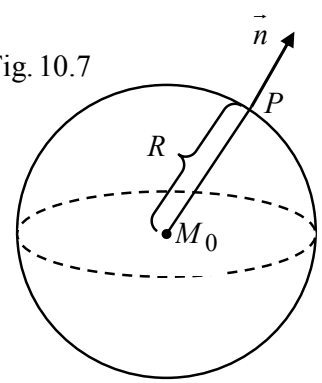
Fie u o funcţie armonică în $B(M_0, R)$, bila cu centrul în M_0 şi de rază R, continuă împreună cu derivatele sale de ordinul întâi pe $\overline{B(M_0, R)} = B(M_0, R) \cup S$. Atunci

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S} u(x, y, z)\, d\sigma .$$

Demonstraţie. Din Corolarul 10.13.1 deducem:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right) d\sigma .$$

Fig. 10.7



Cum u este armonică, din Teorema 10.14.1 rezultă că:

$$\iint_{S} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{R} \iint_{S} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 0 .$$

Pe de altă parte, avem (Fig. 10.7):

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \text{ şi } \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^2}$$

de unde deducem că:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{1}{r^2}\, u\, d\sigma = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S} u\, d\sigma .$$

Teorema 10.14.2. mai poartă numele de *teorema valorii medii a unei funcţii armonice*. În fapt, această teoremă afirmă că valoarea unei funcţii armonice în centrul unei sfere este media aritmetică a valorilor ei de pe sferă.

Teorema 10.14.3. (Principiul maximului)

Fie u o funcţie armonică în domeniul mărginit Ω şi continuă pe $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Sigma$. Fie $M=\sup\{u(x,y,z)\,|\,(x,y,z)\in\Sigma\}$ şi $m=\inf\{u(x,y,z)\,|\,(x,y,z)\in\Sigma\}$.

Atunci $m\le u\le M$ pe $\overline{\Omega}$.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că $u\le M$ pe Ω, pentru că cealaltă inegalitate $u\ge m$ rezultă din aceasta înlocuind pe u cu $-u$. Să presupunem prin absurd că există $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ astfel încât $u(x_0,y_0,z_0)=M'>M$.

Fie funcţia auxiliară:

$$v(x,y,z)=u(x,y,z)+\frac{M'-M}{2d^2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]$$

unde cu d am notat diametrul lui Ω.

Observăm că dacă $(x,y,z)\in\Sigma$, atunci

$$v(x,y,z)\le M+\frac{M'-M}{2}=\frac{M'+M}{2}<M'.$$

Pe de altă parte

$$v(x_0,y_0,z_0)=u(x_0,y_0,z_0)=M'>M$$

de unde deducem că există un punct $(x_1,y_1,z_1)\in\Omega$ astfel încât

$$v(x_1,y_1,z_1)=\sup\{v(x,y,z)\,|\,(x,y,z)\in\Omega\}.$$

Aşadar $M_1(x_1,y_1,z_1)\in\Omega$ este un punct de maxim local. Se ştie că un punct de maxim local este un punct critic pentru v, deci

$$\frac{\partial v}{\partial x}(M_1)=\frac{\partial v}{\partial y}(M_1)=\frac{\partial v}{\partial z}(M_1)=0 \text{ şi că } \Delta v(M_1)\le 0.$$

Cum u este armonică în Ω şi $M_1\in\Omega$, rezultă că:

$$\Delta v(M_1)=\Delta u(M_1)+\frac{M'-M}{2d^2}(2+2+2)=\frac{3}{d^2}(M'-M)>0$$

şi am ajuns la o contradicţie.

Prin urmare $u \le M$ pe Ω şi deci şi pe $\overline{\Omega}$.

Teorema 10.14.4. (unicitatea problemei Dirichlet)

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit, Σ frontiera sa şi $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ o funcţie cunoscută. Atunci există o funcţie unică u cu proprietăţile:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ pe } \Omega \\ u = f \text{ pe } \Sigma \end{cases}.$$

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există două funcţii u_1 şi u_2 armonice pe Ω cu proprietatea că

$$u_1|_\Sigma = u_2|_\Sigma = f .$$

Dacă notăm cu $u = u_1 - u_2$, atunci u este armonică în Ω şi $u = 0$ pe Σ. Din Teorema 10.14.3 rezultă că $u = 0$ pe $\overline{\Omega}$, deci $u_1 = u_2$.

Teorema 10.14.5. (dependenţa continuă a soluţiei problemei Dirichlet de valorile de pe frontieră)

Fie u_1 şi $u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ cu proprietăţile:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \text{ în } \Omega \\ u_1|_\Sigma = f_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 \text{ în } \Omega \\ u_2|_\Sigma = f_2 \end{cases}.$$

Dacă $|f_1(P) - f_2(P)| < \varepsilon, (\forall)\, P \in \Sigma$, atunci

$$|u_1(M) - u_2(M)| < \varepsilon, (\forall) M \in \Omega .$$

Demonstraţie. Dacă notăm cu $u = u_1 - u_2$, atunci u este armonică în Ω şi continuă în $\overline{\Omega}$, iar

$$|u(P)| = |f_1(P) - f_2(P)| < \varepsilon, (\forall)\, P \in \Sigma .$$

Din Teorema 10.14.4 rezultă că:

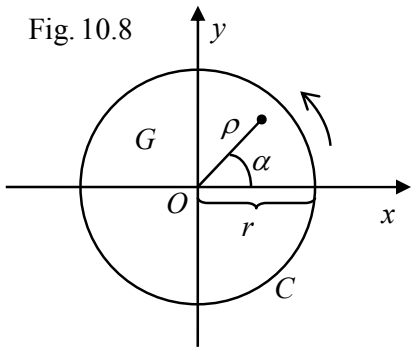
$$-\varepsilon \le u(M) = u_1(M) - u_2(M) < \varepsilon, (\forall) M \in \Omega, \text{ deci}$$

$$|u_1(M) - u_2(M)| < \varepsilon, (\forall) M \in \Omega .$$

10.15. Problema Dirichlet interioară pentru cerc

Fie $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<r^2\right\}$ interiorul cercului cu centrul în origine şi de rază r şi fie $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=r^2\right\}$ frontiera sa, orientată pozitiv (Fig. 10.8).

Fig. 10.8



Problema Dirichlet interioară constă în determinarea unei funcţii $u\in C^2(G)\cap C^0\left(\overline{G}\right)$ care verifică ecuaţia Laplace în G:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

şi condiţia la limită:

$$u\big|_C=f$$

unde f este o funcţie continuă cunoscută.

Deoarece soluţia problemei Dirichlet este unică, conform Teoremei 10.14.4, nu contează metoda folosită pentru obţinerea soluţiei.

Datorită simetriei problemei faţă de origine, se recomandă trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases},\ \rho\in[0,r],\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Se ştie că ecuaţia Laplace în coordonate polare este:

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0. \qquad \textbf{(10.136)}$$

Problema Dirichlet se reformulează astfel: să se găsească o soluţie $u=u(\rho,\theta)$ a ecuaţiei (10.136), în interiorul cercului cu centrul în origine şi de rază r, cu condiţia la limită:

$$u(r,\theta)=f(\theta). \qquad \textbf{(10.137)}$$

Presupunem că f este o funcţie continuă, cunoscută, definită pe $\mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π.

Folosind metoda separării variabilelor a lui Fourier, căutăm soluţia ecuaţiei (10.136) de forma:

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)T(\theta) \qquad \textbf{(10.138)}$$

unde R şi T sunt funcţii de clasă C^2, iar T este periodică de perioadă 2π.

Punând condiţia ca (10.138) să verifice ecuaţia (10.136) rezultă.

$$\rho^2 R''(\rho)T(\theta)+\rho R'(\rho)T(\theta)=-R(\rho)T''(\theta).$$

Separând variabilele obţinem

$$\frac{\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}.$$

Deoarece membrul stâng depinde de ρ şi membrul drept depinde de θ, egalitatea nu poate avea loc decât dacă ambii membri coincid cu o aceeaşi constantă k.

Obţinem astfel două ecuaţii diferenţiale:

$$T''(\theta)+k\,T(\theta)=0 \qquad \textbf{(10.139)}$$

$$\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)-k\,R(\rho)=0. \qquad \textbf{(10.140)}$$

Dacă $k=-\lambda^2<0$, atunci soluţia generală a ecuaţiei (10.139) este

$$T(\theta)=C_1 e^{\lambda\theta}+C_2 e^{-\lambda\theta}$$

care nu este periodică. Aşadar k nu poate fi strict negativ.

Dacă $k=0$, atunci $T(\theta)=C_1\theta+C_2$ şi este periodică numai dacă $C_1=0$, deci $T(\theta)=C_2$.

Pe de altă parte, ecuaţia (10.140) devine

$\rho^2 R''+\rho R'=0$ care se mai scrie $(\rho R')'=0$ şi are soluţia generală:

$$R(\rho)=C\ln\rho+D.$$

Deoarece această funcţie nu este definită în origine, alegem $C=0$ şi obţinem soluţia:

$$R(\rho)=D=\text{constant}.$$

În concluzie, pentru $k=0$ obţinem soluţia:

$$u_0(\rho,\theta)=C_2 D=A_0. \qquad \textbf{(10.141)}$$

Pentru $k=\lambda^2>0$, soluţia generală a ecuaţiei (10.139) este:

$$T(\theta)=C\cos\lambda\theta+D\sin\lambda\theta$$

unde C şi D sunt constante arbitrare.

Punând condiţia ca T să fie periodică de perioadă 2π, rezultă:

$\lambda(\theta+2\pi)=\lambda\theta+2n\pi$ şi mai departe, $\lambda=n\in\mathbb{N}^*$. Aşadar, avem:

$T_n(\theta)=C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Pe de altă parte, ecuaţia (6.140) devine:

$$\rho^2R_n''(\rho)+\rho R_n'(\rho)-n^2R_n(\rho)=0. \qquad \textbf{(10.142)}$$

Deoarece (10.142) este o ecuaţie de tip Euler, pentru a o integra facem schimbarea de variabilă $\rho=e^{\varphi}$ şi obţinem:

$$\begin{cases} R_n'(\rho)=e^{-\varphi}\dfrac{dR_n}{d\varphi} \\ R_n''(\rho)=e^{-2\varphi}\left(\dfrac{d^2R_n}{d\varphi^2}-\dfrac{dR_n}{d\varphi}\right) \end{cases}. \qquad \textbf{(10.143)}$$

Înlocuind (10.143) în (10.142) obţinem ecuaţia cu coeficienţi constanţi:

$$\frac{d^2R_n}{d\varphi^2}-n^2R_n=0 \qquad \textbf{(10.144)}$$

a cărei soluţie generală este:

$$R_n(\varphi)=K_ne^{n\varphi}+L_ne^{-n\varphi}$$

unde K_n şi L_n sunt constante arbitrare.

Observăm că trebuie să alegem $L_n=0$, pentru că altfel soluţia

$$u_n(\rho,\theta)=R_n(\rho)T_n(\theta)$$

nu este definită în origine.

În sfârşit, notând cu $A_n=C_nK_n$ şi cu $B_n=D_nL_n$ obţinem o infinitate de soluţii ale ecuaţiei (10.136):

$$u_n(\rho,\theta)=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\rho^n,\ n\in\mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(10.145)}$$

La acestea adăugăm şi soluţia (10.141). Fie

$$u(\rho,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\rho^n. \qquad \textbf{(10.146)}$$

Vom presupune că seria din membrul drept este uniform convergentă şi derivabilă termen cu termen de două ori, atât în raport cu ρ cât şi in raport cu θ. Cu aceste presupuneri se verifică imediat că suma seriei (10.146) este soluţie pentru ecuaţia Laplace (10.136).

Din condiţia la frontieră (10.137) deducem:

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \right) r^n .$$

Dacă presupunem că f se dezvoltă în serie Fourier, atunci rezultă că:

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \\ r^n A_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \\ r^n B_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \; n \in \mathbb{N}^* . \end{cases} \qquad \textbf{(10.147)}$$

Ţinând seama de (10.147) în (10.146) obţinem:

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cos n(\varphi - \theta) \right] f(\varphi)\, d\varphi . \qquad \textbf{(10.148)}$$

Observăm că pentru $0 < \rho < r$, seria (10.148) este uniform convergentă şi derivabilă termen cu termen de oricâte ori vrem, atât în raport cu ρ cât şi in raport cu θ. Rezultă că suma sa este soluţie pentru ecuaţia (10.136). Prin urmare, singura ipoteza care trebuie făcută este ca funcţia f să se dezvolte în serie Fourier. Acest lucru se întâmplă, de exemplu, dacă presupunem că f este de clasă C^1 şi periodică de perioadă 2π.

Pentru a prelucra în continuare formula (10.148) va trebui să găsim suma seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha, \; |q| < 1.$$

Observăm că această serie este partea reală a seriei geometrice $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(q e^{i\alpha} \right)^n, \; |q| < 1$.

Aşadar avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(qe^{i\alpha}\right)^n\right) = \operatorname{Re}\frac{qe^{i\alpha}}{1-qe^{i\alpha}} = \operatorname{Re}\frac{q\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)}{\left(1-q\cos\alpha\right)-iq\sin\alpha} =$$

$$= \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha + q^2}.$$

În particular, rezultă că:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n\left(\varphi-\theta\right) = \frac{qr\cos\left(\varphi-\theta\right)-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos\left(\varphi-\theta\right)+\rho^2}. \qquad \textbf{(10.149)}$$

Ţinând seama de (10.149) în (10.148) obţinem:

$$u\left(\rho,\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos\left(\varphi-\theta\right)+\rho^2} f\left(\varphi\right)\, d\varphi. \qquad \textbf{(10.150)}$$

Formula (10.150) care ne dă soluţia problemei Dirichlet pentru cerc poată numele de *formula Poisson.*

Exemplul 10.15.1. Să se rezolve problema Dirichlet pentru $G = \left\{\left(x,y\right) |\ x^2+y^2<4\right\}$ dacă $f\left(2,\theta\right) = \cos\theta + 4\sin\theta$.

Avem $A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi + 4\sin\varphi\right) d\varphi = 0$

$$2^n A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi+4\sin\varphi\right)\cos n\varphi\, d\varphi = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n=1 \\ 0, \text{ dacă } n>1 \end{cases}$$

$$2^n B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi+4\sin\varphi\right)\sin n\varphi\, d\varphi = \begin{cases} 4, \text{ dacă } n=1 \\ 0, \text{ dacă } n>1 \end{cases}.$$

Rezultă că $A_1 = \dfrac{1}{2}$, $B_1 = 2$, $A_n = 0$, $B_n = 0$, pentru $n>1$. Conform (10.146) soluţia căutată este:

$u\left(\rho,\theta\right) = \dfrac{\rho}{2}\cos\theta + 2\rho\sin\theta$ sau

$u\left(x,y\right) = \dfrac{x}{2} + 2y = \dfrac{x+4y}{2}$.

10.16. Funcţii Green. Rezolvarea problemei Dirichlet cu ajutorul funcţiei Green

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi $\Sigma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ frontiera sa.

Definiţia 10.16.1. Se numeşte *funcţie Green* pentru domeniul Ω, orice funcţie $G = G(P,Q)$, definită pentru orice pereche de puncte $P,\ Q \in \overline{\Omega}$, $P \neq Q$ cu proprietăţile:

(i) $G(P,Q) \geq 0$ şi $G(P,Q) = G(Q,P)$, $(\forall)\ P,\ Q \in \overline{\Omega},\ P \neq Q$

(ii) G se poate scrie sub forma:

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} + g(P,Q)$$

unde g este armonică în Ω în raport cu P şi este continuă pe $\overline{\Omega}$ (în particular, G este armonică în Ω, ca funcţie de P)

(iii) $G(P,Q) = 0$ dacă $P \in \Sigma$, $\lim\limits_{P \to Q} G(P,Q) = -\infty$ şi $\lim\limits_{\left\|\overrightarrow{OP}\right\| \to \infty} G(P,Q) = 0$.

Exemplul 10.16.1.: Funcţia Green pentru semiplan.

Fie $\Omega = \left\{ P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \right\}$. Evident

$\overline{\Omega} = \left\{ P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0 \right\}$ şi $\Sigma = \left\{ P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}$.

Pentru orice $Q(x',y',z') \in \Omega$, notăm cu Q^* simetricul său faţă de planul xOy, deci $Q^*(x',y',-z')$.

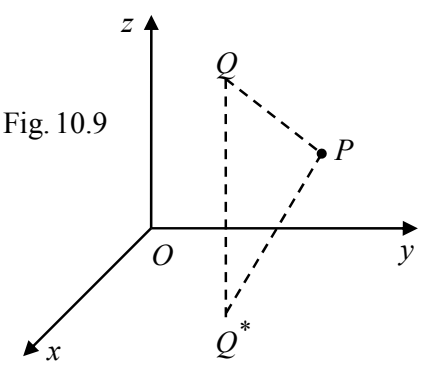


Fig. 10.9

Observăm că funcţia:

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} - \frac{1}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\|},\ P,\ Q \in \overline{\Omega},\ P \neq Q$$

verifică condiţiile din Definiţia 10.16.1 (Fig. 10.9).

Într-adevăr, $G(P,Q) = G(Q,P)$, $G(P,Q) \geq 0$, deoarece $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\|$; G este armonică în Ω, în raport cu P; $\lim\limits_{P \to Q} G(P,Q) = \infty$ şi $\lim\limits_{\left\|\overrightarrow{OP}\right\| \to \infty} G(P,Q) = 0$.

Pe dea altă parte, dacă $P \in \Sigma$, atunci $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\|$, deci $G(P,Q) = 0$.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi fie $\Sigma = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ frontiera sa.

Problema Dirichlet constă în determinarea unei funcţii $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ cu proprietăţile:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ pe } \Omega \\ u\big|_{\Sigma} = f \end{cases} \tag{10.151}$$

unde f este o funcţie continuă cunoscută.

Fie G funcţie Green pentru domeniul Ω.

Teorema 10.16.1. Soluţia problemei Dirichlet (10.151) este

$$u(P) = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n}(Q)\, d\sigma\ ,\ P \in \overline{\Omega}.$$

Demonstraţie. Din formula celor trei potenţiale avem:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - f(Q) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma\ . \tag{10.152}$$

Pe de altă parte, din formula a doua a lui Green (10.128), scrisă pentru soluţia problemei Dirichlet u şi pentru $v = g = G - \dfrac{1}{4\pi r}$, deducem:

$$0 = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} g(P,Q) - f(Q) \frac{\partial g}{\partial n}\right) d\sigma\ . \tag{10.153}$$

Adunând (10.152) cu (10.153) obţinem:

$$u(P) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{4\pi r} + g(P,Q)\right) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iint_{\Sigma} f(Q) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} + g(P,Q)\right) d\sigma\ .$$

Ţinând seama că $G(P,Q) = \dfrac{1}{4\pi r} + g(P,Q)$ şi $G = 0$ dacă $P \in \Sigma$, rezultă că:

$$u(P) = -\iint_{\Sigma} f(Q) \frac{\partial G}{\partial n}(P,Q)\, d\sigma\ .$$

10.17. Rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă

Pentru început ne propunem să determinăm funcţia Green pentru sferă.

Fie $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$ bila cu centrul în origine şi de rază R şi fie Σ frontiera sa (sfera cu centrul în origine şi de rază R) (Fig. 10.10).

Pentru orice $Q \in \Omega,\ Q \neq O$, notăm cu Q^* conjugatul său armonic în raport cu sfera. Rezultă:

$$\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| \left\|\overrightarrow{OQ^*}\right\| = R^2.$$

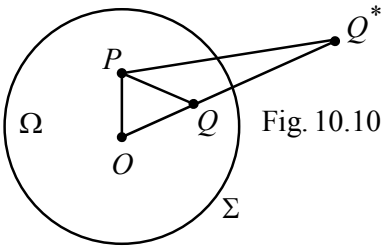


Fig. 10.10

Căutăm funcţia Green de forma:

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} - \frac{k}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\|}. \qquad \textbf{(10.154)}$$

Este evident că $G(P,Q) \geq 0,\ G(P,Q) = G(Q,P)$ şi G este armonică în Ω, în raport cu P.

Pentru a determina k punem condiţia ca $G(P,Q) = 0$, dacă $P \in \Sigma$ (Fig. 10.11).

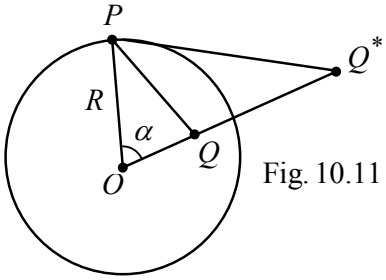


Fig. 10.11

Din relaţia $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| \left\|\overrightarrow{OQ^*}\right\| = R^2$ deducem că:

$$\frac{R}{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{OQ^*}\right\|}{R} \text{ sau}$$

$$\frac{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{OQ^*}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}. \qquad \textbf{(10.155)}$$

Din (10.155) şi din faptul că triunghiurile OPQ şi OPQ^* au unghiul POQ comun, rezultă că cele două triunghiuri sunt asemenea. Scriind proporţionalitatea laturilor rezultă:

$$\frac{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{OQ^*}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}. \qquad \textbf{(10.156)}$$

Pe de altă parte, din (10.156) şi din condiţia:

$$0 = G(P,Q) = \frac{1}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} - \frac{k}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\|}$$

deducem că:

$$k = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{R}{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|}. \qquad \textbf{(10.157)}$$

Ţinând seama (10.157) în (10.155) obţinem funcţia Green pentru sferă:

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} - \frac{R}{4\pi\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|\left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\|}. \qquad \textbf{(10.158)}$$

Din teorema cosinusului şi din (10.156) deducem:

$$\left\|\overrightarrow{PQ^*}\right\| = \sqrt{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ^*}\right\|\cos\alpha + \left\|\overrightarrow{OQ^*}\right\|^2} =$$

$$= \sqrt{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\frac{R^2}{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|}\cos\alpha + \frac{R^4}{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2}} =$$

$$= \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|}\sqrt{R^4 - 2R^2\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|\cos\alpha + \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2}.$$

Aşadar, funcţia Green pentru sferă este:

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} - \frac{R}{4\pi\sqrt{R^4 - 2R^2\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|\cos\alpha + \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2}} \qquad \textbf{(10.159)}$$

pentru $P, Q \in \Omega$, $P \neq Q$. Dacă notăm cu $\rho = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$ şi cu $\delta = \left\|\overrightarrow{OQ}\right\|$, atunci

$$G(P,Q) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\delta\cos\alpha + \delta^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^4 - 2R^2\rho\delta\cos\alpha + \rho^2\delta^2}}\right]. \qquad \textbf{(10.160)}$$

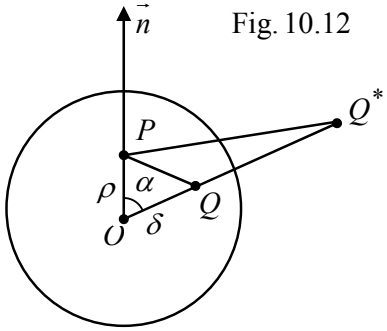


Fig. 10.12

Să presupunem că P are coordonatele (x_1, x_2, x_3) şi Q are coordonatele (y_1, y_2, y_3) (Fig. 10.12). Atunci

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \text{ şi } \delta = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

Observăm că $\vec{n}$, versorul normalei la suprafaţă în punctul în care semidreapta OP intersectează sfera, este

$$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}=\frac{1}{\rho}\left(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}\right) \text{ şi}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial n}=\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\rho=\frac{\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}=\vec{n}\cdot\left(\frac{x_1}{\rho}\vec{i}+\frac{x_2}{\rho}\vec{j}+\frac{x_3}{\rho}\vec{k}\right)=\vec{n}\cdot\vec{n}=1.$$

În continuare avem:

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial\rho}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\delta\cos\alpha-\rho}{\left(\rho^2-2\rho\delta\cos\alpha+\delta^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{R\delta\left(R^2\cos\alpha-\rho\delta\right)}{\left(R^4-2R^2\rho\cos\alpha+\rho^2\delta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

În particular, pentru $\rho=R$ obţinem:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma}=\frac{1}{4\pi}\frac{\delta^2-R^2}{R\left(R^2-2R\delta\cos\alpha+\delta^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{10.161}$$

Conform Teoremei 10.16.1, soluţia problemei Dirichlet pentru sferă este:

$$u(Q)=-\iint_{\Sigma}\frac{\partial G}{\partial n}(P,Q)f(P)d\sigma=\frac{R^2-\delta^2}{4\pi R}\iint_{\Sigma}\frac{f(P)}{\left(R^2-2R\delta\cos\alpha+\delta^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\sigma \tag{10.162}$$

sau

$$u(y_1,y_2,y_3)=\frac{R^2-\left(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2\right)}{4\pi R}\cdot$$
$$\cdot\iint_{\Sigma}\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{\left((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right)^{\frac{3}{2}}}d\sigma. \tag{10.163}$$

10.18. Rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă cu metoda separării variabilelor

Rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă cu formula (10.163) nu este prea comodă. Vom arăta cum se poate rezolva această problemă cu metoda separării variabilelor. Pentru aceasta, vom trece întâi la coordonate sferice (coordonate polare în spaţiu) şi anume:

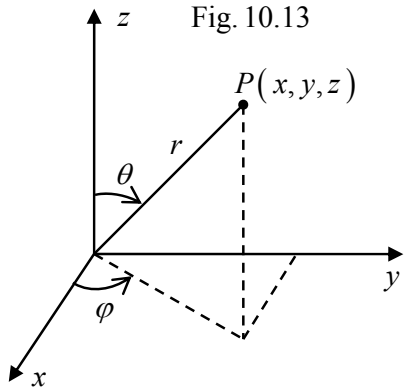


Fig. 10.13

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\ r\in[0,\infty),\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]. \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

În urma acestei schimbări de variabile, ecuaţia Laplace

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}=0 \qquad \textbf{(10.164)}$$

sau

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,. \qquad \textbf{(10.165)}$$

Căutăm o soluţie a ecuaţiei (10.164) sau (10.165) de forma:

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\,Y(\theta,\varphi)\,. \qquad \textbf{(10.166)}$$

Punând condiţia ca (10.166) să verifice ecuaţia (10.164) obţinem:

$$R''(r)Y(\theta,\varphi)+\frac{1}{r^2}R(r)\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R(r)\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}R'(r)Y(\theta,\varphi)+$$
$$+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}R(r)\frac{\partial Y}{\partial\theta}=0.$$

Împărţind cu $R(r)\,Y(\theta,\varphi)$ şi separând variabilele rezultă:

$$\frac{R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)}{R(r)}=-\frac{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y(\theta,\varphi)}$$

sau

$$\frac{r^2R''(r)+2r\,R'(r)}{R(r)}=-\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y(\theta,\varphi)}.$$

Deoarece membrul stâng depinde de r, iar membrul drept depinde de θ şi φ, această egalitate nu poate avea loc decât dacă ambii membri coincid cu o aceeaşi constantă.

Fie λ această constantă. Se obţin astfel două ecuaţii:

$$r^2 R''(r) + 2r\, R'(r) - \lambda R(r) = 0 \qquad \textbf{(10.167)}$$

şi

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y(\theta,\varphi) = 0. \qquad \textbf{(10.168)}$$

Observăm că ecuaţia (10.167) este o ecuaţie de tip Euler. Punem condiţia ca această ecuaţie să admită soluţia particulară $R = r^n$, $n \in \mathbb{N}$ şi obţinem:

$$r^n\left[n(n-1) + 2n - \lambda\right] = 0$$

de unde rezultă că

$$\lambda = n(n+1). \qquad \textbf{(10.169)}$$

Ţinând seama de (10.169), ecuaţiile (10.167) şi (10.168) devin:

$$r^2 R'' + 2r\, R' - n(n+1)R = 0 \qquad \textbf{(10.170)}$$

şi

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y = 0. \qquad \textbf{(10.171)}$$

Se verifică imediat că ecuaţia (10.170) admite pe lângă soluţia particulară r^n şi soluţia particulară $r^{-(n+1)}$. Cum aceste soluţii sunt independente, rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (10.170) este

$$R = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \qquad \textbf{(10.172)}$$

unde A_n şi B_n sunt constante arbitrare.

În continuare, căutăm o soluţie a ecuaţiei (10.171) de forma:

$$Y(\theta,\varphi) = T(\theta)S(\varphi). \qquad \textbf{(10.173)}$$

Punând condiţia ca funcţia dată de (10.173) să verifice ecuaţia (10.171) obţinem:

$$T''(\theta)S(\varphi) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}T'(\theta)S(\varphi) + \frac{1}{\sin^2\theta}T(\theta)S''(\varphi) + n(n+1)T(\theta)S(\varphi) = 0$$

Împărţind cu $\dfrac{1}{\sin^2\theta}T(\theta)S(\varphi)$ şi separând variabilele rezultă:

$$\frac{T''(\theta)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}T'(\theta)+n(n+1)T(\theta)}{\frac{T(\theta)}{\sin^2\theta}}=-\frac{S''(\varphi)}{S(\varphi)}=\mu\ (\text{constant}).$$

Se obţin astfel două ecuaţii diferenţiale:

$$S''(\varphi)+\mu S(\varphi)=0$$

şi

$$T''(\theta)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}T'(\theta)+\left[n(n+1)-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]T(\theta)=0.$$

Pentru ca prima ecuaţie să aibă soluţii periodice de perioadă 2π, vom presupune că $\mu=m^2$, $m\in\mathbb{N}$. Aşadar s-au obţinut ecuaţiile diferenţiale:

$$S''(\varphi)+m^2S(\varphi)=0 \qquad \textbf{(10.174)}$$

şi

$$T''(\theta)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}T'(\theta)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]T(\theta)=0. \qquad \textbf{(10.175)}$$

Ecuaţia (10.174) admite soluţia generală:

$$S_m(\varphi)=C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi \qquad \textbf{(10.176)}$$

unde C_m şi D_m sunt constante arbitrare.

Dacă în ecuaţia (10.175) facem schimbarea de variabilă $\cos\theta=t$ rezultă:

$$T'(\theta)=\frac{dT}{d\theta}=-\sin\theta\ \frac{dT}{dt}$$

$$T''(\theta)=\frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\ \frac{dT}{dt}\right)=\cos\theta\ \frac{dT}{dt}-\sin\theta\ \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dT}{dt}\right)=-\cos\theta\ \frac{dT}{dt}+\sin^2\theta\ \frac{d^2T}{dt^2}.$$

Înlocuind în (10.175) obţinem:

$$\sin^2\theta\ \frac{d^2T}{dt^2}-\cos\theta\ \frac{dT}{dt}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(-\sin\theta\ \frac{dT}{dt}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]T=0$$

sau

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^2T}{dt^2}-2t\ \frac{dT}{dt}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-t^2}\right]T=0. \qquad \textbf{(10.177)}$$

Ecuaţia (10.177) este un caz particular al ecuaţiei lui Legendre generalizată. Forma generală a ecuaţiei lui Legende generalizată este:

$$\left(1-t^2\right) y''-2t\ y'+\left[\lambda(\lambda+1)-\frac{\mu^2}{1-t^2}\right] y=0 \qquad \textbf{(10.178)}$$

unde λ şi μ sunt numere reale, nu neapărat întregi.

Observăm că dacă $\mu=0$ şi $\lambda\in\mathbb{N}$, din (10.178) se obţine ecuaţia diferenţială a lui Legendre, ale cărei soluţii sunt polinoamele Legendre $P_n(x)$.

Definiţia 10.18.1. Funcţiile P_{mn} definite prin:

$$P_{mn}(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t),\ m\le n \qquad \textbf{(10.179)}$$

unde P_n este polinomul Legendre de gradul n, se numesc *funcţiile Legendre asociate*.

Dacă m este număr par, atunci aceste funcţii sunt polinoame. Când $m=0$ obţinem polinoamele Legendre $\left(P_{0n}=P_n\right)$.

În continuare vom prezenta câteva funcţii Legendre. Ţinând seama că:

$$P_0(t)=1,\ P_1(t)=t,\ P_2(t)=\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right),\ P_3(t)=\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right),\ \text{etc.}$$

rezultă:

$$P_{00}(t)=P_0(t)=1$$

$$P_{01}(t)=P_1(t)=t$$

$$P_{11}(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}P_1(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_{02}(t)=P_2(t)=\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)$$

$$P_{12}(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}P_2(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 3t$$

$$P_{22}(t)=\left(1-t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}P_2(t)=3\left(1-t^2\right)$$

$$P_{03}(t)=P_3(t)=\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)$$

$$P_{13}(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}P_3(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(15t^2-3\right)$$

$$P_{23}(t)=\left(1-t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}P_3(t)=\left(1-t^2\right)\cdot 15t$$

$$P_{33}(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{d^3}{dt^3}P_3(t)=\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 15\text{, etc.}$$

Teorema 10.18.1. Funcţiile Legendre asociate P_{mn} sunt soluţii ale ecuaţiei Legendre generalizată (10.177).

Demonstraţie. Deoarece polinoamele Legendre P_n verifică ecuaţia Legendre, avem identitatea:

$$\left(1-t^2\right)P_n''(t)-2t\,P_n'(t)+n(n+1)P_n(t)=0. \qquad \textbf{(10.180)}$$

Derivând de m ori această identitate cu formula de derivare a lui Leibniz obţinem:

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}P_n(t)-2mt\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}P_n(t)-m(m-1)\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)-$$
$$-2t\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}P_n(t)-2m\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)+n(n+1)\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)=0$$

sau

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}P_n(t)-(2mt+2t)\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}P_n(t)+$$
$$+\left[n(n+1)-m^2-m\right]\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)=0. \qquad \textbf{(10.181)}$$

Pe de altă parte, derivând (10.179) obţinem succesiv:

$$P_{mn}'(t)=-mt\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)+\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}P_n(t) \qquad \textbf{(10.182)}$$

$$P_{mn}''(t)=\left[-m\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}-1}+\left(m^2-2m\right)t^2\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}-2}\right]\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)-$$
$$-2mt\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}P_n(t)+\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}P_n(t). \qquad \textbf{(10.183)}$$

În continuare avem:

$$\left(1-t^2\right)P''_{mn}(t)-2t\,P'_{mn}(t)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-t^2}\right]P_{mn}(t)=$$

$$=\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}}\left\{\left(1-t^2\right)\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}P_n(t)-(2mt+2t)\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}P_n(t)+\right.$$

$$\left.+\left[-m+\frac{\left(m^2-2m\right)t^2}{1-t^2}+\frac{2mt^2}{1-t^2}+n(n+1)-\frac{m^2}{1-t^2}+\right]\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)\right\}=$$

$$=\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}}\left[\left(1-t^2\right)\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}P_n(t)-(2mt+2t)\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}P_n(t)+\right.$$

$$\left.+\left(n(n+1)-m^2-m\right)\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)\right]=0,\ \text{conform (10.181)}.$$

Corolarul 10.18.1. Ecuaţia (10.175) admite soluţiile particulare:

$$P_{kn}(\cos\theta),\ \text{pentru}\ k=0,1,...,n.$$

Ecuaţia (10.171) admite soluţiile particulare:

$$P_{kn}(\cos\theta)\cos k\varphi\ \text{şi}\ P_{kn}(\cos\theta)\sin k\varphi,\ \text{pentru}\ k=0,1,...,n.$$

Cum ecuaţia (10.171) este o ecuaţie diferenţială liniară, rezultă că această ecuaţie admite şi soluţia particulară:

$$Y_n(\theta,\varphi)=a_n P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}\left(a_{kn}\cos k\varphi+b_{kn}\sin k\varphi\right)P_{kn}(\cos\theta). \qquad \textbf{(10.184)}$$

Definiţia 10.18.2. Funcţia Y_n definită de (10.184) se numeşte *funcţia sferică generală de ordinul* n.

Observaţia 10.18.2. Ecuaţia Laplace (10.164) admite soluţii particulare de forma:

$$u_n(r,\theta,\varphi)=R_n(r)\,Y_n(\theta,\varphi)=\left[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right]Y_n(\theta,\varphi)$$

unde A_n şi B_n sunt constante arbitrare.

În continuare vom prezenta primele trei funcţii sferice: Y_0, Y_1, Y_2. Ţinând seama de expresiile funcţiilor Legendre P_{kn} prezentate anterior avem:

$$Y_0(\theta,\varphi)=a_0\,P_0(\cos\theta)=a_0$$

$$Y_1(\theta,\varphi)=a_1\,P_1(\cos\theta)+(a_{11}\cos\varphi+b_{11}\sin\varphi)P_{11}(\cos\theta)=$$

$$=a_1\cos\theta+(a_{11}\cos\varphi+b_{11}\sin\varphi)\sin\theta$$

$$Y_2(\theta,\varphi)=a_2\,P_2(\cos\theta)+(a_{12}\cos\varphi+b_{12}\sin\varphi)P_{12}(\cos\theta)+$$

$$+(a_{22}\cos 2\varphi+b_{22}\sin 2\varphi)P_{22}(\cos\theta)=\frac{1}{2}\,a_2\left(3\cos^2\theta-1\right)+$$

$$+(a_{12}\cos\varphi+b_{12}\sin\varphi)3\sin\theta\cos\theta+(a_{22}\cos\varphi+b_{22}\sin\varphi)3\sin^2\theta.$$

Teorema 10.18.2. Funcţiile sferice $\{Y_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ sunt ortogonale în raport cu produsul scalar:

$$\iint_{\Sigma} f(\theta,\varphi)\,g(\theta,\varphi)\,d\sigma$$

unde f şi g sunt funcţii continue, Σ iar este sfera cu centrul în origine şi de rază R.

Demonstraţie. Vom arăta că

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta,\varphi)Y_m(\theta,\varphi)\,d\sigma=0,\ (\forall)\ n\neq m,\ n,\,m\in\mathbb{N}.$$

Afirmaţia rezultă imediat din a doua formulă a lui Green (10.128) scrisă pentru funcţiile armonice:

$u=r^n\,Y_n(\theta,\varphi)$ şi $v=r^m\,Y_m(\theta,\varphi)$.

Într-adevăr, avem:

$$\iint_{\Sigma}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n}-v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=\iiint_{\Omega}(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz=0.$$

Pe de altă parte, în cazul sferei, este evident că derivata după normală coincide cu derivata parţială în raport cu r, deci că

$$\frac{\partial u}{\partial n}=n\,r^{n-1}\,Y_n(\theta,\varphi)\ \text{şi}\ \frac{\partial v}{\partial n}=m\,r^{m-1}\,Y_m(\theta,\varphi).$$

Aşadar avem:

$$\iint_{\Sigma}\left(r^n\,Y_n(\theta,\varphi)\,m\,r^{m-1}\,Y_m(\theta,\varphi)-r^m\,Y_m(\theta,\varphi)\,n\,r^{n-1}\,Y_n(\theta,\varphi)\right)d\sigma=0$$

sau

$$(m-n)r^{m+n-1}\iint_{\Sigma} Y_n(\theta,\varphi)Y_m(\theta,\varphi)\,d\sigma = 0.$$

Cum $m-n \neq 0$, deducem că

$$\iint_{\Sigma} Y_n(\theta,\varphi)Y_m(\theta,\varphi)\,d\sigma = 0.$$

În continuare, vom arăta că funcţiile sferice particulare:

$$P_k(\cos\theta),\ \cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta),\ \sin k\varphi P_{kn}(\cos\theta),\ 0 \le k \le n$$

care intervin în componenţa funcţiilor sferice generale $Y_n(\theta,\varphi)$ sunt, la rândul lor, ortogonale. Afirmaţia rezultă imediat din egalitatea:

$$\iint_{\Sigma} \cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta)\cos m\varphi P_{mn}(\cos\theta)\,d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \cos m\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} P_{kn}(\cos\theta)P_{mn}(\cos\theta)\,d\theta$$

şi din faptul că sistemul de funcţii:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos kx,\ \sin kx,\ \ldots$$

este ortogonal pe $[0,\ 2\pi]$. Aşadar:

$$\int_0^{2\pi} \cos k\varphi \cos m\varphi\, d\varphi = 0, \text{ pentru } k \neq m$$

de unde deducem că

$$\iint_{\Sigma} \cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta)\cos m\varphi P_{mn}(\cos\theta)\,d\sigma = 0,\ k \neq m.$$

Pentru a calcula norma unei funcţii sferice particulare $\cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta)$ procedăm astfel:

$$\left\|\cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta)\right\|^2 = \iint_{\Sigma} \left(\cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta)\right)^2 d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 k\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} P_{kn}^2(\cos\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta =$$

$$= R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2k\varphi}{2} d\varphi \int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\, dt =$$

$$= \pi R^2 \cdot \int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\, dt \, .$$

Aşadar, problema se reduce la a calcula $\int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\, dt$.

Teorema 10.18.3.

$$\int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\, dt = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \qquad \textbf{(10.185)}$$

Demonstraţie. Cum

$P_{kn}(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dt^k} P_n(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{k}{2}} P_n^{(k)}(t)$, rezultă

$$\int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^k P_n^{(k)}(t) P_n^{(k)}(t)\, dt =$$

$$= \left(1-t^2\right)^k P_n^{(k)}(t) P_n^{(k-1)}(t) \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n^{(k-1)}(t) \frac{d}{dt}\left(\left(1-t^2\right)^k P_n^{(k)}(t)\right) dt =$$

$$= -\int_{-1}^{1} P_n^{(k-1)}(t) \frac{d}{dt}\left(\left(1-t^2\right)^k P_n^{(k)}(t)\right) dt$$

sau

$$\int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\, dt = -\int_{-1}^{1} P_n^{(k-1)}(t) \frac{d}{dt}\left(\left(1-t^2\right)^k P_n^{(k)}(t)\right) dt \, . \qquad \textbf{(10.186)}$$

Pe de altă parte, dacă derivăm de k ori, după formula lui Leibniz, identitatea:

$$\left(1-t^2\right)P_n''(t)-2tP_n'(t)+n(n+1)P_n(t)=0$$

obţinem:

$$\left(1-t^2\right)P_n^{(k+2)}(t)-2(k+1)\,t\,P_n^{(k+1)}(t)+\left[n(n+1)-k(k+1)\right]P_n^{(k)}(t)=0\,.$$

Amplificând cu $\left(1-t^2\right)^k$ vom avea:

$$\left(1-t^2\right)^{k+1}P_n^{(k+2)}(t)-2(k+1)\,t\left(1-t^2\right)^k P_n^{(k+1)}(t)=$$

$$=-\left[n(n+1)-k(k+1)\right]\left(1-t^2\right)^k P_n^{(k)}(t).$$

Relaţia de mai sus se mai scrie:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1-t^2\right)^{k+1}P_n^{(k+1)}(t)\right]=-\left[n(n+1)-k(k+1)\right]\left(1-t^2\right)^k P_n^{(k)}(t)\,.$$

Schimbând pe $k+1$ cu k obţinem:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1-t^2\right)^{k}P_n^{(k)}(t)\right]=-\left[n(n+1)-k(k-1)\right]\left(1-t^2\right)^{k-1}P_n^{(k-1)}(t)\,. \qquad \textbf{(10.187)}$$

Din (10.186) şi (10.187) deducem:

$$\int_{-1}^{1}P_{kn}^2(t)\,dt=\left[n(n+1)-k(k-1)\right]\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{k-1}P_n^{(k-1)}(t)P_n^{(k-1)}(t)\,dt=$$

$$=(n+k)(n-k+1)\int_{-1}^{1}\left[\left(1-t^2\right)^{\frac{k-1}{2}}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}P_n(t)\right]^2 dt=$$

$$=(n+k)(n-k+1)\int_{-1}^{1}P_{k-1,n}^2(t)\,dt.$$

Am obţinut astfel relaţia de recurenţă:

$$\int_{-1}^{1}P_{kn}^2(t)\,dt=(n+k)(n-k+1)\int_{-1}^{1}P_{k-1,n}^2(t)\,dt\,. \qquad \textbf{(10.188)}$$

Cum $P_{0n}(t)=P_n(t)$, rezultă:

$$\int_{-1}^{1} P_{1n}^2(t)\,dt = (n+1)n\int_{-1}^{1} P_n^2(t)\,dt.$$

Ţinând seama că norma polinoamelor Legendre este:

$$\left\| P_n^2 \right\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

obţinem:

$$\int_{-1}^{1} P_{1n}^2(t)\,dt = (n+1)n\,\frac{2}{2n+1}.$$

Mai departe,

$$\int_{-1}^{1} P_{2n}^2(t)\,dt = (n+2)(n-1)(n+1)n\,\frac{2}{2n+1} = (n+2)(n+1)n(n-1)\frac{2}{2n+1}.$$

În definitiv, avem:

$$\int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\,dt = \frac{(n+k)!}{n!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{2}{2n+1} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!}\cdot\frac{2}{2n+1}. \qquad \textbf{(10.189)}$$

În continuare să presupunem că o funcţie continuă $g:[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ se dezvoltă în serie după funcţiile sferice Y_n, $n\in\mathbb{N}$, adică:

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi) = a_0 + \left[a_1P_1(\cos\theta) + (a_{11}\cos\varphi + b_{11}\sin\varphi)P_{11}(\cos\theta)\right] +$$
$$+ \ldots + \left[a_nP_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n}\left(a_{kn}\cos k\varphi + b_{kn}\sin k\varphi\right)P_{kn}(\cos\theta)\right] + \ldots. \qquad \textbf{(10.190)}$$

Presupunem în plus că seria din dreapta este uniform convergentă, deci poate fi integrată termen cu termen. În aceste condiţii, folosind ortogonalitatea funcţiilor sferice, se pot determina coeficienţii a_0, a_{kn} şi b_{kn} astfel:

$$\iint_{\Sigma} g(\theta,\varphi) P_n(\cos\theta)\, d\sigma = a_n \iint_{\Sigma} P_n^2(\cos\theta)\, d\sigma =$$

$$= a_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_n^2(\cos\theta) R^2 \sin\theta\, d\theta = 2\pi R^2 a_n \int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\, dt = \frac{4\pi R^2}{2n+1} \cdot a_n .$$

Aşadar avem:

$$a_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} g(\theta,\varphi) P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi . \qquad \textbf{(10.191)}$$

Pentru a determina coeficienţii a_{kn} şi b_{kn}, înmulţim egalitatea (10.190) cu $\cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta)$ (respectiv cu $\sin k\varphi P_{kn}(\cos\theta)$) şi o integrăm termen cu termen . Ţinând seama de ortogonalitatea funcţiilor sferice rezultă:

$$\iint_{\Sigma} g(\theta,\varphi) \cos k\varphi P_k(\cos\theta)\, d\sigma = a_{kn} \iint_{\Sigma} \left(\cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta)\right)^2 d\sigma =$$

$$= a_{kn} \int_0^{2\pi} \cos^2 k\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} P_{kn}^2(\cos\theta) R^2 \sin\theta\, d\theta = a_{kn} \cdot \pi R^2 \int_{-1}^{1} P_{kn}^2(t)\, dt .$$

În sfârşit, din (10.189) deducem că:

$$a_{kn} = \frac{2n+1}{2\pi R^2} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} g(\theta,\varphi) \cos k\varphi P_{kn}(\cos\theta) R^2 \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi$$

sau

$$a_{kn} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \left(\int_0^{\pi} g(\theta,\varphi) P_{kn}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi . \qquad \textbf{(10.192)}$$

În mod analog:

$$b_{kn} = \frac{2n+1}{2\pi} \cdot \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{2\pi} \sin k\varphi \left(\int_0^{\pi} g(\theta,\varphi) P_{kn}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi . \qquad \textbf{(10.193)}$$

Acum suntem în măsură să rezolvăm problema Dirichlet pentru sferă. Conform Observaţiei 10.18.2 ecuaţia Laplace admite soluţii particulare de forma:

$$u_n(r,\theta,\varphi)=\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] Y_n(\theta,\varphi).$$

Datorită liniarităţii ecuaţiei Laplace, orice sumă finită de astfel de soluţii va fi în continuare soluţie. Vom căuta soluţia ecuaţiei Laplace de forma:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] Y_n(\theta,\varphi).$$

Pentru rezolvarea problemei Dirichlet interioare: determinarea unei funcţii armonice u în interiorul sferei, cu proprietatea că $u\big|_{\Sigma}=g$, vom alege:

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta,\varphi). \qquad \textbf{(10.194)}$$

Cum $0\le r<R$, deducem că seria din dreapta este uniform convergentă şi integrabilă termen cu termen. Din condiţia de limită deducem:

$$u(R,\theta,\varphi)=g(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi). \qquad \textbf{(10.195)}$$

Coeficienţii funcţiei sferice Y_n se determină în mod unic din formulele (10.191), (10.192) şi (10.193).

Exemplul 10.18.1. Să se determine o funcţie armonică în interiorul sferei de rază 1 dacă ştim că pe suprafaţa sferei ia valoarea:

$$g(\theta,\varphi)=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta.$$

Evident funcţia g se mai poate pune sub forma:

$$g(\theta,\varphi)=\left(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)\sin\theta.$$

Cum $Y_1(\theta,\varphi)=a_1\cos\theta+(a_{11}\cos\varphi+b_{11}\sin\varphi)\sin\theta$, deducem că

$$a_1=0,\ a_{11}=\frac{1}{2},\ b_{11}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aşadar, vom avea soluţia:

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{r}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)\sin\theta,\ r\in[0,\ 2),\ \theta\in[0,\ \pi],\ \varphi\in[0,\ 2\pi].$$

Pentru problema Dirichlet exterioară:

$\Delta u=0$ în exteriorul sferei

$u(P)=g(P)$, pentru $P\in\Sigma$

$$\lim_{\|P\|\to\infty} u(P)=0$$

vom căuta soluţia de forma

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\varphi),\ r>R$$

cu condiţia la limită

$$u(R,\theta,\varphi)=g(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi).$$

Exemplul 10.18.2. Să se determine o funcţie armonică în interiorul sferei de rază 2 ştiind ca pe suprafaţa sferei este egală cu:

$$g(\theta,\varphi)=\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta.$$

Deoarece $g(\theta,\varphi)=\left(\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi\right)\sin^2\theta$ şi

$$Y_2(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}a_{20}\left(3\cos^2\theta-1\right)+\left(a_{21}\cos\varphi+b_{21}\sin\varphi\right)3\sin\theta\cos\theta+$$

$$+\left(a_{22}\cos 2\varphi+b_{22}\sin 2\varphi\right)3\sin^2\theta$$

deducem că

$$a_{20}=a_{21}=b_{21}=0;\ 3a_{22}=\frac{1}{2}\ \text{şi}\ 3b_{22}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soluţia căutată va fi:

$$u(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{2}{r}\right)^2\left(\frac{1}{6}\cos 2\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi\right)3\sin^2\theta=$$

$$=\frac{4}{r^2}\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\theta,\ r>R.$$

C A P I T O L U L 11

ELEMENTE DE CALCUL VARIAŢIONAL

11.1. Introducere

Calculul variaţional studiază metodele generale de determinare a maximelor sau minimelor (numite şi extreme) pentru o clasă specială de funcţii, numite *funcţionale*, funcţii care au ca argument tot o funcţie. Spaţiile ale căror elemente sunt funcţii se numesc spaţii de funcţii. Funcţionalele sunt definite pe submulţimi ale unor spaţii de funcţii obişnuite. Funcţionalele joacă un rol important în probleme care îşi au originea în analiză, mecanică, geometrie, etc. Prin funcţională se înţelege o corespondenţă care asociază un număr real unei funcţii dintr-o anumită clasă.

Din punct de vedere istoric, contribuţii decisive la dezvoltarea calculului variaţional au adus Euler (1744), dar mai ales Lagrange (1760) care a dat metodele generale ale disciplinei şi le-a aplicat în mecanică.

Vom începe cu prezentarea unor probleme clasice ale calculului variaţional, în care întâlnim probleme de determinare maximului sau minimului unei funcţionale.

Curba de cea mai rapidă coborâre (problema brachistocronei)

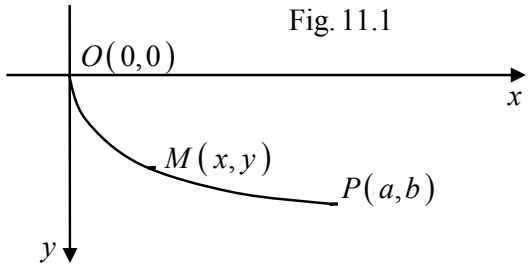


Fig. 11.1

Istoriceşte a fost prima problemă care a atras interesul general al matematicienilor. Problema a fost formulată de Johann Bernoulli în 1696. De rezolvarea acestei probleme s-au ocupat fraţii Johann şi Jacob Bernoulli, Newton, Leibniz, l'Hospital. Originea termenului *brachistocronă* se află în limba greacă (brakhistos = cel mai scurt, khronos = timp). Prin brachistocronă se înţelege traiectoria pe care un corp care se deplasează între două puncte date, sub acţiunea gravitaţiei, realizează cel mai scurt timp. Aşadar, dintre toate curbele aflate într-un plan vertical şi trecând prin punctele fixe $O(0,0)$ şi $P(a,b)$, cu P mai jos decât O, să se determine acea curbă

pentru care timpul de coborâre din O în P a unui punct material greu fără frecare, să fie minim. Pentru rezolvare, vom orienta axa Oy pe verticală în jos ca în Fig. 11.1.

Fie $y = y(x),\ x \in [0,\ a],\ y(0) = 0,\ y(a) = b,\ a,\ b > 0$ curba căutată. Fie v viteza de deplasare a punctului material, deci $v = \sqrt{2\,g\,y} = \dfrac{ds}{dt}$, unde ds este lungimea arcului OM.

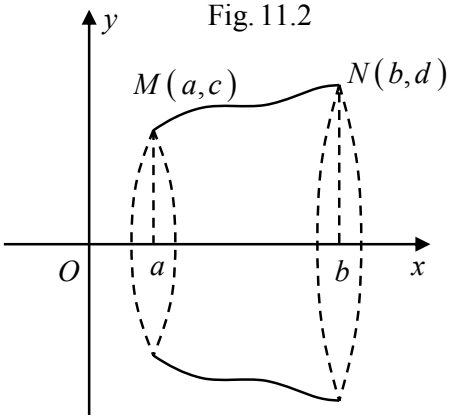
Atunci $dt = \dfrac{ds}{\sqrt{2\,g\,y}}$.

Prin urmare, dacă T este timpul necesar pentru ca punctul material să ajungă în punctul P, vom avea

$$T = \int\limits_{\overset{\frown}{OP}} \frac{ds}{\sqrt{2g\,y}} = \int\limits_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2\,g\,y(x)}}\ dx\,.$$

Problema suprafeţei de rotaţie de arie minimă constă în determinarea unei curbe $y = y(x),\ x \in [0,\ a],\ y(a) = c,\ y(b) = d$, cu proprietatea că aria suprafeţei de rotaţie a graficului în jurul axei Ox este minimă (Fig. 11.2).

Fig. 11.2



După cum se cunoaşte, expresia acestei arii este

$$A = 2\pi \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx\,.$$

Echilibrul unei membrane deformate

O membrană elastică în stare de repaus are forma domeniului $D \subset xOy$ (Fig. 11.3). Fie C frontiera lui D. Deformăm conturul C al membranei în direcţia perpendiculară pe planul xOy şi notăm cu $u(x, y)$ deplasarea (deformaţia) unui punct oarecare $M(x, y) \in D$ (deformarea conturului atrage după sine şi deplasarea punctelor din interiorul membranei).

Se cere să se determine poziţia de echilibru a membranei când cunoaştem deformarea conturului ei.

Aria membranei deformate va fi

$$\iint_D \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\ dx\,dy\,.$$

Dacă deplasările sunt mici, aproximăm această arie cu

$$\iint_D \left(1+\frac{1}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right)\right) dx\,dy\,.$$

Rezultă că variaţia ariei suprafeţei deformate este

$$\frac{1}{2}\iint_D \left(u_x^2+u_y^2\right)\ dx\,dy\,.$$

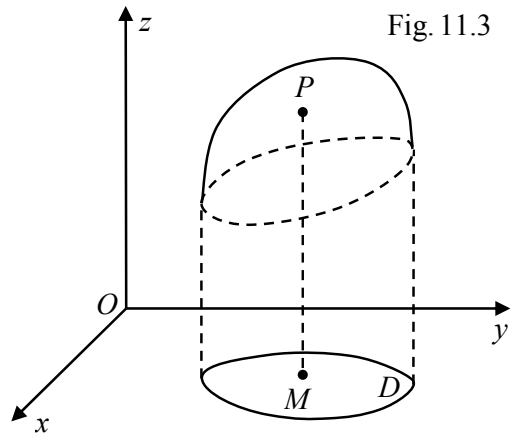


Fig. 11.3

Se admite că energia potenţială a membranei deformate este proporţională cu creşterea ariei sale. Prin urmare, energia potenţială de deformaţie E este

$$E=\frac{\mu}{2}\iint_D \left(u_x^2+u_y^2\right)\ dx\,dy \qquad \textbf{(11.1)}$$

unde μ este o constantă care exprimă calităţile elastice ale membranei. Presupunem că se cunosc deplasările punctelor de pe contur, deci că

$$u\big|_C=\varphi(x,y) \qquad \textbf{(11.2)}$$

φ fiind o funcţie cunoscută.

Poziţia de echilibru se realizează când energia potenţială este minimă. Se obţine astfel următoarea problemă variaţională. Dintre toate funcţiile $u\in C^1(D)$ care satisfac condiţia (11.2), să se determine acea funcţie pentru care integrala (11.1) devine minimă.

Problema izoperimetrică

Problema este cunoscută ca *problema Didonei*, regină celebră din antichitate, rămasă în istorie ca fondatoare a Cartaginei. Se spune că, cerând localnicilor teren pentru viitoarea cetate, aceştia i-au oferit, în bătaie de joc, o suprafaţă de teren cât poate cuprinde cu o piele de bou. Aceasta a tăiat pielea de bou în fâşii foarte subţiri, le-a pus cap la cap şi a înconjurat cu ele un deal de pe litoralul Mediteranei. Perimetrul înconjurat a avut forma unui cerc.

Să formulăm acum problema. Presupunem că se dă un fir de lungime dată L, ale cărui capete sunt fixate în punctele $A(a,\,0)$ şi $B(b,\,0)$ (Fig. 11.4).

Problema constă în maximizarea integralei

$$S(y)=\int_a^b y(x)\,dx\,.$$

Condiţia că lungimea firului este dată şi fixă se reduce la cerinţa suplimentară ca funcţia y să satisfacă relaţia integrală

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

cu condiţiile la capete: $y(a)=0$, $y(b)=0$.

11.2. Extreme ale funcţionalelor. Variaţia întâi a unei funcţionale. Teorema lui Fermat

În studiul unei funcţionale şi ale extremelor acesteia trebuie precizat domeniul de definiţie al funcţionalei, acesta constând din clasa funcţiilor pentru care valorile funcţionalei sunt definite. Spaţiile de funcţii pe care sunt definite funcţionalele sunt cel mai adesea infinit dimensionale. Pentru a introduce conceptul de "apropiere" dintre elementele unui spaţiu de funcţii, este convenabil să introducem conceptul de "normă" a unei funcţii. În mod obişnuit este vorba de spaţii vectoriale reale pe care s-a introdus noţiunea de *normă*. Reamintim:

Definiţia 11.2.1. Fie X un spaţiu vectorial real. Se numeşte *normă* pe X o funcţie $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}_+$, cu proprietăţile:

1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0_X$;

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|,\ (\forall)\ \lambda\in\mathbb{R},\ (\forall)\ x\in X$;

3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|,\ (\forall)\ x,\ y\in X$ (*inegalitatea triunghiului*).

Spaţiul vectorial X înzestrat cu o normă se numeşte *spaţiu vectorial normat*.

Într-un spaţiu normat se poate vorbi de distanţa dintre două elemente, definind $d(x,y)=\|x-y\|$.

Prezentăm acum spaţiile de funcţii uzuale pe care le vom folosi în continuare.

Exemplul 11.2.1. Fie $a,\ b\in\mathbb{R},\ a<b,\ I=[a,\ b]$ un interval şi $n\in\mathbb{N}^*$. Spaţiul vectorial real $C^n(I;\ \mathbb{R})$ al funcţiilor $y: I\to\mathbb{R}$ de clasă C^n, înzestrat cu norma:

$$\|y\| = \max_{x\in[a,b]}\left|y(x)\right| + \max_{x\in[a,b]}\left|y'(x)\right| + \ldots + \max_{x\in[a,b]}\left|y^{(n)}(x)\right| \qquad \textbf{(11.3)}$$

este un spaţiu vectorial normat. De asemenea, spaţiul vectorial real $C^1\left(I;\,\mathbb{R}^2\right)$ al funcţiilor $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(x) = \left(y(x),\, z(x)\right)$, unde $y,\, z \in C^1(I;\,\mathbb{R})$, înzestrat cu norma:

$$\|\gamma\| = \max_{x\in[a,b]}\sqrt{y^2(x)+z^2(x)} + \max_{x\in[a,b]}\sqrt{y'^2(x)+z'^2(x)} \qquad \textbf{(11.4)}$$

Exemplul 11.2.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit de o curbă închisă, netedă pe porţiuni. Spaţiul $C^1\left(\bar{D};\,\mathbb{R}\right)$ este spaţiu vectorial normat în raport cu norma:

$$\|z\| = \max_{(x,y)\in\bar{D}}\left|z(x,y)\right| + \max_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right| + \max_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right|, \qquad \textbf{(11.5)}$$

$z \in C^1\left(\bar{D};\,\mathbb{R}\right)$.

Definiţia 11.2.2. Fie X un spaţiu vectorial normat, $y_0 \in X$ şi $r > 0$. Se numeşte *bila deschisă cu centrul în* y_0 *şi de rază r* mulţimea $B(y_0, r) = \left\{y \in X;\, \|y - y_0\| < r\right\}$. Mulţimea $A \subset X$ se numeşte *deschisă* dacă pentru orice $y \in A$ există $r > 0$ astfel încât $B(y,r) \subset A$.

Definiţia 11.2.3. Fie $(y_n)_n \subset X$. Şirul $(y_n)_n$ *converge* la $y \in X$ şi se notează $y_n \to y$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n - y\| = 0$. Şirul $(y_n)_n$ se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă şi numai dacă $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|y_m - y_n\| = 0$. Un spaţiu vectorial normat, în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte *spaţiu complet* sau *spaţiu Banach*.

Observaţia 11.2.1. Reamintim că pe spaţiul $C\left([a,\,b];\,\mathbb{R}\right)$, al funcţiilor continue pe $[a,\,b]$, se poate defini norma Cebâşev:

$$\|g\|_C = \max\left\{|g(x)|;\, x \in [a,\,b]\right\},\; g \in C\left([a,\,b];\,\mathbb{R}\right).$$

Mai mult, spaţiul $C\left([a,\,b];\,\mathbb{R}\right)$ înzestrat cu norma Cebâşev este un spaţiu Banach.

Rezultatul se extinde şi pentru spaţiul funcţiilor continue pe o mulţime compactă $K \subset \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Cu aceste precizări, norma (11.3) se mai scrie:

$$\|y\| = \|y\|_C + \|y'\|_C + \ldots + \left\|y^{(n)}\right\|_C .$$

De asemenea, normele (11.4) şi (11.5) devin

$$\|\gamma\| = \|\gamma\|_C + \|\gamma'\|_C$$

respectiv

$$\|z\| = \|z\|_C + \left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_C + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_C .$$

Se poate arăta că spaţiile vectoriale normate din Exemplele 11.2.1 şi 11.2.2 sunt spaţii Banach.

Fie X un spaţiu vectorial normat. Prin *funcţională* pe X înţelegem orice funcţie $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}$. Funcţionala $\mathcal{F}$ se numeşte *liniară* dacă

$$\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{F}(x) + \beta \mathcal{F}(y), \text{ pentru orice } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ şi } x,\ y \in X . \qquad \textbf{(11.6)}$$

Alegerea spaţiului de funcţii pe care este definită o funcţională este determinată de natura problemei studiate. Acesta poate fi, de exemplu, unul din spaţiile de funcţii din Exemplele 11.2.1 şi 11.2.2. O funcţională face ca unei funcţii din aceste spaţii să îi corespundă un anumit număr real.

Exemplul 11.2.3. Funcţionala $H(y) = \int_0^{\pi} y(x)\, dx$ este definită pe mulţimea funcţiilor integrabile pe intervalul $[0,\ \pi]$. Funcţionala H asociază fiecărei funcţii $y : [0,\ \pi] \to \mathbb{R}$ un număr real. Astfel dacă $y = \sin x$, $x \in [0,\ \pi]$, obţinem $H(y) = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$. Pentru $y = x^2$, $x \in [0,\ \pi]$, avem $H(y) = \frac{\pi^2}{3}$; dacă $y = \cos x$, $x \in [0,\ \pi]$, $H(y) = 0$, etc.

Exemplul 11.2.4. Funcţionala $\mathcal{F} \in C^1([0,\ 1];\ \mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 \left[\left(x^2 + 1\right) y(x) + y'(x) \sin x\right] dx$$

este o funcţională liniară, deoarece satisface (11.6).

Problemele clasice ale calculului variaţional prezentate secţiunea 11.1 ne sugerează să considerăm următoarele funcţionale.

Exemplul 11.2.5. Fie $X = C^1([0, a]; \mathbb{R})$. În cazul problemei brachistocronei, definim pe X *funcţionala-timp* $\mathcal{T} : X \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{T}(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\, dx, \text{ pentru orice } y \in X.$$

De asemenea, în cazul problemei suprafeţei de rotaţie de arie minimă, pe $X = C^1([a, b]; \mathbb{R})$ putem defini *funcţionala-arie* $\mathcal{A} : X \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(y) = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\, dx, \text{ pentru orice } y \in X.$$

Mai general, pe $X = C^1([a, b]; \mathbb{R})$ putem considera funcţionale de tipul

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

unde F este o funcţie continuă pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, iar y este o funcţie oarecare de clasă C^1 pe $[a, b]$, cu proprietatea că $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$, pentru orice $x \in [a, b]$.

Pentru un y fixat, dacă, în plus, F este de clasă C^1, funcţionala

$$\mathcal{G}(h) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x), y'(x))\, h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, h'(x)\right] dx$$

este o funcţională liniară.

Exemplul 11.2.6. Problema echilibrului unei membrane deformate care ocupă domeniul mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$, ne conduce la considerarea *funcţionalei-energie*

$$\mathcal{E}(u) = \iint_D \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy,$$

cunoscută sub numele de *integrala energiei* sau *integrala Dirichlet* a funcţiei $u : D \to \mathbb{R}$.

Mai general, pe $X = C^1(D; \mathbb{R})$ putem considera funcţionale de tipul

$$\mathcal{F}(z)=\iint_D F\left(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x}(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)dx\,dy,$$

unde F este o funcţie continuă de cinci variabile reale, definită pe mulţimea

$$\left\{\left(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x}(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)\in\mathbb{R}^5;\,(x,y)\in D\right\},$$

z fiind o funcţie de clasă C^1 pe domeniul D.

Am vorbit de funcţionale definite pe spaţii vectoriale. Totuşi, în multe probleme variaţionale, întâlnim funcţionale definite pe submulţimi ale unor spaţii de funcţii, submulţimi care nu sunt spaţii vectoriale. Funcţiile din aceste submulţimi se numesc *funcţii admisibile*. De exemplu, în problema brachistocronei mulţimea funcţiilor admisibile este formată din funcţiile de clasă C^1 care trec prin două punte fixe. Este clar că suma a două astfel de funcţii nu trece prin cele două puncte fixe.

Prin analogie cu noţiunea de punct de extrem pentru funcţii de una sau mai multe variabile reale, putem introduce noţiunea de punct de extrem pentru o funcţională.

Definiţia 11.2.4. Fie X un spaţiu vectorial normat, $A\subset X$ şi $\mathcal{F}:A\to\mathbb{R}$ o funcţională. Un element $y_0\in A$ se numeşte *punct de minim local* (respectiv, *maxim local*) pentru $\mathcal{F}$, dacă există $r>0$ astfel încât pentru orice $y\in A$ care satisface $\|y-y_0\|<r$, rezultă $\mathcal{F}(y)\geq\mathcal{F}(y_0)$ (respectiv, $\mathcal{F}(y)\leq\mathcal{F}(y_0)$). Un punct de minim local sau de maxim local se numeşte *punct de extrem local*. Dacă inegalităţile de mai sus au loc pentru orice $y\in A$, atunci se poate vorbi de *punct de minim global* (respectiv, *maxim global*) sau *extrem global*.

Cum este cunoscut, în determinarea punctelor de extrem ale unei funcţii de una sau mai multe variabile reale un rol important îl joacă diferenţiala întâi a acestei funcţii. În continuare, vom defini noţiunea de *variaţie* a unei funcţionale, noţiune foarte importantă în determinarea punctelor de extrem ale funcţionalelor neliniare. Rolul său este similar celui al diferenţialei unei funcţii neliniare. Diferenţiala unei funcţii neliniare este partea principală a creşterii sale. Această parte principală este liniară. Înlocuirea creşterii cu diferenţiala este echivalentă cu liniarizarea funcţiei pentru variaţii mici ale argumentului. Analog, variaţia unei funcţionale neliniare este egală cu partea principală a creşterii sale şi este o funcţională liniară. Când se înlocuieşte creşterea unei funcţionale (obţinută prin trecerea de la valoarea

funcţionalei într-o funcţie la valoarea funcţionalei într-o altă funcţie apropiată de aceasta) prin variaţia funcţionalei, se liniarizează, de fapt, funcţionala.

Fie $\mathcal{F}: X \to \mathbb{R}$ o funcţională. Dacă $y \in X$ este o funcţie dată, prin trecerea la o altă funcţie $y+h$ se obţine creşterea $\Delta\mathcal{F}(h) = \mathcal{F}(y+h) - \mathcal{F}(y)$. Funcţia h este *variaţia* argumentului funcţionalei, adică este o funcţie a cărei deviaţie faţă de zero este mică.

Să considerăm funcţia reală $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \mathcal{F}(y+th)$. Atunci, dacă φ este regulată, folosind formula lui Taylor, $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \ldots$, deci

$$\Delta\mathcal{F}(h) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \ldots .$$

Suntem astfel conduşi la noţiunea de variaţie a unei funcţionale.

Fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulţime deschisă, $\mathcal{F}: A \to \mathbb{R}$ o funcţională, $y_0 \in A$ şi $h \in X$, $h \neq 0_X$, un element fixat. Mulţimea A fiind deschisă, există $r > 0$ astfel încât $B(y_0, r) \subset A$. Dacă $t \in \mathbb{R}$, atunci elementul $y = y_0 + th \in B(y_0, r)$ dacă şi numai dacă $\|y - y_0\| < r$, deci dacă şi numai dacă $|t| < \dfrac{r}{\|h\|}$. În consecinţă, putem defini funcţia reală

$$\varphi_h : \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R},\ \varphi_h(t) = \mathcal{F}(y_0 + th). \qquad \textbf{(11.7)}$$

Definiţia 11.2.5. Fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulţime deschisă, $\mathcal{F}: A \to \mathbb{R}$ şi $y_0 \in A$. Se spune că $\mathcal{F}$ *admite variaţia întâi în* y_0 *pe direcţia unui vector nenul* $h \in X$, dacă funcţia φ_h dată de (11.7) este derivabilă în punctul $t = 0$. În acest caz, $\varphi_h'(0)$ se numeşte *variaţia întâi a lui* $\mathcal{F}$ *în* y_0 *pe direcţia lui* h şi se notează cu $\delta_h\mathcal{F}(y_0)$.

Vectorul h se numeşte *variaţie* a argumentului funcţionalei $\mathcal{F}$. Un punct $y_0 \in A$ cu proprietatea că $\delta_h\mathcal{F}(y_0) = 0$, pentru orice $h \in X$, se numeşte punct *critic* (*staţionar*) al funcţionalei $\mathcal{F}$.

Prin urmare

$$\delta_h\mathcal{F}(y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_h(t) - \varphi_h(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}(y_0 + th) - \mathcal{F}(y_0)}{t}. \qquad \textbf{(11.8)}$$

Dacă $h = 0$, atunci punem $\delta_h\mathcal{F}(y_0) = 0$.

Observaţia 11.2.2. În particular, fie $X=\mathbb{R}^n$, $h\in\mathbb{R}^n$, $h\neq 0$ şi $s=\dfrac{h}{\|h\|}$ versorul lui h. Atunci

$$\delta_h\mathcal{F}(y_0)=\frac{d\mathcal{F}}{ds}(y_0)$$

unde $\dfrac{d\mathcal{F}}{ds}(y_0)$ este derivata lui $\mathcal{F}$ după direcţia lui s în y_0. Aşadar, noţiunea de variaţie întâi este o extindere a conceptului de derivată după o direcţie.

Vom utiliza acum noţiunea de variaţie a unei funcţionale pentru a stabili o condiţie necesară pentru ca o funcţională să aibă un punct de extrem.

Teorema 11.2.1. (Teorema lui Fermat)

Fie X un spaţiu vectorial normat, $A\subset X$ o mulţime deschisă şi $\mathcal{F}:A\to\mathbb{R}$ o funcţională. Dacă $y_0\in A$ este un punct de extrem local pentru $\mathcal{F}$ şi dacă $\mathcal{F}$ admite variaţia întâi în y_0 pe orice direcţie, atunci y_0 este punct critic al lui $\mathcal{F}$, adică

$$\delta_h\mathcal{F}(y_0)=0,\ (\forall)\ h\in X. \qquad \textbf{(11.9)}$$

Demonstraţie. Egalitatea (11.9) este evidentă pentru $h=0_X$. Să presupunem acum că $h\neq 0_X$ şi că y_0 este punct de minim local, în cazul în care y_0 este punct de maxim local raţionamentul fiind similar. Conform Definiţiei 11.2.4, există $r>0$ astfel încât pentru orice $y\in A\cap B(y_0,r)$ are loc $\mathcal{F}(y)\geq\mathcal{F}(y_0)$. Mulţimea A fiind deschisă, putem alege $r>0$ suficient de mic astfel încât $B(y_0,r)\subset A$. Aşadar, pentru orice $y\in B(y_0,r)$ avem $\mathcal{F}(y)\geq$ $\geq\mathcal{F}(y_0)$. Deoarece pentru $|t|<\dfrac{r}{\|h\|}$, $y=y_0+t\,h\in B(y_0,r)$, atunci rezultă că pentru orice $t\in\left(-\dfrac{r}{\|h\|},\dfrac{r}{\|h\|}\right)$ are loc inegalitatea $\mathcal{F}(y_0+t\,h)\geq\mathcal{F}(y_0)$ care, ţinând seama de (11.7), se mai poate scrie sub forma $\varphi_h(t)\geq\varphi_h(0)$, pentru orice $t\in\left(-\dfrac{r}{\|h\|},\dfrac{r}{\|h\|}\right)$. Conform teoremei clasice a lui Fermat pentru funcţii de o variabilă reală, rezultă că $\varphi_h'(0)=0$ sau, echivalent, $\delta_h\mathcal{F}(y_0)=0$.

Nu orice punct critic al unei funcţionale este punct de extrem. În cazul unei funcţii de mai multe variabile reale condiţii suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem erau legate de diferenţiala a doua a acestei funcţii. Pentru funcţionale locul diferenţialei de ordinul al doilea este luat de conceptul de *variaţia a doua* a unei funcţionale. Problema condiţiilor suficiente de extrem pentru funcţionale depăşeşte cadrul acestui curs şi nu o vom aborda.

În cele ce urmează, vom aborda problema determinării punctelor critice (staţionare) pentru funcţionale concrete.

11.3. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$

Fie $D\subset\mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă, $F:D\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi $I=[a,\,b]\subset\mathbb{R}$.

De asemenea, fie

$\mathcal{D}=\left\{y\in C^1(I;\,\mathbb{R});\,\left(x,y(x),y'(x)\right)\in D,\ (\forall)\ x\in I\right\}$.

Considerăm funcţionala $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx,\ y\in\mathcal{D}. \tag{11.10}$$

Această funcţională depinde de F.

Lema 11.3.1. Mulţimea $\mathcal{D}$ este deschisă în spaţiul Banach $C^1(I;\,\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Fie $y_0\in\mathcal{D}$ oarecare. Cum funcţia vectorială

$x\to\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right):I\to D\subset\mathbb{R}^3$

este continuă, rezultă că mulţimea $K=\left\{\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right);\,x\in I\right\}\subset D$ este compactă. Fie $r=d\left(x,\complement D\right)=\inf\left\{d(M,N);\,M\in K,\,N\in\complement D\right\}$. Deoarece $K\cap\complement D=\varnothing$, K este compactă şi $\complement D$ este închisă, rezultă că $r>0$ (vezi [8], Teorema 5.2.1, pag. 100). Vom arăta că $B\left(y_0,\frac{r}{2}\right)\subset\mathcal{D}$, de unde va rezulta că $\mathcal{D}$ este o mulţime deschisă. Fie $y\in B\left(y_0,\frac{r}{2}\right)$. Atunci

$$\|y-y_0\|=\sup_{x\in I}\left|y(x)-y_0(x)\right|+\sup_{x\in I}\left|y'(x)-y_0'(x)\right|<\frac{r}{2}.$$

În particular, avem

$$\left|y(x)-y_0(x)\right|+\left|y'(x)-y_0'(x)\right|<\frac{r}{2},\ (\forall)\ x\in I. \qquad \textbf{(11.11)}$$

Fie $x\in I$ oarecare fixat, $M\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)\in K$ şi $P\left(x,y(x),y'(x)\right)$. Avem

$$d(P,M)=\sqrt{\left(y(x)-y_0(x)\right)^2+\left(y'(x)-y_0'(x)\right)^2}\le\left|y(x)-y_0(x)\right|+\left|y'(x)-y_0'(x)\right|<\frac{r}{2}.$$

Cum $d(P,K)\le d(P,M)$, rezultă că $d(P,K)<\frac{r}{2}$. Din această ultimă inegalitate deducem că $P\in D$, pentru că, în caz contrar, $P\in\complement D$ şi $d(P,K)\ge d(\complement D,K)=r$, ceea ce este absurd.

În definitiv, am arătat că dacă $y\in B\left(y_0,\frac{r}{2}\right)$, atunci $\left(x,y(x),y'(x)\right)\in D$, $(\forall)\ x\in I$, deci $y\in\mathcal{D}$. Cu aceasta, lema este demonstrată.

Ne punem problema determinării funcţiilor din $\mathcal{D}$ care realizează un extrem al funcţionalei (11.10) pe această mulţime. Conform Teoremei lui Fermat, dacă $y_0\in\mathcal{D}$ realizează un extrem al funcţionalei (11.10) pe $\mathcal{D}$, atunci, în mod necesar

$$\delta_h\mathcal{F}(y_0)=0,\ (\forall)\ h\in C^1(I;\mathbb{R}).$$

În practică se pune problema determinării punctelor de extrem ale funcţionalei (11.10) *cu capete fixe*. În acest caz, fie $c,\ d\in\mathbb{R}$ numere date şi

$$\mathcal{A}=\left\{y\in\mathcal{D};\ y(a)=c,\ y(b)=d\right\},$$

cunoscută sub numele de *mulţimea funcţiilor admisibile* ale problemei. Cum am menţionat mai sus, această mulţime nu este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{D}$ (deoarece suma a două funcţii din $\mathcal{A}$ nu este în $\mathcal{A}$). Este uşor de constatat că, dacă se cunoaşte o funcţie $y_0\in\mathcal{A}$, atunci orice altă funcţie $y\in\mathcal{A}$ este de forma $y=y_0+h$, unde $h(a)=h(b)=0$. Prin urmare, dacă $y_0\in\mathcal{A}$ realizează un extrem al funcţionalei (11.10) pe mulţimea funcţiilor admisibile, atunci, în mod necesar

$$\delta_h\mathcal{F}(y_0)=0,\ (\forall)\ h\in C^1(I;\mathbb{R}),\ h(a)=h(b)=0.$$

Pentru rezolvarea problemelor de extrem pentru funcţionala (11.10) este util următorul rezultat.

Lema 11.3.2. (Lema fundamentală a calculului variaţional) (Lagrange)

Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice funcţie $h:[a, b]\to\mathbb{R}$, de clasă C^1 pe $[a, b]$, cu $h(a)=h(b)=0$, satisface condiţia

$$\int_a^b f(x)\,h(x)\,dx=0. \qquad \textbf{(11.12)}$$

Atunci $f(x)=0$, pentru orice $x\in[a, b]$.

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă, este suficient să arătăm că $f(x)=0$, pentru orice $x\in(a, b)$. Presupunem, prin absurd, că f nu este identic nulă pe (a, b), deci există $c\in(a, b)$ astfel încât $f(c)\neq 0$. Fără micşorarea generalităţii, putem presupune că $f(c)>0$. Funcţia f fiind continuă în punctul c, pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ suficient de mic, astfel încât $J=[c-\delta, c+\delta]\subset(a, b)$ şi pentru orice $x\in J$, avem $|f(x)-f(c)|\le\varepsilon$. Altfel spus, pentru orice $x\in J$ au loc inegalităţile $f(c)-\varepsilon\le f(x)\le f(c)+\varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon=\frac{1}{2}f(c)$ rezultă că există un interval corespunzător $J=[c-\delta, c+\delta]$ astfel încât pentru orice $x\in J$ avem $f(x)\ge\frac{1}{2}f(c)$. Fie funcţia

$$h(x)=\begin{cases}(x-c+\delta)^2(x-c-\delta)^2, & \text{dacă } x\in J\\ 0, & \text{dacă } x\notin J\end{cases}.$$

Se verifică uşor că funcţia h satisface condiţiile din enunţul lemei. În plus, folosind teorema de medie, rezultă că

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx=\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)h(x)\,dx\ \ge\frac{1}{2}f(c)\int_{c-\delta}^{c+\delta} h(x)\,dx=f(c)\,h(\xi)\,\delta>0,$$

unde $\xi\in(c-\delta, c+\delta)$, ceea ce contrazice (11.12).

Observaţia 11.3.1. Lema lui Lagrange rămâne valabilă dacă funcţia h din enunţul lemei este o funcţie de clasă C^k, $k\ge 1$, pe $[a, b]$, care se anulează în a şi b împreună cu derivatele sale până la ordinul $k-1$ inclusiv. Este suficient să luăm

$$h(x)=(x-c+\delta)^{k+1}(x-c-\delta)^{k+1},\ \text{dacă } x\in J.$$

Lema 11.3.3. (Du-Bois-Raymond)

Fie $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice funcţie $h:[a, b]\to\mathbb{R}$, de clasă C^1 pe $[a, b]$, cu $h(a)=h(b)=0$, satisface condiţia

$$\int_a^b f(x)h'(x)\,dx=0. \qquad \textbf{(11.13)}$$

Atunci funcţia f este constantă pe intervalul $[a, b]$.

Demonstraţie. Fie

$$h:[a, b]\to\mathbb{R},\ h(x)=\int_a^x \left(f(t)-c\right)dt$$

unde c este o constantă care se determină din condiţia $h(b)=0$, deci

$$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Este clar că funcţia h astfel construită este de clasă C^1 pe $[a, b]$, satisface condiţiile $h(a)=h(b)=0$ şi $h'(x)=f(x)-c$. Atunci

$$\int_a^b \left(f(x)-c\right)^2 dx=\int_a^b \left(f(x)-c\right)h'(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b f(x)h'(x)\,dx-c\int_a^b h'(x)\,dx=0-c\left[h(b)-h(a)\right]=0.$$

Integrantul fiind pozitiv şi funcţia f continuă, rezultă că $f(x)=c$, $(\forall)\ x\in[a, b]$.

Corolarul 11.3.1. Dacă $P, Q:[a, b]\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue care satisfac

$$\int_a^b \left[P(x)h(x)+Q(x)h'(x)\right]dx=0$$

pentru orice funcţie h de clasă C^1 pe $[a, b]$, cu $h(a)=h(b)=0$, atunci funcţia Q este derivabilă şi $Q'(x)=P(x)$, pentru orice $x\in[a, b]$.

Demonstraţie. Fie funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x P(t)\,dt$. Această funcţie este derivabilă şi $f'(x)=P(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b]$. Conform ipotezei, pentru orice funcţie h de clasă C^1 pe $[a,b]$, cu $h(a)=h(b)=0$, avem

$$\int_a^b \left[f'(x)h(x)+Q(x)h'(x)\right]dx=0$$

de unde, integrând prin părţi, obţinem

$$\int_a^b Q(x)h'(x)\,dx=-\int_a^b f'(x)h(x)\,dx=\int_a^b f(x)h'(x)\,dx.$$

În consecinţă,

$$\int_a^b \left[Q(x)-f(x)\right]h'(x)\,dx=0.$$

Conform Lemei 11.3.3, rezultă că funcţia $Q-f$ este constantă pe $[a,b]$, deci $Q'(x)=f'(x)=P(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b]$.

Teorema 11.3.1. (Teorema lui Euler)

Fie $D\subset\mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă, $F:D\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1, $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ şi

$$\mathcal{D}=\left\{y\in C^1(I;\mathbb{R});\ \left(x,y(x),y'(x)\right)\in D,\ (\forall)\ x\in I\right\}.$$

Fie, de asemenea, funcţionala $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$, $(\forall)\ y\in\mathcal{D}$.

Dacă funcţia $y_0\in\mathcal{A}=\left\{y\in\mathcal{D};\ y(a)=c,\ y(b)=d\right\}$ realizează un extrem al funcţionalei $\mathcal{F}$ pe mulţimea funcţiilor admisibile $\mathcal{A}$, atunci funcţia $x\mapsto\frac{\partial F}{\partial y'}\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)$ este de clasă C^1 pe $[a,b]$ şi funcţia y_0 verifică ecuaţia diferenţială:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right). \qquad \textbf{(11.14)}$$

Demonstraţie. Fie h o funcţie de clasă C^1 pe $[a, b]$, care satisface condiţiile la limită $h(a)=h(b)=0$ şi funcţia $\varphi_h:\left(-\frac{r}{\|h\|},\frac{r}{\|h\|}\right)\to\mathbb{R}$, $\varphi_h(t)=\mathcal{F}(y_0+th)$. Variaţia întâi a funcţionalei $\mathcal{F}$ este $\delta_h\mathcal{F}(y_0)=\varphi_h'(0)$, deci

$$\delta_h\mathcal{F}(y_0)=\frac{d}{dt}\left(\int_a^b F\left(x,y_0(x)+th(x),y_0'(x)+th'(x)\right)dx\right)\Bigg|_{t=0}=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{d}{dt}\left(F\left(x,y_0(x)+th(x),y_0'(x)+th'(x)\right)\right)\Bigg|_{t=0}\right]dx=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)\cdot h(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)\cdot h'(x)\right]dx.$$

Conform Teoremei lui Fermat, $\delta_h\mathcal{F}(y_0)=0$, pentru orice funcţie h de clasă C^1 pe $[a, b]$, care satisface $h(a)=h(b)=0$, deci

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)\cdot h(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)\cdot h'(x)\right]dx=0.$$

Concluzia teoremei rezultă din Corolarul 11.3.1.

Aşadar, Teorema lui Euler ne dă o condiţie necesară de extrem, cu care problema poate fi complet rezolvată în multe cazuri.

Ecuaţia diferenţială (11.14) se numeşte *ecuaţia lui Euler-Lagrange* asociată funcţionalei $\mathcal{F}$. Curbele integrale ale ecuaţiei Euler-Lagrange se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale*. Ele sunt susceptibile de a fi puncte de minim pentru funcţionala $\mathcal{F}$.

Observaţia 11.3.2. Dacă funcţia $F\in C^2(D)$, derivând în raport cu x termenul drept al ecuaţiei (11.14), aceasta devine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Rezultă că, dacă $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ nu este identic nulă, atunci ecuaţia diferenţială (11.14) este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, deci soluţia sa generală depinde de două constante arbitrare.

Aceste constante se determină folosind condiţia suplimentară a problemei: curba căutată trebuie să treacă prin două puncte date.

Exemplul 11.3.1. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(y)=\int_1^2\left(x^2y'^2+12y^2\right)dx$$

care satisfac condiţiile la limită $y(1)=1$, $y(2)=8$.

În acest caz $F(x,y,y')=x^2y'^2+12y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}=24y$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=2x^2y'$.

În consecinţă, ecuaţia Euler-Lagrange va fi

$24y-\frac{d}{dx}\left(2x^2y'\right)=0$ sau $24y-4xy'-2x^2y''=0$.

Se ajunge astfel la ecuaţia diferenţială de tip Euler

$x^2y''+2xy'-12y=0$.

Facem schimbarea de variabilă $x=e^t$ şi ţinem seama că

$y'=e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $y''=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$.

Atunci, ecuaţia diferenţială Euler se transformă în ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-12y=0$$

care are soluţia $y(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-4t}$. Prin urmare soluţia ecuaţiei diferenţiale Euler este:

$$y(x)=C_1x^3+\frac{C_2}{x^4}.$$

Din condiţiile la limită obţinem $C_1=1$, $C_2=0$. Aşadar, extremala căutată este

$y(x)=x^3$.

Observaţia 11.3.3. Să presupunem că $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \equiv 0$. Atunci funcţia F este de forma

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)\, y'.$$

Ecuaţia lui Euler devine:

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, y' - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\, y' = 0,$$

adică

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad \textbf{(11.15)}$$

Dacă această relaţie este satisfăcută identic, atunci expresia de sub semnul integralei

$$\left[P(x, y) + Q(x, y)\, y'\right] dx = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

va fi o diferenţială totală exactă, deci valoarea integralei depinde numai de capetele curbei, nu şi de drumul de integrare. În acest caz problema variaţională nu are sens.

Dacă relaţia (11.15) nu este satisfăcută identic, atunci ea defineşte o curbă bine determinată, care, în general, nu va trece prin punctele date. În acest caz, problema variaţională nu are soluţie. În anumite cazuri particulare, relaţia (11.15) poate să dea soluţia problemei de extrem pentru funcţionala corespunzătoare.

Exemplul 11.3.2. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(y) = \int_1^2 (3x - y)\, y\, dx,$$

care satisfac condiţiile la limită $y(1) = 1$, $y(2) = 8$.

În acest caz, $F(x, y, y') = 3xy - y^2$, iar ecuaţia lui Euler devine $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, adică $3x - 2y = 0$. Prin urmare, $y(x) = \frac{3}{2}x$, care, în mod evident, nu satisface condiţiile la limită.

Cazuri particulare ale ecuaţiei lui Euler

1) Funcţia F nu depinde de y.

În acest caz $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ şi ecuaţia lui Euler devine

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

deci

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \tag{11.16}$$

este o integrală primă pentru ecuaţia lui Euler.

Exemplul 11.3.3. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(y) = \int_1^2 \left(1 + x^2 y'\right) y' \, dx,$$

care satisfac condiţiile la limită $y(1) = 3$, $y(2) = 5$.

În acest caz, $F(x, y, y') = \left(1 + x^2 y'\right) y'$, deci F nu depinde de y. Conform celor de mai sus, extremalele funcţionalei satisfac ecuaţia (11.16), adică $1 + 2x^2 y' = C$. Atunci $y' = \frac{C-1}{2x^2}$, de unde, prin integrare, găsim familia de hiperbole $y = \frac{C_1}{x} + C_2$. Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile la limită. Obţinem sistemul $C_1 + C_2 = 3$, $\frac{1}{2}C_1 + C_2 = 5$, care are soluţiile $C_1 = -4$, $C_2 = 7$. Extremala căutată este

$$y(x) = 7 - \frac{4}{x}.$$

2) Funcţia F nu depinde de x.

În acest caz vom arăta că

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C \tag{11.17}$$

este o integrală primă pentru ecuaţia lui Euler.

Într-adevăr, deoarece $F = F(y, y')$ şi ţinând seama de ecuaţia lui Euler, obţinem succesiv:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = 0$$

de unde rezultă (11.17).

Exemplul 11.3.4. Să se rezolve problema brachistocronei. Altfel spus, să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{T}(y)=\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,dx$$

care satisfac condiţiile la limită $y(0)=0$, $y(a)=b$.

În acest caz $F(x,y,y')=F(y,y')=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$. Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=\dfrac{y'}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}}$, din (11.17) obţinem:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}}=C$$

care se mai scrie $\dfrac{1}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}}=C$. Notând $k=\dfrac{1}{C^2}$, rezultă că $y=\dfrac{k}{1+y'^2}$.

Punând $y'=\operatorname{ctg} t$, rezultă că

$$y=k\sin^2 t=\frac{k}{2}(1-\cos 2t).$$

Atunci

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{k\sin 2t}{\operatorname{ctg} t}=2k\sin^2 t\,dt=k(1-\cos 2t)\,dt.$$

Prin urmare

$$x=\frac{k}{2}(2t-\sin 2t)+k_1.$$

Aşadar, obţinem curbele sub formă parametrică:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k}{2}(2t-\sin 2t)+k_1 \\ y = \dfrac{k}{2}(1-\cos 2t) \end{cases} \qquad \textbf{(11.18)}$$

constantele k şi k_1 fiind arbitrare şi se determină din condiţiile la limită. Ecuaţiile (11.18) reprezintă o familie de cicloide generate prin rostogolirea unui cerc de rază $\dfrac{k}{2}$ pe axa reală.

Punctele de întoarcere vor fi puncte de pe axa reală de abscise $x=k_1+2n\pi k$, $n\in\mathbb{Z}$.

Cum, prin ipoteză, curba căutată trece prin origine, va rezulta $k_1=0$. Constanta k se determină din condiţia $y(a)=b$.

11.4. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(y,z)=\int_a^b F(x,y,z,y',z')\,dx$

Fie $D\subset\mathbb{R}^5$ o mulţime deschisă, $F:D\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi $I=[a,\,b]\subset\mathbb{R}$.

De asemenea, fie

$$\mathcal{D}=\left\{(y,z)\in C^1\left(I;\,\mathbb{R}^2\right);\,\left(x,y(x),z(x),y'(x),z'(x)\right)\in D,\ (\forall)\ x\in I\right\}$$

$y_1,\,y_2,\,z_1,\,z_2\in\mathbb{R}$ numere date şi

$$\mathcal{A}=\left\{(y,z)\in\mathcal{D};\ y(a)=y_1,\ y(b)=y_2,\ z(a)=z_1,\ z(b)=z_2\right\}.$$

Considerăm funcţionala $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(y,z)=\int_a^b F(x,y,z,y',z')\,dx. \tag{11.19}$$

Această funcţională depinde de F. Mulţimea $\mathcal{A}$ se numeşte *mulţimea funcţiilor admisibile*.

Teorema 11.4.1. Dacă $(y,z)\in C^1\left(I;\,\mathbb{R}^2\right)$ realizează extremumul funcţionalei (11.19) pe mulţimea funcţiilor admisibile, atunci funcţiile $x\mapsto\frac{\partial F}{\partial y'}\left(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\right)$ şi $x\mapsto\frac{\partial F}{\partial z'}\left(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\right)$ sunt de clasă C^1, iar funcţiile y şi z verifică sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)\end{cases}. \tag{11.20}$$

Demonstraţie. Fie $(g,\,h)\in C^1\left(I;\,\mathbb{R}^2\right)$ care satisface condiţiile la limită $g(a)=0$, $g(b)=0$, $h(a)=0$, $h(b)=0$ şi funcţia

$$\varphi_{g,h}:\left(-\frac{r}{\|(g,h)\|},\frac{r}{\|(g,h)\|}\right)\to\mathbb{R},\ \varphi_{g,h}(t)=\mathcal{F}(y+tg,z+th).$$

Variaţia întâi a funcţionalei (11.19) este $\delta_{g,h}\mathcal{F}(y,z)=\varphi'_{g,h}(0)$, deci

$$\delta_{g,h}\mathcal{F}(y,z)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\int_a^b F\big(x,y(x)+tg(x),y'(x)+tg'(x),z(x)+th(x),z'(x)+th'(x)\big)dx\right)\Bigg|_{t=0}=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{d}{dt}\Big(F\big(x,y(x)+tg(x),y'(x)+tg'(x),z(x)+th(x),z'(x)+th'(x)\big)\Big)\Bigg|_{t=0}\right]dx=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\big)\cdot g(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\big)\cdot g'(x)\right]dx+$$

$$+\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\big)\cdot h(x)+\frac{\partial F}{\partial z'}\big(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\big)\cdot h'(x)\right]dx.$$

Conform Teoremei lui Fermat, $\delta_{g,h}\mathcal{F}(y,z)=0$, pentru orice funcţii g şi h de clasă C^1 pe $[a,b]$, care satisfac $g(a)=0$, $g(b)=0$, $h(a)=0$, $h(b)=0$.

În particular, scriind $\delta_{g,h}\mathcal{F}(y,z)=0$ pentru $(g,0)$, respectiv $(0,h)$ şi ţinând seama de relaţia de mai sus obţinem:

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\big)\cdot g(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\big)\cdot g'(x)\right]dx=0,$$

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\big)\cdot h(x)+\frac{\partial F}{\partial z'}\big(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\big)\cdot h'(x)\right]dx=0.$$

Concluzia teoremei rezultă din Corolarul 11.3.1.

Aşadar, Teorema 11.4.1 dă condiţii necesare de extrem. Sistemul de ecuaţii diferenţiale (11.20) se numeşte *sistemul Euler-Lagrange* asociat funcţionalei (11.19). Curbele y şi z care satisfac sistemul (11.20) se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcţionalei (11.19).

Observaţia 11.4.1.

1) Dacă funcţia F nu depinde explicit de y sau z, atunci sistemul (11.20) admite, în mod evident, integralele prime:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1, \text{ respectiv } \frac{\partial F}{\partial z'} = C_2 .$$

2) Dacă funcţia F nu depinde explicit de x, atunci sistemul (11.20) admite integrala primă:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C .$$

Într-adevăr,

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F}{\partial z'}z'' -$$

$$-y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - z''\frac{\partial F}{\partial z'} - z'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0$$

deoarece y şi z care satisfac sistemul Euler-Lagrange.

Exemplul 11.4.1. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(y,z) = \int_0^{\pi}\left(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2\right)dx ,$$

care satisfac condiţiile la limită $y(0)=0$, $y(\pi)=1$, $z(0)=0$, $z(\pi)=1$.

Deoarece $F(x,y,z,y',z') = 2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2$, sistemul Euler-Lagrange devine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2z - 4y - 2y'' = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 2y - 2z'' = 0 \end{cases} .$$

Din sistemul $y'' + 2y - z = 0$, $z'' + y = 0$, eliminând pe z, obţinem ecuaţia diferenţială $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$, a cărei soluţie generală este

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x\left(C_3\cos x + C_4\sin x\right).$$

Din condiţiile $y(0)=0$, $y(\pi)=1$, obţinem $C_1 = 0$ şi $C_3 = -\dfrac{1}{\pi}$. În consecinţă

$$y(x) = C_2\sin x + C_4\, x\sin x - \frac{x}{\pi}\cos x .$$

Din prima ecuaţie a sistemului rezultă că

$$z(x)=C_2\sin x+C_4\left(2\cos x+x\sin x\right)+\frac{1}{\pi}\left(2\sin x-x\cos x\right).$$

Folosind condiţiile $z(0)=0$, $z(\pi)=1$, obţinem $C_4=0$ şi C_2 arbitrar. În concluzie, curbele extremale căutate sunt:

$$y(x)=C_2\sin x-\frac{x}{\pi}\cos x,$$

$$z(x)=C_2\sin x+\frac{1}{\pi}\left(2\sin x-x\cos x\right).$$

11.5. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(y)=\int_a^b F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)dx$

Procedând ca în secţiunea 11.3, vom aborda probleme ale calculului variaţional, în care funcţia de sub semnul integrală depinde nu numai de derivata de ordinul întâi, ci şi de derivatele de ordin superior. Probleme de acest tip apar des în teoria elasticităţii. Prezentăm, pe scurt, un exemplu. Să se determine forma axei unei grinzi încovoiate, cu anumite condiţii la extremităţi. Această problemă revine la găsirea extremumului energiei potenţiale a sistemului. Dar energia potenţială a unei grinzi încovoiate depinde de curbură. Prin urmare, în această problemă se caută curbele extremale în cazul în care funcţia de sub semnul integrală depinde de derivatele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea ale funcţiei necunoscute.

Fie $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi fie $C^n(I;\mathbb{R})$ spaţiul vectorial real al funcţiilor $y:I\to\mathbb{R}$ de clasă C^n, înzestrat cu norma

$$\|y\|=\sup_{x\in I}|y(x)|+\sup_{x\in I}|y'(x)|+\ldots+\sup_{x\in I}\left|y^{(n)}(x)\right|.$$

Dacă $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ este o funcţie dată, de clasă C^{n+1}, considerăm funcţionala $\mathcal{F}:C^n(I;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(y)=\int_a^b F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)dx. \qquad \textbf{(11.21)}$$

Problema pe care o vom aborda se enunţă în modul următor:

Dintre toate curbele $y \in C^n(I;\mathbb{R})$, care verifică condiţiile la limită:

$$\begin{aligned} &y(a)=c_1,\ y'(a)=c_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(a)=c_n \\ &y(b)=d_1,\ y'(b)=d_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(b)=d_n \end{aligned} \tag{11.22}$$

să se determine acea curbă de-a lungul căreia funcţionala (11.21) realizează un extremum.

Se constată uşor că, dacă se cunoaşte o funcţie $y_0 \in C^n(I;\mathbb{R})$ care verifică condiţiile la limită (11.22), atunci orice altă funcţie $y \in C^n(I;\mathbb{R})$ care verifică, de asemenea, condiţiile la limită (11.22), este de forma $y = y_0 + h$, unde $h \in C^n(I;\mathbb{R})$ satisface condiţiile la limită:

$$\begin{aligned} &h(a)=0,\ h'(a)=0,\ \ldots,\ h^{(n-1)}(a)=0 \\ &h(b)=0,\ h'(b)=0,\ \ldots,\ h^{(n-1)}(b)=0. \end{aligned} \tag{11.23}$$

Prin urmare, dacă $y_0 \in C^n(I;\mathbb{R})$ realizează un extrem al funcţionalei (11.21) pe mulţimea funcţiilor din $C^n(I;\mathbb{R})$ care satisfac condiţiile la limită (11.22), atunci, în mod necesar

$$\delta_h \mathcal{F}(y_0)=0$$

pentru orice $h \in C^n(I;\mathbb{R})$ care satisface condiţiile la limită (11.23).

Teorema 11.5.1. Fie $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^{n+1}. Dacă funcţia $y \in C^{2n}(I;\mathbb{R})$ realizează un extrem al funcţionalei (11.21) pe mulţimea funcţiilor din $C^n(I;\mathbb{R})$, care satisfac condiţiile la limită (11.22), atunci funcţia y verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right). \tag{11.24}$$

Demonstraţie. Vom arăta că funcţionala (11.21) admite variaţia întâi în orice punct $y \in C^n(I;\mathbb{R})$, după direcţia oricărui $h \in C^n(I;\mathbb{R})$. Într-adevăr

$$\delta_h \mathcal{F}(y)=\frac{d}{dt}\left(\int_a^b F\left(x, y+th, y'+th', \ldots, y^{(n)}+th^{(n)}\right)dx\right)\Bigg|_{t=0}=$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot h' + \frac{\partial F}{\partial y''} \cdot h'' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \cdot h^{(n)} \right] dx.$$

Să presupunem acum că funcţia h satisface condiţiile la limită (11.23). Integrând prin părţi, pentru orice k, $1 \le k \le n$, obţinem:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \cdot h^{(k)} \, dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \cdot h^{(k-1)} \, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \cdot h^{(k-2)} \, dx = \ldots = (-1)^k \int_a^b \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \cdot h \, dx.$$

În consecinţă, avem

$$\delta_h \mathcal{F}(y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) \right] \cdot h \, dx.$$

Deoarece $\delta_h \mathcal{F}(y) = 0$ pentru orice funcţie h de clasă C^n pe $[a, b]$, care satisface $h(a) = 0$, $h(b) = 0$, din lema fundamentală a calculului variaţional rezultă că funcţia y satisface ecuaţia diferenţială (11.24).

Prin urmare Teorema lui 11.5.1 dă o condiţie necesară de extrem. Ecuaţia diferenţială (11.24) se numeşte *ecuaţia Euler-Poisson* asociată funcţionalei (11.21). Curbele integrale ale acestei ecuaţii diferenţiale se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcţionalei (11.21).

Exemplul 11.5.1. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 \left(2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2 \right) dx$$

care satisfac condiţiile la limită $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) = \mathrm{ch}1$, $y'(1) = \mathrm{sh}1$.

În acest caz $F(x, y, y', y'') = 2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y' - 4y$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y - 2y'$, $\frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$. În consecinţă, ecuaţia Euler-Poisson asociată funcţionalei este:

$$2y' - 4y - \frac{d}{dx}(2y - 2y') + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0 \text{ sau } y^{(4)} + y'' - 2y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică a acestei ecuaţii diferenţiale este $r^4 + r^2 - 2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = i\sqrt{2}$, $r_4 = -i\sqrt{2}$.

Atunci soluţia generală a ecuaţiei Euler-Poisson va fi

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos\sqrt{2}\,x + C_4 \sin\sqrt{2}\,x.$$

Ţinând seama de condiţiile la limită, este util să scriem această soluţie generală folosind funcţiile hiperbolice. Deoarece $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ şi $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$, atunci, notând $k_1 = C_1 + C_2$, $k_2 = C_1 - C_2$, rezultă că soluţia generală a ecuaţiei Euler-Poisson se poate scrie sub forma

$$y(x) = k_1 \operatorname{ch} x + k_2 \operatorname{sh} x + C_3 \cos\sqrt{2}\,x + C_4 \sin\sqrt{2}\,x.$$

Folosind condiţiile la limită, ajungem la sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} k_1 + C_3 = 0 \\ k_2 + \sqrt{2}\,C_4 = 0 \\ k_1 \operatorname{ch}1 + k_2 \operatorname{sh}1 + C_3 \cos\sqrt{2} + C_4 \sin\sqrt{2} = \operatorname{ch}1 \\ k_1 \operatorname{sh}1 + k_2 \operatorname{ch}1 - \sqrt{2}\,C_3 \sin\sqrt{2} + \sqrt{2}\,C_4 \cos\sqrt{2} = \operatorname{sh}1 \end{cases},$$

Rezolvând acest sistem, obţinem $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Prin urmare, curba extremala căutată este $y(x) = \operatorname{ch} x$.

11.6. Funcţionale de tipul $\mathcal{F}(u) = \iint\limits_D F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră este curba închisă, netedă pe porţiuni C, $U \subset \mathbb{R}^5$ o mulţime deschisă şi $F : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Fie

$$\mathcal{D} = \left\{ u \in C^1\left(\bar{D}; \mathbb{R}\right); \left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right) \in U,\ (\forall)\ (x,y) \in \bar{D} \right\}.$$

Considerăm funcţionala $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u) = \iint\limits_D F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy. \qquad \textbf{(11.25)}$$

Se poate demonstra că mulţimea $\mathcal{D}$ este o submulţime deschisă a spaţiului normat $C^1\left(\bar{D}; \mathbb{R}\right)$. Dacă g este o funcţie dată pe curba C, fie

$\mathcal{A} = \left\{ u \in \mathcal{D};\, u\big|_C = g \right\}$.

Este clar că, dacă funcţia $u_0 \in \mathcal{A}$ este cunoscută, atunci orice altă funcţie $u \in \mathcal{A}$ este de forma $u = u_0 + h$, unde $h\big|_C = 0$.

Ne punem problema determinării punctelor de extrem ale funcţionalei (11.25) pe mulţimea $\mathcal{A}$. Pentru rezolvarea acestei probleme sunt utile următoarele rezultate.

Lema 11.6.1. Fie $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că pentru orice funcţie h de clasă C^1 pe o mulţime deschisă ce conţine $\overline{D}$, cu $h\big|_C = 0$, satisface condiţia

$$\iint_D f(x,y)\,h(x,y)\,dx\,dy = 0. \qquad \textbf{(11.26)}$$

Atunci $f(x,y) = 0$, pentru orice $(x,y) \in \overline{D}$.

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă, este suficient să arătăm că $f(x,y) = 0$, pentru orice $(x,y) \in D$. Presupunem, prin absurd, că f nu este identic nulă pe D, deci există $(a,b) \in D$ astfel încât $f(a,b) \neq 0$. Fără micşorarea generalităţii, presupunem că $f(a,b) > 0$.

Funcţia f fiind continuă în punctul (a,b), pentru orice $\varepsilon > 0$, există $r > 0$ suficient de mic, astfel încât $V = B\big((a,b);r\big) \subset D$ şi pentru orice $(x,y) \in V$, avem

$\left| f(x,y) - f(a,b) \right| < \varepsilon$.

Altfel spus, pentru orice $(x,y) \in V$ au loc inegalităţile

$f(a,b) - \varepsilon < f(x,y) < f(a,b) + \varepsilon$.

În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a,b)$ rezultă că există o bilă corespunzătoare $V = B\big((a,b);r\big)$ astfel încât pentru orice $(x,y) \in V$ avem $f(x,y) > \frac{1}{2} f(a,b)$. Fie funcţia

$$h(x,y) = \begin{cases} \left((x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 \right)^2, & \text{dacă} \quad (x,y) \in V \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) \notin V \end{cases}.$$

Se verifică uşor că funcţia h satisface condiţiile din enunţul lemei. În plus, folosind teorema de medie pentru integrala dublă, rezultă că

$$\iint_D f(x,y)\,h(x,y)\,dx\,dy=\iint_V f(x,y)\,h(x,y)\,dx\,dy\ >$$

$$>\frac{1}{2}f(a,b)\iint_V h(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}f(a,b)\,h(\bar{x},\bar{y})\cdot\pi r^2>0$$

unde $(\bar{x},\bar{y})\in V$, ceea ce contrazice (11.26).

Corolarul 11.6.1. Dacă $P:\bar{D}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, iar Q şi R sunt două funcţii de clasă C^1 pe o mulţime deschisă care conţine $\bar{D}$, care satisfac

$$\iint_D\left[P(x,y)h(x,y)+Q(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)+R(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right]dx\,dy=0 \qquad \textbf{(11.27)}$$

pentru orice funcţie h de clasă C^1 pe o mulţime deschisă ce conţine $\bar{D}$, cu $h\big|_C=0$, atunci

$$P(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial R}{\partial y}(x,y),\ (\forall)\ (x,y)\in\bar{D}.$$

Demonstraţie. Deoarece

$$Q\,\frac{\partial h}{\partial x}+R\,\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(Qh)+\frac{\partial}{\partial y}(Rh)-\frac{\partial Q}{\partial x}\,h-\frac{\partial R}{\partial y}\,h$$

rezultă că

$$\iint_D\left(Q\,\frac{\partial h}{\partial x}+R\,\frac{\partial h}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(Qh)+\frac{\partial}{\partial y}(Rh)\right]dx\,dy-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,h+\frac{\partial R}{\partial y}\,h\right)dx\,dy.$$

Conform formulei Green-Riemann şi ţinând seama că $h\big|_C=0$, rezultă

$$\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(Qh)+\frac{\partial}{\partial y}(Rh)\right]dx\,dy=\oint_C(-Rh)\,dx+(Qh)\,dy=0.$$

Aşadar

$$\iint_D\left(Q\,\frac{\partial h}{\partial x}+R\,\frac{\partial h}{\partial y}\right)dx\,dy=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,h+\frac{\partial R}{\partial y}\,h\right)dx\,dy.$$

Înlocuind în (11.27), obţinem

$$\iint_D\left[P(x,y)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial R}{\partial y}(x,y)\right]h(x,y)\,dx\,dy=0,$$

pentru funcţie h de clasă C^1, care satisface $h\big|_C=0$. Corolarul rezultă din Lema 11.6.1.

Teorema 11.6.1. Dacă funcţia $u \in \mathcal{A}$ realizează un extrem al funcţionalei (11.25) pe mulţimea funcţiilor admisibile, atunci funcţia u verifică ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0 \qquad \textbf{(11.28)}$$

unde $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Demonstraţie. Fie h o funcţie de clasă C^1, care satisface $h\big|_C = 0$ şi fie funcţia $\varphi_h : \left(-\dfrac{r}{\|h\|}, \dfrac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}$, $\varphi_h(t) = \mathcal{F}(u + th)$. Variaţia întâi a funcţionalei (11.25) este $\delta_h \mathcal{F}(u) = \varphi_h'(0)$, deci

$$\delta_h \mathcal{F}(u) = \frac{d}{dt}\left(\iint_D F\left(x, y, u + th, \frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + t\frac{\partial h}{\partial y}\right) dx\,dy\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \iint_D \frac{d}{dt}\left(F\left(x, y, u + th, \frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + t\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right)\Bigg|_{t=0} dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Deoarece $\delta_h \mathcal{F}(u) = 0$ pentru orice funcţie h de clasă C^1 care satisface $h\big|_C = 0$, obţinem că

$$\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,\ (\forall)\ h \in C^1,\ h\big|_C = 0.$$

Teorema rezultă din Corolarul 11.6.1.

Şi în acest caz, Teorema 11.6.1 dă o condiţie necesară de extrem. Ecuaţia cu derivate parţiale (11.28) se numeşte *ecuaţia Euler-Ostrogradski* asociată funcţionalei (11.25). Suprafeţele integrale ale ecuaţiei Euler-Ostrogradski se numesc *suprafeţe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcţionalei (11.25).

Exemplul 11.6.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră este curba închisă, netedă pe porţiuni C şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă dată. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(u)=\iint_D \left(u_x^2+u_y^2+2fu\right)dx\,dy \tag{11.29}$$

care satisfac $u\big|_C=g$, g fiind o funcţie dată pe curba C.

Deoarece $F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=u_x^2+u_y^2+2fu$, avem

$$\frac{\partial F}{\partial u}=2f,\ \frac{\partial F}{\partial u_x}=2u_x,\ \frac{\partial F}{\partial u_y}=2u_y$$

deci ecuaţia Euler-Ostrogradski este

$$2f-\frac{\partial}{\partial x}\left(2u_x\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2u_y\right)=0$$

adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f.$$

Prin urmare, problema determinării extremalelor funcţionalei (11.29) conduce la rezolvarea problemei Dirichlet

$$\begin{cases}\Delta u=f\\ u\big|_C=g\end{cases}.$$

11.7. Extreme condiţionate ale funcţionalelor

Fie X un spaţiu normat şi $\mathcal{F},\mathcal{G}:X\to\mathbb{R}$ două funcţionale care admit variaţia întâi în orice punct din X. Se numeşte *extrem al lui* $\mathcal{F}$ *condiţionat de* $\mathcal{G}$, orice punct de extrem local al lui $\mathcal{F}$ care satisface legătura $\mathcal{G}(y)=C$, $y\in X$, C fiind o constantă dată.

Teorema 11.7.1. Fie y_0 un punct de extrem al lui $\mathcal{F}$ condiţionat de $\mathcal{G}$, care nu este punct critic pentru $\mathcal{G}$. Atunci, există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât y_0 să fie punct critic pentru funcţionala $\mathcal{F}+\lambda\mathcal{G}$.

Demonstraţie. Deoarece y_0 nu este punct critic pentru $\mathcal{G}$, există $l\in X$ astfel încât $\delta_l\mathcal{G}(y_0)\neq 0$. Fie $h\in X$ arbitrar. Considerăm funcţiile $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ date de

$$f(t,s)=\mathcal{F}(y_0+th+sl) \text{ şi } g(t,s)=\mathcal{G}(y_0+th+sl)-C.$$

Dacă y_0 este punct de extrem al lui $\mathcal{F}$ condiţionat de $\mathcal{G}$, rezultă că $(0,0)$ este punct de extrem local al lui f, cu legătura $g(t,s)=0$. În plus,

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,0)=\lim_{s\to 0}\frac{g(0,s)-g(0,0)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{\mathcal{G}(y_0+s\,l)-\mathcal{G}(y_0)}{s}=\delta_l\,\mathcal{G}(y_0)\neq 0.$$

Conform metodei multiplicatorilor lui Lagrange pentru extreme cu legături, există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $(0,0)$ este punct critic al funcţiei $\varphi=f+\lambda\,g$. Aşadar

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,0)=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,0)=0.$$

În consecinţă,

$$\delta_l(\mathcal{F}+\lambda\,\mathcal{G})(y_0)=\lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{F}(y_0+t\,h)-\mathcal{F}(y_0)}{t}+\lambda\lim_{t\to 0}\frac{\mathcal{G}(y_0+t\,h)-(y_0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}+\lambda\lim_{t\to 0}\frac{g(t,0)-g(0,0)}{t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,0)=0.$$

Prin urmare, y_0 este punct critic pentru funcţionala $\mathcal{F}+\lambda\,\mathcal{G}$.

Exemplul 11.7.1. Să se găsească curba plană situată în semiplanul superior, care trece prin punctele $A(-1,0)$ şi $B(1,0)$, de lungime $l>2$, astfel încât aria cuprinsă între această curbă şi segmentul $[AB]$ să fie maximă.

Dacă $y=y(x),\ x\in[-1,1]$ este ecuaţia curbei căutate, atunci aria determinată de această curbă şi axa Ox, va fi

$$\mathcal{F}(y)=\int_{-1}^{1}y\,dx \tag{11.30}$$

Condiţia ca lungimea arcului de curbă să fie *l*, este

$$\mathcal{G}(y)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l \tag{11.31}$$

Fie $C_0^1([-1,1];\mathbb{R})$ spaţiul Banach al funcţiilor $y:[-1,1]\to\mathbb{R}$, de clasă C^1, care satisfac condiţiile $y(-1)=0$, $y(1)=0$. Aşadar, $\mathcal{F},\mathcal{G}:C_0^1([-1,1];\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, sunt date de (11.30), respectiv (11.31).

Problema revine la a găsi funcţia $y \in C_0^1([-1, 1]; \mathbb{R})$, maxim local al funcţionalei F, care satisface condiţia $\mathcal{G}(y) = l$. Conform Teoremei 11.7.1, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât y este punct critic al funcţionalei $\mathcal{H} = \mathcal{F} + \lambda \mathcal{G}$,

$$\mathcal{H}(y) = \int_{-1}^{1} \left(y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx .$$

Ecuaţia lui Euler corespunzătoare funcţionalei $\mathcal{H}$ este:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 1, \text{ deci}$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + C_1 .$$

Rezolvând în raport cu y', găsim

$$y' = \pm \frac{x + C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}} .$$

Integrând, obţinem

$$y + C_2 = \mp \sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}$$

sau, prin ridicare la pătrat,

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = \lambda^2, \; C_1, C_2 = const. \qquad \textbf{(11.32)}$$

Prin urmare, curbele căutate sunt cercuri de rază λ şi cu centrul în punctul $(-C_1, -C_2)$. Punând condiţiile ca aceste cercuri să treacă prin punctele A şi B şi ca lungimea curbei să fie l, se ajunge la

$$\begin{cases} (-1 + C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2 \\ (1 + C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2 \end{cases}$$

deci $C_1 = 0$, $C_2 = \pm\sqrt{\lambda^2 - 1}$. Ecuaţia (11.32) devine

$$x^2 + \left(y \pm \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)^2 = \lambda^2, \text{ deci}$$

$$y(x) = \pm\sqrt{\lambda^2 - x^2} \mp \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

şi

$$y'(x) = \mp \frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}.$$

Condiţia (11.31) conduce la

$$l = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}\, dx = 2\,\lambda \arcsin \frac{1}{\lambda}$$

sau

$$\frac{1}{\lambda} = \sin \frac{l}{2\,\lambda}. \qquad \textbf{(11.33)}$$

Notând $t = \frac{l}{2}$, se constată că această ecuaţie devine

$$\sin t = \frac{2}{l}\, t.$$

Panta tangentei în $t = 0$ la graficul funcţiei $y = \sin t$ este 1, în timp ce dreapta de ecuaţie $y = \frac{2}{l}\, t$ are panta $m = \frac{2}{l} < 1$, deci graficele celor două funcţii au cel puţin un punct de intersecţie diferit de origine. Prin urmare, ecuaţia (11.33), transcendentă în λ, are o soluţie $\lambda = \lambda_0$ şi $C_2 = \sqrt{\lambda_0^2 - 1}$.

Bibliografie

[1] BRÂNZĂNESCU, V., STĂNĂŞILĂ, O., *Matematici speciale. Teorie*, *exemple*, *aplicaţii*, Editura All, Bucureşti, 1994.

[2] BUCUR, GH., *Analiză Matematică*, Editura Universităţii Bucureşti, 2006.

[3] CORDUNEANU, A., *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică*, Editura Facla, Timişoara, 1981.

[4] CIORĂNESCU, N., *Tratat de matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

[5] FIHTENHOLŢ, G.M., *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1965.

[6] GHIŢĂU, D., *Geodezie şi gravimetrie geodezică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[7] GODUNOV, S., *Équations de la physique mathématique*, Éditions Mir., Moscou, 1973.

[8] KRASNOV, M., KISELEV, A., MAKARENKO, G., SHIKIN, E., *Mathematical Analysis for Engeers*, Vol. 2, Mir Publishers, Moskow, 1990.

[9] LAVRENTIEV, M.A., LIUSTERNIK, L.A., *Curs de calcul variaţional*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

[10] MATEI, P., *Algebră liniară. Geometrie analitică şi diferenţială*, Vol. I, Editura AGIR, Bucureşti, 2002.

[11] MATEI, P., *Algebră liniară. Geometrie analitică şi diferenţială*, Vol. II, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2004.

[12] MOLDOVEANU, C., *Geodezie*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2002.

[13] PĂLTINEANU, G., MATEI, P., *Matematici speciale*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2004.

[14] PĂLTINEANU, G., *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Agir, Bucureşti, 2002.

[15] PĂLTINEANU, G., *Analiză matematică. Calcul integral*, Editura Agir, Bucureşti, 2004.

[16] PĂLTINEANU, G., MATEI, P., *Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii cu derivate parţiale*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2007.

[17] PETRESCU, Ş., BARBĂLAT, I., FILIMON, I., MATEI, I., *Analiză matematică şi matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

[18] ŞABAC, I. GH., *Matematici speciale*, Vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[19] ŞABAC, I. GH., COCARLAN, P., STĂNĂŞILĂ, O., TOPALĂ, A., *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[20] TOMA, I., *Matematici speciale*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2000.

[21] VLADIMIROV, V.S., *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

Index

	Pagina
A doua formulă a lui Green	355
A treia formulă a lui Green	355
Bilă deschisă cu centrul în z_0 şi de rază r	187
Câmp scalar	9
Câmp vectorial	15
Câmp vectorial de potenţial	19
Câmp vectorial irotaţional	16
Câmp vectorial solenoidal	24
Circulaţia unui câmp vectorial	22
Coarda vibrantă infinită	317
Coeficienţii Fourier ai unei funcţii integrabile	235
Coeficienţii Fourier generalizaţi ai unei funcţii integrabile	247
Coeficienţii lui Lamé	29
Combinaţie integrabilă pentru un sistem simetric de ecuaţii diferenţiale	174
Construcţia unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene de ordinul n de sistem fundamental dat (Teorema 3.4.1)	101
Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie de clasă C^1 să fie integrală primă pentru un sistem autonom de ecuaţii diferenţiale (Teorema 5.1.1)	170
Condiţiile Cauchy-Riemann pentru funcţii olomorfe (Teorema 6.4.1)	196
Conjugatul unui număr complex	186
Curbă caracteristică a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară	306
Curba de cea mai rapidă coborâre (problema brachistocronei)	387
Curbe extremale	402, 408, 412
Derivata complexă a unei funcţii complexe	195
Derivata unui câmp scalar după o direcţie	11
Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii periodice de perioadă $T = 2\pi$ (Teorema 7.2.1)	237
Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii periodice de perioadă arbitrară $T = 2l$	241
Divergenţa unui câmp vectorial	19

	Pagina
Domeniu	200
Domeniu multiplu conex	200
Domeniu simplu conex	200
Ecuaţia caracteristică asociată unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniară şi omogenă cu coeficienţi constanţi	111
Ecuaţia caracteristică asociată unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi omogen cu coeficienţi constanţi	160
Ecuaţia propagării căldurii într-o bară	340
Ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară	304
Ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară de tip eliptic	306
Ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară de tip hiperbolic	306
Ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară de tip parabolic	306
Ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară şi neomogenă	180
Ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă	175
Ecuaţia diferenţială a curbelor caracteristice asociată unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară	307
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi	40
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu diferenţială totală exactă	58
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu factor integrant	60
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile	43
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de tip Bernoulli	54
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de tip Clairaut	69
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de tip Lagrange	66
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară	50
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi omogenă	44
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi reductibilă la omogenă	46
Ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de tip Riccati	56
Ecuaţie diferenţială de ordinul n	38, 83
Ecuaţie diferenţială de ordinul n de tip Euler	124
Ecuaţie diferenţială de ordinul n liniară şi omogenă cu coeficienţi constanţi	110
Ecuaţie diferenţială de ordinul n liniară şi omogenă cu coeficienţi variabili	92
Ecuaţie diferenţială de ordinul n liniară şi neomogenă cu coeficienţi constanţi	117
Ecuaţie diferenţială de ordinul n liniară şi neomogenă cu coeficienţi variabili	104
Ecuaţie diferenţială de ordinul n sub formă normală (explicită)	144
Ecuaţie diferenţială de ordin superior integrabilă prin cuadraturi	84
Ecuaţia Euler-Lagrange asociată unei funcţionale liniare	402
Ecuaţia Euler-Ostrogradski asociată unei funcţionale liniare	416
Ecuaţia Euler-Poisson asociată unei funcţionale liniare	412
Expresia divergenţei în coordonate cilindrice	35
Expresia divergenţei în coordonate curbilinii	34
Expresia divergenţei în coordonate sferice	35
Expresia gradientului în coordonate cilindrice	33
Expresia gradientului în coordonate curbilinii	33

	Pagina
Expresia gradientului în coordonate sferice	33
Expresia laplacianului în coordonate cilindrice	35
Expresia laplacianului în coordonate curbilinii	35
Expresia laplacianului în coordonate sferice	36
Factor integrant	60
Fluxul unui câmp vectorial	16
Forma complexă a seriilor Fourier	243
Forma exponenţială a unui număr complex nenul (Observaţia 6.3.2)	191-192
Forma specială I pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare şi neomogene cu coeficienţi constanţi	119
Forma specială II pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare şi neomogene cu coeficienţi constanţi	119
Forma trigonometrică a unui număr complex	187
Formula celor trei potenţiale (Teorema 10.13.1)	355
Formula de inversare Mellin-Fourier (Teorema 9.3.1)	292
Formula de reprezentare integrală Fourier	262
Formula flux-divergenţă (Teorema 1.2.1)	20
Formula integrală a lui Cauchy pentru o funcţie olomorfă (Teorema 6.5.4)	207
Formula integrală Fourier (Teorema 8.1.1)	263
Formula integrală Poisson	350
Formula lui D'Alembert pentru coarda vibrantă infinită	319
Formula Stokes	25
Funcţie absolut integrabilă	262
Funcţie armonică	199, 352
Funcţie continuu diferenţiabilă pe porţiuni	262
Funcţia exponenţială e^z	191
Funcţie Green	367
Funcţii hiperbolice	192
Funcţie local integrabilă	262
Funcţie lipschitziană	132
Funcţia logaritmică	193
Funcţie monotonă pe porţiuni	235
Funcţie olomorfă	195
Funcţie periodică	231
Funcţie omogenă de gradul m	44
Funcţie original	277
Funcţia putere	193
Funcţia radical	194
Funcţia sferică generală de ordinul n	377
Funcţii trigonometrice	192
Funcţională liniară pe un spaţiu normat	392

	Pagina
Gradientul unui câmp scalar	13
Identitatea lui Parseval (Teorema 7.5.3)	248-249
Indicele de creştere al funcţiei original	277
Inegalitatea lui Bessel (Teorema 7.5.2)	248
Inegalitatea lui Schwartz (Propoziţia 7.5.2)	245
Integrala unei funcţii de o variabilă complexă	203
Integrală primă	169
Integrale prime independente	169
Lema lui Jordan (Lema 6.10.1)	225
Lema a doua a lui Jordan (Lema 6.10.2)	228
Lema fundamentală a calculului variaţional (Lagrange) (Lema 11.3.2)	399
Linie de câmp pentru un câmp vectorial	173
Linie de nivel pentru un câmp scalar	9
Metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi	79
Metoda combinaţiilor integrabile pentru sisteme simetrice de ecuaţii diferenţiale	173
Metoda eliminării pentru sisteme de ecuaţii diferenţile de ordinul întâi liniare	167
Metoda separării variabilelor a lui Fourier pentru coarda vibrantă finită	321
Metoda separării variabilelor a lui Fourier pentru ecuaţia căldurii	341
Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare	50
Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare şi neomogene	106
Metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi neomogene	154
Modulul unui număr complex	186
Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniară şi omogenă este un spaţiu vectorial (Propoziţia 3.3.2)	94
Mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi omogen este un spaţiu vectorial (Propoziţia 4.2.1)	148
Număr complex	185
Orice serie de numere complexe absolut convergentă este convergentă (Teorema 6.2.5)	190
Operatorul lui Hamilton (nabla)	27
Operatorul Laplace (laplacianul)	27

Pagina

Partea principală a unei serii Laurent 216
Partea Taylor a unei serii Laurent 216
Pol de ordinul m al unei funcţii olomorfe 222
Polinoame Legendre 252
Polinoame trigonometrice 232
Prima formulă a lui Green (Teorema 10.12.1) 354
Primitiva unei funcţii olomofe pe un domeniu simplu conex (Teorema 6.5.2) 206
Principiul maximului pentru o funcţie armonică 360
Problema Cauchy pentru ecuaţia căldurii 347
Problema Cauchy pentru ecuaţia coardei vibrante finite 321
Problema Cauchy pentru ecuaţia coardei vibrante infinite omogene 317
Problema Cauchy pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară şi neomogenă 182
Problema Cauchy pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă 179
Problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi 41
Problema Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul n 42, 83
Problema Cauchy pentru un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi 131
Problema Dirichlet interioară pentru cerc 362
Problema izoperimetrică (Problema Didonei) 389
Problema suprafeţei de rotaţie de arie minimă 388
Proprietatea de liniaritate a transformatei Fourier 273
Proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace (Teorema 9.2.1) 283
Proprietatea de mărginire a transformatei Fourier 274
Punct critic (staţionar) al unei funcţionale liniare 397
Punct de extrem al unei funcţionale liniare condiţionat de o altă funcţională 417
Punct de minim global (respectiv, maxim global) pentru o funcţională liniară 394
Punct de minim local (respectiv, maxim local) pentru o funcţională liniară 394
Punct singular aparent al unei funcţii olomorfe 222
Punct singular esenţial al unei funcţii olomorfe 222
Punct singular izolat al unei funcţii olomorfe 222

Raza de convergenţă a unei serii de puteri 211
Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip eliptic 315
Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip hiperbolic 308
Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip parabolic 312
Reducerea unui sistem de ecuaţii diferenţiale la un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi (Teorema 4.1.1) 130
Rezolvarea unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi se reduce la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n (Teorema 4.1.4) 142
Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi cu ajutorul transformatei Laplace 296
Rezolvarea problemei Dirichlet cu ajutorul funcţiei Green (Teorema 10.16.1) 368
Rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă 369
Rezolvarea problemei Dirichlet pentru sferă cu metoda separării variabilelor 371

	Pagina
Reziduul unei funcţii olomorfe într-un punct singular	223
Rotorul unui câmp vectorial	23
Serie de funcţii complexe convergentă	210
Serie de funcţii complexe uniform convergentă	210
Serie de funcţii trigonometrică	232
Serie de numere complexe absolut convergentă	190
Serie de numere complexe convergentă	189
Serie de puteri de funcţii complexe	211
Seria Fourier ataşată unei funcţii integrabile	235
Seria Fourier generalizată ataşată unei funcţii integrabile	247
Serie Laurent centrată în punctul $z_0 \in \mathbb{C}$	216
Serie Laurent convergentă	216
Serie Taylor asociată unei funcţii olomorfe	214
Sistem autonom de ecuaţii diferenţiale	169
Sistem caracteristic asociat unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă	175
Sistem de n ecuaţii diferenţiale	129
Sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi	130
Sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi sub formă normală	131
Sistem de n ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi omogen	146
Sistem de n ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi neomogen	146
Sistem de n ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi omogen cu coeficienţi constanţi	159
Sistem de n ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi neomogen cu coeficienţi constanţi	158
Sistem de n ecuaţii diferenţiale sub formă normală (explicită)	129
Sistemul Euler-Lagrange asociat unei funcţionale liniare	408
Sistem fundamental de soluţii pentru o ecuaţiei diferenţială de ordinul n liniară şi omogenă	99
Sistem fundamental de soluţii pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi omogen	152
Sistem ortonormal închis	249
Sistem simetric de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi	172
Soluţie clasică a problemei Cauchy pentru coarda vibrantă finită	328
Soluţie generalizată a problemei Cauchy pentru coarda vibrantă finită	329
Soluţia generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară şi neomogenă (Teorema 5.3.1)	181
Soluţia generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi omogenă (Teorema 5.2.2, Definiţia 5.2.3)	176-177
Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi	40
Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n	39, 83
Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniară şi neomogenă (Teorema 3.6.1)	104

Pagina

Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniară şi omogenă (Propoziţia 3.3.5) 99
Soluţia generală a unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi 131
Soluţia generală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi neomogen (Teorema 4.2.4) 153
Soluţia generală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi omogen (Teorema 4.2.3, Observaţia 4.2.4) 152-153
Soluţia generală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi neomogen cu coeficienţi constanţi (Observaţia 4.4.1) 164
Soluţia generală a unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi omogen cu coeficienţi constanţi folosind exponenţiala de matrice (Teorema 4.4.1) 165
Soluţia particulară a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi 40
Soluţia particulară a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n 39, 83
Soluţia particulară a unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi 131
Soluţia problemei Dirichlet pentru cerc (formula Poisson) 366
Soluţia problemei Dirichlet pentru sferă 371
Soluţia singulară a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n 39, 83
Soluţia unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea cvasiliniară 304
Suma unei serii de funcţii complexe 201
Suprafaţă de câmp pentru un câmp vectorial 182
Suprafaţă de nivel pentru un câmp scalar 9
Suprafeţe extremale 416

Şir de funcţii complexe uniform convergent 210
Şir de funcţii integrabile ortogonal 233
Şir de numere complexe convergent 188
Şir de numere complexe fundamental 188

Tabloul transformatelor Laplace 299-300
Teorema Abel pentru o serie de puteri (Teorema 6.7.1) 211
Teorema Cauchy-Hadamard pentru o serie de puteri (Teorema 6.7.2) 211
Teorema deplasării pentru transformata Fourier 274
Teorema deplasării pentru transformata Laplace (Teorema 9.2.4) 285
Teorema de asemănare pentru transformata Laplace (Teorema 9.2.2) 284
Teorema de derivare a originalului (Teorema 9.2.5) 285-286
Teorema de derivare a imaginii (Teorema 9.2.6) 286
Teorema Abel pentru o serie de puteri (Teorema 6.7.1) 211
Teorema Cauchy-Hadamard pentru o serie de puteri (Teorema 6.7.2) 211
Teorema Dirichlet pentru serii Fourier (Teorema 7.2.1) 237
Teorema deplasării pentru transformata Fourier 274
Teorema deplasării pentru transformata Laplace (Teorema 9.2.4) 285
Teorema de asemănare pentru transformata Laplace (Teorema 9.2.2) 284
Teorema de derivare a originalului (Teorema 9.2.5) 285-286

	Pagina
Teorema de derivare a imaginii (Teorema 9.2.6)	286
Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi (Teorema 2.8.1)	75
Teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordin superior (Teorema 4.1.5)	145
Teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale (Teorema 4.1.2)	133
Teorema de integrare a imaginii (Teorema 9.2.8)	288
Teorema de integrare a originalului (Teorema 9.2.7)	288
Teorema de întârziere pentru transformata Laplace (Teorema 9.2.3)	284
Teorema fundamentală a algebrei	215
Teorema fundamentală a lui Cauchy pentru funcţii olomorfe (Teorema 6.5.1)	205
Teorema lui Euler (Teorema 11.3.1)	401
Teorema lui Fermat (Teorema 11.2.1)	396
Teorema lui Louville pentru ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare şi omogene (Teorema 3.3.3)	97
Teorema lui Louville pentru o funcţie olomorfă (Teorema 6.8.3)	215
Teorema lui Louville pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi omogene (Teorema 4.2.1)	150
Teorema reziduurilor (Teorema 6.10.2)	224
Teorema valorii medii a unei funcţii armonice (Gauss) (Teorema 10.14.2)	359
Traiectorii izogonale	71
Traiectorii ortogonale	72
Transformata Fourier	263
Transformata Fourier a convoluţiei	275
Transformata Fourier a derivatei	274
Transformata Fourier este o funcţie continuă (Lema 8.2.1)	263
Transformata Fourier inversă	267
Transformata Fourier prin cosinus	271
Transformata Fourier prin sinus	271
Transformata Laplace a unei funcţii original	279
Transformata Laplace a convoluţiei (Teorema 9.2.9)	290
Un şir de numere complexe este convergent dacă şi numai dacă este fundamental (Teorema 6.2.3)	188
Variaţia întâi a unei funcţionale liniare	395
Wronskianul a n soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniară şi omogenă	95
Wronskianul a n soluţii ale unui sistem de n ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul I omogen	148