REZOLVAREA NUMERICĂ A PROBLEMELOR LA LIMITĂ PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE DE TIP ELIPTIC

GAVRIIL PĂLTINEANU

GHIOCEL GROZA

PAVEL MATEI

VIOREL PETREHUŞ

Cuprins

Introducere v

Capitolul 1. METODA DIFERENŢELOR FINITE 1
1. Norme de matrice. Matrice monotone 1
2. O problemă la limită unidimensională 5
3. Metoda diferenţelor finite pentru problema Dirichlet unidimensională 8
4. O problemă la limită bidimensională 14
5. Metoda diferenţelor finite pentru problema Dirichlet bidimensională 18
6. Programul Mathcad 28

Capitolul 2. INTRODUCERE ÎN METODA ELEMENTELOR FINITE PENTRU ECUAŢII ELIPTICE 39
1. Problema la limită şi formularea ei variaţională 40
2. Metoda elementelor finite Lagrange de gradul 1 45
3. Consideraţii practice privind metoda elementelor finite 48
4. Metoda elementelor finite Lagrange de gradul 2 55
5. Evaluarea erorii 57

Capitolul 3. ELEMENTE DE ANALIZĂ FUNCŢIONALĂ 65
1. Integrala Lebesgue 65
2. Spaţii funcţionale 67
3. Funcţii test 69
4. Derivate slabe 72
5. Spaţii Sobolev 79
6. Operatori liniari şi continui pe spaţii normate. Spaţii reflexive 83
7. Teorema Riesz-Fréchet 85
8. Teorema Lax-Milgram 87
9. Aplicaţii ale teoremei Lax-Milgram 90

Capitolul 4. PROGRAMAREA UNOR PROBLEME SIMPLE DE ELEMENT FINIT 97
1. O problemă unidimensională 97
2. O problemă bidimensională 103

Bibliografie 117

Introducere

Lucrarea se bazează pe expunerile făcute de cei patru autori în seminarul de "Metode numerice" al Catedrei de Matematică şi Informatică din Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti. Expunerile au urmat în mare lucrarea [**3**] din bibliografie, fiind completate de lucrările de analiză numerică ale autorilor, precum şi de alte lucrări de specialitate. Capitolul I a fost redactat de Gavriil Păltineanu, capitolul II de Ghiocel Groza, capitolul III de Pavel Matei şi capitolul IV de Viorel Petrehuş.

Lucrarea se adresează doctoranzilor, masteranzilor precum şi altor categorii de specialişti interesaţi de metode numerice pentru ecuaţii diferenţiale.

CAPITOLUL 1

METODA DIFERENŢELOR FINITE

1. Norme de matrice. Matrice monotone

Cele mai utilizate norme vectoriale pe $\mathbb{R}^n$ sunt:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

şi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

În particular,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

iar

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \quad \text{(norma euclidiană)}.$$

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Norma operatorială* a matricei A, subordonată normei vectoriale $\|x\|_p$, se defineşte astfel:

$$\|A\|_p = \sup\left\{\|Ax\|_p \mid \|x\|_p = 1\right\} = \sup_{x\neq 0}\left\{\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\right\} =$$

$$= \inf\{c > 0 \mid \|Ax\|_p \leq c\,\|x\|_p\}.$$

Evident, avem

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|x\|_p\,, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}^n.$$

Reamintim, de asemenea, că *raza spectrală* a matricei A se notează cu $\rho(A)$ şi este prin definiţie

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|, \tag{1.1}$$

unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei A, reale sau complexe.

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 1.1. *Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem:*

1) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;

2) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$;

3) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$, *unde cu A^t am notat transpusa matricei A.*

Observaţia 1.1. *Dacă Aeste simetrică, atunci* $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Într-adevăr, în acest caz $A^tA = A^2$ *şi valorile proprii ale matricei* A^2 *sunt* $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$, *deci*

$$\sqrt{\rho(A^tA)} = \sqrt{\max(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)} = \sqrt{\lambda_j^2} = |\lambda_j| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

Observaţia 1.2.

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty .$$

Într-adevăr, fie λ *o valoare proprie oarecare a matricei* A *şi fie* v *un vector propriu corespunzător acestei valori proprii. Avem:*

$$|\lambda| \, \|v\|_\infty = \|\lambda v\|_\infty = \|Av\|_\infty \leq \|A\|_\infty \, \|v\|_\infty ,$$

deci

$$|\lambda| \leq \|A\|_\infty$$

şi mai departe

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty .$$

Teorema 1.2. *Pentru orice matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avem* $\lim_{p\to\infty} A^p = 0$ *dacă şi numai dacă* $\rho(A) < 1$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem prin absurd că $\lim_{p\to\infty} A^p = 0$ şi $\rho(A) \geq 1$. Fie λ o valorie proprie pentru A şi v un vector propriu corespunzător.

Atunci avem $Av = \lambda v$ şi mai departe $A^pv = \lambda^p v$, deci $\|A^pv\| = |\lambda|^p \, \|v\|$. Cum

$$\lim_{p\to\infty} \|A^pv\| = 0,$$

rezultă că

$$\lim_{p\to\infty} |\lambda|^p \, \|v\| = 0,$$

ceea ce este absurd, deoarece $|\lambda| \geq 1$.

Suficienţa. Presupunem că $\rho(A) < 1$. Fie C o matrice nesingulară cu proprietatea că $C^{-1}AC = J$, unde J este forma Jordan a matricei A.

Dacă λ_1, ..., λ_r sunt valorile proprii ale matricei A atunci există numerele naturale n_1, ..., n_r astfel ca $n_1 + \ldots + n_r = n$ şi

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

unde

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

este o celulă Jordan de ordinul n_i.

Deoarece $C^{-1}A^pC = J^p$ şi

$$J^p = \begin{pmatrix} J_1^p(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2^p(\lambda_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & J_r^p(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

deducem că

$$\lim_{p\to\infty} A^p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{p\to\infty} J^p = 0 \Leftrightarrow \quad \lim_{p\to\infty} J_i^p(\lambda_i) = 0,$$

pentru orice i care satisface $1 \le i \le r$.

Pe de altă parte, avem

$$J_i(\lambda_i) = D + N,$$

unde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_i & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i \end{pmatrix}$$

este matrice diagonală de ordinul n_i şi

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

este o matrice nilpotentă de ordinul n_i, adică are proprietatea $N^{n_i} = 0$.

În continuare avem pentru $p \ge n_i - 1$

$$J_i^p(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{p} C_p^k D^{p-k} N^k = \sum_{k=0}^{n_i-1} C_p^k D^{p-k} N^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} D^{p-k} N^k.$$

Cum $\|D\|_\infty = |\lambda_i| \le \rho(A) < 1$, mai departe rezultă:

$$\|J_i^p(\lambda_i)\|_\infty \le \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} \|D\|_\infty^{p-k} \cdot \|N\|_\infty^k <$$

$$< \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{p^k}{k!} \|D\|_\infty^{p-k} \cdot \|N\|_\infty^k = \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{\|N\|_\infty^k}{k!} \cdot p^k \cdot \|D\|_\infty^{p-k}.$$

Deoarece $\|D\|_\infty < 1$, rezultă că

$$\lim_{p\to\infty} p^k \|D\|_\infty^{p-k} = 0$$

şi mai departe că

$$\lim_{p\to\infty} J_i^p(\lambda_i) = 0.$$

□

Corolar 1.1. *Dacă $\rho(A) < 1$, atunci seria $\sum_{p=0}^{\infty} A^p$ este convergentă, matricea $I - A$ este nesingulară şi*

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$$

Demonstraţie. Dacă notăm cu $S_p = I + A + A^2 + \ldots + A^p$ suma parţială de ordinul p, atunci avem:

$$I - A^{p+1} = (I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^p) = (I - A)S_p.$$

Cum $\rho(A) < 1$, din teorema 1.2 rezultă că

$$\lim_{p\to\infty} A^{p+1} = 0$$

şi deci că există

$$S = \lim_{p\to\infty} S_p.$$

Aşadar, avem $I = (I - A)S$, deci

$$(I - A)^{-1} = S = \sum_{p=0}^{\infty} A^p.$$

□

Definiţia 1.1. *Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Spunem că vectorul $x \geq 0$ (respectiv > 0) dacă $x_i \geq 0$ (respectiv > 0), pentru orice $i = \overline{1, n}$.*

În mod analog, o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este ***nenegativă (pozitivă)*** *dacă $a_{ij} \geq 0$ (> 0), pentru orice $i, j = \overline{1, n}$.*

O matrice A se numeşte ***monotonă*** *dacă este nesingulară şi dacă*

$$A^{-1} \geq 0.$$

Propoziţia 1.1. *Matricea A este monotonă dacă şi numai dacă $Ax \geq 0$ implică $x \geq 0$.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie A monotonă şi fie $Ax \geq 0$. Atunci $x = A^{-1}(Ax) \geq 0$ pentru că $A^{-1} \geq 0$ şi $Ax \geq 0$.

Suficienţa. Fie A cu proprietatea că $Ax \geq 0$ implică $x \geq 0$. Pentru început să observăm că $Ax = 0$ implică $x = 0$. Într-adevăr, dacă $Ax = 0$, atunci $Ax \geq 0$ şi deci $x \geq 0$. Pe de altă parte şi $A(-x) = 0 \geq 0$, deci $-x \geq 0$, adică $x \leq 0$. Aşadar $x = 0$. Prin urmare, sistemul liniar omogen $Ax = 0$ admite numai soluţia banală, de unde deducem că $det\ A \neq 0$, deci că A este nesingulară.

Fie $y \geq 0$ şi fie $x \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $y = Ax \geq 0$. Din ipoteză rezultă că $x \geq 0$.

În continuare avem

$$A^{-1}y = A^{-1}(Ax) = x \geq 0, \text{ pentru orice } y \geq 0.$$

În particular, pentru $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ rezultă că $\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \geq 0$, unde $\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ este prima coloană din matricea $B = A^{-1}$ etc. Aşadar, $A^{-1} \geq 0$, deci A este monotonă. □

Un criteriu practic de monotonie pentru o matrice este următorul:

Teorema 1.3. *Presupunem că matricea A are proprietăţile:*
1) $a_{ij} \leq 0$, *dacă $i \neq j$;*
2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$, *pentru orice $i = \overline{1, n}$.*
Atunci matricea A este monotonă.

Demonstraţie. Din 1) şi 2) rezultă că $a_{ii} > 0$, pentru orice $i = \overline{1,n}$. Fie $D = \text{diag}(a_{ii})$ şi $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{ii}}\right)$. Evident, $D^{-1} > 0$.

Matricea A admite descompunerea $A = D(I-M)$, unde $M = (m_{ij})$ cu $m_{ii} = 0$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, şi $m_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, pentru $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$. Din 1) rezultă că $m_{ij} \geq 0$, deci că $M \geq 0$. Pe de altă parte avem:

$$\sum_{j=1}^{n} |m_{ij}| = -\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{a_{ii}} < 1,$$

deoarece $a_{ii} > 0$ şi $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} > 0$. Rezultă că $\|M\|_\infty < 1$.

Cum $\rho(M) \leq \|M\|_\infty$, deducem că $\rho(M) < 1$. Din corolarul 1.1 rezultă că există $(I-M)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} M^p \geq 0$. Aşadar, A este inversabilă şi $A^{-1} = (I-M)^{-1} \cdot D^{-1} \geq 0$, deci A este monotonă. □

Observaţia 1.3. *Dacă înlocuim ipoteza 2) cu: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq 0$ şi A este nesingulară, concluzia teoremei se păstrează.*

Într-adevăr, fie $B = A + \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$. Pentru $i \neq j$, $b_{ij} = a_{ij} \leq 0$.

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \varepsilon > 0, \text{ pentru orice } i = \overline{1,n}.$$

Din teorema 1.3 rezultă că $B^{-1} = (A + \varepsilon I)^{-1} \geq 0$. Cum A^{-1} există, trecând la limită când $\varepsilon \to 0$ în inegalitatea de mai sus, obţinem că $A^{-1} \geq 0$ şi deci că A este monotonă.

2. O problemă la limită unidimensională

Fie α, $\beta \in \mathbb{R}$, a, $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $a(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0,1]$.

Considerăm următoarea problemă la limită: să se găsească $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ care verifică ecuaţia diferenţială

$$-u''(x) + a(x)u(x) = f(x),\ x \in (0,1) \tag{2.1}$$

şi condiţia la limită:

$$u(0) = \alpha;\ u(1) = \beta. \tag{2.2}$$

Pentru început vom arăta că problema (2.1)-(2.2) are soluţie.

Într-adevăr, fie următoarele probleme Cauchy:

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \\ u(0) = \alpha;\ u'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = 0, \\ u(0) = 0;\ u'(0) = 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Evident, problemele Cauchy (2.3) şi (2.4) admit soluţii unice.

Pentru început arătăm că dacă u_2 verifică problema (2.4), atunci $u_2(1) \neq 0$.

Într-adevăr, amplificând cu $u_2(x)$ identitatea

$$-u_2''(x) + a(x)u_2(x) = 0$$

şi integrând pe $[0,1]$, obţinem

$$\int_0^1 a(x)u_2^2(x)dx = \int_0^1 u_2''(x)u_2(x)dx = u_2'(x)u_2(x)|_0^1 - \int_0^1 [u_2'(x)]^2\, dx =$$

$$= u_2'(1)u_2(1) - u_2'(0)u_2(0) - \int_0^1 [u_2'(x)]^2\, dx.$$

Deoarece $u_2'(0)u_2(0) = 0$, avem:

$$u_2'(1)u_2(1) = \underbrace{\int_0^1 [u_2'(x)]^2\, dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 a(x)u_2^2(x)dx}_{\geq 0} \geq 0. \tag{2.5}$$

Cum $u_2'(0) = 1$, rezultă că u_2' nu este identic nulă pe $[0,1]$, deci că

$$\int_0^1 [u_2'(x)]^2\, dx > 0.$$

Din (2.5) se obţine

$$u_2'(1)u_2(1) > 0.$$

În consecinţă, $u_2(1) \neq 0$.

Fie

$$u(x) = u_1(x) + \frac{\beta - u_1(1)}{u_2(1)} \cdot u_2(x),\ x \in [0,1],$$

unde u_1 este soluţie pentru (2.3) şi u_2 este soluţie pentru (2.4). Avem

$$-u''(x) + a(x)u(x) = -u_1''(x) - \frac{\beta - u_1(1)}{u_2(1)} \cdot u_2''(x) + a(x)u_1(x) +$$
$$+ \frac{\beta - u_1(1)}{u_2(1)} \cdot a(x)u_2(x) = -u_1''(x) + a(x)u_1(x) +$$
$$+ \frac{\beta - u_1(1)}{u_2(1)} \cdot (-u_2''(x) + a(x)u_2(x)) = f(x).$$

Pe de altă parte avem:

$$u(0) = u_1(0) = \alpha;$$
$$u(1) = u_1(1) + \frac{\beta - u_1(1)}{u_2(1)} \cdot u_2(1) = \beta. \qquad \square$$

Fie acum operatorul

$$(\mathcal{L}u)(x) = -u''(x) + a(x)u(x),\ x \in [0,1].$$

Evident, $\mathcal{L}$ este un operator liniar definit pe $\mathcal{C}^2([0,1])$ cu valori în $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Teorema 2.1. (*Principiul de maxim*)
Dacă $\mathcal{L}(u) \leq 0$, *atunci* $u(x) \leq \max\{0; u(0); u(1)\}$, *pentru orice* $x \in [0,1]$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi fie $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon x(1-x),\ x \in [0,1]$.
Atunci rezultă că

$$(\mathcal{L}u_\varepsilon)(x) = -u''(x) - 2\varepsilon + a(x)u(x) - \varepsilon a(x)x(1-x) =$$
$$= (\mathcal{L}u)(x) - 2\varepsilon - \underbrace{\varepsilon a(x)x(1-x)}_{\geq 0} < 0.$$

Pe de altă parte u_ε este mărginită şi îşi atinge marginile pe $[0,1]$. Distingem două cazuri:

Cazul 1. Funcţia u_ε îşi atinge marginea superioară în 0 sau 1. Atunci

$$u_\varepsilon(x) \leq M_\varepsilon = \sup\{u_\varepsilon(x) \mid x \in [0,1]\} = u_\varepsilon(0) \text{ sau } u_\varepsilon(1).$$

Evident că

$$u_\varepsilon(x) \leq \max\{0;\, u_\varepsilon(0);\, u_\varepsilon(1)\}, \text{ pentru orice } x \in [0,1].$$

Cazul 2. Există $x_0 \in (0,1)$ astfel încât $u_\varepsilon(x_0) = M_\varepsilon$. Atunci $u'_\varepsilon(x_0) = 0$ şi $u''_\varepsilon(x_0) \leq 0$. Pe de altă parte, din definiţia operatorului $\mathcal{L}$ avem

$$a(x_0)u_\varepsilon(x_0) = (\mathcal{L}u_\varepsilon)(x_0) + u''_\varepsilon(x_0) < 0.$$

Cum $a(x) \geq 0$, rezultă

$$u_\varepsilon(x_0) < 0 \leq \max\{0;\, u_\varepsilon(0);\, u_\varepsilon(1)\}, \text{ pentru orice } x \in [0,1]. \tag{2.6}$$

Aşadar

$$u_\varepsilon(x) \leq u_\varepsilon(x_0) \leq \max\{0;\, u_\varepsilon(0);\, u_\varepsilon(1)\}, \text{ pentru orice } x \in [0,1].$$

Pe de altă parte

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| = \varepsilon|x(1-x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Rezultă că u_ε converge uniform la u pe intervalul $[0,1]$ când $\varepsilon \to 0$. Dacă în (2.6) facem $\varepsilon \to 0$ rezultă că

$$u(x) \leq \max\{0;\, u(0);\, u(1)\}, \text{ pentru orice } x \in [0,1].$$

□

Corolar 2.1. *Dacă u este soluţie a problemei la limită (2.1)-(2.2), atunci*

$$|u(x)| \leq |\alpha|(1-x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1-x)\,\|f\|\,.$$

Demonstraţie. Fie

$$v(x) = |\alpha|(1-x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1-x)\,\|f\|\,.$$

Observăm că

$$(\mathcal{L}v)(x) = \|f\| + a(x)v(x) \geq \|f\|\,.$$

În continuare avem

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}(u-v) = \mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(v) \leq f - \|f\| \leq 0 \\ (u-v)(0) = u(0) - v(0) = \alpha - |\alpha| \leq 0 \\ (u-v)(1) = u(1) - v(1) = \beta - |\beta| \leq 0 \end{array}.$$

Din principiul de maxim deducem că $u - v \leq 0$.

Analog

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}(-u-v) \leq -f - \|f\| \leq 0 \\ (-u-v)(0) = -\alpha - |\alpha| \leq 0 \\ (-u-v)(1) = -\beta - |\beta| \leq 0 \end{array},$$

de unde deducem că $-u - v \leq 0$.

Aşadar, $u \leq v$, $-u \leq v$, deci $|u| \leq v$. □

Observaţia 2.1. *Problema la limită (2.1)-(2.2) are soluţie unică. Într-adevăr, fie u_1, u_2 două soluţii ale problemei (2.1)-(2.2). Atunci $v = u_1 - u_2$ satisface ecuaţia*

$$-v''(x) + a(x)v(x) = 0,$$

cu condiţia la limită

$$v(0) = v(1) = 0.$$

Din corolarul 2.1 deducem că $v = 0$, adică $u_1 = u_2$.

Aşadar, fiecărui triplet $(\alpha,\ \beta,\ f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([0,1])$*, îi corespunde o singură soluţie* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *pentru problema la limită (2.1)-(2.2). Observăm că aplicaţia liniară* $(\alpha,\ \beta,\ f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}^0([0,1]) \mapsto u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *este continuă în raport cu topologia convergenţei uniforme pe* $\mathcal{C}^0([0,1])$*.*

Într-adevăr, este suficient să verificăm continuitatea în origine. Fie $\alpha_i \to 0,\ \beta_i \to 0,\ f_i \xrightarrow{u} 0$ *pe* $[0,1]$*. Din corolarul 2.1 rezultă că*

$$|u_i(x)| \le |\alpha_i|(1-x) + |\beta_i|x + \frac{1}{2}x(1-x)\,\|f_i\| \le$$

$$\le |\alpha_i| + |\beta_i| + \frac{1}{4}\,\|f_i\| \to 0.$$

Deci

$$u_i \xrightarrow{u} 0 \text{ pe } [0,1].$$

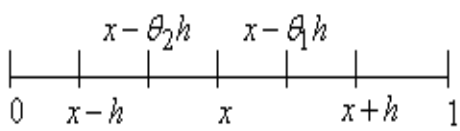
3. Metoda diferenţelor finite pentru problema Dirichlet unidimensională

Pentru început stabilim o formulă de aproximare a derivatei de ordinul II a unei funcţii.

LEMA 3.1. *Dacă* $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$*, atunci pentru orice* $x \in (0,1)$ *şi orice* $h > 0$ *cu proprietatea* $[x-h, x+h] \subset [0,1]$*, există* θ*,* $-1 < \theta < 1$*, astfel încât*

$$\varphi''(x) = \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\varphi^{IV}(x+\theta h). \tag{3.1}$$

DEMONSTRAŢIE. Din formula Taylor rezultă că există $\theta_1,\ \theta_2 \in\ (0,1)$



astfel încât

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1!}\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x) + \frac{h^4}{4!}\varphi^{IV}(x+\theta_1 h)$$

şi

$$\varphi(x-h) = \varphi(x) - \frac{h}{1!}\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) - \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x) + \frac{h^4}{4!}\varphi^{IV}(x-\theta_2 h).$$

Adunând cele două relaţii, obţinem:

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) = 2\varphi(x) + h^2\varphi''(x) + \frac{h^4}{12}\left[\frac{\varphi^{IV}(x+\theta_1 h) + \varphi^{IV}(x-\theta_2 h)}{2}\right].$$

Cum

$$\frac{\varphi^{IV}(x+\theta_1 h) + \varphi^{IV}(x-\theta_2 h)}{2}$$

se află între $\varphi^{IV}(x+\theta_1 h)$ şi $\varphi^{IV}(x-\theta_2 h)$, din proprietatea Darboux a funcţiei φ^{IV} pe intervalul $[0,1]$ rezultă că există $\theta \in (-1,1)$ satisfăcând $x-\theta_2 h < x+\theta h < x+\theta_1 h$, astfel încât

$$\frac{\varphi^{IV}(x+\theta_1 h) + \varphi^{IV}(x-\theta_2 h)}{2} = \varphi^{IV}(x+\theta h).$$

Aşadar, avem

$$\varphi''(x) = \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\varphi^{IV}(x+\theta h), \ -1 < \theta < 1.$$

□

Observaţia 3.1. 1) *Dacă* $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,1])$, *atunci:*

$$\left|\varphi''(x) - \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2}\right| \leq \frac{M_4}{12} \cdot h^2,$$

unde

$$M_4 = \sup\{|\varphi^{IV}(x)| \mid x \in [0,1]\}.$$

2) *Dacă* $\varphi \in \mathcal{C}^3([0,1])$, *atunci:*

$$\left|\varphi''(x) - \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2}\right| \leq \frac{M_3 h}{3},$$

unde

$$M_3 = \sup\{|\varphi'''(x)| \mid x \in [0,1]\}.$$

3) *Dacă* $\varphi \in \mathcal{C}^2([0,1])$, *atunci:*

$$\left|\varphi''(x) - \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2}\right| \leq \omega(\varphi'', h),$$

unde

$$\omega(\varphi'', h) = \sup\{|\varphi''(x) - \varphi''(y)| \ ; \ x, y \in [0,1], |x-y| < h\}$$

este modulul de continuitate al funcţiei $\varphi''(x)$.

Într-adevăr 1) *rezultă din formula (3.1). Pentru a dovedi* 2) *scriem formula Taylor cu restul de ordinul 2 şi obţinem*

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) = 2\varphi(x) + h^2\varphi''(x) + \frac{h^3}{6}\left[\varphi'''(x+\theta_1 h) - \varphi'''(x-\theta_2 h)\right].$$

În continuare avem:

$$\left|\varphi''(x) - \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2}\right| =$$

$$= \frac{h}{6}\left|\varphi'''(x+\theta_1 h) - \varphi'''(x-\theta_2 h)\right| \leq \frac{M_3 h}{3}.$$

Dacă $\varphi \in \mathcal{C}^2([0,1])$, *atunci folosind formula Taylor cu restul de ordinul 1, obţinem:*

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) = 2\varphi(x) + h^2\frac{\varphi''(x+\theta_1 h) + \varphi''(x-\theta_2 h)}{2}.$$

Procedând ca în demonstraţia lemei 3.1, arătăm că există θ *care satisface* $-1 < \theta < 1$ *astfel încât*

$$\frac{\varphi''(x+\theta_1 h) + \varphi''(x-\theta_2 h)}{2} = \varphi''(x+\theta h).$$

În continuare avem:

$$\frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} = \varphi''(x+\theta h),$$

cu $-1 < \theta < 1$ *şi mai departe:*

$$\left|\varphi''(x) - \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2}\right| = |\varphi''(x) - \varphi''(x+\theta h)| \leq \omega(\varphi'', h),$$

unde

$$\omega(\varphi'', h) = \sup_{|t-s|<h} |\varphi''(t) - \varphi''(s)|.$$

Reamintim acum problema Dirichlet unidimensională. Fie $a, f \in C^0([0,1])$, cu $a(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0,1]$. Fie de asemenea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Problema Dirichlet constă în determinarea unei funcţii $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ care verifică ecuaţia diferenţială şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} -u''(x) + a(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = \alpha;\ u(1) = \beta \end{cases} \tag{3.2}$$

Considerăm $N+2$ noduri $x_i = ih,\ i = 0, 1, ..N+1$, unde $h = \frac{1}{N+1}$, echidistante ale intervalului $[0,1]$ şi discretizăm problema (3.2) în nodurile interioare. Notăm cu $u_i = u(x_i)$, $a_i = a(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Aplicând formula (3.1) din lema 3.1 în nodurile interioare $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$, obţinem:

$$\begin{cases} -\frac{u_2 - 2u_1 + \alpha}{h^2} + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_1 + \theta_1 h) + a_1 u_1 = f_1, \\ -\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_2 + \theta_2 h) + a_2 u_2 = f_2, \\ \ldots \\ -\frac{u_N - 2u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2} + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_{N-1} + \theta_{N-1} h) + a_{N-1} u_{N-1} = f_{N-1}, \\ -\frac{\beta - 2u_N + u_{N-1}}{h^2} + \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_N + \theta_N h) + a_N u_N = f_N \end{cases}. \tag{3.3}$$

Sistemul (3.3) se poate pune sub forma

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{h^2} + a_1\right) u_1 - \frac{1}{h^2} u_2 = f_1 + \frac{\alpha}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_1 + \theta_1 h), \\ -\frac{u_1}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + a_2\right) u_2 - \frac{u_3}{h^2} = f_2 - \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_2 + \theta_2 h), \\ \ldots \\ -\frac{u_{N-2}}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + a_{N-1}\right) u_{N-1} - \frac{u_N}{h^2} = f_{N-1} - \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_{N-1} + \theta_{N-1} h), \\ -\frac{u_{N-1}}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + a_N\right) u_N = f_N + \frac{\beta}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{IV}(x_N + \theta_N h) \end{cases}. \tag{3.4}$$

Introducem notaţiile:

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} (2 + a_1 h^2) & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & (2 + a_2 h^2) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & (2 + a_{N-1} h^2) & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & (2 + a_N h^2) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}; \tilde{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}; \partial\tilde{f} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}; \eta(u) = -\frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} u^{IV}(x_1 + \theta_1 h) \\ \vdots \\ u^{IV}(x_N + \theta_N) \end{pmatrix}.$$

Cu aceste notaţii sistemul (3.4) devine

$$A\tilde{u} = \tilde{f} + \partial\tilde{f} + \eta(u). \tag{3.5}$$

Metoda diferenţelor finite constă în neglijarea termenului $\eta(u)$ în sistemul (3.5). Obţinem astfel următoarea problemă aproximativă

$$Au_h = \tilde{f} + \partial\tilde{f}. \tag{3.6}$$

Aşadar, vom aproxima soluţia $(u_i)_{1\le i\le n}$ a sistemului (3.5), deci valorile soluţiei exacte a problemei (3.2) în nodurile interioare x_1, x_2,..., x_N, cu soluţia aproximativă $(u_h)_i$ a sistemului (3.6).

Teorema 3.1. *Matricea A este monotonă. Mai mult, dacă $Aw = g$, atunci*

$$|w_i| \le \frac{1}{2} x_i(1 - x_i) \|g\|_\infty, \ i = \overline{1, N}.$$

Demonstraţie.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \begin{cases} 1 + a_1 h^2, & \text{dacă } i = 1 \\ a_i h^2, & \text{dacă } 1 < i < N \\ 1 + a_N h^2, & \text{dacă } i = N \end{cases}.$$

Distingem două cazuri.

Cazul 1. Presupunem că $a(x) > 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$. Atunci

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0, \text{ pentru orice } i = \overline{1, N}.$$

Pe de altă parte $a_{ij} \le 0$, pentru $i \ne j$, deci A este monotonă.

Fie w astfel încât $Aw = g$, fie

$$\underline{w}(x) = \frac{1}{2} x(1 - x) \|g\|_\infty$$

şi fie

$$H(x) = -\underline{w}''(x) + a(x)\underline{w}(x).$$

Cum $\underline{w}''(x) = -\|g\|_\infty$, rezultă că

$$H(x) = \|g\|_\infty + a(x)\underline{w}(x) \ge |g(x)|, \text{ pentru orice } x.$$

Observăm că $\underline{w}$ este soluţie pentru problema Dirichlet:

$$\begin{cases} -\underline{w}''(x) + a(x)\underline{w}(x) = H(x) \\ \underline{w}(0) = 0; \ \underline{w}(1) = 0; \end{cases} \tag{3.7}$$

Mai mult $\underline{w}^{IV}(x) = 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

Dacă discretizăm problema (3.7), obţinem sistemul

$$A\underline{w} = \tilde{H},$$

pentru că $\partial f = 0$ ($\alpha = 0, \ \beta = 0$) şi $\eta(u) = 0$.

În continuare avem $A(\underline{w} - w) = H - g \geq 0$ şi $A(\underline{w} + w) = H + g \geq 0$.

Cum A este monotonă, deducem că $\underline{w} \geq w$ şi $\underline{w} \geq -w$, deci că $|w| \leq \underline{w}$ sau

$$|w_i| \leq \frac{1}{2} x_i(1 - x_i) \|g\|_\infty .$$

Cazul 2. Dacă $a(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, 1]$, atunci considerăm sistemul echivalent

$$(A + \varepsilon I)w = g + \varepsilon w.$$

Matricea $B = A + \varepsilon I$ este evident monotonă. Din prima parte a demonstraţiei deducem că

$$|w_i| \leq \frac{1}{2} x_i(1 - x_i) \|g + \varepsilon w\|_\infty , \text{ pentru orice } \varepsilon > 0.$$

Trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$, obţinem

$$|w_i| \leq \frac{1}{2} x_i(1 - x_i) \|g\|_\infty . \tag{3.8}$$

Rămâne să arătăm că A este monotonă. Cum

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq 0, \text{ pentru orice } i = \overline{1, N}$$

şi

$$a_{ij} \leq 0, \text{ pentru } i \neq j,$$

rămâne să arătăm că A este nesingulară. Dar din (3.8) rezultă că dacă $g = 0$, atunci $w = 0$.

Aşadar sistemul $Aw = 0$, admite numai soluţia banală, deci A este nesingulară. □

Teorema 3.2. *(Gersghorin)*
Dacă

$$A\tilde{u} = \tilde{f} + \partial \tilde{f} + \eta(u)$$

şi

$$Au_h = \tilde{f} + \partial \tilde{f},$$

atunci

$$|u(x_i) - u_h(x_i)| \leq M_4 \cdot \frac{h^2}{24} x_i(1 - x_i), \; i = \overline{1, N}$$

şi

$$\|\tilde{u} - u_h\|_\infty \leq \frac{M_4}{96} \cdot h^2.$$

Demonstraţie. Cum

$$A(u - u_h) = \eta(u),$$

din teorema 3.1 deducem că

$$|u(x_i) - u_h(x_i)| \leq \frac{1}{2} x_i(1 - x_i) \|\eta(u)\| \leq \frac{M_4 h^2}{24} x_i(1 - x_i).$$

Pe de altă parte

$$\|x(1 - x)\| = \frac{1}{4},$$

deci

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M_4 h^2}{96}.$$

□

EXEMPLUL 3.1. *Fie problema la limită*

$$\begin{cases} -u'' + u = 1, \\ u(0) = 1;\ u(1) = e. \end{cases}.$$

Soluţia exactă este

$$u(x) = \frac{e}{e+1}(e^x - e^{-x}) + 1.$$

Matricea A este

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} (2+h^2) & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (2+h^2) & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & (2+h^2) & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & (2+h^2) \end{pmatrix},$$

unde $h = \frac{1}{N+1}$;

$$f + \partial f = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{h^2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 + \frac{e}{h^2} \end{pmatrix}.$$

Soluţiile sistemului

$$Au_h = f + \partial f,$$

pentru $N = 9$ vor fi prezentate în continuare. Programul a fost scris în mathcad.

$ORIGIN := 1$

$N := 9 \qquad h := \frac{1}{N+1}$

$i := 1..N \qquad A_{i,i} := 2 + h^2$

$k := 2..N \qquad A_{k,k-1} := -1 \qquad A_{k-1,k} := -1$

$A := \frac{1}{h^2} \cdot A$

$b_1 := 1 + \frac{1}{h^2} \qquad b_N := \frac{e}{h^2} + 1 \qquad k := 2..N-1 \qquad b_k := 1$

$$A = \begin{pmatrix} 201 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 201 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 201 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 201 & -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 201 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 201 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 201 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 201 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -100 & 201 \end{pmatrix}$$

$$b^T = (101 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 272.828)$$

$$u := A^{-1} \cdot b$$

$$U(x) := \frac{e}{e+1} \cdot \left(e^{x} - e^{-x}\right) + 1 \qquad j := 1..N \qquad x_j := j \cdot h$$

Solutia exacta Solutia aproximativa

$$U(x) = \begin{pmatrix} 1.14646 \\ 1.29438 \\ 1.44524 \\ 1.60057 \\ 1.7619 \\ 1.93086 \\ 2.10914 \\ 2.29851 \\ 2.50089 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 1.14647 \\ 1.29441 \\ 1.4453 \\ 1.60063 \\ 1.76198 \\ 1.93094 \\ 2.10921 \\ 2.29857 \\ 2.50092 \end{pmatrix}$$

4. O problemă la limită bidimensională

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu (o mulţime conexă şi deschisă) mărginit, fie Γ frontiera sa, despre care presupunem că este de clasă $\mathcal{C}^\infty$, fie a, $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $a \geq 0$, şi fie $g \in \mathcal{C}^2(\Gamma)$.

Problema Dirichlet constă în determinarea unei funcţii $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ care verifică ecuaţia

$$-\Delta u(x,y) + a(x,y)u(x,y) = f(x,y), \text{ pentru orice } (x,y) \in \Omega, \tag{4.1}$$

şi condiţia la limită

$$u(x,y) = g(x,y), \text{ pentru orice } (x,y) \in \Gamma. \tag{4.2}$$

Notăm cu

$$(\mathcal{L}u)(x,y) = -\Delta u(x,y) + a(x,y)u(x,y), \; (x,y) \in \overline{\Omega}. \tag{4.3}$$

Evident

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$$

TEOREMA 4.1. ***(Principiul de maxim)***
Dacă $\mathcal{L}(u) \leq 0$*, atunci* $u(x,y) \leq \max(0; \sup_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y))$.

DEMONSTRAŢIE. Deoarece Ω este mărginit, rezultă că există $R > 0$ astfel încât $\overline{\Omega} \subset B(0;\ R)$ (bila cu centrul în origine şi de rază R).

Fie $u_\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, definită astfel:

$$u_\varepsilon(x,y) = u(x,y) - \varepsilon(R^2 - x^2 - y^2),\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Deoarece

$$\Delta u_\varepsilon(x,y) = \Delta u(x,y) + 4\varepsilon$$

rezultă că

$$(\mathcal{L}u_\varepsilon)(x,y) = (\mathcal{L}u)(x,y) - 4\varepsilon - \varepsilon a(x,y)(R^2 - x^2 - y^2) <$$
$$< (\mathcal{L}u)(x,y) \leq 0.$$

Aşadar

$$(\mathcal{L}u_\varepsilon)(x,y) < 0, \text{ pentru orice } (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Dacă

$$M_\varepsilon = \sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u_\varepsilon(x,y) = \sup_{(x,y)\in\Gamma} u_\varepsilon(x,y),$$

atunci, evident

$$u_\varepsilon(x,y) \leq \max(0;\ \sup_{(x,y)\in\Gamma} u_\varepsilon(x,y)).$$

Dacă există $(x_0, y_0) \in \Omega$ astfel încât

$$M_\varepsilon = u_\varepsilon(x_0, y_0),$$

atunci

$$\begin{cases} (du_\varepsilon)(x_0,y_0) = 0 \\ \\ \Delta u_\varepsilon(x_0,y_0) \leq 0 \end{cases}.$$

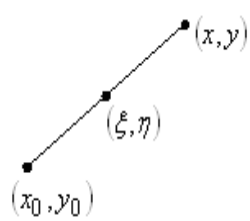
Într-adevăr, $(x_0, y_0) \in \Omega$ fiind un punct de maxim local, există o vecinătate a sa, $V \subset \Omega$ astfel încât

$$u_\varepsilon(x,y) - u_\varepsilon(x_0,y_0) \leq 0, \text{ pentru orice } (x,y) \in V.$$

Dar

$$u_\varepsilon(x,y) - u_\varepsilon(x_0,y_0) = \underbrace{du_\varepsilon(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 u_\varepsilon(\xi,\eta),$$

unde (ξ, η) este interior segmentului de dreaptă de capete (x_0, y_0) şi (x, y).



Rezultă că

$$d^2u_\varepsilon(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(\xi,\eta)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \leq 0, \text{ pentru orice } (x,y)\in V.$$

Pentru $y = y_0$ rezultă

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(\xi,\eta)(x-x_0)^2 \leq 0,$$

deci

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(\xi,\eta) \leq 0.$$

Afirm că

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0,y_0) \leq 0.$$

Într-adevăr, dacă presupunem că

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0,$$

atunci există o vecinătate $V' = B((x_0,y_0);\varepsilon) \subset V$ astfel încât

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,y) > 0, \text{ pentru orice } (x,y)\in V'.$$

Alegând $(x',y')\in V'$, $y' = y_0$, rezultă că există $(\xi',\eta')\in V'$ astfel încât

$$u_\varepsilon(x',y') - u_\varepsilon(x_0,y_0) = \frac{1}{2}d^2u_\varepsilon(\xi',\eta') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(\xi',\eta')(x-x_0)^2 > 0,$$

ceea ce contrazice faptul că (x_0,y_0) este punct de maxim local.

Aşadar,

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0,y_0) \leq 0$$

şi analog

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}(x_0,y_0) \leq 0,$$

deci $\Delta u_\varepsilon(x_0,y_0) \leq 0$.

În continuare avem:

$$(\mathcal{L}u_\varepsilon)(x_0,y_0) = -\Delta u_\varepsilon(x_0,y_0) + a(x_0,y_0)u_\varepsilon(x_0,y_0),$$

deci

$$u_\varepsilon(x_0,y_0)a(x_0,y_0) = (\mathcal{L}u_\varepsilon)(x_0,y_0) + \Delta u_\varepsilon(x_0,y_0) < 0.$$

Cum $a(x_0,y_0) \geq 0$, rezultă că $u_\varepsilon(x_0,y_0) \leq 0$.

Prin urmare avem:

$$u_\varepsilon(x,y) \leq u_\varepsilon(x_0,y_0) \leq 0 \leq \max(0; \sup_{(x,y)\in\Gamma} u_\varepsilon(x,y)).$$

□

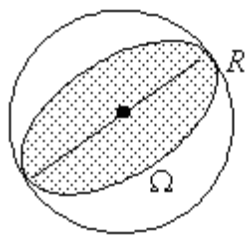
COROLAR 4.1. *Dacă $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ este soluţie pentru problema Dirichlet (4.1)-(4.2), atunci*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{D^2}{16} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty ,$$

unde $D = 2R$ este diametrul domeniului Ω.

DEMONSTRAŢIE. Fie $v : \Omega \to \mathbb{R}$ funcţia definită astfel:

$$v(x, y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{4} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty , \ (x, y) \in \Omega.$$



Atunci

$$\Delta v(x, y) = - \|f\|_\infty$$

şi

$$(\mathcal{L}v)(x, y) = \|f\|_\infty + \underbrace{a(x, y)v(x, y)}_{\geq 0} \geq \|f\|_\infty ,$$

deci

$$-(\mathcal{L}v)(x, y) \leq - \|f\|_\infty .$$

În continuare avem:

$$\mathcal{L}(u - v) = \mathcal{L}u - \mathcal{L}v = f - \|f\|_\infty \leq 0.$$

Dacă $(x, y) \in \Gamma$, atunci $v\,(x, y) \geq \|g\|_\infty$ şi

$$u(x, y) - v(x, y) = g(x, y) - v(x, y) \leq 0.$$

Din teorema 4.1 deducem acum că $u - v \leq 0$, deci $u \leq v$.
În mod analog, avem

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(-u - v) \leq 0 \\ \\ (-u - v)|_\Gamma \leq 0 \end{array}\right\}, \text{ deci } -u - v \leq 0 \text{ sau } -u \leq v.$$

Aşadar

$$|u| \leq v$$

sau

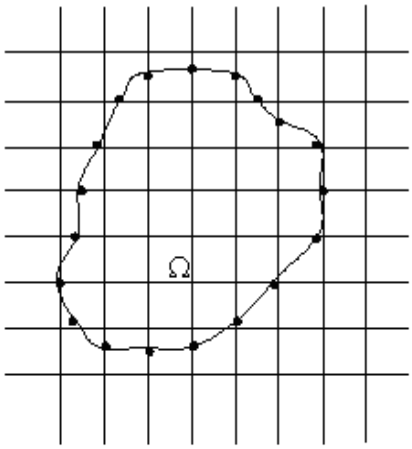
$$\|u\|_\infty \leq \frac{R^2}{4} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty = \frac{D^2}{16} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

□

Admitem următoarea teoremă de existenţă şi unicitate:

Teorema 4.2. *Dacă f este continuă şi lipschitziană pe $\overline{\Omega}$, $g \in \mathcal{C}^2(\Gamma)$ şi g'' este lipschitziană, atunci problema (4.1)-(4.2) are soluţie unică. Dacă $f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, derivatele parţiale de ordinul k sunt lipschitziene, $g \in \mathcal{C}^{k+2}(\Gamma)$ şi $g^{(k+2)}$ este lipschitziană pe Γ, atunci $u \in \mathcal{C}^{k+2}(\overline{\Omega})$.*

5. Metoda diferenţelor finite pentru problema Dirichlet bidimensională



Fie

$$R_h = \{(ih, jh);\ i, j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\Omega_h = R_h \cap \Omega = \text{mulţimea nodurilor interioare},$$

$$\Gamma_h = \{M(x, y) \in \Gamma \mid x = ih \text{ sau } y = jh\},$$

$$\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h.$$

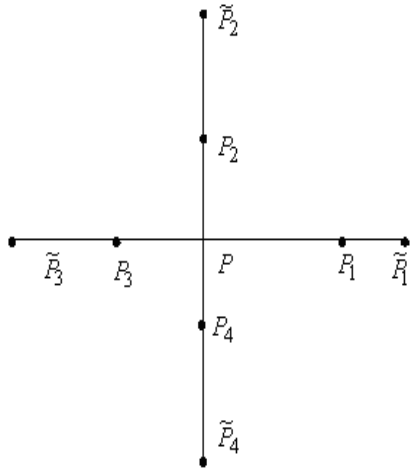
Fie nodul interior $P(ih, jh) \in \Omega$ şi fie punctele vecine $P_1(ih+h_1, jh)$; $P_2(ih, jh+h_2)$; $P_3(ih - h_3, jh)$; $P_4(ih, jh - h_4)$.

Vrem să aproximăm derivata

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P).$$

Pentru aceasta considerăm punctele

$$\tilde{P}_1(ih + h, jh);\ \tilde{P}_2(ih, jh + h);\ \tilde{P}_3(ih - h, jh);\ \tilde{P}_4(ih, jh - h).$$



Valorile funcţiei u în punctele $\tilde{P}_i$ le obţinem prin extrapolare liniară.

De exemplu, pentru $\tilde{P}_1$ considerăm polinomul Lagrange $L_1\left(x; P, P_1\right)$ de noduri P şi P_1. Avem:

$$\begin{aligned} L_1\left(x; P, P_1\right) &= \frac{x - ih - h_1}{ih - ih - h_1} u(P) + \frac{x - ih}{ih + h_1 - ih} u(P_1) \\ &= \left(1 - \frac{x - ih}{h_1}\right) u(P) + \frac{x - ih}{h_1} u(P_1) \end{aligned}$$

Observăm că

$$L_1(P) = u(P),\ L_1(P_1) = u(P_1)$$

şi definim

$$\tilde{u}(\tilde{P}_1) = L_1(\tilde{P}_1) = \left(1 - \frac{h}{h_1}\right) u(P) + \frac{h}{h_1} u(P_1).$$

În mod analog, polinomul Lagrange pentru nodurile P_3 şi P este

$$L_1(x;\ P_3, P) = \left(1 + \frac{x - ih}{h_3}\right) u(P) - \frac{x - ih}{h_3} u(P_3)$$

şi

$$\tilde{u}(\tilde{P}_3) = L_1(ih - h;\ P_3, P) = \left(1 - \frac{h}{h_3}\right) u(P) + \frac{h}{h_3} u(P_3).$$

De asemenea avem:

$$\tilde{u}(\tilde{P}_2) = \left(1 - \frac{h}{h_2}\right) u(P) + \frac{h}{h_2} u(P_2)$$

$$\tilde{u}(\tilde{P}_4) = \left(1 - \frac{h}{h_4}\right) u(P) + \frac{h}{h_4} u(P_4).$$

Din formula (3.1) din lema 3.1 deducem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) \approx \frac{\tilde{u}(P_1) - 2u(P) + \tilde{u}(P_3)}{h^2} =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\left(1 - \frac{h}{h_1}\right) u(P) + \frac{h}{h_1} u(P_1) - 2u(P) + \left(1 - \frac{h}{h_3}\right) u(P) + \frac{h}{h_3} u(P_3)\right] =$$

$$= \frac{u(P_1)}{hh_1} + \frac{u(P_3)}{hh_3} - \frac{1}{h} \cdot \frac{h_1 + h_3}{h_1 h_3} u(P).$$

O formulă analoagă se obţine pentru $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P)$. Dacă notăm cu $\Delta_h^{(1)}$ valoarea aproximativă a laplasianului, atunci:

$$\Delta_h^{(1)} u(x,y) = \frac{u(P_1)}{hh_1} + \frac{u(P_2)}{hh_2} + \frac{u(P_3)}{hh_3} + \frac{u(P_4)}{hh_4} - \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{h_1 + h_3}{h_1 h_3} + \frac{h_2 + h_4}{h_2 h_4} \right) u(P).$$

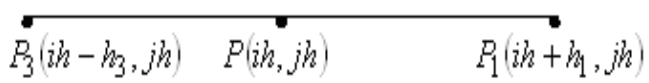
Din 3), observaţia 3.1 la lema 3.1, deducem

$$|\Delta_h^{(1)} u(P) - \Delta u(P)| \leq \omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, h \right) + \omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, h \right) \leq 4M_2,$$

unde

$$M_2 = \sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \right|;\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \right|;\ (x,y) \in \overline{\Omega} \right\}.$$

O a doua posibilitate de aproximare este să folosim polinomul Lagrange pentru trei noduri:



$$L_2(x;\ P_3, P, P_1) = \frac{(x - ih)(x - ih - h_1)}{-h_3(-h_3 - h_1)} u(P_3) + \frac{(x - ih + h_3)(x - ih - h_1)}{h_3(-h_1)} u(P) +$$

$$+ \frac{(x - ih + h_3)(x - ih)}{(h_3 + h_1)h_1} u(P_1),$$

$$\tilde{u}(\tilde{P_1}) = L_2(ih + h) = \frac{h(h - h_1)}{h_3(h_1 + h_3)} u(P_3) - \frac{(h + h_3)(h - h_1)}{h_1 h_3} u(P) + \frac{(h + h_3)h}{h_1(h_1 + h_3)} u(P_1).$$

În mod analog,

$$\tilde{u}(\tilde{P_3}) = \frac{(h - h_3)h}{h_1(h_1 + h_3)} u(P_1) - \frac{(h + h_1)(h - h_3)}{h_1 h_3} u(P) + \frac{h(h_1 + h)}{h_3(h_1 + h_3)} u(P_3).$$

În continuare avem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P) \approx \frac{\tilde{u}(P_3) - 2u(P) + \tilde{u}(P_1)}{h^2} =$$

$$= \frac{1}{h^2} \left[\frac{h(h + h_3)}{h_1(h_1 + h_3)} u(P_1) - \frac{(h - h_1)(h + h_3)}{h_1 h_3} u(P) + \frac{h(h - h_1)}{h_3(h_1 + h_3)} u(P_3) - 2u(P) + \right.$$

$$\left. + \frac{h(h - h_3)}{h_1(h_1 + h_3)} u(P_1) - \frac{(h + h_1)(h - h_3)}{h_1 h_3} u(P) + \frac{h(h + h_1)}{h_3(h_1 + h_3)} u(P_3) \right] =$$

$$= \frac{2u(P_1)}{h_1(h_1 + h_3)} + \frac{2u(P_3)}{h_3(h_1 + h_3)} - \frac{2u(P)}{h_1 h_3}.$$

Dacă notăm cu $\Delta_h^{(2)}$ valoarea aproximativă a laplasianului pentru aproximarea de ordinul 2, atunci

$$\Delta_h^{(2)}u(P) = \frac{2u(P_1)}{h_1(h_1+h_3)} + \frac{2u(P_2)}{h_2(h_2+h_4)} + \frac{2u(P_3)}{h_3(h_1+h_3)} + \frac{2u(P_4)}{h_4(h_2+h_4)} - \left(\frac{2}{h_1h_3} + \frac{2}{h_2h_4}\right)u(P).$$

Dacă $u \in C^3\left(\bar{\Omega}\right)$ şi

$$M_3 = \max\left\{\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,y)\right|,\ \left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,y)\right| \mid (x,y) \in \overline{\Omega}\right\},$$

atunci din observaţia 3.1 la lema 3.1 , deducem că

$$|\Delta_h^{(2)}u(P) - \Delta u(P)| \leq \frac{2}{3}M_3 h.$$

În sfârşit, dacă $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ şi $u \in C^4\left(\bar{\Omega}\right)$, atunci

$$\Delta_h^{(1)}u(P) = \Delta_h^{(2)}u(P) = \Delta_h u(P) = \frac{u(P_1)+u(P_2)+u(P_3)+u(P_4)-4u(P)}{h^2}$$

şi

$$|\Delta_h^{(i)}u(P) - \Delta u(P)| \leq \frac{M_4}{6}h^2,\ i = 1,\ 2.$$

Metoda diferenţelor finite constă în înlocuirea problemei la limită

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + a(x,y)u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega \\ u_{|\Gamma} = g \end{cases} \tag{5.1}$$

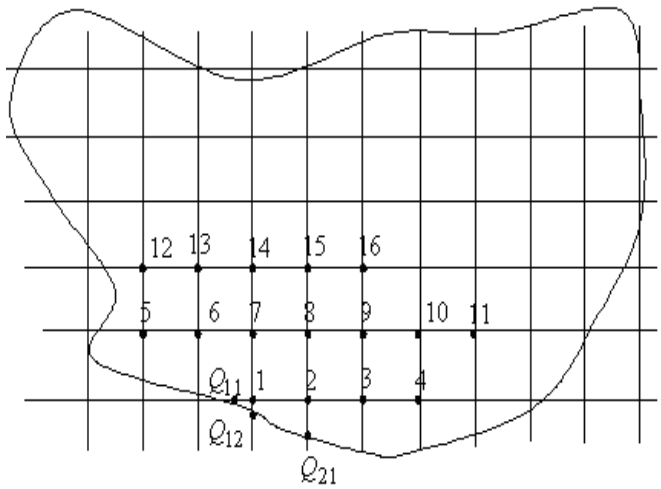
cu determinarea unei funcţii $u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ care verifică sistemul

$$\begin{cases} -\Delta_h^{(i)}u_h(P) + a(P)u_h(P) = f(P), \text{ pentru orice } P \in \Omega_h \\ u_h(P) = g(P), \text{ pentru orice } P \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{5.2}$$

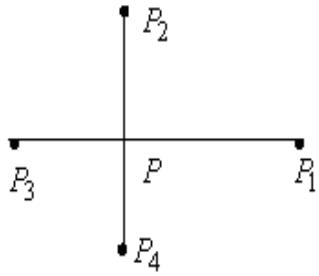
unde în cazul aproximării liniare ($i = 1$) avem:

$$\Delta^{(1)}u(P) = \frac{u(P_1)}{hh_1} + \frac{u(P_2)}{hh_2} + \frac{u(P_3)}{hh_3} + \frac{u(P_4)}{hh_4} - \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{h_1+h_3}{h_1h_3} + \frac{h_2+h_4}{h_2h_4}\right)u(P).$$

Considerăm domeniul Ω din figura următoare şi ne propunem să aproximăm laplacianul în nodul interior 1, care are în vecinătatea sa puncte de pe frontiera Γ_h.



Notînd nodul cu P şi cu P_i cele patru noduri vecine avem situaţia din figura următoare



Fie $u_i = u(P_i)$, $a_i = a(P_i)$ şi $f_i = f(P_i)$.
Notăm cu Q_{11} şi Q_{12} punctele din Γ_h vecine cu P_1.

$$\Delta_h^{(1)}(P_1) = \frac{u_2}{h^2} + \frac{u_7}{h^2} + \frac{g(Q_{11})}{hh_3} + \frac{g(Q_{12})}{hh_4} - \frac{1}{h}\left(\frac{h+h_3}{hh_3} + \frac{h+h_4}{hh_4}\right)u_1.$$

Înlocuind în (5.2) rezultă

$$\frac{1}{h^2}\left[\left(2 + \frac{h}{h_3} + \frac{h}{h_4} + a_1h^2\right)u_1\right] - \frac{u_2}{h^2} - \frac{u_7}{h^2} = f_1 + \frac{g(Q_{11})}{hh_3} + \frac{g(Q_{12})}{hh_4}. \tag{5.3}$$

În mod analog, în nodul P_2 avem:

$$-\left[\frac{u_3}{h^2} + \frac{u_8}{h^2} + \frac{u_1}{h^2} + \frac{g(Q_{21})}{hh_1} - \frac{1}{h^2}\left(3 + \frac{h}{h_4}\right)u_2\right] + a_2u_2 = f_2$$

sau

$$\frac{1}{h^2}\left[-u_1 + \left(3 + \frac{h}{h_4} + a_2h^2\right)u_2 - u_3 - u_8\right] = f_2 + \frac{g(Q_{21})}{hh_4}. \tag{5.4}$$

În nodul P_8 care nu are puncte vecine în Γ_h, avem:

$$-\left[\frac{u_9}{h^2}+\frac{u_{15}}{h^2}+\frac{u_7}{h^2}+\frac{u_2}{h^2}-\frac{1}{h}\left(\frac{2h}{h^2}+\frac{2h}{h^2}\right)u_8\right]+a_8u_8=f_8$$

sau

$$\frac{1}{h^2}\left[-u_2-u_7+\left(4+h^2a_8\right)u_8-u_9-u_{15}\right]=f_8 \ etc.$$

Fie $A^{(1)}=\left(a_{i,j}^{(1)}\right)$ matricea coeficienţilor sistemului cu necunoscutele u_i. Atunci din formulele precedente (5.3), (5.4) avem de exemplu pentru $i=1$ singurele elemente nenule

$$a_{1,1}^{(1)}=2+\frac{h}{h_3}+\frac{h}{h_4}+a_1h^2,\ a_{1,2}^{(1)}=a_{1,7}^{(1)}=-1$$

Pentru $i=2$ elementele nenule sunt

$$a_{2,1}^{(1)}=a_{3,1}^{(1)}=a_{8,1}^{(1)}=-1,\ a_{2,2}^{(1)}=3+\frac{h}{h_4}+a_2h^2$$

În final se obţine sistemul:

$$A^{(1)}u_h(P)=f(P)+\partial g^{(1)}(P),$$

unde

$$\partial g^{(1)}(P)=0$$

dacă P este un nod interior care nu are puncte vecine pe frontieră şi

$$\partial g^{(1)}(P)=\sum_{Q_i\in\Gamma_h,\ Q_i \text{ este vecin cu } P}\frac{g(Q_i)}{hh_i}.$$

În mod analog

$$\Delta_h^{(2)}(P_1)=\frac{2u_2}{h(h+h_3)}+\frac{2u_7}{h(h+h_4)}+\frac{2g(Q_{11})}{h_3(h+h_3)}+\frac{2g(Q_{12})}{h(h+h_4)}-\frac{2}{h}\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)u_1.$$

În continuare avem:

$$-\Delta_h^{(2)}(P_1)+a_1u_1=\left[\frac{2}{h}\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)+a_1\right]u_1-\frac{2}{h(h+h_3)}u_2-\frac{2}{h(h+h_4)}u_7=$$
$$=f_1+\frac{2g(Q_{11})}{h_3(h+h_3)}+\frac{2g(Q_{12})}{h_4(h+h_4)}$$

şi mai departe

$$\frac{2}{h}\left[\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}+\frac{a_1h}{2}\right)u_1-\frac{2}{h(h+h_3)}u_2-\frac{2}{h(h+h_4)}u_7\right]=f_1+\frac{2g(Q_{11})}{h_3(h+h_3)}+\frac{2g(Q_{12})}{h(h+h_4)}.$$

În nodul P_8 care nu are puncte vecine pe frontieră se obţine

$$-\left(\frac{u_9}{h^2}+\frac{u_{15}}{h^2}+\frac{u_7}{h^2}+\frac{u_2}{h^2}-\frac{4u_8}{h^2}\right)+a_8u_8=f_8$$

sau

$$\frac{1}{h^2}\left[-u_2-u_7+(4+h^2a_8)u_8-u_9-u_{15}\right]=f_8$$

etc.

Sub formă matriceală sistemul arată astfel:

$$A^{(2)}u_h(P)=f(P)+\partial g^{(2)}(P),$$

unde

$$\partial g^{(2)}(P) = 0$$

dacă P nu are puncte vecine pe frontieră respectiv

$$\partial g^{(2)}(P) = \sum_{Q_i \in \Gamma_h,\ Q_i \text{ vecin cu } P} \frac{2g(Q_i)}{h_i(h_i + h_j)}.$$

Soluţia exactă a problemei (5.1) verifică sistemul:

$$A^{(1)}u = f + \partial g + \eta(u) + \partial\eta^{(1)}(u),$$

unde $\eta(u)$ este eroarea care intervine la aproximarea laplasianului $\Delta(P)$ cu $\Delta^{(1)}(P)$ în orice punct interior care nu are puncte vecine pe frontieră.

Dacă $u \in C^4\left(\bar{\Omega}\right)$, rezultă că

$$\|\eta(u)\|_\infty \leq \frac{M_4}{6}h^2,$$

unde

$$M_4 = \max\left\{\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|,\ \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|\right\}.$$

Dacă

$$(\eta(u))_i \neq 0 \Longrightarrow (\partial\eta^{(1)}(u))_i = 0$$

şi reciproc, $\partial\eta^{(1)}(u)$ provenind din aproximarea laplasianului $\Delta(P)$ cu $\Delta^{(1)}(P)$ într-un punct interior, care are puncte vecine pe frontieră.

Rezultă că

$$\left\|\partial\eta^{(1)}(u)\right\| \leq 4M_2,$$

unde

$$M_2 = \sup_{\bar{\Omega}}\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|;\ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|\right\}.$$

În mod analog, avem:

$$A^{(2)}u = f + \partial g + \eta(u) + \partial\eta^{(2)}(u),$$

unde

$$\left\|\partial\eta^{(2)}(u)\right\| \leq \frac{2}{3}M_3 h,$$

$$M_3 = \sup_{\bar{\Omega}}\left\{\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|,\ \left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|\right\}.$$

Aşadar, avem:

$$\begin{cases} A^{(i)}u = f + \partial g + \eta(u) + \partial\eta^{(i)}(u), \\ A^{(i)}u_h = f + \partial g, \end{cases}$$

u_h fiind soluţia aproximativă.

Rezultă că

$$A^{(i)}(u - u_h) = \eta(u) + \partial\eta^{(i)}(u).$$

TEOREMA 5.1. *Matricele $A^{(i)}$ sunt monotone. Dacă*

$$A^{(1)}w = \theta + \partial\theta, \text{ atunci } \|w\|_\infty \le \left(\frac{D^2}{16} + h^2\right)\|\theta\|_\infty + h^2\|\partial\theta\|_\infty;$$

Dacă

$$A^{(2)}w = \theta + \partial\theta, \text{ atunci } \|w\|_\infty \le \frac{D^2}{16}\|\theta\|_\infty + h^2\|\partial\theta\|_\infty,$$

unde $D = 2R$ este diametrul domeniului Ω şi $\partial\theta_k = 0$ dacă P_k nu are nici un punct vecin pe Γ_h.

DEMONSTRAŢIE. *Cazul 1.* Presupunem că $a(x,y) > 0$, pentru orice $(x,y) \in \Omega$. Atunci este evident că $A^{(1)}$ şi $A^{(2)}$ sunt monotone pentru că

$$\begin{cases} a_{ij} \le 0, & \text{pentru } i \ne j \\ \sum_j a_{ij} > 0, & \text{pentru orice } i = \overline{1,N}. \end{cases}$$

Fie

$$\psi(x,y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{4}\|\theta\|_\infty + h^2\left(\|\theta\|_\infty + \|\partial\theta\|_\infty\right).$$

Atunci

$$\begin{aligned} -\Delta_h^{(1)}\psi(P) &= \frac{\|\theta\|_\infty}{4}\Delta_h^{(1)}(x^2+y^2)(P) \\ &= \frac{\|\theta\|_\infty}{4}\left[\frac{(x+h_1)^2+y^2}{hh_1} + \frac{x^2+(y+h_2)^2}{hh_2} + \frac{(x-h_3)^2+y^2}{hh_3}\right. \\ &\left. + \frac{x^2+(y-h_4)^2}{hh_4} - \frac{1}{h}\left(\frac{h_1+h_3}{h_1h_3} + \frac{h_2+h_4}{h_2h_4}\right)(x^2+y^2)\right] \\ &= \frac{\|\theta\|_\infty}{4}\left(\frac{h_1}{h} + \frac{h_2}{h} + \frac{h_3}{h} + \frac{h_4}{h}\right) \end{aligned}$$

În continuare avem:

$$-\Delta_h^{(1)}\psi(P) + \underbrace{a(P)\psi(P) \ge 0}_{>0} = \|\theta\|_\infty\left(1 - \frac{4h - h_1 - h_2 - h_3 - h_4}{4h}\right).$$

Pe de altă parte avem:

$$-\Delta_h^{(1)}\psi(P_1) + a_1\psi_1 = (A^{(1)}\psi)_1 - \frac{\psi(Q_{11})}{hh_3} - \frac{\psi(Q_{12})}{hh_4}.$$

Cu $(A^{(1)}\psi)_1$ am notat prima linie din sistem.

Rezultă că avem:

$$(A^{(1)}\psi)_1 - \frac{\psi(Q_{11})}{hh_3} - \frac{\psi(Q_{12})}{hh_4} \ge \|\theta\|_\infty \underbrace{\left(1 - \frac{4h - h_1 - h_2 - h_3 - h_4}{4h}\right)}_{\ge 0}$$

sau

$$(A^{(1)}\psi)_1 \ge \frac{\psi(Q_{11})}{hh_3} + \frac{\psi(Q_{12})}{hh_4} \ge \frac{\psi(Q_{11}) + \psi(Q_{12})}{h^2}$$

pentru că $\psi \ge 0$ şi $h_3 < h,\ h_4 < h$.

Cum $\psi(Q_{11}) \ge h^2\left(\|\theta\|_\infty + \|\partial\theta\|_\infty\right)$, $\psi(Q_{12}) \ge h^2\left(\|\theta\|_\infty + \|\partial\theta\|_\infty\right)$, rezultă că:

$$(A^{(1)}\psi)_1 \ge \frac{2h^2(\|\theta\|_\infty + \|\partial\theta\|_\infty)}{h^2} \ge \|\theta\|_\infty + \|\partial\theta\|_\infty.$$

Într-un punct interior, care nu are puncte vecine pe frontieră, de exemplu în P_8, avem:

$$(A^{(1)}\psi)_8 \geq \|\theta\|_\infty \left(\frac{h}{h}+\frac{h}{h}+\frac{h}{h}+\frac{h}{h}\right)\cdot\frac{1}{4} = \|\theta\|_\infty .$$

În general obţinem:

$$A^{(1)}\psi \geq \|\theta\|_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \|\partial\theta\|_\infty \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_N, \end{pmatrix}$$

cu $\partial_k = 0$ dacă P nu are puncte vecine pe Γ_h.

Cum

$$A^{(1)}w = \theta + \partial\theta,$$

rezultă că

$$A^{(1)}(\psi - w) \geq \|\theta\|_\infty + \|\partial\theta\|_\infty - \theta - \partial\theta \geq 0$$

şi analog

$$A^{(1)}(\psi + w) \geq 0.$$

Ţinând seama că $A^{(1)}$ este monotonă, deducem că $\psi - w \geq 0,\ \psi + w \geq 0$, deci

$$|w| \leq \psi$$

şi mai departe

$$\|w\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty \leq \frac{R^2}{4}\|\theta\|_\infty + h^2(\|\theta\|_\infty + \|\partial\theta\|_\infty) =$$

$$= \left(\frac{D^2}{16} + h^2\right)\|\theta\|_\infty + h^2\|\partial\theta\|_\infty).$$

Cazul 2. Dacă $a(x,y) \geq 0$, atunci considerăm sistemul:

$$(A^{(1)} + \varepsilon I)w = \theta + \partial\theta + \varepsilon w$$

şi deducem din prima parte a demonstraţiei că

$$|w_i| \leq \frac{R^2}{4}\|\theta + \varepsilon w\|_\infty + h^2(\|\theta + \varepsilon w\|_\infty + \|\partial\theta + \varepsilon w\|_\infty).$$

Trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$, rezultă că

$$\|w\|_\infty \leq \frac{R^2}{4}\|\theta\|_\infty + h^2(\|\theta\|_\infty + \|\partial\theta\|_\infty).$$

Pentru matricea $A^{(2)}$, considerăm funcţia auxiliară

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)\|\theta\|_\infty + h^2\|\partial\theta\|_\infty$$

şi avem

$$-\Delta_h^{(2)}\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\|\theta\|_\infty \cdot \Delta_h^{(2)}(x^2+y^2) = \frac{1}{4}\cdot 4\|\theta\|_\infty = \|\theta\|_\infty .$$

În continuare avem:

$$-\Delta_h^{(2)}\varphi(P) + a(P)\varphi(P) \geq -\Delta_h^{(2)}\psi(P) = \|\theta\|_\infty .$$

şi

$$A^{(2)}\psi \geq \|\theta\|_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \|\partial\theta\|_\infty \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_N \end{pmatrix},$$

$$A_h^{(2)}(\psi \pm w) \geq 0 \implies |w| \leq \psi \implies \|w\|_\infty \leq \frac{D^2}{16}\|\theta\|_\infty + h^2\|\partial\theta\|_\infty$$

□

Teorema 5.2. *Problema aproximativă*

$$A^{(1)}u_h = f + \partial g^{(1)}$$

respectiv

$$A^{(2)}u_h = f + \partial g^{(2)}$$

admite soluţie unică şi dacă $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$, *atunci*

$$\max_{P_i \in \Omega_h} |u(P_i) - u_h^{(1)}(P_i)| \leq \left[\left(\frac{D^2}{16} + h^2\right)\frac{M_4}{6} + 4M_2\right]h^2$$

şi

$$\max_{P_i \in \Omega_h} |u(P_i) - u_h^{(2)}(P_i)| \leq \left(M_4\frac{D^2}{96} + 2M_3\frac{h}{3}\right)h^2.$$

Demonstraţie. Existenţa soluţiei unice provine din faptul că $A^{(i)}$ este monotonă, deci este nesingulară.

Pe de altă parte avem:

$$A^{(1)}(\tilde{u} - u_h) = \eta(u) + \partial\eta^{(1)}(u)$$

cu

$$\|\eta(u)\|_\infty \leq \frac{M_4}{6}h^2$$

şi

$$\left\|\partial\eta^{(1)}(u)\right\|_\infty \leq 4M_2.$$

Din teorema 5.1 deducem că

$$\left\|u - u_h^{(1)}\right\|_\infty \leq \left(\frac{D^2}{16} + h^2\right)\|\eta(u)\|_\infty + h^2\left\|\partial\eta^{(1)}(u)\right\|_\infty \leq \left(\frac{D^2}{16} + h^2\right)\cdot\frac{M_4}{6}h^2 + 4M_2\cdot h^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{D^2}{16} + h^2\right)\frac{M_4}{6} + 4M_2\right]h^2,$$

$$\left\|u - u_h^{(2)}\right\|_\infty \leq \frac{D^2}{16}\|\eta(u)\|_\infty + h^2\left\|\partial\eta^{(2)}(u)\right\|_\infty \leq \frac{D^2}{16}\cdot\frac{M_4}{6}h^2 + h^2\cdot\frac{2M_3}{3}h =$$

$$= \left(\frac{D^2M_4}{96} + \frac{2M_3h}{3}\right)h^2.$$

□

În concluzie, observăm că cele două metode sunt de acelaşi ordin.

În prima metodă matricea $A^{(1)}$ este simetrică, ceea ce este un avantaj pentru rezolvarea numerică a sistemului pentru că se pot folosi metode de relaxare.

Metoda a doua se pare că este mai precisă.

Se poate arăta că dacă Ω este o mulţime convexă, atunci

$$|u(P_i) - u_h(P_i)| \leq C \cdot h^2 \cdot d(P_i, \Gamma_h)$$

pentru metoda a doua, în timp ce pentru prima metodă

$$|u(P_i) - u_h(P_i)| \leq C \cdot h^2.$$

În sfârşit, metoda se poate extinde la cazul unei reţele de tipul

$$R_{h,k} = \{M = (ih; jk);\ i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

6. Programul Mathcad

In cele ce urmează este prezentat un program în mathcad de rezolvare a problemei $-\Delta u(x,y) + a(x,y)u(x,y) = f(x,y)$ în domeniul Ω cu condiţia $u|_\Omega = g$. Programul urmăreşte expunerea anterioară. Domeniul Ω este definit prin

$$\Omega = \left\{(x,y) \in R^2 \mid a < x < b,\ \phi(x) < y < \psi(x)\right\}$$

Funcţia g este dată pe frontieră prin

$$\begin{aligned}
&\text{ginf(x) pe porţiunea } \{(x, \phi(x)) \mid a \leq x \leq b\} \\
&\text{gsup(x) pe porţiunea } \{(x, \psi(x)) \mid a \leq x \leq b\} \\
&\text{gst(y) pe porţiunea } \{(a, y) \mid \phi(a) \leq y \leq \psi(a)\} \\
&\text{gdr(y) pe porţiunea } \{(b, y) \mid \phi(b) \leq y \leq \psi(b)\}.
\end{aligned}$$

Pasul h al reţelei este definit prin $h = \frac{b-a}{n}$, iar reţeaua este definită prin paralele la Oy duse prin punctele $xx_i = a + ih,\ i \in N$ şi prin paralele la Ox duse prin punctele $jh,\ j \in N$. Funcţia a am numit-o în program af (din cauza conflictului de nume cu a=marginea din stânga a domeniului). Informaţii asupra nodurilor, în particular asupra nodurilor din apropierea frontierei sunt stocate în matricele niv, ninf, h1, h2, h3, h4. In textul programului sunt inserate unele comentarii. Programul poate fi uşor translatat într-un alt limbaj.

$$\text{ORIGIN} \equiv 1$$

$$a := -1 \qquad b := 1 \qquad n := 8 \qquad h := \frac{b-a}{n} \qquad h = 0.25$$

$$\phi(x) := x^2 \qquad \psi(x) := 3 - x^2$$

$$af(x,y) := 0 \qquad f(x,y) := 0$$

CONDITIILE LA FRONTIERA

$$ginf(x) := x^2 \qquad gsup(x) := -x$$

$$gst(y) := \frac{ginf(a)\cdot(\psi(a) - y) + (y - \phi(a))\cdot gsup(a)}{\psi(a) - \phi(a)}$$

$$gdr(y) := \frac{ginf(b)\cdot(\psi(b) - y) + (y - \phi(b))\cdot gsup(b)}{\psi(b) - \phi(b)}$$

CALCULE

$$i := 1..n+1 \qquad xx_i := a + (i-1)\cdot h \qquad jos_i := \phi(xx_i) \qquad sus_i := \psi(xx_i)$$

$$njos_i := ceil\left(\frac{\phi(xx_i)}{h}\right) \qquad nsus_i := floor\left(\frac{\psi(xx_i)}{h}\right)$$

$$\varepsilon := 10^{-6}$$

Matricea niv are pe coloane: indicele 1<=i<=n+1, numarul de noduri interioare deasupra lui xx(i), indicele j al celui mai de jos nod, indicele j al celui mai de sus nod

```
niv := | i ← 1
       | ninf ← njos_i
       | nsup ← nsus_i
       | ninf ← njos_i + 1  if |jos_i − h·njos_i| < ε
       | nsup ← nsus_i − 1  if |sus_i − h·nsus_i| < ε
       | linie ← (i  0  ninf  nsup)
       | stare ← linie
       | for i ∈ 2..n + 1
       |   | ninf ← njos_i
       |   | nsup ← nsus_i
       |   | ninf ← njos_i + 1  if |jos_i − h·njos_i| < ε
       |   | nsup ← nsus_i − 1  if |sus_i − h·nsus_i| < ε
       |   | linie ← (i  nsup − ninf + 1  ninf  nsup)
       |   | stare ← stack(stare, linie)
       | stare_{rows(stare),2} ← 0
       | stare
```

nn este numărul de noduri interioare domeniului

$$nnv := \text{submatrix}(niv, 1, n+1, 2, 2) \qquad nn := \sum_{i=1}^{n+1} nnv_i \qquad nn = 65$$

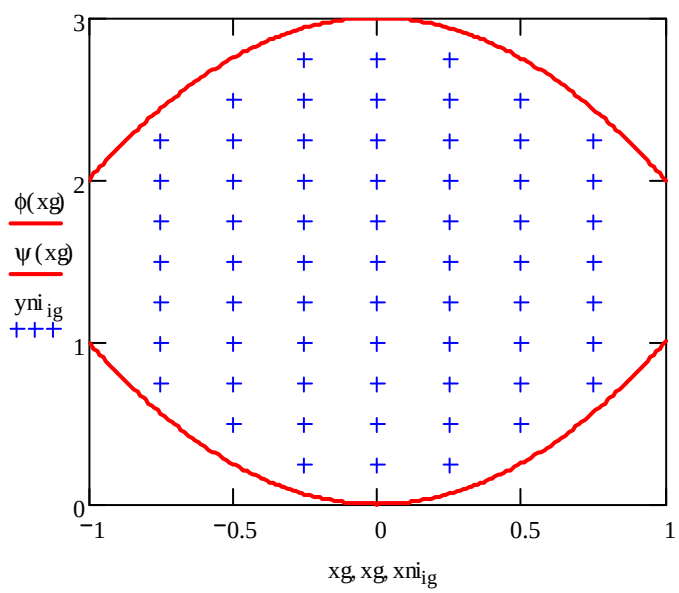
Matricea ninf are nn linii, iar pe coloane are pentru fiecare nod interior: coordonata x, coordonata y, indicele i al verticalei din domeniu, indicele j al nivelului pe verticala al nodului

```
ninf := | ind ← 0
        | for i ∈ 2..n
        |   for j ∈ niv_{i,3}..niv_{i,4}                    if niv_{i,2} > 0
        |     | ind ← ind + 1
        |     | xn ← xx_i
        |     | yn ← j·h
        |     | linie ← (xn yn i j)
        |     | stare ← linie  if ind = 1
        |     | stare ← stack(stare, linie)  otherwise
        | stare
```

Reprezentarea grafică a domeniului şi a nodurilor interioare

$xni := \text{submatrix}(ninf, 1, nn, 1, 1)$ $\qquad$ $yni := \text{submatrix}(ninf, 1, nn, 2, 2)$

$ig := 1..nn$ $\qquad$ $xg := a, a + 0.01..b$



Urmează să determinăm pentru fiecare nod interior: h1,h2,h3,h4 pe directiile est, nord, vest, sud. Câmpurile conţin: distanţa până la frontieră, tipul nodului în direcţia respectivă (0=interior, -1=pe frontiera de jos, 1=pe frontiera de sus, -2=pe frontiera din stânga, +2=pe frontiera din dreapta), coordonatele x şi y ale nodului

din directia respectivă, indicele nodului din directia respectivă (daca este interior), altfel 0.

```
h1 := | ind ← 0
      | for i ∈ 2..n
      |   for j ∈ niv_{i,3}..niv_{i,4}                                  if niv_{i,2} > 0
      |     | ind ← ind + 1
      |     | pas ← h
      |     | tip ← 0
      |     | x ← xx_i + h
      |     | y ← j·h
      |     | iu ← ind + niv_{i,4} − niv_{i+1,3} + 1
      |     | if φ(xx_i + h) − j·h > 0
      |     |   | pas ← root(φ(xx_i + t) − j·h, t, 0, h)
      |     |   | x ← xx_i + pas
      |     | tip ← −1 if φ(xx_i + h) − j·h ≥ 0
      |     | if ψ(xx_i + h) − j·h < 0
      |     |   | pas ← root(ψ(xx_i + t) − j·h, t, 0, h)
      |     |   | x ← xx_i + pas
      |     | tip ← 1 if ψ(xx_i + h) − j·h ≤ 0
      |     | tip ← 2 if (φ(xx_i + h) ≤ j·h ≤ ψ(xx_i + h)) ∧ i = n
      |     | iu ← 0 if tip ≠ 0
      |     | linie ← (pas tip x y iu)
      |     | stare ← linie if ind = 1
      |     | stare ← stack(stare, linie) otherwise
      | stare
```

```
h2 := | ind ← 0
      | for i ∈ 2..n
      |   for j ∈ niv_{i,3}..niv_{i,4}                                  if niv_{i,2} > 0
      |     | ind ← ind + 1
      |     | pas ← h
      |     | tip ← 0
      |     | x ← xx_i
      |     | y ← j·h + h
      |     | iu ← ind + 1
      |     | if j = niv_{i,4}
      |     |   | pas ← ψ(xx_i) − h·j
      |     |   | tip ← 1
      |     |   | y ← j·h + pas
      |     |   | iu ← 0
      |     | linie ← (pas tip x y iu)
      |     | stare ← linie if ind = 1
      |     | stare ← stack(stare, linie) otherwise
      | stare
```

```
h3 := | ind ← 0
      | for i ∈ 2..n
      |   for j ∈ niv_{i,3}..niv_{i,4}                    if niv_{i,2} > 0
      |     | ind ← ind + 1
      |     | pas ← h
      |     | tip ← 0
      |     | x ← xx_i − h
      |     | y ← j·h
      |     | iu ← ind − (niv_{i−1,4} − niv_{i,3} + 1)
      |     | if φ(xx_i − h) − j·h > 0
      |     |   | pas ← root(φ(xx_i − t) − j·h, t, 0, h)
      |     |   | x ← xx_i − pas
      |     | tip ← −1 if φ(xx_i − h) − j·h ≥ 0
      |     | if (ψ(xx_i − h) − j·h) < 0
      |     |   | pas ← root(ψ(xx_i − t) − j·h, t, 0, h)
      |     |   | x ← xx_i − pas
      |     | tip ← 1 if (ψ(xx_i − h) − j·h) ≤ 0
      |     | tip ← −2 if (φ(xx_i − h) ≤ j·h ≤ ψ(xx_i − h)) ∧ i = 2
      |     | iu ← 0 if tip ≠ 0
      |     | linie ← (pas tip x y iu)
      |     | stare ← linie if ind = 1
      |     | stare ← stack(stare, linie) otherwise
      | stare
```

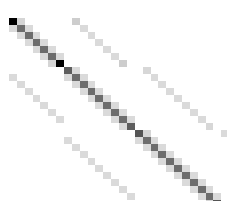
```
h4 := | ind ← 0
      | for i ∈ 2..n
      |   for j ∈ niv_{i,3}..niv_{i,4}                    if niv_{i,2} > 0
      |     | ind ← ind + 1
      |     | pas ← h
      |     | tip ← 0
      |     | x ← xx_i
      |     | iu ← ind − 1
      |     | y ← j·h − h
      |     | if j = niv_{i,3}
      |     |   | pas ← h·j − φ(xx_i)
      |     |   | tip ← −1
      |     |   | y ← j·h − pas
      |     |   | iu ← 0
      |     | linie ← (pas tip x y iu)
      |     | stare ← linie if ind = 1
      |     | stare ← stack(stare, linie) otherwise
      | stare
```

Determinam matricea sistemului

$$
A := \left|\begin{array}{l}
\text{for } i \in 1..nn \\
\quad \text{for } j \in 1..nn \\
\quad\quad M_{i,j} \leftarrow 0 \\
\text{for } ind \in 1..nn \\
\quad \left|\begin{array}{l}
M_{ind,ind} \leftarrow af\left(ninf_{ind,1}, ninf_{ind,2}\right) + \dfrac{2}{h1_{ind,1} \cdot h3_{ind,1}} + \dfrac{2}{h2_{ind,1} \cdot h4_{ind,1}} \\
M_{ind,h1_{ind,5}} \leftarrow \dfrac{-2}{h1_{ind,1} \cdot \left(h1_{ind,1} + h3_{ind,1}\right)} \text{ if } h1_{ind,5} \neq 0 \\
M_{ind,h2_{ind,5}} \leftarrow \dfrac{-2}{h2_{ind,1} \cdot \left(h2_{ind,1} + h4_{ind,1}\right)} \text{ if } h2_{ind,5} \neq 0 \\
M_{ind,h3_{ind,5}} \leftarrow \dfrac{-2}{h3_{ind,1} \cdot \left(h1_{ind,1} + h3_{ind,1}\right)} \text{ if } h3_{ind,5} \neq 0 \\
M_{ind,h4_{ind,5}} \leftarrow \dfrac{-2}{h4_{ind,1} \cdot \left(h2_{ind,1} + h4_{ind,1}\right)} \text{ if } h4_{ind,5} \neq 0
\end{array}\right. \\
M
\end{array}\right.
$$

Coeficienţii mai mari în modul ai matricei A apar în nuanţe mai închise. Culoarea alb înseamnă valoarea zero. Se observă cum coeficienţii nenuli sunt pe diagonala principală şi pe câteva câteva direcţii oblice paralele cu diagonala principală.

$$B := \overrightarrow{|A|}$$



$$255 - \frac{255}{\max(B)} \cdot B$$

Termenii liberi

$$
B := \left|\begin{array}{l}
\text{for } ind \in 1..nn \\
\quad B_{ind} \leftarrow f\left(ninf_{ind,1}, ninf_{ind,2}\right) \\
\text{for } ind \in 1..nn \\
\quad \left|\begin{array}{ll}
B_{ind} \leftarrow B_{ind} + \dfrac{2\cdot ginf\left(h1_{ind,3}\right)}{h1_{ind,1}\cdot\left(h1_{ind,1}+h3_{ind,1}\right)} & \text{if } h1_{ind,5}=0 \wedge h1_{ind,2}=-1 \\
B_{ind} \leftarrow B_{ind} + \dfrac{2\cdot gsup\left(h1_{ind,3}\right)}{h1_{ind,1}\cdot\left(h1_{ind,1}+h3_{ind,1}\right)} & \text{if } h1_{ind,5}=0 \wedge h1_{ind,2}=1 \\
B_{ind} \leftarrow B_{ind} + \dfrac{2\cdot gdr\left(h1_{ind,4}\right)}{h1_{ind,1}\cdot\left(h1_{ind,1}+h3_{ind,1}\right)} & \text{if } h1_{ind,5}=0 \wedge h1_{ind,2}=2 \\
B_{ind} \leftarrow B_{ind} + \dfrac{2\cdot gsup\left(h2_{ind,3}\right)}{h2_{ind,1}\cdot\left(h2_{ind,1}+h4_{ind,1}\right)} & \text{if } h2_{ind,5}=0 \wedge h2_{ind,2}=1 \\
B_{ind} \leftarrow B_{ind} + \dfrac{2\cdot ginf\left(h3_{ind,3}\right)}{h3_{ind,1}\cdot\left(h1_{ind,1}+h3_{ind,1}\right)} & \text{if } h3_{ind,5}=0 \wedge h3_{ind,2}=-1 \\
B_{ind} \leftarrow B_{ind} + \dfrac{2\cdot gsup\left(h3_{ind,3}\right)}{h3_{ind,1}\cdot\left(h1_{ind,1}+h3_{ind,1}\right)} & \text{if } h3_{ind,5}=0 \wedge h3_{ind,2}=1 \\
B_{ind} \leftarrow B_{ind} + \dfrac{2\cdot gst\left(h3_{ind,4}\right)}{h3_{ind,1}\cdot\left(h1_{ind,1}+h3_{ind,1}\right)} & \text{if } h3_{ind,5}=0 \wedge h3_{ind,2}=-2 \\
B_{ind} \leftarrow B_{ind} + \dfrac{2\cdot ginf\left(h4_{ind,3}\right)}{h4_{ind,1}\cdot\left(h2_{ind,1}+h4_{ind,1}\right)} & \text{if } h4_{ind,5}=0 \wedge h4_{ind,2}=-1
\end{array}\right. \\
B
\end{array}\right.
$$

Rezolvăm sistemul liniar

$$\lambda := A^{-1}\cdot B$$

Determinăm soluţia aproximativă sol(x,y)

$jmin := \min\left(niv^{\langle 3\rangle}\right) - 1$ $\quad$ $jmax := \max\left(niv^{\langle 4\rangle}\right) + 1$ $\quad$ $jmin = 0$ $\quad$ $jmax = 12$

$nvj := jmax - jmin + 1$ $\quad$ $nvj = 13$

$i := 1..n+1$ $\quad$ $j := 1..nvj$ $\quad$ $V_{i,j} := 0$

$ind := 1..nn$ $\quad$ $V_{ninf_{ind,3},\, ninf_{ind,4}-jmin+1} := \lambda_{ind}$

```
ajust(V, n, nvj) := | for j ∈ niv_{1,3} − jmin + 1 .. niv_{1,4} − jmin + 1
                    |   | y ← h·(jmin + j − 1)
                    |   | V_{1,j} ← gst(y)
                    | for j ∈ niv_{n+1,3} − jmin + 1 .. niv_{n+1,4} − jmin + 1
                    |   | y ← h·(jmin + j − 1)
                    |   | V_{n+1,j} ← gdr(y)
                    | for i ∈ 1 .. n + 1
                    |   for j ∈ 1 .. nvj
                    |     | y ← h·(jmin + j − 1)
                    |     | V_{i,j} ← ginf(xx_i)  if y ≤ φ(xx_i)
                    |     | V_{i,j} ← gsup(xx_i)  if y ≥ ψ(xx_i)
                    | V
```

$VI := ajust(V, n, nvj)$

```
sol(x, y) := | return 1  if x < a ∨ x > b
             | return ginf(x)  if y < h·jmin
             | return gsup(x)  if y > h·jmax
             | for i ∈ 1 .. n
             |   for j ∈ 1 .. nvj − 1                                  if xx_i ≤ x ≤ xx_{i+1}
             |     | j1 ← jmin + j − 1
             |     | y1 ← j1·h
             |     | if y1 ≤ y ≤ y1 + h
             |     |   | A ← VI_{i,j}
             |     |   | B ← VI_{i+1,j}
             |     |   | C ← VI_{i,j+1}
             |     |   | D ← VI_{i+1,j+1}
             |     |   | val ← A + (x − xx_i)/h·(B − A) + (y − y1)/h·(C − A) + ((x − xx_i)(y − y1))/h^2·(D − B − C + A)
             |     |   | return val
```

Aplicăm pătratul $[0,1] \times [0,1]$ pe domeniul nostru

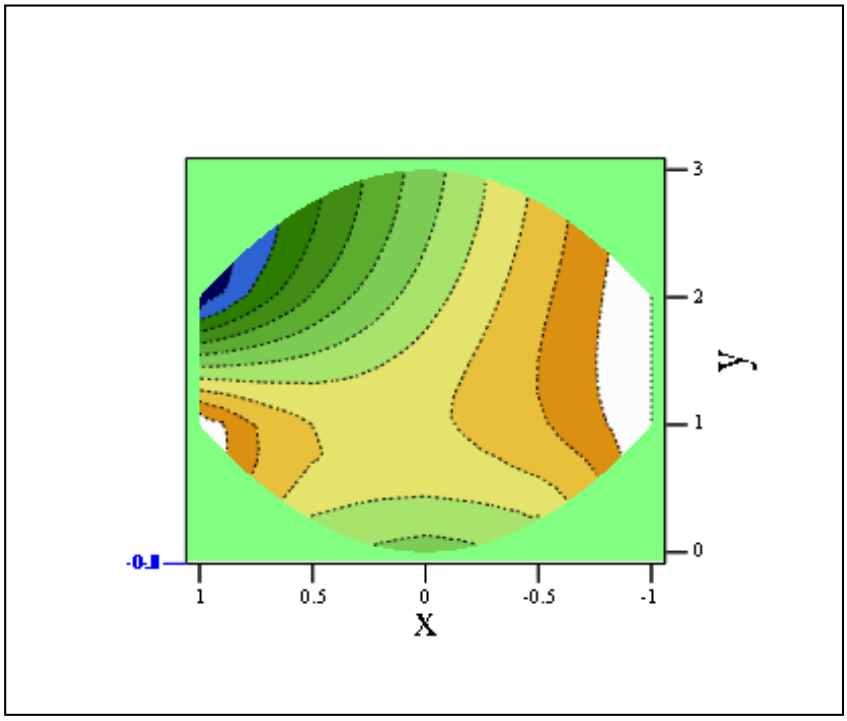
$$xf(u,v) := a + u\cdot(b-a)$$

$$yf(u,v) := \phi(xf(u,v)) + v\cdot\left(\psi(xf(u,v)) - \phi(xf(u,v))\right) \qquad zf(u,v) := 0$$

Suprafaţa $(x,y) \to sol(x,y)$ o reprezentăm parametric

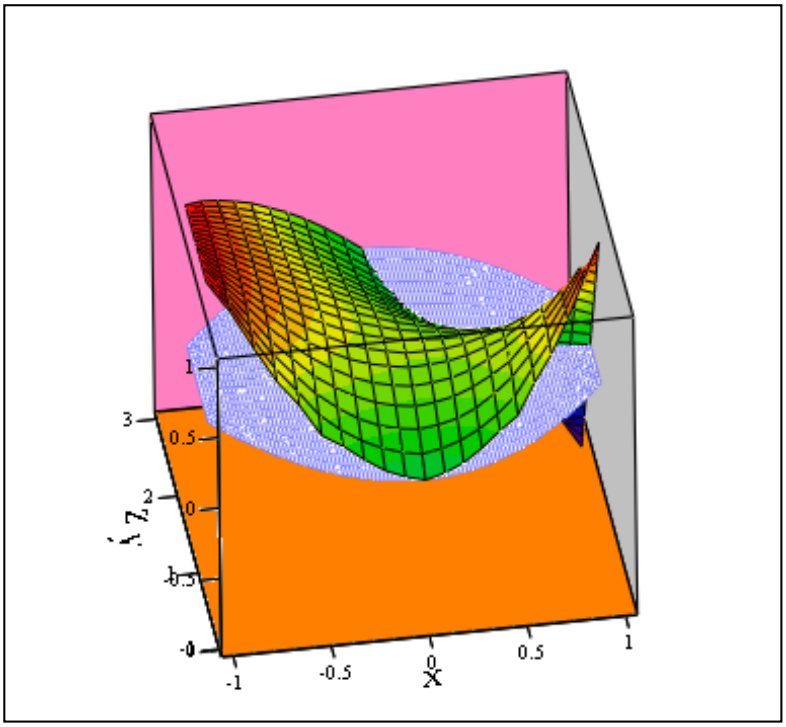
$$Sup(u,v) := \begin{pmatrix} xf(u,v) \\ yf(u,v) \\ sol(xf(u,v), yf(u,v)) \end{pmatrix}$$

Reprezentăm grafic soluţia



Sup

Linii de nivel ale soluţiei sol(x,y)



Sup ,(xf, yf, zf)

Suprafaţa $(x, y) \to sol\,(x, y)$ şi domeniul Ω.

CAPITOLUL 2

INTRODUCERE ÎN METODA ELEMENTELOR FINITE PENTRU ECUAŢII ELIPTICE

Urmărind în general expunerea din [**3**] vom face în acest capitol o scurtă incursiune în aplicarea metodei elementelor finite pentru aproximarea soluţiei unei probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi de tip eliptic într-un domeniu plan mărginit de un poligon. Deşi se prezintă un caz particular considerăm că se dau principiile de bază pentru aplicarea metodei şi la ecuaţii diferenţiale ordinare sau ecuaţii cu derivate parţiale pentru funcţii de mai multe variabile.

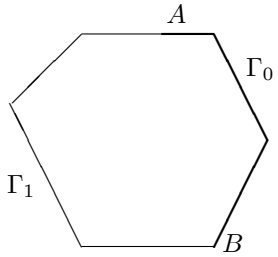
Aplicarea metodei elementelor finite în scopul aproximării soluţiilor problemelor la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale necesită parcurgerea următorilor paşi:

- se verifică dacă problema la limită este *corect pusă*, adică dacă are soluţie în sens clasic sau generalizat, dacă aceasta este unică şi depinde continuu de datele sale (membrul drept, condiţiile la limită etc.);

- se construieşte problema de aproximare (formularea variaţională) demonstrându-se existenţa şi unicitatea soluţiei acesteia şi faptul că aceasta este o soluţie a problemei iniţiale sau o aproximează pe aceasta;

- se discretizează domeniul dat (în cazul ce va fi prezentat se împarte interiorul poligonului în triunghiuri numite elemente finite) şi se construieşte o problemă discretă (în cazul nostru un sistem de ecuaţii algebrice) a cărei soluţii aproximează valorile soluţiei problemei variaţionale într-un număr finit de puncte ale domeniului considerat numite noduri.

În acest capitol nu ne vom ocupa de primul pas pentru care recomandăm [**7**] sau [**13**]. Peste tot vom nota cu Ω interiorul unui poligon din $\mathbb{R}^2$ de frontieră Γ. Presupunem $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, unde Γ_0 şi Γ_1 sunt mulţimi închise iar $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$ este formată din punctele A şi B (v. figura de mai jos).



1. Problema la limită şi formularea ei variaţională

Ne propunem să găsim soluţia $u = u(x_1, x_2)$ a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\right) + a_0(X)u(X) = f_0(X), \tag{1.1}$$

cu condiţiile la limită

$$u = u_0 \quad \text{pe } \Gamma_0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon_{\mathcal{L}}} = g \quad \text{pe fiecare latură a lui } \Gamma_1, \tag{1.3}$$

unde $X = (x_1, x_2) \in \Omega$, $f_0 \in C^0(\bar{\Omega})$, $u_0 \in C^2(\bar{\Gamma}_0)$, g este de clasă C^1 pe fiecare latură a lui Γ_1 având eventual discontinuităţi de prima speţă în vârfurile poligonului, a_{ij}, $i, j = 1, 2$ sunt de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$ iar $a_0 \in C^0(\bar{\Omega})$. Notaţia $\frac{\partial u}{\partial \upsilon_{\mathcal{L}}}$ sau $\frac{\partial u}{\partial \upsilon}$ într-un punct al lui Γ semnifică

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon_{\mathcal{L}}} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\upsilon_j, \tag{1.4}$$

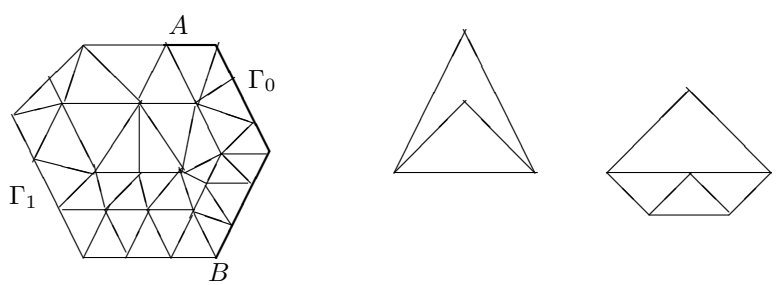
unde $\vec{\upsilon} = \upsilon_1\vec{i} + \upsilon_2\vec{j}$ este vectorul normalei exterioare într-un punct de pe Γ. El este unic determinat dacă punctul nu este un vârf al poligonului.

Presupunem dată o triangularizare (triangulaţie) $\mathcal{T}_h$ al lui $\bar{\Omega}$ adică o familie de triunghiuri închise K, unde h este lungimea maximă a laturilor triunghiurilor K, astfel încât:

a) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$;

b) pentru orice $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ distincte, $K_1 \cap K_2$ este mulţimea vidă, un vârf comun sau o latură comună.

Vom presupune în plus că A şi B sunt vârfuri ale unor triunghiuri din $\mathcal{T}_h$ (v. figura a) de mai jos). În figurile b) şi c) sunt desenate cazuri care sunt excluse.



a) b) c)

Notăm

$$a_K(u, v) = \iint_K \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\frac{\partial v}{\partial x_j}(X) + a_0(X)u(X)v(X)\right) dX, \tag{1.5}$$

$$a(u,v) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} a_K(u,v), \tag{1.6}$$

$$(f,v) = \iint_\Omega f_0(X)v(X)dX + \int_{\Gamma_1} g(X)v(X)ds, \text{ unde } dX = dx_1dx_2. \tag{1.7}$$

Lema 1.1. *(formula de integrare prin părţi)*
Dacă P, $Q \in C^1(\bar{\Omega})$, atunci

$$\iint_\Omega P(X)\frac{\partial Q}{\partial x_k}(X)dX = -\iint_\Omega Q(X)\frac{\partial P}{\partial x_k}(X)dX$$

$$+\int_\Gamma P(X)Q(X)\cos(\vec{v},x_k)ds,\ k=1,2, \tag{1.8}$$

unde $\cos(\vec{v},x_k)$ este cosinusul unghiului dintre normala exterioară şi axa Ox_k.

Demonstraţie. Deoarece

$$\iint_\Omega P(X)\frac{\partial Q}{\partial x_k}(X)dX = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}(P(X)Q(X))dX$$

$$-\iint_\Omega Q(X)\frac{\partial P}{\partial x_k}(X)dX \tag{1.9}$$

iar din formula Green-Riemann

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(X) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(X)\right)dX$$

$$= \int_\Gamma (u\cos(\vec{v},x_1) + v\cos(\vec{v},x_2))\,ds, \tag{1.10}$$

înlocuind prima integrală din membrul drept din (1.9) cu (1.10) rezultă (1.8) □

Fie spaţiile vectoriale reale

$$\mathcal{W}_{\mathcal{T}_h} = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v\mid_K \in C^1(K)\}, \tag{1.11}$$

$$\mathcal{V}_{\mathcal{T}_h} = \{v \in \mathcal{W}_{\mathcal{T}_h} :\ v = 0 \text{ pe } \Gamma_0\}. \tag{1.12}$$

Considerăm problema găsirii unei funcţii $u \in \mathcal{W}_{\mathcal{T}_h}$ astfel încât

$$a(u,v) = (f,v),\ \forall v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_h} \tag{1.13}$$

cu condiţia

$$u = u_0 \text{ pe } \Gamma_0 \tag{1.14}$$

şi vom arăta că dacă $u \in C^2(\bar{\Omega})$, problemele (1.1)-(1.3) şi (1.13), (1.14) au aceleaşi soluţii. Pentru aceasta sunt necesare următoarele două leme.

Lema 1.2. *Fie $H \in C^0(\Omega)$. Dacă*

$$\iint_\Omega H(X)v(X)dX = 0,\ \forall v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega),\ v\mid_\Gamma = 0,$$

atunci H este identic nulă pe Ω.

Demonstraţie. Fie $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \Omega$. Arătăm că $H(X^{(0)}) = 0$.

Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem de exemplu că $H(X^{(0)}) > 0$. Fie $d = \text{dist}(X^{(0)}, \Gamma) = \inf\limits_{Y \in \Gamma} \|X^{(0)} - Y\|_2$, norma fiind cea euclidiană pe $\mathbb{R}^2$ (v. capitolul 1, paragraful 1). Deoarece $d > 0$ iar H este continuă şi strict pozitivă în $X^{(0)}$ există $\varepsilon \in (0, d)$ astfel încât

$$\forall X \in \Omega \text{ cu } \|X - X^{(0)}\|_2 < \varepsilon \text{ rezultă } H(X) \geq \frac{H(X^{(0)})}{2}. \tag{1.15}$$

Considerăm funcţia $v_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ definită prin

$$v_\varepsilon(X) = \begin{cases} A_\varepsilon e^{-\frac{1}{1-\frac{\|X-X^{(0)}\|_2^2}{\varepsilon^2}}}, \text{ dacă } \|X - X^{(0)}\|_2 < \varepsilon \\ 0, \text{ dacă } \|X - X^{(0)}\|_2 \geq \varepsilon \end{cases}, \tag{1.16}$$

unde A_ε este o constantă pozitivă aleasă astfel încât

$$\iint\limits_{\|X-X^{(0)}\|_2<\varepsilon} v_\varepsilon(X)dX = 1. \tag{1.17}$$

Deoarece $v_\varepsilon \mid_\Gamma = 0$, din ipoteză obţinem

$$\iint\limits_{\|X-X^{(0)}\|_2<\varepsilon} H(X)v_\varepsilon(X)dX = \iint\limits_{\Omega} H(X)v_\varepsilon(X)dX = 0. \tag{1.18}$$

Dar din (1.15) şi (1.17)

$$\iint\limits_{\|X-X^{(0)}\|_2<\varepsilon} H(X)v_\varepsilon(X)dX$$

$$\geq \frac{H(X^{(0)})}{2} \iint\limits_{\|X-X^{(0)}\|_2<\varepsilon} v_\varepsilon(X)dX = \frac{H(X^{(0)})}{2} > 0$$

ceea ce contrazice (1.18). Deci $H(X^{(0)}) \leq 0$. Dacă $H(X^{(0)}) < 0$, aplicând acelaşi raţionament funcţiei $-H$, obţinem $H(X^{(0)}) = 0$. □

Lema 1.3. *Fie $H \in C^0(\Gamma_1)$. Dacă*

$$\int_{\Gamma_1} H(X)v(X)ds = 0, \ \forall v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_h} \cap C^1(\bar{\Omega}),$$

atunci H este identic nulă pe Γ_1.

Demonstraţie. Se alege $X^{(0)} \in \Gamma_1$ şi se arată că $H(X^{(0)}) = 0$. Demonstrăm prin reducere la absurd. Deoarece H este continuă este suficient să presupunem că $X^{(0)} \notin \{A, B\}$. Se alege

$$d = \min\{\|X^{(0)} - A\|, \|X^{(0)} - B\|\}$$

şi se raţionează analog ca în demonstraţia lemei 1.2 construind o funcţie $v_\varepsilon \in C^0(\Gamma_1) \cap C^1(\Gamma \backslash \{A, B\})$. □

Teorema 1.1. *Fie $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Atunci u este o soluţie a problemei (1.1)-(1.3) dacă şi numai dacă u este o soluţie a problemei (1.13), (1.14).*

Demonstraţie. Dacă u este o soluţie a problemei (1.1)-(1.3), atunci înmulţind relaţia (1.1) cu $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_h}$ şi integrând obţinem

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \iint_K \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\right) v(X)dX + \iint_K a_0(X)u(X)v(X)dX$$

$$= \iint_K f_0(X)v(X)dX, \ \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Folosind relaţia (1.8) pentru K şi frontiera sa Γ_K orientată în sens trigonometric rezultă

$$\sum_{i,j=1}^{k} \iint_K a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\frac{\partial v}{\partial x_j}(X)dX$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_K} a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)v(X)\cos(\vec{\upsilon}_K, x_j)ds_K \tag{1.19}$$

$$+\iint_K a_0(X)u(X)v(X)dX = \iint_K f_0(X)v(X)dX.$$

Însumând relaţiile (1.19) pentru toţi $K \in \mathcal{T}_h$ şi folosind faptul că laturile ce nu aparţin lui Γ sunt parcurse de două ori în sensuri diferite iar $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_h}$ se obţine

$$a(u,v) - \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Gamma_1} a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)v(X)\cos(\vec{\upsilon}, x_j)ds = \iint_\Omega f_0(X)v(X)dX. \tag{1.20}$$

Acum din (1.3), (1.4) şi (1.7) deducem că

$$a(u,v) = (f,v), \ \forall v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_h}$$

şi din (1.2) rezultă că u este o soluţie a problemei (1.13), (1.14).

Reciproc presupunem că $u \in C^2(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{T}_h}$ este o soluţie a problemei (1.13), (1.14). Folosind (1.16) putem construi $v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ astfel încât $v\mid_\Gamma = 0$. Atunci din (1.13) obţinem

$$\iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\frac{\partial v}{\partial x_j}(X)dX + \iint_\Omega a_0(X)u(X)v(X)dX$$

$$= \iint_\Omega f_0(X)v(X)dX.$$

Aplicând primei integrale relaţia (1.8) găsim

$$\iint_\Omega -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\right) v(X)dX$$

$$+\iint_\Omega \left(a_0(X)u(X) - f_0(X)\right) v(X)dX = 0$$

sau

$$\iint\limits_{\Omega}\left(-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\right)+a_0(X)u(X)-f_0(X)\right)v(X)dX,$$

pentru orice $v\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ cu $v\mid_{\Gamma}=0$. Aplicând lema 1.2 obţinem (1.1).

Din demonstraţia lemei 1.3 există $v\in\mathcal{V}_{\mathcal{T}_h}\cap C^1(\bar{\Omega})$ iar din (1.8) analog găsim

$$\iint\limits_{\Omega}\left(-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\right)+a_0(X)u(X)-f_0(X)\right)v(X)dX$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\upsilon_j v(X)ds=\int\limits_{\Gamma_1}g(X)v(X)ds.$$

Deoarece u verifică (1.1) obţinem

$$\int\limits_{\Gamma_1}\left(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}(X)\upsilon_j-g(X)\right)v(X)ds=0,\ \forall v\in\mathcal{V}_{\mathcal{T}_h}\cap C^1(\bar{\Omega}).$$

Aplicând lema 1.3 rezultă (1.3) şi astfel u este soluţie a problemei (1.1)-(1.3). □

Observaţia 1.1. *Problema (1.13), (1.14) se numeşte formularea variaţională a problemei (1.1)-(1.3). Deşi soluţiile în $C^2(\bar{\Omega})$ ale celor două probleme coincid totuşi ele nu sunt echivalente problema (1.13), (1.14) fiind definită şi pentru $u\in C^1(\bar{\Omega})$. O soluţie a problemei (1.13), (1.14) se numeşte soluţie slabă pentru problema (1.1)-(1.3).*

În continuare se impun *ipotezele de elipticitate*:

$$\exists\alpha>0 \text{ astfel ca } \forall X\in\Omega,\ a_0(X)\geq\alpha, \tag{1.21}$$

$$\forall\xi_1,\ \xi_2\in\mathbb{R},\ \forall X\in\Omega,\ \sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(X)\xi_i\xi_j\geq\alpha(\xi_1^2+\xi_2^2). \tag{1.22}$$

Dacă $v\in\mathcal{W}_{\mathcal{T}_h}$, notăm

$$\|v\|^2_{\mathcal{W}}=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\iint\limits_{K}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(X)\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}(X)\right)^2+v^2(X)\right)dX, \tag{1.23}$$

care în cazul când $v\in C^1(\bar{\Omega})$ se scrie

$$\|v\|^2_{\mathcal{W}}=\iint\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(X)\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}(X)\right)^2+v^2(X)\right)dX.$$

Deoarece aplicaţia $<\ >:\mathcal{W}\times\mathcal{W}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$<v_1,v_2>:=$$

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\iint\limits_{K}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(X)\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(X)+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(X)\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(X)+v_1(X)v_2(X)\right)dX$$

este un produs scalar rezultă că $\|\ \|_{\mathcal{W}}$ definită în (1.23) este o normă pe $\mathcal{W}_{\mathcal{T}_h}$. Aceste noţiuni sunt prezentate în capitolul 3 într-un caz mai general.

OBSERVAŢIA 1.2. *Dacă $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{T}_h}$ şi au loc relaţiile (1.21),(1.22), atunci*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{\mathcal{W}}. \tag{1.24}$$

Într-adevăr din (1.5), (1.6), (1.21) şi (1.22)

$$a(v,v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \iint_K \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(X) \frac{\partial v}{\partial x_i}(X) \frac{\partial v}{\partial x_j}(X) + a_0(X) v^2(X) \right) dX$$

$$\geq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \iint_K \alpha \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(X) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}(X) \right)^2 + v^2(X) \right) dX = \alpha \|v\|^2_{\mathcal{W}}.$$

OBSERVAŢIA 1.3. *Dacă ipotezele de elipticitate (1.21), (1.22) sunt verificate, atunci problema (1.13), (1.14) are cel mult o soluţie în $C^1(\bar{\Omega})$.*

Într-adevăr dacă u_1, u_2 sunt două soluţii, atunci $v_1 = u_1 - u_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_h}$ iar din (1.13) rezultă $a(u_1, v) - a(u_2, v) = 0$, $\forall v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_h}$. Deoarece a este o formă biliniară, alegând $v = v_1$, din (1.24) obţinem

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2_{\mathcal{W}}$$

ceea ce implică $u_1 = u_2$.

Atunci din teorema 1.1 deducem că problema (1.1)-(1.3) are cel mult o soluţie $u \in C^2(\bar{\Omega})$. În acest caz (1.1)-(1.3) se numeşte problemă la limită eliptică de ordinul doi.

2. Metoda elementelor finite Lagrange de gradul 1

Fie

$$\mathcal{W}_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v\,|_K \in \mathcal{P}_1\}, \tag{2.1}$$

unde $\mathcal{P}_1$ este spaţiul vectorial real al polinoamelor de două variabile de grad cel mult egal cu 1 şi

$$\mathcal{V}_h = \{v \in \mathcal{W}_h :\ v = 0 \text{ pe } \Gamma_0\}. \tag{2.2}$$

Se verifică uşor că $\mathcal{W}_h$ şi $\mathcal{V}_h$ sunt spaţii vectoriale reale iar $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{W}_h$.

Considerăm *problema de aproximare*:

Să se determine $u_h \in \mathcal{W}_h$ astfel încât

$$u_h(P) = u_0(P),\ \forall P \in \Gamma_{0,h} \tag{2.3}$$

şi

$$\forall v_h \in \mathcal{V}_h,\ a(u_h, v_h) = (f, v_h), \tag{2.4}$$

unde

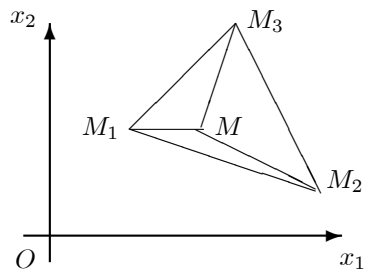
$$\Gamma_{0,h} = \{P \in \Gamma_0 : P \text{ este un vârf al unui } K \in \mathcal{T}_h\}. \tag{2.5}$$

Numerotăm $P_1, ..., P_N$ vârfurile triunghiurilor $K \in \mathcal{T}_h$ ce nu aparţin lui Γ_0 iar cu $P_{N+1}, ..., P_Q$ cele din $\Gamma_{0,h}$. Triunghiurile $K \in \mathcal{T}_h$ se numesc *elemente finite* iar P_i *noduri*.

LEMA 2.1. *Fie un triunghi $M_1M_2M_3$. Atunci există funcţiile $\varphi_i \in \mathcal{P}_1$, $i = 1, 2, 3$, astfel încât*

$$\varphi_i(M_j) = \delta_{i,j},\ j = 1, 2, 3. \tag{2.6}$$

Demonstraţie. Fie $M_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, $k = 1, 2, 3$ şi $M(x_1, x_2)$ un punct aflat în interiorul sau pe frontiera triunghiului $M_1M_2M_3$ (v. figura de mai jos).



Dacă $\sigma(M_1M_2M_3)$ este aria triunghiului $M_1M_2M_3$, definim

$$\varphi_1(M) = \frac{\sigma(MM_2M_3)}{\sigma(M_1M_2M_3)} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & 1 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & 1 \end{vmatrix}}{2\sigma(M_1M_2M_3)} \tag{2.7}$$

$$= \frac{(x_2^{(2)} - x_2^{(3)})x_1 + (x_1^{(3)} - x_1^{(2)})x_2 + x_1^{(2)}x_2^{(3)} - x_1^{(3)}x_2^{(2)}}{2\sigma(M_1M_2M_3)},$$

$$\varphi_2(M) = \frac{\sigma(M_1MM_3)}{\sigma(M_1M_2M_3)} \tag{2.8}$$

$$= \frac{(x_2^{(3)} - x_2^{(1)})x_1 + (x_1^{(1)} - x_1^{(3)})x_2 + x_1^{(3)}x_2^{(1)} - x_1^{(1)}x_2^{(3)}}{2\sigma(M_1M_2M_3)},$$

$$\varphi_3(M) = \frac{\sigma(M_1M_2M)}{\sigma(M_1M_2M_3)} \tag{2.9}$$

$$= \frac{(x_2^{(1)} - x_2^{(2)})x_1 + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})x_2 + x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}}{2\sigma(M_1M_2M_3)}.$$

Rezultă uşor că φ_i, $i = 1, 2, 3$ verifică (2.6). □

Pentru un punct M fixat numerele $\varphi_i(M)$ se numesc *coordonatele baricentrice* ale punctului M aflat în triunghiul $M_1M_2M_3$. Din relaţiile (2.7)-(2.9) rezultă

$$\varphi_1(M) + \varphi_2(M) + \varphi_3(M) = 1. \tag{2.10}$$

Lema 2.2. *Fie $y_k(X) = \alpha_k x_1 + \beta_k x_2 + \gamma_k \in \mathcal{P}_1$, $k = 1, 2$ şi M_1, M_2, M_3 trei puncte necoliniare.*

a) Dacă $y_1(M_i) = y_2(M_i)$, $i = 1, 2$, atunci $y_1(M) = y_2(M)$, $\forall M \in M_1M_2$;

b) Dacă $y_1(M_i) = y_2(M_i)$, $i = 1, 2, 3$, atunci $y_1 = y_2$.

Demonstraţie. a) Deoarece $x_3 = \alpha_k x_1 + \beta_k x_2 + \gamma_k$ este ecuaţia unui plan (π_k), $k = 1, 2$, $y_1(M_i) = y_2(M_i)$ implică $M_i = (\pi_1) \cap (\pi_2)$. Dar două plane ce conţin două puncte distincte conţin şi dreapta determinată de ele. Deci $M_1M_2 \subset (\pi_1) \cap (\pi_2)$ ceea ce implică $y_1(M) = y_2(M)$, $\forall M \in M_1M_2$.

b) În acest caz cele două plane conţin trei puncte necoliniare, deci ele coincid. □

TEOREMA 2.1. *Pentru orice $i = 1, 2, ..., Q$ există o unică funcţie $w_i \in \mathcal{W}_h$ astfel încât*

$$w_i(P_j) = \delta_{ij},\ j = 1, 2, ..., Q. \tag{2.11}$$

Funcţiile $\{w_1, ..., w_Q\}$ formează o bază a lui $\mathcal{W}_h$ şi pentru orice $v \in \mathcal{W}_h$

$$v(X) = \sum_{i=1}^{Q} v(P_i) w_i(X). \tag{2.12}$$

De asemenea $\{w_1, ..., w_N\}$ formează o bază a lui $\mathcal{V}_h$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $K \in \mathcal{T}_h$. Atunci pentru orice $i = 1, 2, ..., Q$ şi P_j un vârf al lui K există o unică funcţie $w_{i,K} \in \mathcal{P}_1$ astfel încât $w_{i,K}(P_j) = \delta_{ij}$, pentru orice $P_j \in K$.

Într-adevăr dacă $P_i \notin K$, alegem $w_{i,K} \equiv 0$ iar dacă $P_i \in K$, $w_{i,K}$ este coordonata baricentrică relativă la M_i în K (v. lema 2.1). Deci $w_{i,K}$ verifică condiţiile cerute şi este unic determinată din lema 2.2 b).

Dacă $P_\alpha P_\beta$ este o latură comună a două triunghiuri $K_1,\ K_2 \in \mathcal{T}_h$, atunci din lema 2.2 a) rezultă că $w_{i,K_1} = w_{i,K_2}$ pe $P_\alpha P_\beta$. Astfel funcţia $w_i \in \mathcal{W}_h$ definită prin

$$w_i \mid_K = w_{i,K},\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{2.13}$$

este unic determinată de (2.11). În plus dacă $v \in \mathcal{W}_h$, $v(X) - \sum_{i=1}^{Q} v(P_i) w_i(X) \in \mathcal{W}_h$ şi se anulează în orice P_i, $i = 1, 2, ..., Q$. Din lema 2.2 b) deducem că ea este identic nulă pe orice $K \in \mathcal{T}_h$, deci este identic nulă pe $\bar{\Omega}$. De aici rezultă (2.12).

Analog se arată că $\{w_1, ..., w_N\}$ formează o bază a lui $\mathcal{V}_h$. □

OBSERVAŢIA 2.1. *Din teorema 2.1 rezultă că $dim\mathcal{W}_h = Q$, $dim\mathcal{V}_h = N$ şi orice funcţie din $\mathcal{W}_h$, (respectiv $\mathcal{V}_h$) este unic determinată de valorile sale în vârfurile P_i, $i = 1, ..., Q$ (respectiv $i = 1, ..., N$).*

TEOREMA 2.2. *Dacă sunt verificate condiţiile de elipticitate (1.21), (1.22), problema (2.3),(2.4) are o soluţie şi numai una.*

DEMONSTRAŢIE. Arătăm că problema (2.3),(2.4) are cel mult o soluţie.

Într-adevăr dacă $u_h,\ \tilde{u}_h$ sunt soluţii, rezultă:

$$u_h - \tilde{u}_h \in \mathcal{W}_h; \tag{2.14}$$

$$(u_h - \tilde{u}_h)(P_j) = 0,\ \forall P_j \in \Gamma_{0,h}; \tag{2.15}$$

$$a(u_h, v_h) = a(\tilde{u}_h, v_h),\ \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \tag{2.16}$$

Deoarece a este o formă biliniară luând $v_h = u_h - \tilde{u}_h \in \mathcal{V}_h$ din (2.16) se obţine $a(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) = 0$. Apoi din (1.24) obţinem că $\|u_h - \tilde{u}_h\|_{\mathcal{W}} = 0$, deci $u_h = \tilde{u}_h$.

Pentru a demonstra existenţa soluţiei considerăm $u_h \in \mathcal{W}_h$ şi notăm $u_j = u_h(P_j)$. Atunci din teorema 2.1

$$u_h(X) = \sum_{j=1}^{Q} u_j w_j(X). \tag{2.17}$$

Deoarece a este o formă biliniară iar din teorema 2.1 $\{w_1, ..., w_N\}$ este o bază a lui $\mathcal{V}_h$ deducem că problema (2.3), (2.4) se scrie sub forma echivalentă:

Să se determine numerele reale $u_1, u_2, ..., u_Q$ astfel încât

$$\sum_{j=1}^{Q} a(w_j, w_i)u_j = (f, w_i),\ i = 1, 2, ..., N, \tag{2.18}$$

$$u_i = u_0(P_i),\ i = N+1, ..., Q. \tag{2.19}$$

S-a obţinut astfel un sistem de Q ecuaţii liniare cu Q necunoscute. Dacă $f_0 = g = u_0 = 0$, atunci $u_i = 0$, $i = 1, 2, ..., Q$ este o soluţie a acestui sistem iar din unicitatea demonstrată anterior este unica soluţie. De aici rezultă că sistemul (2.18), (2.19) are o soluţie unic determinată. □

3. Consideraţii practice privind metoda elementelor finite

Pentru a rezolva problema de aproximare (2.3), (2.4) trebuie calculaţi coeficienţii sistemului de ecuaţii liniare (2.18). Aceasta presupune definirea triangularizării $\mathcal{T}_h$ a lui $\bar{\Omega}$ şi apoi folosind (1.6) calculul pentru orice element finit K a valorilor $a_K(w_j, w_i)$ şi

$$(f, w_i)_K = \iint\limits_K f_0(X)w_i(X)dX + \int\limits_{\Gamma_1 \cap K} g(X)w_i(X)ds.$$

În continuare ţinând cont că w_i sunt nule pe K exceptând cele 3 valori ale lui i pentru care $P_i \in K$ se obţine o matrice de tip 3×3 ce conţine elementele $a_K(w_i, w_j)$ cu P_j, $P_i \in K$ şi vectorul coloană cu 3 componente $(f, w_i)_K$. În continuare se asamblează aceste *matrice locale* (calculate pentru fiecare $K \in \mathcal{T}_h$) obţinându-se din (1.6) *matricea de rigiditate* de ordin $Q \times Q$ ce conţine elementele $a(w_j, w_i)$ şi vectorul coloană cu Q componente (f, w_i). Apoi se rezolvă sistemul (2.18), (2.19) şi se compară valorile funcţiei u_h dată în (2.17) cu datele reale.

Observăm că $a_K(w_j, w_i) = 0$, dacă P_i sau P_j nu sunt vârfuri ale lui K, deci $a(w_j, w_i) = 0$, dacă P_i şi P_j nu sunt vârfuri ale aceluiaşi triunghi. Astfel matricea de rigiditate este o matrice rară. Analog $(f, w_i)_K = 0$, dacă P_i nu este un vârf al lui K.

Deoarece $\mathcal{W}_h$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{W}_{\mathcal{T}_h}$ se consideră pe $\mathcal{W}_h$ norma indusă definită în (1.23). Atunci din (5.7) şi (5.36) rezultă că pentru $\max\limits_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K}$ mărginit (unde ρ_K este diametrul cercului înscris în triunghiul K iar h_K este lungimea celei mai mari laturi a triunghiului) şi $h \to 0$, $u_h \to u$ relativ la norma dată în (1.23).

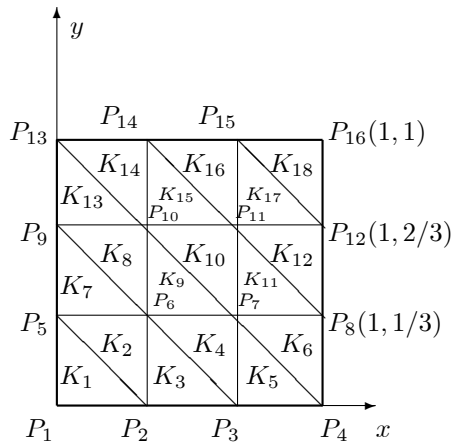
Exemplul 3.1. *(v.* [**6**]*, capitolul 6) Folosind metoda elementelor finite ne propunem să aproximăm soluţia problemei Dirichlet definită pe* $\Omega = [0.1] \times [0, 1]$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x - y,\ (x, y) \in \Omega, \tag{3.1}$$

cu condiţiile la limită

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \tag{3.2}$$

considerând triangulaţia din figura de mai jos.



Astfel s-a obţinut o problemă de tipul (1.1)-(1.3) unde $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = a_0 = 0$, $X = (x, y)$, $f_0(X) = x - y$, $\Gamma_0 = P_1P_4 \cup P_4P_{16} \cup P_{16}P_{13} \cup P_{13}P_1$ *iar* Γ_1 *este mulţimea vidă. În acest caz triangulaţia conţine 18 elemente finite* K_i, $i = 1, 2, ..., 18$ *şi 16 noduri* $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, ..., 16$. *Din (1.5) găsim că*

$$a_{K_i}(u, v) = \iint\limits_{K_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right) dxdy \tag{3.3}$$

iar din (1.7)

$$(f, v) = \iint\limits_{\Omega} (x - y)v(x, y)dxdy. \tag{3.4}$$

Problema variaţională ataşată (1.13), (1.14) cere în acest caz să se găsească $u \in \mathcal{W}_h$ *astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{18} a_{K_i}(u, v) = (f, v), \ \forall v \in \mathcal{V}_h, \tag{3.5}$$

cu condiţia (3.2). Condiţia de elipticitate (1.22) este satisfacută cu $\alpha = 1$ *iar dacă în (1.23) se consideră norma*

$$\|v\|^2_{\mathcal{W}'} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \iint\limits_{K} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(X) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}(X) \right)^2 \right) dX, \tag{3.6}$$

unde W' *este un subspaţiu vectorial al lui* W *ce conţine numai funcţii ce se anulează pe o submulţime nevidă fixată a lui* Γ_0 *relaţia (1.24) are loc chiar dacă* $a_0(X) = 0$ *şi metoda elementelor finite se poate aplica (v. şi paragraful 5).*

Deoarece $\Gamma_{0,h} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_8, P_9, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}\}$ *(v. (2.5)) găsim* $N = 4$, $Q = 16$. *Din (2.17)*

$$u_h(x, y) = \sum_{j=1}^{16} u_j w_j(x, y) \tag{3.7}$$

şi ţinând cont de (3.2) sistemul (2.18), (2.19) devine

$$\sum_{j=1}^{16} a(w_j, w_i)u_j = (f, w_i),\ i = 6, 7, 10, 11, \tag{3.8}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_8 = u_9 = u_{12} = u_{13} = u_{14} = u_{15} = u_{16} = 0. \tag{3.9}$$

Se obţine astfel sistemul

$$\sum_{j\in\{6,7,10,11\}} a(w_j, w_i)u_j = (f, w_i),\ i = 6, 7, 10, 11, \tag{3.10}$$

relativ la necunoscutele u_j, $j = 6, 7, 10, 11$. *Folosind că* $a(u, v) = a(v, u)$ *(forma biliniară este simetrică) şi notând* $c_{i,j} = a(w_i, w_j)$ *sistemul (3.10) se scrie*

$$\left\{\begin{array}{lllll} c_{6,6}u_6 + & c_{6,7}u_7 + & c_{6,10}u_{10} + & c_{6,11}u_{11} & = & (f, w_6) \\ c_{6,7}u_6 + & c_{7,7}u_7 + & c_{7,10}u_{10} + & c_{7,11}u_{11} & = & (f, w_7) \\ c_{6,10}u_6 + & c_{7,10}u_7 + & c_{10,10}u_{10} + & c_{10,11}u_{11} & = & (f, w_{10}) \\ c_{6,11}u_6 + & c_{7,11}u_7 + & c_{10,11}u_{10}+ & c_{11,11}u_{11} & = & (f, w_{11}) \end{array}\right. . \tag{3.11}$$

Deoarece dacă $P_m \notin K_i$ *sau* $P_n \notin K_i$, *atunci* $a_{K_i}(w_m, w_n) = 0$, *rezultă că* $c_{6,11} = 0$. *Calculăm ceilalţi coeficienţi* $c_{i,j}$ *folosind relaţiile (1.6), (3.3). Astfel*

$$c_{6,6} = \sum_{i=2,3,4,7,8,9} \iint\limits_{K_i} \left(\left(\frac{\partial w_6}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_6}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy. \tag{3.12}$$

Vom renumerota vârfurile oricărui triunghi K_i *cu* $M_1^{(i)}$, $M_2^{(i)}$ *şi* $M_3^{(i)}$, *în sens trigonometric, unde pentru a da o regulă presupunem că* $M_1^{(i)}$ *va fi vârful ce se opune ipotenuzei (numerotarea locală a nodurilor). Astfel în* K_2 $M_1^{(2)} = P_6$, $M_2^{(2)} = P_5$, $M_3^{(2)} = P_2$ *iar din (2.13), pentru* $(x, y) \in K_6$, $w_6(x, y) = \varphi_1^{(2)}(x, y)$. *Din (2.7) găsim*

$$\varphi_1^{(2)}(x, y) = \frac{(1/3 - 0)x + (1/3 - 0)y + 0 \cdot 0 - 1/3 \cdot 1/3}{1/9} = 3x + 3y - 1.$$

De aici

$$\iint\limits_{K_2} \left(\left(\frac{\partial w_6}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_6}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy = \iint\limits_{K_2} \left(3^2 + 3^2\right) dxdy = 18\sigma(K_2) = 1$$

Analog în K_3 $w_6(x, y)) = \varphi_3^{(3)}(x, y) = 3y$ *iar*

$$\iint\limits_{K_3} \left(\left(\frac{\partial w_6}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_6}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy = 1/2.$$

Apoi se obţin

$$\iint\limits_{K_4} \left(\left(\frac{\partial w_6}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_6}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy = \iint\limits_{K_7} \left(\left(\frac{\partial w_6}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_6}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy$$

$$= \iint\limits_{K_8} \left(\left(\frac{\partial w_6}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_6}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy = 1/2$$

şi

$$\iint\limits_{K_4} \left(\left(\frac{\partial w_6}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_6}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy = 1.$$

Atunci din (3.12) $c_{6,6} = 4$ *şi analog* $c_{7,7} = c_{10,10} = c_{11,11} = 4$.

Pentru al calcula pe $c_{6,7}$ *folosim relaţiile (1.6), (3.3). Deoarece dacă* $P_m \notin K_i$ *sau* $P_n \notin K_i$, *atunci* $a_{K_i}(w_m, w_n) = 0$ *obţinem*

$$c_{6,7} = \sum_{i=4,9} \iint\limits_{K_i} \left(\frac{\partial w_6}{\partial x} \frac{\partial w_7}{\partial x} + \frac{\partial w_6}{\partial y} \frac{\partial w_7}{\partial y} \right) dxdy. \tag{3.13}$$

Deoarece în K_4 $w_6(x,y)) = \varphi_2^{(4)}(x,y)$, $w_7(x,y)) = \varphi_1^{(4)}(x,y)$ *iar în* K_9 $w_6(x,y)) = \varphi_1^{(9)}(x,y)$, $w_7(x,y)) = \varphi_2^{(9)}(x,y)$ *cu ajutorul formulelor (2.7), (2.8) se găseşte* $c_{6,7} = -1$. *Similar găsim* $c_{6,10} = c_{7,11} = c_{10,11} = -1$, $c_{7,10} = 0$. *Apoi din (3.4)*

$$(f, w_6) = \sum_{i=2,3,4,7,8,9} \iint\limits_{K_i} ((x-y)\, w_6(x,y))\, dxdy = 0$$

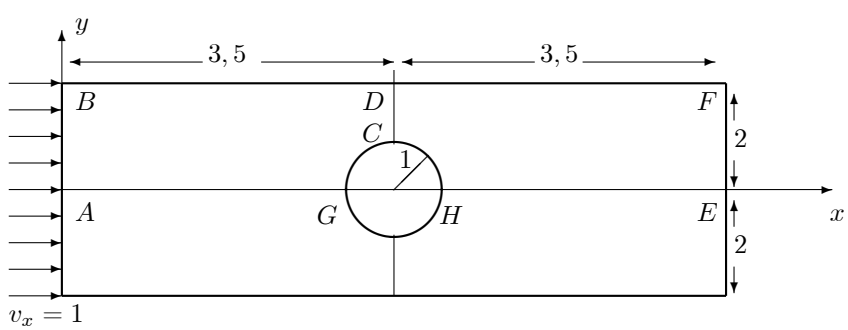
iar $(f, w_7) = 1/27$, $(f, w_{10}) = -1/27$, $(f, w_{11}) = 0$. *Astfel sistemul (3.11) devine*

$$\begin{cases} 4u_6 & -u_7 & -u_{10} & & = & 0 \\ -u_6 & +4u_7 & & -u_{11} & = & 1/27 \\ -u_6 & & +4u_{10} & -u_{11} & = & -1/27 \\ & -u_7 & -u_{10} & +4u_{11} & = & 0 \end{cases}. \tag{3.14}$$

Soluţiile sistemului sunt $u_6 = u_{11} = 0$, $u_7 = 1/108$, $u_{10} = -1/108$ *şi astfel din (3.7) soluţia aproximativă este*

$$u_h(x,y) = \frac{1}{108}(w_7(x,y) - w_{10}(x,y)).$$

Exemplul 3.2. *(v.* [**2**]*, capitolul 5) Se consideră mişcarea bidimensională plan paralelă, potenţială a unui fluid ideal incompresibil în jurul unui cilindru plasat între doi pereţi plani paraleli (v. figura de mai jos).*



Având în vedere simetria mecanică şi geometrică a problemei considerăm sfertul de domeniu Ω_1 mărginit de conturul $AGCDB$. Ecuaţiile ce descriu mişcarea sunt:

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in\Omega_1, \tag{3.15}$$

cu condiţiile la limită:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}=1,\ pe\ AB, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}=0,\ pe\ BD, \tag{3.17}$$

$$\Phi=C_1=\ const.\ pe\ CD, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\upsilon}=0,\ pe\ arcul\ GC\ reunit\ cu\ AG, \tag{3.19}$$

unde Φ este potenţialul vitezei adică

$$v_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ v_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{3.20}$$

şi

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in\Omega_1, \tag{3.21}$$

cu condiţiile la limită:

$$\Psi=\psi(y),\ pe\ AB, \tag{3.22}$$

$$\Psi=C_2=\ const.\ pe\ BD, \tag{3.23}$$

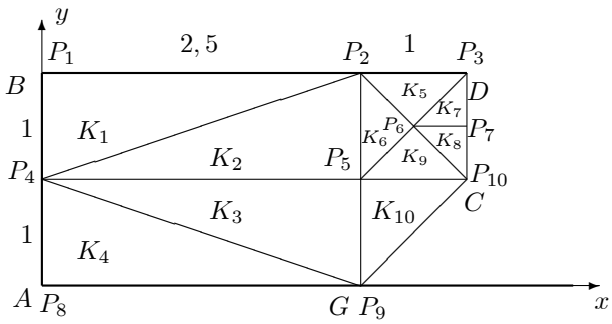
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\upsilon}=0\ pe\ CD, \tag{3.24}$$

$$\Psi=0,\ pe\ arcul\ GC\ reunit\ cu\ AG, \tag{3.25}$$

unde Ψ este funcţia de curent adică

$$v_x=\frac{\partial\Psi}{\partial y},\ v_y=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{3.26}$$

Vom aproxima problema la limită (3.21)-(3.25) pe domeniul Ω_1 cu o problemă similară pe domeniul Ω aflat în interiorul poligonului $AGCDB$ fără a intra în detalii privind evaluarea erorii (v. figura ce urmează).



Pentru simplitate vom lua $\Psi = u$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\psi(y) = y$ *şi* $C_2 = 2$. *Deoarece pe* CD $\frac{\partial \Psi}{\partial v} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ *se obţine problema*

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \in \Omega, \tag{3.27}$$

cu condiţiile la limită:

$$u(x,y) = \begin{cases} y, & \text{dacă } (x,y) \in AB \\ 2, & \text{dacă } (x,y) \in BD \\ 0, & \text{dacă } (x,y) \in AG \cup GC \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pe } CD. \tag{3.29}$$

Astfel s-a obţinut o problemă de tipul (1.1)-(1.3) unde $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{21} = a_0 = 0$, $f_0(X) = 0$, $\Gamma_0 = AG \cup GC \cup DB \cup BA$ *iar* $\Gamma_1 = CD$. *În acest caz considerând triangularizarea din figura anterioară se obţin 10 elemente finite* K_i, $i = 1, 2, ..., 10$ *şi 10 noduri* $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, ..., 10$. *Analog ca în exemplul 3.1 găsim*

$$a_{K_i}(u,v) = \iint\limits_{K_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \right) dxdy \tag{3.30}$$

şi

$$(f,v) = 0. \tag{3.31}$$

Problema variaţională ataşată (1.13), (1.14) cere în acest caz să se găsească $u \in \mathcal{W}_h$ *astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{10} a_{K_i}(u,v) = 0,\ \forall v \in \mathcal{V}_h, \tag{3.32}$$

cu condiţia (3.28). Condiţia de elipticitate (1.22) este satisfacută cu $\alpha = 1$ *şi analog ca pentru exemplul 3.1 se arată că metoda elementelor finite se poate aplica şi în acest caz.*

Deoarece $\Gamma_{0,h} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_8, P_9, P_{10}\}$ *(v. (2.5)) găsim* $N = 3$, $Q = 10$. *Din (2.17)*

$$u_h(x,y) = \sum_{j=1}^{10} u_j w_j(x,y) \tag{3.33}$$

şi ţinând cont de (3.28) sistemul (2.18), (2.19) devine

$$\sum_{j=1}^{10} a(w_j, w_i) u_j = 0, \ i = 5, 6, 7, \tag{3.34}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 2, \ u_4 = 1, \ u_8 = u_9 = u_{10} = 0. \tag{3.35}$$

Se obţine astfel sistemul

$$\sum_{j=5}^{7} a(w_j, w_i) u_j = -2 \sum_{j=1}^{3} a(w_j, w_i) - a(w_4, w_i), \ i = 5, 6, 7, \tag{3.36}$$

relativ la necunoscutele u_j, $j = 5, 6, 7$. *Deoarece* $a(w_j, w_i) = 0$ *dacă* P_i, P_j *nu sunt vârfuri ale aceluiaşi triunghi deducem că* $a(w_1, w_5) = a(w_1, w_6) = a(w_1, w_7) = a(w_2, w_7) = a(w_3, w_5) = a(w_4, w_6) = a(w_4, w_7) = a(w_5, w_7) = 0$. *Folosind faptul că* $a(u, v) = a(v, u)$ *(forma biliniară este simetrică) şi notând* $c_{i,j} = a(w_i, w_j)$ *sistemul (3.36) se scrie*

$$\begin{cases} c_{5,5}u_5 + & c_{5,6}u_6 & & = & -2c_{2,5} & -c_{4,5} \\ c_{5,6}u_5 + & c_{6,6}u_6 & + c_{6,7}u_7 & = & -2c_{2,6} & -2c_{3,6} \\ & c_{6,7}u_6 & + c_{7,7}u_7 & = & -2c_{3,7} & \end{cases}. \tag{3.37}$$

Calculăm coeficienţii $c_{i,j}$ *folosind relaţiile (1.6), (3.30) şi faptul că* $a_{K_i}(w_m, w_n) = 0$ *dacă* $P_m \notin K_i$ *sau* $P_n \notin K_i$. *Atunci*

$$c_{5,5} = a(w_5, w_5) = \sum_{i \in \{2,3,6,9,10\}} \iint_{K_i} \left(\left(\frac{\partial w_5}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_5}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy.$$

Analog ca în exemplul 3.1 se calculează coeficienţii $c_{i,j}$. *Înlocuind valorile în (3.37) rezultă*

$$\begin{cases} 4,9u_5 - & u_6 & & = & 2,9 \\ -u_5 + & 4u_6 & - u_7 & = & 3 \\ & -u_6 & + 2u_7 & = & 1 \end{cases}. \tag{3.38}$$

Soluţia sistemului este $u_5 = 0,845$, $u_6 = 1,241$, $u_7 = 1,120$ *şi astfel din (3.33)*

$$\begin{aligned} u_h(x,y) = 2w_1(x,y) + 2w_2(x,y) + 2w_3(x,y) + w_4(x,y) + \\ 0,845w_5(x,y) + 1,241w_6(x,y) + 1,120w_7(x,y) \end{aligned} \tag{3.39}$$

aproximează funcţia de curent pe Ω. *Folosind legătura dintre funcţia de curent şi viteză putem calcula aproximativ componentele acesteia. De exemplu*

$$v_x(P_7) \approx \frac{u_h(P_7) - u_h(P_{10})}{y_7 - y_{10}} = \frac{1,12 - 0}{1,5 - 1} = 2,24,$$

$$v_y(P_7) \approx -\frac{u_h(P_6) - u_h(P_7)}{x_6 - x_7} = -\frac{1,241 - 1,12}{3 - 3,5} = 0,242,$$

şi analog

$$v_x(P_3) \approx \frac{u_h(P_7) - u_h(P_3)}{y_7 - y_3} = \frac{1,12 - 2}{1,5 - 2} = 1,76,$$

$$v_y(P_3) \approx -\frac{u_h(P_2) - u_h(P_3)}{x_2 - x_3} = -\frac{2 - 2}{2,5 - 3,5} = 0.$$

4. Metoda elementelor finite Lagrange de gradul 2

Considerăm spaţiile vectoriale reale

$$\mathcal{W}_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v\,|_K \in \mathcal{P}_2\}, \tag{4.1}$$

unde $\mathcal{P}_2$ este spaţiul vectorial real al polinoamelor de două variabile de grad cel mult egal cu 2 şi

$$\mathcal{V}_h = \{v \in \mathcal{W}_h :\ v = 0 \text{ pe } \Gamma_0\}. \tag{4.2}$$

Fie din nou ca în paragraful 2 *problema de aproximare*:
Să se găsească $u_h \in \mathcal{W}_h$ astfel încât

$$u_h(P) = u_0(P),\ \forall P \in \Gamma_{0,h} \tag{4.3}$$

şi

$$\forall v_h \in \mathcal{V}_h,\ a(u_h, v_h) = (f, v_h), \tag{4.4}$$

unde

$$\Gamma_{0,h} = \{P \in \Gamma_0 : P \text{ este un vârf sau mijloc de latură al unui } K \in \mathcal{T}_h\}. \tag{4.5}$$

Elementele finite sunt şi în acest caz triunghiurile $K \in \mathcal{T}_h$ iar *nodurile* sunt vârfurile triunghiurilor şi mijloacele laturilor.

LEMA 4.1. *Fie un triunghi cu vârfurile $M_1,\ M_2,\ M_3$ şi $M_4,\ M_5,\ M_6$ mijloacele laturilor M_1M_2, M_2M_3 şi respectiv M_3M_1. Date numerele reale $\alpha_i,\ i = 1, 2, ..., 6$ există un unic polinom $w \in \mathcal{P}_2$ astfel încât*

$$w(M_i) = \alpha_i,\ i = 1, 2, ..., 6. \tag{4.6}$$

DEMONSTRAŢIE. Considerăm $\varphi_i,\ i = 1, 2, 3$ coordonatele baricentrice definite în lema 2.1. Notăm

$$\psi_i(X) = (2\varphi_i(X) - 1)\varphi_i(X),\ \psi_{i+2}(X) = 4\varphi_i(X)\varphi_{i+1}(X),\ i = 1, 2, 3, \tag{4.7}$$

unde $\varphi_4 = \varphi_1$. Atunci $\psi_i \in \mathcal{P}_2$ şi

$$\psi_i(M_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., 6, \tag{4.8}$$

deoarece din (2.7)-(2.9), $\varphi_1(M_4) = \frac{1}{2}$, $\varphi_3(M_4) = 0$, etc. Din (4.8) rezultă că funcţiile ψ_i sunt liniar independente şi deoarece $\dim\mathcal{P}_2 = 6$ ele formează o bază a lui $\mathcal{P}_2$. Atunci $w = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i\psi_i$ şi deoarece $\alpha_i = w(M_i)$, w este unic determinat de relaţiile (4.6). □

Fie $P_1, ..., P_N$ vârfurile şi mijloacele laturilor triunghiurilor $K \in \mathcal{T}_h$ ce nu aparţin lui $\Gamma_{0,h}$ iar $P_{N+1}, ..., P_Q$ cele din $\Gamma_{0,h}$.

TEOREMA 4.1. *Pentru orice $i = 1, 2, ..., Q$ există o unică funcţie $w_i \in \mathcal{W}_h$ astfel încât*

$$w_i(P_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., Q. \tag{4.9}$$

Funcţiile $\{w_1, w_2, ..., w_Q\}$ formează o bază a lui $\mathcal{W}_h$ şi pentru orice $v \in \mathcal{W}_h$

$$v(X) = \sum_{i=1}^{Q} v(P_i) w_i(X). \tag{4.10}$$

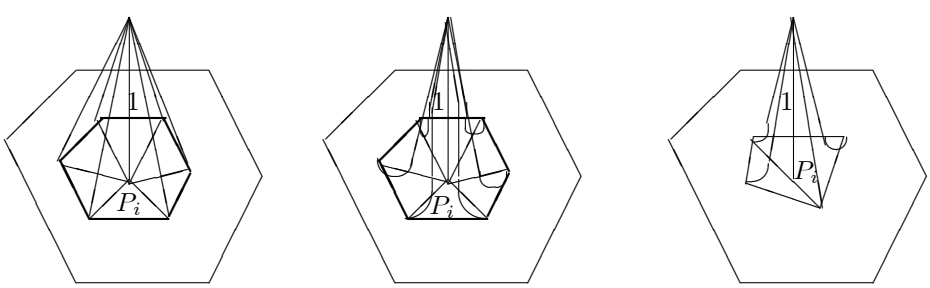
De asemenea mulţimea $\{w_1, w_2, ..., w_N\}$ este o bază a lui $\mathcal{V}_h$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $i = 1, 2, ..., Q$, din lema 4.1 deducem că pentru orice $K \in \mathcal{T}_h$ există $w_{i,K} \in \mathcal{P}_2$ unic determinat astfel încât $w_{i,K}(P_j) = \delta_{ij}$, pentru orice $P_j \in K$.

Dacă L este o latură comună a triunghiurilor $K_1,\ K_2 \in \mathcal{T}_h$, pe această latură w_{i,K_1} şi w_{i,K_2} devin polinoame de o variabilă de grad mai mic sau egal cu 2 ce coincid în 3 puncte distincte. De aici obţinem că $w_{i,K_1} = w_{i,K_2}$ pe $L = K_1 \cap K_2$. Astfel se poate defini $w_i \in C^0(\bar{\Omega})$ prin $w_i \mid_K = w_{i,K}$, pentru orice $K \in \mathcal{T}_h$. În continuare demonstraţia este analoagă cu cea a teoremei 2.1. □

OBSERVAŢIA 4.1. *Din teorema 4.1 obţinem dim $W_h = Q$, dim $V_h = N$ şi orice funcţie din W_h (respectiv V_h) este unic definită de valorile în nodurile P_i, $i = 1, 2, ..., Q$ (respectiv $i = 1, 2, ..., N$). De asemenea teorema 2.2 este adevărată iar problema (4.3), (4.4) este echivalentă cu (2.18), (2.19).*

Prin trecerea de la $\mathcal{P}_1$ la $\mathcal{P}_2$ dimensiunile lui W_h şi V_h cresc şi în plus există două tipuri de funcţii de bază sau funcţii de formă w_i (v. figura de mai jos ce reprezintă graficele acestor funcţii pentru elementele finite Lagrange de gradul 1 în a) iar pentru elementele finite Lagrange de gradul 2 în b) şi c)). Acest inconvenient este compensat de o precizie mai bună.



a) *b)* *c)*

5. Evaluarea erorii

Deoarece a este o formă biliniară din (1.24) rezultă că a este un produs scalar pe $\mathcal{W}_h$. Notăm

$$\|v\|_a = a(v,v)^{\frac{1}{2}},\ \forall v \in \mathcal{W}_h, \tag{5.1}$$

norma asociată acestui produs scalar. Folosind faptul că funcţiile a_0 şi a_{ij} sunt continue pe mulţimea compactă $\bar{\Omega}$, există o constantă $M > 0$ astfel încât pentru orice X din $\bar{\Omega}$

$$a_0(X) \le M,\ |a_{ij}(X)| \le \frac{M}{2},\ i = 1,2. \tag{5.2}$$

Atunci din (1.5), (1.6), (1.21), (1.22) şi (5.1)

$$\begin{aligned}
\|v\|_a^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \iint_K \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(X) \frac{\partial v}{\partial x_i}(X) \frac{\partial v}{\partial x_j}(X) + a_0(X) v^2(X) \right) dX \\
&= \left| \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \iint_K \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(X) \frac{\partial v}{\partial x_i}(X) \frac{\partial v}{\partial x_j}(X) + a_0(X) v^2(X) \right) dX \right| \\
&\le \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \iint_K \left(\frac{M}{2} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(X) \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x_1}(X) \frac{\partial v}{\partial x_2}(X) \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}(X) \right)^2 \right) + M v^2(X) \right) dX \\
&\le \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \iint_K M \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(X) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}(X) \right)^2 + v^2(X) \right) dX \\
&\le M \|v\|_{\mathcal{W}}^2,
\end{aligned}$$

pentru orice $v \in \mathcal{W}_h$. De aici folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz relativ la produsul scalar definit de a obţinem

$$|a(v,w)| \le \|v\|_a \|w\|_a \le \sqrt{M}\|v\|_{\mathcal{W}} \sqrt{M}\|w\|_{\mathcal{W}} = M\|v\|_{\mathcal{W}}\|w\|_{\mathcal{W}},$$

deci

$$|a(v,w)| \le M\|v\|_{\mathcal{W}}\|w\|_{\mathcal{W}},\ \forall v,w \in \mathcal{W}_h. \tag{5.3}$$

Fie u_h o soluţie a problemei de aproximare (2.3), (2.4) sau (4.3), (4.4). Notăm

$$\mathcal{W}_h(u_0) = \{v_h \in \mathcal{W}_h :\ \forall P \in \Gamma_{0,h},\ v_h(P) = u_0(P)\}. \tag{5.4}$$

Dacă $v_h \in \mathcal{W}_h(u_0)$, atunci $u_h - v_h \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_{\mathcal{T}_h}$ şi dacă u este o soluţie a problemei (1.13), (1.14)

$$\begin{aligned}
a(u-u_h, u-u_h) &= a(u-u_h, u-v_h) + a(u, v_h-u_h) - a(u_h, v_h-u_h) \\
&= a(u-u_h, u-v_h) + (f, v_h-u_h) - (f, v_h-u_h) = a(u-u_h, u-v_h).
\end{aligned}$$

Din (1.24) şi (5.3) obţinem

$$\alpha\|u-u_h\|_{\mathcal{W}}^2 \le a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h) \le M\|u-u_h\|_{\mathcal{W}}\|u-v_h\|_{\mathcal{W}}$$

şi astfel

$$\|u-u_h\|_{\mathcal{W}} \le \frac{M}{\alpha}\|u-v_h\|_{\mathcal{W}},\ \forall v_h \in \mathcal{W}_h(u_0). \tag{5.5}$$

De aici deducem că

$$\|u-u_h\|_{\mathcal{W}} \le \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in \mathcal{W}_h(u_0)} \|u-v_h\|_{\mathcal{W}}. \tag{5.6}$$

În particular găsim

$$\|u-u_h\|_{\mathcal{W}} \le \frac{M}{\alpha}\|u-r_h u\|_{\mathcal{W}}, \tag{5.7}$$

unde

$$r_h u(X) = \sum_{i=1}^{Q} u(P_i) w_i(X) \tag{5.8}$$

este funcţia din $\mathcal{W}_h$ ce coincide cu u în nodurile triangularizării (vârfurile şi mijloacele laturilor). Ea se numeşte *funcţia de interpolare Lagrange a lui u.*

Ţinând cont de (5.7) rezultă că eroarea (în norma $\| \ \|_{\mathcal{W}}$) ce se face aproximând soluţia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ a problemei (1.1)-(1.3) în ipotezele de elipticitate (1.21), (1.22) cu soluţia problemei de aproximare (2.3), (2.4) este mai mică decât $\|u-r_h u\|_{\mathcal{W}}$ înmulţită cu $\frac{M}{\alpha}$. Pentru a obţine o estimare a erorii vom evalua în continuare $\|u-r_h u\|_{\mathcal{W}}$ în cazul utilizării elementelor finite Lagrange de ordinul întâi, în alte cazuri procedându-se similar. Pentru aceasta avem nevoie de lemele ce urmează.

Lema 5.1. *Fie $K = P_1^{(K)}P_2^{(K)}P_3^{(K)} \in \mathcal{T}_h$, $u \in C^2(K)$ şi $u_K = r_h u|_K$. Atunci pentru orice X din K,*

$$u_K(X) = u(X) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{3} D^2u(\theta_i P_i^{(K)} + (1-\theta_i)X)\cdot(P_i^{(K)}-X)^2\varphi_i^{(K)}(X), \tag{5.9}$$

$$Du_K(X) = Du(X)$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{3} D^2u(\theta_i P_i^{(K)} + (1-\theta_i)X)\cdot(P_i^{(K)}-X)^2 D\varphi_i^{(K)}(X), \tag{5.10}$$

unde $\theta_i \in (0,1)$, $\varphi_i^{(K)}(X)$, sunt coordonatele baricentrice ale lui X, $P_i^{(K)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ $i=1,2,3$, $Du(X) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(X), \frac{\partial u}{\partial x_2}(X)\right)$, $Du(X)\cdot(P_i^{(K)}-X) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(X)(x_1^{(i)}-x_1)+ \frac{\partial u}{\partial x_2}(X)(x_2^{(i)}-x_2)$ etc.

Demonstraţie. Din (5.8) şi teorema 2.1 putem scrie

$$u_K(X) = \sum_{i=1}^{3} u(P_i^{(K)})\varphi_i^{(K)}(X),\ X \in K. \tag{5.11}$$

De aici

$$Du_K(X) = \sum_{i=1}^{3} u(P_i^{(K)}) D\varphi_i^{(K)}(X) \tag{5.12}$$

iar din formula lui Taylor, pentru orice $i = 1,2,3$,

$$u(P_i^{(K)}) = u(X) + Du(X)\cdot(P_i^{(K)}-X)$$

$$+\frac{1}{2!}D^2u(\theta_i P_i^{(K)} + (1-\theta_i)X)\cdot(P_i^{(K)}-X)^2,\ \theta_i \in (0,1). \tag{5.13}$$

Înlocuind (5.13) în (5.11) şi folosind (2.10) obţinem

$$u_K(X) = \sum_{i=1}^{3} \Big(u(X) + Du(X) \cdot (P_i^{(K)} - X)$$

$$+ \frac{1}{2!} D^2 u(\theta_i P_i^{(K)} + (1-\theta_i)X) \cdot (P_i^{(K)} - X)^2 \Big) \varphi_i^{(K)}(X)$$

$$= u(X) \sum_{i=1}^{3} \varphi_i^{(K)}(X) + \sum_{i=1}^{3} Du(X) \cdot (P_i^{(K)} - X) \varphi_i^{(K)}(X)$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{3} D^2 u(\theta_i P_i^{(K)} + (1-\theta_i)X) \cdot (P_i^{(K)} - X)^2 \varphi_i^{(K)}(X)$$

sau

$$u_K(X) = u(X) + \sum_{i=1}^{3} Du(X) \cdot (P_i^{(K)} - X) \varphi_i^{(K)}(X)$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{3} D^2 u(\theta_i P_i^{(K)} + (1-\theta_i)X) \cdot (P_i^{(K)} - X)^2 \varphi_i^{(K)}(X). \tag{5.14}$$

Deoarece relaţia (5.14) are loc pentru orice $u \in C^2(K)$, alegem $u(X) = x_1$. Atunci $u_K(X) = u(X)$ şi din (5.14) găsim

$$\sum_{i=1}^{3} (x_1^{(i)} - x_1) \varphi_i^{(K)}(X) = 0. \tag{5.15}$$

Analog rezultă

$$\sum_{i=1}^{3} (x_2^{(i)} - x_2) \varphi_i^{(K)}(X) = 0 \tag{5.16}$$

şi atunci pentru orice $u \in C^2(K)$

$$\sum_{i=1}^{3} Du(X) \cdot (P_i^{(K)} - X) \varphi_i^{(K)}(X)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(X)(x_1^{(i)} - x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(X)(x_2^{(i)} - x_2) \right) \varphi_i^{(K)}(X)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1}(X) \sum_{i=1}^{3} (x_1^{(i)} - x_1) \varphi_i^{(K)}(X) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(X) \sum_{i=1}^{3} (x_2^{(i)} - x_2) \varphi_i^{(K)}(X) = 0.$$

Înlocuind în (5.14) obţinem (5.9).

Vom arăta acum relaţia (5.10). Înlocuind (5.13) în (5.12) găsim

$$Du_K(X) = u(X) \sum_{i=1}^{3} D\varphi_i^{(K)}(X) + \sum_{i=1}^{3} Du(X) \cdot (P_i^{(K)} - X) D\varphi_i^{(K)}(X)$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{3} D^2 u(\theta_i P_i^{(K)} + (1-\theta_i)X) \cdot (P_i^{(K)} - X)^2 D\varphi_i^{(K)}(X).$$

Dar din (2.10) rezultă

$$\sum_{i=1}^{3} D\varphi_i^{(K)}(X) = (0,0)$$

şi astfel

$$Du_K(X) = \sum_{i=1}^{3} Du(X)\cdot(P_i^{(K)} - X)D\varphi_i^{(K)}(X)$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{3} D^2u(\theta_i P_i^{(K)} + (1-\theta_i)X)\cdot(P_i^{(K)} - X)^2 D\varphi_i^{(K)}(X). \tag{5.17}$$

Deoarece (5.17) are loc pentru orice $u \in C^2(K)$ alegând $u(X) = x_1$ se obţine $(1,0) = (\sum_{i=1}^{3}(x_1^{(i)} - x_1)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_1}, \sum_{i=1}^{3}(x_1^{(i)} - x_1)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_2})$ şi astfel $\sum_{i=1}^{3}(x_1^{(i)} - x_1)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_1} = 1$, $\sum_{i=1}^{3}(x_1^{(i)} - x_1)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_2} = 0$. Analog se găsesc relaţiile $\sum_{i=1}^{3}(x_2^{(i)} - x_2)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_2} = 1$, $\sum_{i=1}^{3}(x_2^{(i)} - x_2)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_1} = 0$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{3} Du(X)\cdot(P_i^{(K)} - X)D\varphi_i^{(K)}(X)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(X)(x_1^{(i)} - x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(X)(x_2^{(i)} - x_2)\right)(\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_2})$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(X)\sum_{i=1}^{3}(x_1^{(i)} - x_1)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_1}(X) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(X)\sum_{i=1}^{3}(x_2^{(i)} - x_2)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_1}(X),\right.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}(X)\sum_{i=1}^{3}(x_1^{(i)} - x_1)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_2}(X) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(X)\sum_{i=1}^{3}(x_2^{(i)} - x_2)\frac{\partial\varphi_i^{(K)}}{\partial x_2}(X)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(X), \frac{\partial u}{\partial x_2}(X)\right) = Du(X).$$

Înlocuind în (5.17) rezultă (5.10). □

LEMA 5.2. *Fie triunghiurile $K = M_1M_2M_3$ şi $\tilde{K} = \widetilde{M}_1\widetilde{M}_2\widetilde{M}_3$, cu vârfurile $M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $\widetilde{M}_i(\widetilde{x_1^{(i)}}, \widetilde{x_2^{(i)}})$, $i = 1,2,3$. Atunci există matricele*

$$B = \begin{pmatrix} \widetilde{x_1^{(2)}} - \widetilde{x_1^{(1)}} & \widetilde{x_1^{(3)}} - \widetilde{x_1^{(1)}} \\ \widetilde{x_2^{(2)}} - \widetilde{x_2^{(1)}} & \widetilde{x_2^{(3)}} - \widetilde{x_2^{(1)}} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} \widetilde{x_1^{(1)}} \\ \widetilde{x_2^{(1)}} \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

B inversabilă astfel încât

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x_1^{(i)}} \\ \widetilde{x_2^{(i)}} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} + C,\ i = 1,2,3, \tag{5.19}$$

iar pentru orice $X \in K$, $\tilde{X} = BX + C \in \tilde{K}$.

Demonstraţie. Fie triunghiul de referinţă $K^{(0)}$ cu vârfurile în $M_1^{(0)}(0,0)$, $M_2^{(0)}(1,0)$, $M_3^{(0)}(0,1)$. Din (5.19), pentru $K = K^{(0)}$ obţinem sistemele de ecuaţii liniare

$$\widetilde{x_1^{(i)}} = b_{11}x_1^{(i)} + b_{12}x_2^{(i)} + c_i,\ i = 1,2,3 \tag{5.20}$$

şi

$$\widetilde{x_2^{(i)}} = b_{21}x_1^{(i)} + b_{22}x_2^{(i)} + c_i,\ i = 1,2,3, \tag{5.21}$$

relativ la necunoscutele b_{ij}, c_i, unde

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Din (5.20) găsim

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \widetilde{x_1^{(1)}} & 0 & 1 \\ \widetilde{x_1^{(2)}} & 0 & 1 \\ \widetilde{x_1^{(3)}} & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2\sigma(K^{(0)})} = \widetilde{x_1^{(2)}} - \widetilde{x_1^{(1)}}, b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \widetilde{x_1^{(1)}} & 1 \\ 1 & \widetilde{x_1^{(2)}} & 1 \\ 0 & \widetilde{x_1^{(3)}} & 1 \end{vmatrix}}{2\sigma(K^{(0)})} = \widetilde{x_1^{(3)}} - \widetilde{x_1^{(1)}},$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \widetilde{x_1^{(1)}} \\ 1 & 0 & \widetilde{x_1^{(2)}} \\ 0 & 1 & \widetilde{x_1^{(3)}} \end{vmatrix}}{2\sigma(K^{(0)})} = \widetilde{x_1^{(1)}},$$

iar din (5.21)

$$b_{21} = \widetilde{x_2^{(2)}} - \widetilde{x_2^{(1)}}, b_{22} = \widetilde{x_2^{(3)}} - \widetilde{x_2^{(1)}}, c_2 = \widetilde{x_2^{(1)}}.$$

Deoarece

$$\det B = \begin{vmatrix} \widetilde{x_1^{(2)}} - \widetilde{x_1^{(1)}} & \widetilde{x_1^{(3)}} - \widetilde{x_1^{(1)}} \\ \widetilde{x_2^{(2)}} - \widetilde{x_2^{(1)}} & \widetilde{x_2^{(3)}} - \widetilde{x_2^{(1)}} \end{vmatrix} = 2\sigma(\tilde{K}) \neq 0, \tag{5.22}$$

deducem că B este inversabilă şi

$$\begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{x_1^{(i)}} \\ \widetilde{x_2^{(i)}} \end{pmatrix} - B^{-1}C,\ i = 1,2,3. \tag{5.23}$$

Dar compunerea a două aplicaţii de forma (5.19) este o aplicaţie de acelaşi tip şi atunci din (5.19) pentru $K = K^{(0)}$ şi (5.23) deducem că (5.19) are loc pentru un K arbitrar,

Deoarece, identificând punctele din plan cu spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$, putem scrie pentru orice $X \in K$,

$$X = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3,\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1, \tag{5.24}$$

rezultă

$$\begin{aligned} BX + C &= \alpha_1(BM_1 + C) + \alpha_2(BM_2 + C) + \alpha_3(BM_3 + C) \\ &= \alpha_1\widetilde{M_1} + \alpha_2\widetilde{M_2} + \alpha_3\widetilde{M_3} \in \tilde{K}. \end{aligned}$$

□

LEMA 5.3. *Cu notaţiile din lema 5.2*

$$\|B\|_2 \leq \frac{\tilde{h}}{\rho}, \tag{5.25}$$

unde $\tilde{h}$ este lungimea celei mai mari laturi a lui $\tilde{K}$, ρ este diametrul cercului înscris în K iar $\|B\|_2$ este dată în capitolul 1, paragraful 1.

DEMONSTRAŢIE. Ştiim că

$$\|B\|_2 = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^2 \\ \|\xi\|_2 = \rho}} \frac{\|B\xi\|_2}{\|\xi\|_2}. \tag{5.26}$$

Deoarece $\xi = Y - Z$ cu $Y,\ Z \in K$, obţinem $B\xi = B(Y - Z) = BY - BZ = BY + C - (BZ + C) = \tilde{Y} - \tilde{Z}$, cu $\tilde{Y},\ \tilde{Z} \in \tilde{K}$. De aici şi din (5.26) se găseşte (5.25). □

TEOREMA 5.1. *Fie $K = P_1^{(K)} P_2^{(K)} P_3^{(K)} \in \mathcal{T}_h$, $u \in C^2(K)$ şi*

$$M_2^{(K)} = \sup_{X \in K} \|D^2 u(X)\|_2.$$

Atunci

$$\|u - u_K\|_\infty \leq \tilde{C} M_2^{(K)} h_K^2, \|Du - Du_K\|_\infty \leq \tilde{\tilde{C}} M_2^{(K)} \frac{h_K^2}{\rho_K}, \tag{5.27}$$

unde $\tilde{C}$, $\tilde{\tilde{C}}$ sunt constantele pozitive ce nu depind de $K \in \mathcal{T}_h$, ρ_K este diametrul cercului înscris în K, h_K este lungimea celei mai mari laturi a triunghiului iar

$$\|Du\|_\infty = \sup_{X \in K} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(X)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(X)\right)^2}.$$

DEMONSTRAŢIE. Din lema 5.1, pentru $x \in K$,

$$|u(X) - u_K(X)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left\| D^2 u(\theta_i^{(K)} P_i^{(K)} + (1 - \theta_i^{(K)}) X) \right\|_2$$

$$\|P_i^{(K)} - X\|_2^2 |\varphi_i^{(K)}(X)| \leq \frac{M_2^{(K)} h^2}{2} \sum_{i=1}^{3} |\varphi_i^{(K)}(X)|,$$

deci

$$|u(X) - u_K(X)| \leq \frac{M_2^{(K)} h^2}{2} \sum_{i=1}^{3} |\varphi_i^{(K)}(X)|. \tag{5.28}$$

Alegem $\tilde{K} = K^{(0)}$ în lema 5.2 şi astfel pentru $X \in K$

$$\tilde{X} = BX + C \in \tilde{K}.$$

Atunci

$$\varphi_i^{(K)}(X) = \varphi_i^{(K)}(B^{-1}\tilde{X} - B^{-1}C) = \varphi_i^{(\tilde{K})}(\tilde{X}) \tag{5.29}$$

şi din (5.28) rezultă că pentru orice $X \in K$

$$|u(X) - u_K(X)| \leq \frac{3M_2^{(K)}h^2}{2} \max_{1\leq i\leq 3} \sup_{\tilde{X}\in\tilde{K}} |\varphi_i^{(\tilde{K})}(\tilde{X})|. \tag{5.30}$$

Din (5.30), notând $\tilde{C} = \frac{3}{2} \max_{1\leq i\leq 3} \sup_{\tilde{X}\in\tilde{K}} |\varphi_i^{(\tilde{K})}(\tilde{X})|$ rezultă prima relaţie (5.27).

Derivând (5.29) găsim

$$D\varphi_i^{(K)}(X) = BD\varphi_i^{(\tilde{K})}(\tilde{X}) \tag{5.31}$$

şi din lema 5.3

$$\|D\varphi_i^{(K)}(X)\|_\infty \leq \frac{\tilde{h}}{\rho}\|D\varphi_i^{(\tilde{K})}(\tilde{X})\|_\infty. \tag{5.32}$$

Atunci din (5.10) şi (5.32) notând $\tilde{\tilde{C}} = \frac{3}{2}\tilde{h} \max_{1\leq i\leq 3} \sup_{\tilde{X}\in\tilde{K}} |D\varphi_i^{(\tilde{K})}(\tilde{X})|$ obţinem a doua relaţie din (5.27). □

Din teorema 5.1 se obţine evaluarea erorii.

Corolar 5.1. *Dacă $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $M_2 = \|D^2u\|_\infty$, atunci*

$$\|u - r_h u\|_\infty \leq \tilde{C}M_2 h_K^2, \tag{5.33}$$

$$\|Du - Dr_h u\|_\infty \leq \tilde{\tilde{C}}M_2 h \max_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K}, \tag{5.34}$$

unde în (5.34) se exclud punctele X în care $Dr_h u$ nu există iar $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$.

Observaţia 5.1. *Deoarece, pentru $u \in C^2(\bar{\Omega})$,*

$$\|u\|_{\mathcal{W}}^2 = \iint_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(X)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(X)\right)^2 + u^2(X)\right) dX$$

$$\leq \iint_\Omega \left(\|Du\|_\infty^2 + \|u\|_\infty^2\right) dX \leq 2\sigma(\Omega)\left(\|u\|_\infty + \|Du\|_\infty\right)^2$$

rezultă

$$\|u\|_{\mathcal{W}} \leq \sqrt{2\sigma(\Omega)}(\|u\|_\infty + \|Du\|_\infty). \tag{5.35}$$

Atunci din (5.7), (5.33) şi (5.35) găsim

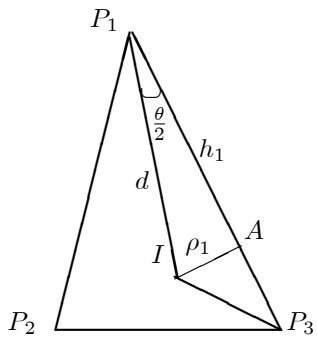
$$\|u - u_h\|_{\mathcal{W}} \leq Ch \max_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K}, \tag{5.36}$$

unde C este o constantă strict pozitivă. Aceasta, în cazul când $\max_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K}$ este mărginit, implică convergenţa metodei pentru $h \to 0$ şi dă o evaluare a erorii.

Se observă că pentru a micşora eroarea trebuie ca h să scadă. Din (5.34) deducem că pentru micşorarea erorii aproximării derivatei în interiorul elementelor finite trebuie ca $\frac{h_K}{\rho_K}$ să fie mic. Arătăm că

$$\frac{1}{2\tan\frac{\theta}{2}} \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq \frac{2}{\sin\theta}, \tag{5.37}$$

unde θ este cel mai mic unghi al triunghiului K (v. figura de mai jos)



Fie I centrul cercului înscris triunghiului $P_1P_2P_2$, $h_K = P_3P_1$ şi θ măsura unghiului din P_1. Notăm $\rho_1 = \frac{\rho_K}{2}$ raza cercului înscris, $IP_1 = d$, A piciorul perpendicularei duse din I pe P_3P_1 şi $AP_1 = h_1$. Relaţiile (5.37) sunt echivalente cu

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2} \leq \frac{h_K \sin\frac{\theta}{2}}{2\rho_1} \leq \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

Dar $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{h_1}{d}$, $\frac{h_K \sin\frac{\theta}{2}}{2\rho_1} = \frac{h}{2d}$ şi prima inegalitate devine $\frac{h_1}{2d} \leq \frac{h}{2d}$ ceea ce este evident. A doua inegalitate este echivalentă cu $\frac{h_K}{2d} \leq \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ sau $h_K \leq \frac{2d}{\cos\frac{\theta}{2}}$ ceea ce este adevărat deoarece $IP_3 < IP_1 = d$ şi $\frac{2d}{\cos\frac{\theta}{2}} \geq \frac{d+IP_3}{\cos\frac{\theta}{2}} \geq h_K$.

Din (5.37) deducem că eroarea este cu atât mai mică cu cât în orice element finit K unghiul cel mai mic este cât mai mare adică se consideră triunghiuri cât mai "apropiate" de cele echilaterale.

CAPITOLUL 3

ELEMENTE DE ANALIZĂ FUNCŢIONALĂ

1. Integrala Lebesgue

Peste tot în acest capitol folosim numai integrala Lebesgue. Menţionăm că funcţiile integrabile Riemann sunt măsurabile şi integrabile Lebesgue. Pentru o funcţie integrabilă Riemann integrala Lebesgue coincide cu integrala Riemann.

Prezentarea de faţă urmează [**13**].

Definiţia 1.1. *Vom spune că mulţimea $A \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$, este o* ***mulţime de măsură nulă****, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, această mulţime poate fi acoperită cu sfere al căror volum total este mai mic decât ε.*

Rezultă că orice submulţime a unei mulţimi de măsură nulă este de măsură nulă.

De asemenea, reuniunea unui număr cel mult numărabil de mulţimi de măsură nulă este o mulţime de măsură nulă. De exemplu, mulţimile numărabile şi suprafeţele netede pe porţiuni sunt mulţimi de măsură nulă.

Definiţia 1.2. *Spunem că o anumită proprietate are loc* ***aproape peste tot*** *(prescurtat a.p.t.) în domeniul $G \subset \mathbb{R}^N$, dacă mulţimea punctelor din G pentru care proprietatea nu are loc este de măsură nulă.*

Definiţia 1.3. *Funcţia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***măsurabilă****, dacă ea coincide aproape peste tot cu limita unui şir de funcţii continue pe porţiuni, convergent aproape peste tot.*

Din definiţie rezultă că, dacă funcţiile $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sunt măsurabile, atunci şi funcţiile $f + g$, fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$ şi f/g, dacă $g \neq 0$, sunt măsurabile.

O funcţie care coincide a.p.t cu limita unui şir de funcţii măsurabile, convergent a.p.t., este măsurabilă.

Fie $G \subset \mathbb{R}^N$. Funcţia $\chi_G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

$$\chi_G(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in G \\ 0, & \text{dacă } x \notin G \end{cases},$$

se numeşte *funcţie caracteristică* a mulţimii G.

Definiţia 1.4. *Mulţimea $G \subset \mathbb{R}^N$ se numeşte* ***mulţime măsurabilă*** *dacă funcţia χ_G este măsurabilă.*

În cele ce urmează vom presupune că toate mulţimile întâlnite sunt măsurabile, iar funcţiile întâlnite sunt măsurabile şi finite a.p.t.

Definiţia 1.5. *Fie funcţia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Se numeşte* ***suport*** *al funcţiei f mulţimea*

$$supp\ f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Fie f o funcţie continuă pe porţiuni, cu suport compact. Integrala Riemann a funcţiei f pe $\mathbb{R}^N$ se va scrie $\int f(x)\mathrm{d}x$.

DEFINIŢIA 1.6. *O funcţie nenegativă (măsurabilă şi finită a.p.t.) se numeşte* ***integrabilă în sens Lebesgue*** (***sumabilă***), *dacă ea coincide a.p.t. cu limita unui şir nedescrescător de funcţii cu suport compact, continue pe porţiuni,* $(f_n)_n$, *pentru care şirul de integrale* $\left(\int f_n(x)\,dx\right)_n$ *este mărginit. Limita acestui şir nedescrescător şi mărginit de integrale se numeşte* ***integrala Lebesgue*** *a funcţiei* f. *Integrala Lebesgue se va nota tot cu* $\int f(x)dx$, *deci*

$$\int f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx.$$

OBSERVAŢIA 1.1. *Se poate arăta că integrala Lebesgue a unei funcţii nenegative nu depinde de şirul* $(f_n)_n$ *utilizat pentru definirea integralei. De asemenea, condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia nenegativă* f *să fie egală cu zero a.p.t. este ca* $\int f(x)dx = 0$.

Fie f o funcţie măsurabilă oarecare. Definim funcţiile nenegative:

$$f^+(x) = \max[f(x), 0],\ f^-(x) = \max[-f(x), 0].$$

Este evident că

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ şi } |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

DEFINIŢIA 1.7. *Funcţia măsurabilă* f *se numeşte* ***integrabilă Lebesgue*** (***sumabilă***), *dacă funcţiile* f^+ *şi* f^- *sunt sumabile. Numărul*

$$\int f^+(x)\,dx - \int f^-(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

se numeşte ***integrala Lebesgue*** *a funcţiei* f.

Funcţia f *se numeşte* ***integrabilă Lebesgue pe mulţimea măsurabilă*** Ω, *dacă funcţia* $f\cdot\chi_\Omega$ *este sumabilă. Numărul*

$$\int f(x)\,\chi_\Omega(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx$$

se numeşte integrala Lebesgue a funcţiei f *pe mulţimea* Ω.

PROPOZIŢIA 1.1. (*Proprietăţi ale integralei Lebesgue*)

1) *funcţiile* f *şi* $|f|$ *sunt simultan integrabile Lebesgue şi*

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \le \int |f(x)|\,dx;$$

2) *dacă funcţiile* f *şi* g *sunt integrabile Lebesgue şi* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *atunci* $\alpha f+\beta g$ *este integrabilă Lebesgue şi*

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx;$$

3) *dacă funcţiile* f *şi* $|f|$ *sunt integrabile Riemann (posibil şi în sens impropriu), atunci ele sunt integrabile Lebesgue şi integralele respective coincid;*

4) *dacă funcţia g este integrabilă şi $|f(x)| \leq g(x)$ a.p.t., atunci funcţia f este integrabilă şi*

$$\int |f(x)|\, dx \leq \int g(x)\, dx.$$

Din 4) rezultă că orice funcţie mărginită este integrabilă pe orice mulţime mărginită. În particular, $\int_\Omega \mathrm{d}x = \int_\Omega \chi_\Omega(x)\mathrm{d}x$ există şi se numeşte *măsura Lebesgue* a mulţimii Ω. În mod evident, măsura unui domeniu mărginit cu frontieră netedă pe porţiuni coincide cu volumul său.

Două funcţii care coincid a.p.t. se numesc *echivalente*.

Exemplul 1.1. *Funcţia $\chi_{\mathbb{Q}} : (-1,1) \to \mathbb{R}$,*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in (-1,1) \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in (-1,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases},$$

este echivalentă cu funcţia $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) = 0$.

Dacă două funcţii sunt echivalente pe o mulţime, atunci au aceeaşi integrală Lebesgue pe această mulţime (conform observaţiei 1.1). Este binecunoscut faptul că funcţia $\chi_{\mathbb{Q}}$ nu este integrabilă Riemann pe $[-1,1]$. Ea este însă integrabilă Lebesgue şi

$$\int_{-1}^{1} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} u(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

2. Spaţii funcţionale

Definiţia 2.1. *Fie X un spaţiu vectorial real. Aplicaţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ se numeşte **normă** pe X dacă are următoarele proprietăţi:*
1) *$\|x\| \geq 0$ pentru orice $x \in X$; $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0_X$;*
2) *$\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x \in X$;*
3) *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice $x, y \in X$.*

*Un spaţiu vectorial înzestrat cu o normă se numeşte **spaţiu vectorial normat**.*

Inegalitatea din proprietatea 3) este cunoscută sub numele de *inegalitatea triunghiului*.

Pe un spaţiu vectorial se pot defini mai multe norme.

Definiţia 2.2. *Două norme $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ pe spaţiul X se numesc **echivalente** dacă există contantele k_1, $k_2 > 0$ astfel ca pentru orice $x \in X$ au loc inegalităţile*

$$k_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2 \|x\|_1 .$$

Definiţia 2.3. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Şirul $(x_n)_n \subset X$ se numeşte **convergent** la un element $x \in X$ dacă $\|x_n - x\| \to 0$ când $n \to \infty$. Şirul $(x_n)_n \subset X$ se numeşte **şir fundamental** sau **şir Cauchy** dacă $\|x_m - x_n\| \to 0$ când m, $n \to \infty$.*

Se vede uşor că orice şir convergent este fundamental. Afirmaţia reciprocă nu este adevărată în general.

Definiţia 2.4. *Un spaţiu normat $(X, \|\cdot\|)$ în care orice şir fundamental din X converge la un element din X, se numeşte **spaţiu complet** sau **spaţiu Banach**.*

Orice şir convergent $(x_n)_n$ este mărginit, adică există o constantă $M > 0$ astfel încât $\|x_n\| \leq M$ pentru orice n.

DEFINIŢIA 2.5. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat, $x_0 \in X$ şi $r > 0$. Se numeşte* ***bilă deschisă*** *cu centrul x_0, de rază r şi se notează $B(x_0; r)$ următoarea mulţime:*

$$B(x_0; r) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}.$$

Vom spune că x_0 este ***punct interior*** *al mulţimii $A \subset X$, dacă există o bilă deschisă $B(x_0; r)$ inclusă în mulţimea A. Dacă toate punctele unei mulţimi sunt puncte interioare, această mulţime se va numi mulţime* ***deschisă****. Vom spune că x este* ***punct limită*** *al mulţimii A, dacă există un şir $(x_n)_n \subset A$, astfel încât $x_n \to x$ când $n \to \infty$. Adăugând la mulţimea A mulţimea punctelor sale limită, se obţine* ***închiderea*** *lui A, notată cu $\overline{A}$. Este clar că $A \subset \overline{A}$. O mulţime care coincide cu închiderea sa se numeşte* ***mulţime închisă****. Mulţimea D se numeşte* ***densă*** *în X dacă $\overline{D} = X$.*

DEFINIŢIA 2.6. *Fie H un spaţiu vectorial real. Prin* ***produs scalar*** *$\langle \cdot, \cdot \rangle$ pe H se înţelege o formă biliniară pe $H \times H$ cu valori în $\mathbb{R}$, simetrică şi pozitiv definită.*

Reamintim că un produs scalar satisface *inegalitatea lui Cauchy-Schwarz*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle}, \ \forall u, v \in H.$$

Din această inegalitate rezultă că aplicaţia $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$,

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \tag{2.1}$$

este o normă pe H.

DEFINIŢIA 2.7. *Un spaţiu vectorial H înzestrat cu un produs scalar astfel încât H este complet în norma $\|\cdot\|$, definită de* (2.1)*, se numeşte* ***spaţiu Hilbert****.*

În continuare vom prezenta un spaţiu de funcţii măsurabile (Lebesgue), spaţiu care joacă un rol important în teoria ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$, o mulţime deschisă. Vom nota

$$L^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ măsurabilă şi } \int_\Omega |u(x)| \, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Pe $L^1(\Omega)$ putem considera norma

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)| \, \mathrm{d}x, \ u \in L^1(\Omega).$$

Înzestrat cu această normă, $L^1(\Omega)$ este un spaţiu Banach (vezi [**1**, cap. IV]).

Ca de obicei, vom identifica două funcţii din $L^1(\Omega)$ care coincid a.p.t. Funcţiile din $L^1(\Omega)$ se numesc funcţii *sumabile* pe Ω.

DEFINIŢIA 2.8. *Funcţia măsurabilă $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***funcţie de pătrat sumabil*** *pe Ω dacă funcţia u^2 este sumabilă pe Ω, adică dacă*

$$\int_\Omega u^2(x) \, dx < \infty.$$

Vom nota cu $L^2(\Omega)$ mulţimea funcţiilor de pătrat sumabil pe Ω. Această mulţime de funcţii are următoarele proprietăţi (vezi, de exemplu, [**12**]):

PROPOZIŢIA 2.1. 1) *Dacă Ω este de măsură finită, atunci $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$;*
2) *Dacă $u, v \in L^2(\Omega)$, atunci produsul $u \cdot v \in L^1(\Omega)$;*
3) *$L^2(\Omega)$ este un spaţiu vectorial real.*

DEMONSTRAŢIE. Folosim inegalitatea elementară

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right).$$

1) Fie $u \in L^2(\Omega)$. Atunci

$$\int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\Omega 1 \cdot |u(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\left(vol(\Omega) + \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right) < \infty,$$

deci $u \in L^1(\Omega)$.

2) Este suficient să observăm că

$$\int_\Omega |u(x) \cdot v(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v(x)|^2\,\mathrm{d}x\right) < \infty. \tag{2.2}$$

3) Dacă u, $v \in L^2(\Omega)$, atunci, ţinând seama de (2.2), obţinem

$$\int_\Omega |u(x) + v(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq 2\left(\int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v(x)|^2\,\mathrm{d}x\right) < \infty,$$

deci $u + v \in L^2(\Omega)$.

Se vede uşor că dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $u \in L^2(\Omega)$, atunci $\alpha u \in L^2(\Omega)$, deci $L^2(\Omega)$ este un spaţiu vectorial real. □

Introducem acum *produsul scalar* a două elemente u, $v \in L^2(\Omega)$, prin relaţia

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Se verifică uşor că relaţia (2.3) defineşte un produs scalar pe $L^2(\Omega)$. Conform (2.1), folosind acest produs scalar, $L^2(\Omega)$ devine spaţiu normat în raport cu norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Inegalitatea lui Cauchy-Schwarz devine în acest caz

$$\left|\int_\Omega u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}, \text{ pentru orice } u,\ v \in L^2(\Omega). \tag{2.5}$$

Se poate demonstra că spaţiul $L^2(\Omega)$ înzestrat cu norma (2.4) este complet.

Cu alte cuvinte $L^2(\Omega)$ este un spaţiu Hilbert.

3. Funcţii test

Vom defini în această secţiune spaţiul funcţiilor test (mai sunt numite şi funcţii de probă), un spaţiu de funcţii suficient de "cuminţi".

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$, o mulţime deschisă.

DEFINIŢIA 3.1. *Funcţia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcţie test** pe Ω dacă este indefinit derivabilă şi cu suport compact în Ω.*

Vom nota cu $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ mulţimea funcţiilor test. În raport cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea unei funcţii cu un număr real, $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ este un spaţiu vectorial real.

Se pune problema dacă există funcţii test diferite de funcţia identic nulă.

Răspunsul este afirmativ, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Pentru început prezentăm un exemplu de funcţie de o variabilă indefinit derivabilă.

Exemplul 3.1. *Funcţia* $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}, \tag{3.1}$$

este indefinit derivabilă. Este imediat că funcţia a este indefinit derivabilă dacă $x > 0$ *şi* $x < 0$. *Este deci suficient să stabilim că funcţia a are pentru* $x = 0$ *derivate de orice ordin nule. De fapt, vom arăta că*

$$a^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}^*, \tag{3.2}$$

P_{2n} *fiind o funcţie polinomială de grad* $2n$.

Raţionăm prin inducţie matematică. Funcţia a este continuă în 0 *şi*

$$a'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Totodată, notând $\frac{1}{x} = t$ *şi folosind regula lui L'Hôspital, obţinem* $a'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} a'(x) = \lim\limits_{t \to \infty} t^2 e^{-t} = 0$. *De asemenea* $a'_s(0) = \lim\limits_{x \to 0-0} a'(x) = 0$, *deci a este derivabilă în* 0 *şi* $a'(0) = 0$.

Aşadar

$$a'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases},$$

deci formula (3.2) este adevărată pentru $n = 1$.

Presupunem că formula (3.2) este adevărată pentru n. *Vom arăta că aceasta implică faptul că formula (3.2) este adevărată pentru* $n + 1$. *Într-adevăr, pentru* $x > 0$, *avem*

$$a^{(n+1)}(x) = \left(a^{(n)}(x)\right)' = \frac{1}{x^2}\left(-P'_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) + P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-\frac{1}{x}} = P_{2n+2}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

şi $a^{(n+1)}(x) = 0$, *dacă* $x < 0$. *Deoarece* $a^{(n)}$ *este continuă în* 0, *procedând ca mai sus, avem* $a_d^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} a^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{t \to \infty} P_{2n+2}(t) e^{-t} = 0$ *şi* $a_s^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{x \to 0-0} a^{(n+1)}(x) = 0$, *deci* $a_s^{(n+1)}(0) = 0$. *Prin urmare, formula (3.2) este adevărată pentru* $n \in \mathbb{N}^*$.

Prezentăm acum un exemplu de funcţie de N variabile reale, indefinit derivabilă în raport cu aceste variabile şi cu suport compact.

Exemplul 3.2. *Funcţia* $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $b(x) = a\left(1 - x_1^2 - ... - x_N^2\right)$, $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$, *unde funcţia a este dată de (3.1), este strict pozitivă pe bila unitate deschisă din* $\mathbb{R}^N$ *şi este nulă în afara ei; suportul acestei funcţii este bila unitate închisă din* $\mathbb{R}^N$. *Evident* $b \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Funcţia $\theta_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

$$\theta_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \cdot b\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right), \tag{3.3}$$

unde $c_\varepsilon = \left(\int_{\mathbb{R}^N} b\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right) \mathrm{d}x\right)^{-1}$, are următoarele proprietăţi:

1) suportul funcţiei θ_ε este bila închisă din $\mathbb{R}^N$, cu centrul în 0 şi de rază ε;
2) pentru orice $x \in \mathbb{R}^N$, $\theta_\varepsilon(x) \geq 0$;
3) $\theta_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$;
4) $\int_{\mathbb{R}^N} \theta_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$.

Funcţia θ_ε se numeşte *nucleu de mediere*, noţiunea fiind introdusă (ca şi cea de *funcţie de medie* care urmează) de V. A. Steklov. Dezvoltarea ulterioară a acestor noţiuni aparţine lui S. L. Sobolev. Familia de funcţii $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ se numeşte *familie regularizantă*.

În continuare vom utiliza următorul rezultat privind derivarea sub semnul integralei.

Teorema 3.1. *(*[**8**, teorema 2.4.2]*) (teorema de derivare sub semnul integralei Lebesgue) Fie $G \subset \mathbb{R}^M$ o submulţime măsurabilă, fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o submulţime deschisă şi fie $f : G \times \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:*

i) pentru orice $y \in \Omega$ funcţia $x \mapsto f(x,y)$, $x \in G$, este integrabilă;
ii) pentru a.p.t. $x \in G$, funcţia $y \mapsto f(x,y)$, $y \in \Omega$, este de clasă $\mathcal{C}^1$;
iii) există o funcţie integrabilă g astfel încât

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)\right| \leq g(x),$$

pentru a.p.t. $y \in \Omega$ şi pentru orice k ce satisface $1 \leq k \leq N$.

Atunci funcţia

$$F : \Omega \to \mathbb{R},\ F(y) = \int_G f(x,y)\,dx,$$

este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(y) = \int_G \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y)\,dx,\ 1 \leq k \leq N.$$

Definiţia 3.2. *Se numeşte **şir regularizant** orice şir de funcţii $(\rho_n)_{n\geq 1}$ definit pe $\mathbb{R}^N$ astfel încât*

$$\rho_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ supp\rho_n = \overline{B(0;1/n)},\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\,dx = 1,\ \rho_n \geq 0 \text{ în } \mathbb{R}^N.$$

Din cele de mai sus rezultă că $\left(\theta_{1/n}\right)_{n\geq 1}$ este un astfel de şir regularizant.

Fie acum $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu mărginit şi $u : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă. În particular u poate fi în $L^2(\Omega)$. Prelungim această funcţie cu 0 în exteriorul lui Ω.

Pentru fiecare $n \geq 1$ definim funcţia $u_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

$$u_n(x) = (\rho_n * u)(x) = \int_\Omega \rho_n(x-y)\,u(y)\,\mathrm{d}y,\ x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

(Se poate arăta că funcţia $y \mapsto \rho_n(x-y)\,u(y)$, $y \in \Omega$, este integrabilă (vezi, de exemplu, [**1**, teorema IV.15]), deci integrala din (3.4) are sens).

De fapt, integrala în formula (3.4) se face numai pe $\Omega \cap B(x; 1/n)$, deoarece în afara acestei mulţimi se anulează unul dintre cei doi factori.

Funcţiile u_n, $n \geq 1$, se numesc *funcţii de medie*.

Teorema 3.1 asigură că funcţiile de medie sunt indefinit derivabile pe tot spaţiul $\mathbb{R}^N$, derivatele de orice ordin ale unei funcţii de medie obţinându-se prin derivarea sub semnul integralei în formula (3.4), deci cu formula

$$D^\alpha u_n(x) = \int_\Omega u(y) D_x^\alpha \rho_n(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

unde α este un multiindice arbitrar.

Se pot demonstra următoarele rezultate importante:

TEOREMA 3.2. ([**1**, teorema IV.22])*Pentru orice $u \in L^1(\Omega)$ are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n * u - u\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

TEOREMA 3.3. ([**1**, corolar IV.23]) $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *este dens în* $L^1(\Omega)$.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă.

DEFINIŢIA 3.3. $L^1_{loc}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u|_D \in L^1(D)\right.$ *pentru orice mulţime deschisă şi mărginită astfel încât* $\left.\overline{D} \subset \Omega\right\}$.

Evident $\overline{D}$ este o mulţime compactă.

LEMA 3.1. (*Lema fundamentală a calculului variaţional*) *Dacă* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *satisface*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

atunci $u = 0$ *a.p.t. în* Ω.

DEMONSTRAŢIE. Fie D o mulţime deschisă şi mărginită astfel încât $\overline{D} \subset \Omega$ şi $0 < \varepsilon < dist(D, \partial\Omega)$. Considerăm funcţia θ_ε dată de (3.3). Pentru fiecare $x \in D$, fie funcţia $\varphi_{\varepsilon,x}(y) = \theta_\varepsilon(x-y)$. Atunci $\varphi_{\varepsilon,x} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Conform ipotezei

$$(\theta_\varepsilon * u)(x) = \int_\Omega \theta_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,\mathrm{d}y = 0 \text{ pentru orice } x \in D. \tag{3.5}$$

Dar $\theta_{1/n} * u \to u$ în $L^1(D)$ când $n \to \infty$, adică

$$\int_D \left|\left(\theta_{1/n} * u\right)(x) - u(x)\right| \mathrm{d}x \to 0 \text{ când } n \to \infty.$$

Ţinând seama de (3.5), obţinem $\int_D |u(x)|\mathrm{d}x = 0$ pentru orice $D \subset \Omega$. Rezultă că $u = 0$ a.p.t. în Ω. □

4. Derivate slabe

În anul 1936, S. L. Sobolev a introdus noţiunea de derivată slabă a unei funcţii, în legătură cu studiul problemei Cauchy pentru ecuaţii cu derivate parţiale de tip hiperbolic. Această noţiune este des utilizată în fizica matematică modernă.

Noţiunea de *derivată slabă* generalizează conceptul de derivată a unei funcţii (*derivata tare*) pentru funcţii care sunt integrabile, nu neaparat diferenţiabile.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă, unde $N \in \mathbb{N}^*$. Un vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ unde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq N$, se numeşte *multiindice de dimensiune* N. Numărul

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$$

se numeşte *lungimea* multiindicelui α.

Este cunoscut conceptul clasic de derivată parţială a unei funcţii reale u de N variabile reale. Dacă $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ şi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ este un multiindice, atunci prin $D^\alpha u$ se înţelege

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

De exemplu, dacă $N = 3$, $|\alpha| = 5$, $\alpha = (3, 2, 0)$, atunci $D^\alpha u$ înseamnă $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x_1^3 \partial x_2^2}$.

Dacă $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ şi $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N)$ sunt doi multiindici, atunci, prin definiţie, $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_N + \beta_N)$.

Este clar că $D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^\beta \left(D^\alpha u\right)$.

Dacă, de exemplu, $N = 2$, $|\alpha| = 2$, $\alpha = (1, 1)$, atunci $D^\alpha u$ înseamnă fie $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ fie $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$.

Vom introduce noţiunea de derivată slabă pentru funcţii reale de o variabilă reală.

Observaţia 4.1. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă.*

Deoarece scoaterea unui punct din intervalul I nu schimbă integrala $\int_I f(x)\, dx$, avem dreptul să notăm integrala pe oricare din intervalele $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) şi $[a, b]$ cu simbolul $\int_a^b f(x)\, dx$.

Observaţia 4.2. *Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ şi $u, v : [a, b] \subset \mathbb{R}$ două funcţii derivabile cu derivate continue. Este cunoscută formula de integrare prin părţi:*

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

Dacă, în plus, v satisface $v(a) = v(b) = 0$, atunci

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = -\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx. \tag{4.1}$$

Formula (4.1) poate fi folosită pentru a defini o noţiune mai generală de derivată.

Definiţia 4.1. *Fie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ şi $u \in L^1([a, b])$. Spunem că funcţia $v \in L^1([a, b])$ este* ***derivata slabă*** *a funcţiei u, dacă*

$$\int_a^b u(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_a^b v(x)\, \varphi(x)\, dx$$

pentru orice funcţie continuă şi derivabilă φ care satisface $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Prin urmare, noţiunea de derivată slabă se poate defini pentru anumite funcţii integrabile care nu sunt derivabile (nici chiar continue) în mod uzual.

EXEMPLUL 4.1. *Funcţia* $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$, *nu este derivabilă în* 0 *în sens clasic, dar are derivata slabă* $u'(x) = sign\ x$. *Într-adevăr, fie* φ *o funcţie continuă şi derivabilă care satisface* $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. *Atunci*

$$\int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)\, dx.$$

Integrând prin părţi, obţinem

$$\int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} sign\ x\ \varphi(x)\, dx,$$

unde

$$sign\ x : (-1,1) \to \mathbb{R},\ sign\ x = \begin{cases} -1, & dacă \quad x \in (-1,0) \\ 0, & dacă \quad x = 0 \\ 1, & dacă \quad x \in (0,1) \end{cases}.$$

Această funcţie nu este singura derivată slabă a funcţiei u: orice funcţie v egală cu sign x a.p.t. este de asemenea derivată slabă pentru u. Aceasta nu creează probleme, deoarece, în teoria spaţiilor Sobolev, funcţiile egale a.p.t. sunt identificate.

Aşadar, orice funcţie de forma

$$w : (-1,1) \to \mathbb{R},\ w(x) = \begin{cases} -1, & dacă \quad x \in (-1,0) \\ c_0, & dacă \quad x = 0 \\ 1, & dacă \quad x \in (0,1) \end{cases},$$

unde $c_0 \in \mathbb{R}$, *este derivată slabă de ordinul întâi a funcţiei u.*

EXEMPLUL 4.2. *Funcţia* $\chi_{\mathbb{Q}} : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & dacă \quad x \in (-1,1) \cap \mathbb{Q} \\ 0, & dacă \quad x \in (-1,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases},$$

nu este derivabilă în nici un punct, dar are derivata slabă peste tot funcţia $v : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $v(x) = 0$. *Într-adevăr, deoarece mulţimea numerelor raţionale este de măsură Lebesgue nulă, are loc*

$$\int_{-1}^{1} \chi_{\mathbb{Q}}(x) \varphi'(x)\, dx = 0.$$

Acest fapt corespunde intuiţiei, deoarece în spaţii Lebesgue, $\chi_{\mathbb{Q}}$ *se identifică cu funcţia nulă.*

În general, nu toate funcţiile integrabile admit derivate slabe. Există funcţii local integrabile care nu au derivate slabe, ca în exemplul care urmează.

EXEMPLUL 4.3. *Funcţiile cu discontinuităţi de prima speţă nu sunt slab derivabile. De exemplu, funcţia*

$$u : (-1,1) \to \mathbb{R},\ u(x) = \begin{cases} -1, & dacă \quad x \in (-1,0) \\ c_0, & dacă \quad x = 0 \\ 1, & dacă \quad x \in (0,1) \end{cases},$$

unde $c_0 \in \mathbb{R}$, *nu are derivată slabă. Presupunem prin absurd că funcţia* u *are derivată slabă funcţia* $v \in L^1_{loc}(-1,1)$. *Conform definiţiei*

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x)\,dx, \tag{4.2}$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(-1,1)$. *Dar, din definiţia lui* u, *avem*

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} \varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{1} \varphi'(x)\,dx = -2\varphi(0).$$

Ţinând seama de (4.2), obţinem

$$\int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x)\,dx = 2\varphi(0) \tag{4.3}$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(-1,1)$. *Luând* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$ *în (4.2), rezultă că*

$$\int_{0}^{1} v(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$. *Conform lemei 3.1,* $v(x) = 0$ *a.p.t. pe* $(0,1)$. *Similar se poate obţine că* $v(x) = 0$ *a.p.t. pe* $(-1,0)$, *deci* $v(x) = 0$ *a.p.t. pe* $(-1,1)$. *În consecinţă, din (4.3) vom avea*

$$0 = 2\varphi(0)$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(-1,1)$, *ceea ce este absurd. Prin urmare, funcţia* u *nu este slab derivabilă.*

Exemplul 4.4. *Mai general, fie* $u \in \mathcal{C}([a,b])$ *o funcţie continuu derivabilă pe porţiuni, adică există o partiţie a intervalului* $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, *astfel încât* $u \in \mathcal{C}^1[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le n$. *Se poate verifica direct cu definiţia că derivata slabă a funcţiei* u *este funcţia*

$$w(x) = \begin{cases} u'(x), & \text{dacă } x \in \bigcup_{i=1}^{n} (x_{i-1}, x_i) \\ c_i, & \text{dacă } x = x_i,\ 1 \le i \le n \end{cases},$$

unde $c_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, *sunt constante arbitrare.*

Aşadar derivata slabă există şi este egală cu derivata clasică pe fiecare interval (x_{i-1}, x_i). *Valorile derivatei slabe în nodurile* x_i *sunt nedefinite. Acest fapt nu creează dificultăţi deoarece definiţia derivatei slabe cu o integrală determină derivata slabă numai a.p.t.*

Ca în exemplul anterior se poate arăta că derivata slabă de ordinul doi a lui u *nu există decât dacă* $u'(x_i - 0) \ne u'(x_i + 0)$, $1 \le i \le n$.

Vom introduce acum noţiunea de derivată slabă pentru funcţii reale de două variabile reale. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi mărginită şi $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Atunci $u \cdot \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$. Extindem funcţia $u \cdot \varphi$ cu 0 la tot $\mathbb{R}^2$.

Considerăm un disc B cu rază suficient de mare astfel ca $supp\varphi \subset B$. Aplicând formula Green-Riemann pe B, obţinem

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (u \cdot \varphi) \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint_{B} \frac{\partial}{\partial x_1} (u \cdot \varphi) \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = -\oint_{\partial B} (u \cdot \varphi) \, \mathrm{d}x_1 = 0.$$

Derivând primul termen rezultă

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 + \iint_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = 0,$$

deci

$$\iint_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = -\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \varphi \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Similar, se obţine

$$\iint_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = -\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_2} \varphi \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Raţionamentul se poate repeta dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, folosind formula Gauss-Ostrogradski în locul formulei Green-Riemann.

Aceste formule se extind la cazul N-dimensional. Folosind integrarea prin părţi, vom avea: dacă $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, atunci

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \mathrm{d}x = -\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \mathrm{d}x, \text{ pentru orice } j \text{ cu } 1 \leq j \leq N, \tag{4.4}$$

deoarece termenii pe frontieră sunt nuli.

Dacă $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ este un multiindice şi $u \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, aplicând formula (4.4) de α_j ori pentru fiecare j, deducem că

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \varphi \mathrm{d}x.$$

Definiţia derivatei slabe se poate generaliza la N dimensiuni în modul următor.

Definiţia 4.2. *Spunem că o funcţie $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ are D^α-derivată slabă dacă există o funcţie $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ astfel încât*

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g \varphi dx, \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \tag{4.5}$$

Derivata slabă se notează cu $D^\alpha u$.

Teorema 4.1. 1) *Dacă există derivata slabă a unei funcţii, atunci ea este unică.*

2) *Derivata slabă nu depinde de ordinea în care se face derivarea.*

3) *Dacă funcţiile $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ au D^α-derivatele slabe f respectiv g, atunci $\alpha u + \beta v$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, are D^α-derivata slabă $\alpha f + \beta g$,*

Demonstraţie. 1) Presupunem că funcţia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ are două D^α-derivate slabe, $g, h \in L^1_{loc}(\Omega)$. Atunci

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \mathrm{dx} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g \varphi \mathrm{d}x, \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \mathrm{dx} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} h \varphi \mathrm{d}x, \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Scăzând cele două egalităţi şi notând $w = g - h$, obţinem

$$\int_{\Omega} w\varphi \mathrm{d}x = 0, \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega).$$

Atunci, din lema 3.1 rezultă că $w(x) = 0$ a.p.t. $x \in \Omega$, deci $g(x) = h(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$.

2) Este evident, deoarece în formula (4.5) se poate schimba arbitrar ordinea de derivare a funcţiei φ. □

Exemplul 4.5. (*Funcţia lui Heaviside bidimensională*) *Fie funcţia* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x, y > 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

Vom arăta că $D^{\alpha}h$, *unde* $\alpha = (1,1)$, *nu există. Pentru orice* $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ *există* $M > 0$ *astfel încât* $\mathrm{supp}\varphi \subset (-M, M) \times (-M, M)$. *Atunci*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^M \left(\int_0^M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y)\, dy \right) dx = \tag{4.6}$$

$$= -\int_0^M \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,0)\, dx = \varphi(0,0).$$

Procedăm ca în exemplul 4.3. Presupunem prin absurd că funcţia h *are derivată slabă funcţia* $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. *Conform definiţiei*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\, dx\, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} v(x,y)\, \varphi(x,y)\, dx\, dy, \tag{4.7}$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. *Ţinând seama de* (4.6) *şi* (4.7), *obţinem*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} v(x,y)\, \varphi(x,y)\, dx\, dy = \varphi(0,0),$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. *Luând în* (4.7) $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(D)$, *unde* D *este primul cadran, rezultă că*

$$\iint_D v(x,y)\, \varphi(x,y)\, dx = 0,$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(D)$. *Conform lemei 3.1,* $v(x,y) = 0$ *a.p.t. pe* D. *Dacă luăm în* (4.7) $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^2 \backslash D)$, *se obţine că* $v(x,y) = 0$ *a.p.t. pe* $\mathbb{R}^2 \backslash D$, *deci* $v(x,y) = 0$ *a.p.t. pe* $\mathbb{R}^2$. *În consecinţă, din* (4.6) *vom avea*

$$0 = \varphi(0,0)$$

pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, *ceea ce este absurd. Prin urmare, funcţia* $D^{(1,1)}u$ *nu există.*

Exemplul 4.6. *În metoda elementului finit pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale, întâlnim adesea funcţii polinomiale pe porţiuni.*

Presupunem că $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *este un domeniu poligonal care este partiţionat în domenii poligonale:*

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_i.$$

În mod uzual, fiecare subdomeniu este un triunghi sau un patrulater.

Presupunem că pentru $k \in \mathbb{N}^*$

$$u \in \mathcal{C}^k\left(\overline{\Omega}\right), \ \ u|_{\overline{\Omega}_i} \in \mathcal{C}^{k+1}\left(\overline{\Omega_i}\right), \ 1 \leq i \leq n.$$

Atunci există derivata slabă de ordin $k+1$ *a funcţiei* u*, pentru orice multiindice* α *de lungime* $k+1$*. Derivata slabă* $D^\alpha u$ *este dată de*

$$D^\alpha u\left(x\right) = \begin{cases} D^\alpha u\left(x\right), & \text{dacă } x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} int\ \Omega_i \\ \text{arbitrar}, & \text{altfel} \end{cases}.$$

Ordinul k *este determinat de ordinul ecuaţiei diferenţiale sau al ecuaţiei cu derivate parţiale şi de tipul de element finit. De exemplu, pentru o problemă eliptică de ordinul doi, funcţiile element finit au derivate slabe de ordinul întâi.*

Se poate întâmpla ca o funcţie să admită derivata slabă de ordinul doi, fără să admită derivate slabe de ordinul întâi.

Exemplul 4.7. *Fie funcţia* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u\left(x,y\right) = signx + signy$*. Dacă* $\alpha = (1,1)$*, vom arăta că* $D^\alpha u = 0$*. Pentru orice* $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ *există* $M > 0$ *astfel încât* $supp\varphi \subset (-M,M) \times (-M,M)$*. Atunci*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u\left(x,y\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx\, dy = \int\limits_{-M}^{M} \left(\int\limits_{-M}^{M} \left(signx + signy\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\left(x,y\right) dy \right) dx.$$

Dar

$$\int\limits_{-M}^{M} \left(signx + signy\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\left(x,y\right) dy =$$

$$= \left(signx - 1\right) \int\limits_{-M}^{0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\left(x,y\right) dy + \left(signx + 1\right) \int\limits_{0}^{M} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\left(x,y\right) dy =$$

$$= \left(signx - 1\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x,0\right) - \left(signx + 1\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x,0\right) = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x,0\right),$$

deoarece $\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x,-M\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x,M\right) = 0$*. În consecinţă*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u\left(x,y\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx\, dy = -2 \int\limits_{-M}^{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x,0\right) dx = 0,$$

deoarece $\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(-M,0\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(M,0\right) = 0$*. Rezultă că* $D^{(1,1)} u = 0$*.*

Vom arăta acum că $D^{(0,1)} u$ *nu există. Procedăm ca mai sus. Obţinem succesiv*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u\left(x,y\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_{-M}^{M} \left(\int\limits_{-M}^{M} \left(signx + signy\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(x,y\right) dy \right) dx,$$

$$\int\limits_{-M}^{M} \left(signx + signy\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(x,y\right) dy =$$

$$= \int_{-M}^{0} (signx - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\, dy + \int_{0}^{M} (signx + 1) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\, dy =$$

$$= (signx - 1)\varphi(x,0) - (signx + 1)\varphi(x,0) = -2\varphi(x,0),$$

deoarece $\varphi(x,-M) = \varphi(x,M) = 0$. *În consecinţă*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx\, dy = -2 \int_{-M}^{M} \varphi(x,0)\, dx, \tag{4.8}$$

Dacă ar exista $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ astfel ca $D^{(0,1)}u = g$ atunci am avea

$$-\int\int_{R^2} g(x,y)\varphi(x,y)\, dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2 \int_{-M}^{M} \varphi(x,0)\, \mathrm{d}x$$

de unde rezultă că pentru suportul lui φ în afara axei Ox integrala de mai sus este zero, deci conform lemei fundamentale a calculului variaţional g este nulă în afara axei Ox. Cum mulţimea punctelor de pe axa Ox este neglijabilă rezultă g=0 a.p.t. deci termenii din (4.8) ar trebui să fie zero pentru orice φ, ceea ce este imposibil. Prin urmare $D^{(0,1)}u$ nu există.

5. Spaţii Sobolev

Fie Ω o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^N$. Definim

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pentru orice } \alpha \text{ cu } |\alpha| \le m \right\}. \tag{5.1}$$

În această definiţie derivatele sunt derivate slabe. Cu alte cuvinte, pentru orice multiindice α care satisface $|\alpha| \le m$, există o funcţie $v_\alpha \in L^2(\Omega)$ astfel ca

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi \mathrm{d}x, \text{ pentru orice } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.2}$$

Atunci $D^\alpha u = v_\alpha$, pentru orice α cu $|\alpha| \le m$.

Spaţiul $H^m(\Omega)$ este spaţiu normat în raport cu norma

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum\nolimits_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}. \tag{5.3}$$

De asemenea, pe $H^m(\Omega)$ se poate considera produsul scalar

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum\nolimits_{|\alpha| \le m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

De fapt, norma dată de (5.3) este norma definită de produsul scalar (5.4). Are loc

Teorema 5.1. *Spaţiul $H^m(\Omega)$ este un spaţiu Hilbert.*

Demonstraţie. Fie $(u_n)_n$ un şir Cauchy în $H^m(\Omega)$. Atunci pentru orice multiindice α cu $|\alpha| \le m$, $(D^\alpha u_n)_n$ este şir Cauchy în $L^2(\Omega)$. Spaţiul $L^2(\Omega)$ fiind complet, rezultă că pentru fiecare α cu $|\alpha| \le m$, există $v_\alpha \in L^2(\Omega)$ astfel ca

$$\|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ când } n \to \infty. \tag{5.5}$$

Notăm cu w funcţia v_α corespunzătoare singurului multiindice α pentru care $|\alpha| = 0$, pentru care (5.5) are forma

$$\|u_n - w\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ când } n \to \infty. \tag{5.6}$$

Pe de altă parte, ţinând seama de (5.2) putem scrie

$$\int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi \mathrm{d}x, \text{ pentru orice } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.7}$$

Din inegalitatea lui Hölder avem

$$\left| \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega w D^\alpha \varphi \mathrm{d}x \right| \le \|u_n - w\|_{L^2(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.8}$$

şi pentru orice α cu $|\alpha| > 0$

$$\left| \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega v_\alpha \varphi \mathrm{d}x \right| \le \|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.9}$$

Trecând la limită în (5.7) şi ţinând seama de (5.8), (5.6), (5.9), (5.5), rezultă

$$\int_\Omega w D^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi \mathrm{d}x, \text{ pentru orice } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

ceea ce înseamnă că $D^\alpha w = v_\alpha$ în sens slab.

Prin urmare $w \in H^m(\Omega)$. Din (5.5) obţinem

$$\|u_n - w\|_{H^m} = \left(\sum\nolimits_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u_n - v_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \to 0 \text{ când } n \to \infty.$$

Aşadar $H^m(\Omega)$ este complet, deci este un spaţiu Hilbert. □

Exemplul 5.1. *Fie funcţia $u : (0,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se arată uşor că $u \in L^2(0,1)$ dacă $\alpha > -1/2$ şi $u \in H^1(0,1)$ dacă $\alpha > 1/2$.*

Exemplul 5.2. *Fie funcţia $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) = |x|$. Ţinând seama de exemplul 4.1, rezultă că $u \in H^1(-1,1)$, dar $u \notin H^2((-1,1))$. De asemenea, funcţia lui Heaviside unidimensională,*

$$\theta : (-1,1) \to \mathbb{R},\ \theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \le 0 \end{cases},$$

este în $L^2(-1,1)$, dar nu este în $H^1(-1,1)$.

Lucrul cu funcţiile din $L^2(\Omega)$ şi cu derivatele lor slabe este destul de delicat.

În multe probleme, teorema următoare permite lucrul cu funcţii regulate, urmate apoi de o trecere la limită.

Definiţia 5.1. *Spunem că domeniul Ω este tare stelat în raport cu punctul $M \in \Omega$, dacă pentru orice $P \in \overline{\Omega}$, segmentul deschis $(MP) \subset \Omega$.*

Spunem că domeniul Ω este de clasă $\mathcal{C}^k$ dacă pentru orice punct M_0 al frontierei Γ a lui Ω există o vecinătate a acestui punct $\mathcal{V}_0$, un sistem de axe $\left(O_0; x_1^0, ..., x_N^0\right)$ şi o funcţie $a_0 \in \mathcal{C}^k\left(\mathbb{R}^{N-1}\right)$ astfel încât

$$\begin{array}{c} \Gamma \cap \mathcal{V}_0 = \left\{ x \in \mathcal{V}_0 \mid x_N^0 = a_0\left(x_1^0, ..., x_{N-1}^0\right) \right\} \\ \Omega \cap \mathcal{V}_0 = \left\{ x \in \mathcal{V}_0 \mid x_N^0 > a_0\left(x_1^0, ..., x_{N-1}^0\right) \right\} \\ \overline{\Omega}^c \cap \mathcal{V}_0 = \left\{ x \in \mathcal{V}_0 \mid x_N^0 < a_0\left(x_1^0, ..., x_{N-1}^0\right) \right\} \end{array}.$$

Se observă că , dacă Ω este de clasă $\mathcal{C}^k$, aceasta implică faptul că, local, Ω este situat de aceeaşi parte a frontierei Γ.

Vom nota cu $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ mulţimea restricţiilor la $\overline{\Omega}$ a funcţiilor din $\mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$.

TEOREMA 5.2. *Dacă Ω este tare stelat în raport cu un punct al său sau dacă Ω este de clasă $\mathcal{C}^0$, atunci $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ este dens în $H^m(\Omega)$.*

Este clar că $C_0^\infty(\Omega) \subset H^m(\Omega)$.

DEFINIŢIA 5.2. *Vom nota cu $H_0^m(\Omega)$ închiderea lui $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ în $H^m(\Omega)$.*

Prin urmare, dacă $u \in H_0^m(\Omega)$, atunci există un şir $(u_n)_n \subset C_0^\infty(\Omega)$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^m} = 0.$$

Spaţiul $H_0^m(\Omega)$ este înzestrat cu produsul scalar din $H^m(\Omega)$ şi cu norma indusă de acesta. Fiind subspaţiu închis al lui $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ este la rândul său un spaţiu Hilbert.

OBSERVAŢIA 5.1. *Ecuaţiile diferenţiale (sau cu derivate parţiale) sunt adesea cuplate cu condiţii la limită. În general nu putem vorbi de valorile pe $\partial\Omega$ ale unei funcţii din $L^2(\Omega)$. Spre exemplu, dacă $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ şi $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u(x_1,x_2) = x_1^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, atunci $u \in L^2(\Omega)$, dar nu putem vorbi de valorile lui u pe $\partial\Omega$.*

Introducem acum noţiunea de *urmă* pe frontieră a unei funcţii din $H^m(\Omega)$.

Fie $\gamma_0 : \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right) \to \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ aplicaţia care duce o funcţie din $\mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)$ în urma sa pe $\partial\Omega$. Dacă Ω are frontiera suficient de regulată, ţinând seama de teorema 5.2, γ_0 se extinde prin continuitate la $H^1(\Omega)$. Se poate demonstra că funcţiile din $H_0^1(\Omega)$ sunt acele funcţii din $H^1(\Omega)$, nule pe $\partial\Omega$.

TEOREMA 5.3. *(Inegalitatea lui Friedrichs-Poincaré) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită. Atunci, există o constantă pozitivă c_Ω astfel ca*

$$\int_\Omega u^2(x)\,dx \le c_\Omega \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx, \text{ pentru orice } u \in H_0^1(\Omega). \tag{5.10}$$

DEMONSTRAŢIE. Ţinând seama de definiţia spaţiului $H_0^1(\Omega)$, este suficient să demonstrăm inegalitatea pentru funcţii din $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Inegalitatea se extinde apoi prin densitate la $H_0^1(\Omega)$.

Pentru simplitatea scrierii vom considera $N = 2$.

Fie $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Domeniul Ω fiind mărginit, există un pătrat cu latura M, suficient de mare, $\Pi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -M \le x, y \le M\right\}$, care conţine Ω în interiorul său. Prelungim funcţia u cu valoarea 0 în $\Pi\backslash\Omega$,

$$\overline{u}(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & \text{dacă } (x,y) \in \Omega \\ 0, & \text{dacă } (x,y) \in \Pi\backslash\Omega \end{cases}. \tag{5.11}$$

După formula lui Leibniz-Newton, avem

$$\overline{u}(x,y) - \overline{u}(-M,y) = \int_{-M}^{x} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t,y)\,\mathrm{d}t. \tag{5.12}$$

Cum punctul $(-M, y)$ se află în afara domeniului Ω, vom avea $\overline{u}(-M, y) = 0$, deci (5.12) se mai scrie

$$\overline{u}(x, y) = \int_{-M}^{x} 1 \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t, y)\, \mathrm{d}t.$$

Din inegalitatea lui Cauchy-Schwarz (2.5), obţinem

$$\overline{u}^2(x, y) = \left(\int_{-M}^{x} 1 \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t, y)\, \mathrm{d}t \right)^2 \leq \left(\int_{-M}^{x} 1^2 \mathrm{d}t \right) \cdot \int_{-M}^{x} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t, y) \right)^2 \mathrm{d}t \leq \tag{5.13}$$

$$\leq 2M \int_{-M}^{x} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t, y) \right)^2 \mathrm{d}t$$

Integrăm (5.13) pe Π. Avem

$$\iint_{\Pi} \overline{u}^2(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 2M \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{x} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t, y) \right)^2 \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 4M^2 \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{x} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t, y) \right)^2 \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \leq 4M^2 \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{M} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(t, y) \right)^2 \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y =$$

$$= 4M^2 \iint_{\Pi} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}(x, y) \right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ţinând seama de (5.11), am arătat că

$$\iint_{\Omega} u^2(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 4M^2 \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Analog se arată

$$\iint_{\Omega} u^2(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 4M^2 \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Prin adunarea celor două inegalităţi de mai sus rezultă (5.10) cu $c_\Omega = 2M^2$. $\square$

Pe $H_0^1(\Omega)$ putem considera norma dată de (5.3), care se mai scrie

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2(x)\, \mathrm{d}x + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, \mathrm{d}x \right)^{1/2}, \text{ pentru orice } u \in H_0^1(\Omega). \tag{5.14}$$

Din teorema 5.3, obţinem

Corolar 5.1. *Pe $H_0^1(\Omega)$ norma (5.14) este echivalentă cu norma*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx \right)^{1/2}, \; u \in H_0^1(\Omega). \tag{5.15}$$

Demonstraţie. Mai întâi vom arăta că (5.15) este o normă pe $H_0^1(\Omega)$.

Într-adevăr, dacă $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$, atunci din inegalitatea lui Friedrichs rezultă că $u = 0$.

Pe de altă parte, (5.15) se mai scrie

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \||\nabla u(x)|\|_{L^2(\Omega)},$$

deci

$$\|u+v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \||\nabla u(x) + \nabla v(x)|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \||\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq$$

$$\leq \left(\||\nabla u(x)|\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla v(x)|\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 = \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}\right)^2,$$

deoarece, din inegalitatea lui Cauchy pentru forma biliniară simetrică $Q(u,v) = \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)$ se obţine imediat

$$|\nabla u(x) + \nabla v(x)| \leq |\nabla u(x)| + |\nabla v(x)|.$$

În sfârşit, se vede uşor că

$$\|\alpha u\|_{H_0^1(\Omega)} = |\alpha| \, \|u\|_{H_0^1}, \text{ pentru orice } \alpha \in \mathbb{R} \text{ şi } u \in H_0^1(\Omega).$$

Pe de altă parte, este evident că

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

şi din (5.10) se obţine imediat că

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + c_\Omega^2} \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

deci pe $H_0^1(\Omega)$ normele (5.14) şi (5.15) sunt echivalente. □

6. Operatori liniari şi continui pe spaţii normate. Spaţii reflexive

Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ două spaţii vectoriale reale normate.

Definiţia 6.1. *Operatorul $A : X \to Y$ se numeşte **continuu** în punctul $u \in X$ dacă pentru orice şir $(u_n)_n \subset X$ astfel încât $u_n \to u$ când $n \to \infty$, rezultă că $Au_n \to Au$ când $n \to \infty$. Operatorul A se numeşte continuu pe X dacă este continuu în orice punct $u \in X$.*

Definiţia 6.2. *Operatorul $A : X \to Y$ se numeşte **operator liniar** dacă*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av \text{ pentru orice } u, v \in X, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 6.1. *Dacă un operator liniar $A : X \to Y$ este continuu în punctul $u \in X$, atunci el este continuu pe X. Într-adevăr, fie $(x_n)_n \subset X$ astfel ca $x_n \to x$ când $n \to \infty$. Atunci şirul $(u_n)_n$ cu $u_n = (x_n - x) + u$ converge la u. Deoarece A este continuu în u, va rezulta că $Au_n \to Au$ când $n \to \infty$. Dar $x_n = (u_n - u) + x$.*

Operatorul A fiind liniar, avem $Ax_n = Au_n - Au + Ax$. Prin urmare $Ax_n \to Ax$ când $n \to \infty$.

Definiţia 6.3. *Operatorul liniar $A : X \to Y$ se numeşte **mărginit** dacă există o constantă pozitivă C astfel ca*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X, \ \forall u \in X. \tag{6.1}$$

Propoziţia 6.1. *Pentru ca operatorul liniar $A : X \to Y$ să fie continuu, este necesar şi suficient ca A să fie mărginit.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că A este liniar şi continuu. Vom arăta că

$$C_0 = \sup\{\|Au\|_Y \mid u \in X,\ \|u\|_X = 1\} < \infty. \tag{6.2}$$

Dacă $C_0 = \infty$, atunci din definiţia supremumului rezultă că există un şir $(u_n)_n \subset X$, $\|u_n\|_X = 1$, pentru orice n, astfel ca $\lambda_n = \|Au_n\|_Y \to \infty$ când $n \to \infty$. Considerăm şirul $(v_n)_n$, $v_n = u_n/\lambda_n$. Este clar că $v_n \to 0_X$ când $n \to \infty$. Cum A este continuu, rezultă că $Av_n \to 0_Y$ când $n \to \infty$, ceea ce contrazice faptul că $\|Av_n\|_Y = 1$.

Fie acum $u \in X$, $u \neq 0_X$. Dacă $v = u/\|u\|_X$, atunci $\|v\|_X = 1$, deci $\|Av\|_Y \leq C_0$.

Dar $Av = \frac{1}{\|u\|_X} Au$, prin urmare

$$\|Au\|_Y \leq C_0 \|u\|_X \tag{6.3}$$

şi relaţia (6.1) este satisfăcută cu $C = C_0$.

Suficienţa. Din (6.1) rezultă imediat continuitatea lui A în punctul 0_X. Ţinând seama de observaţia 6.1, rezultă că A este continuu pe X.

Propoziţia este demonstrată. □

Dacă A este operatorul nul, adică $Au = 0_Y$ pentru orice $u \in X$, atunci în (6.1) se poate lua $C = 0$. Pentru orice alt operator avem obligatoriu $C > 0$.

Observaţia 6.2. *C_0 dat de* (6.2) *este cea mai mică constantă care verifică inegalitatea* (6.1). *Într-adevăr, conform* (6.3), *C_0 satisface* (6.1). *Fie C satisfăcând* (6.1). *Dacă $u \in X$ şi $\|u\|_X = 1$, atunci din* (6.1) *se obţine $\|Au\|_Y \leq C$, deci $C_0 \leq C$.*

Fie acum $C = \sup\limits_{\|u\|_X \leq 1} \|Au\|_Y$. Este clar că $C \geq C_0$. Fie acum $u \neq 0_X$, $\|u\|_X \leq 1$ şi $v = u/\|u\|_X$. Cum $\|v\|_X = 1$, rezultă că $\|Av\|_Y \leq C_0$. , adică $\|Au\|_Y \leq C_0 \|u\|_X$. Atunci $C \leq C_0$, deci $C = C_0$.

C_0 se numeşte ***normă*** *a operatorului A şi se notează cu $\|A\|$. Aşadar*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|_X = 1} \|Au\|_Y = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|Au\|_Y .$$

Luând în (6.1) *$C = C_0 = \|A\|$, obţinem*

$$\|Au\|_Y \leq \|A\| \|u\|_X \text{ , pentru orice } u \in X.$$

Observaţia 6.3. *Un operator liniar $f : X \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţională liniară.*

Aşadar funcţionala liniară este un caz particular de operator liniar. Mărginirea funcţionalei se defineşte prin inegalitatea

$$|f(u)| \leq C \|u\|_X .$$

Norma funcţionalei liniare şi continue f este

$$\|f\| = \sup_{\|u\|_X = 1} |f(u)|$$

şi

$$|f(u)| \leq \|f\| \|u\|_X .$$

Notăm cu X^* *dualul topologic* al lui X, adică spaţiul tuturor funcţionalelor liniare şi continue pr X. *Norma duală* pe X^* este definită prin

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} |f(u)|. \tag{6.4}$$

Dacă $f \in X^*$ şi $u \in X$, vom scrie în general $\langle f, u\rangle$ în loc de $f(u)$. Este cunoscut că X^* este spaţiu Banach, chiar dacă X nu este complet.

Fie X un spaţiu Banach, X^* dualul său înzestrat cu norma duală (6.4) şi X^{**} bidualul său, adică dualul lui X^*, înzestrat cu norma

$$\|\xi\| = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle \xi, f\rangle|.$$

Definim *injecţia canonică* $J : X \to X^{**}$ astfel: dacă $x \in X$, atunci

$$\langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle, \forall x \in X, \text{ pentru orice } f \in X^*.$$

Este evident că J este liniară. Se poate arăta că J este o izometrie, adică $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Se poate întâmpla ca J să nu fie surjectiv. Dacă J este surjectiv, atunci spaţiul X se numeşte *reflexiv*.

7. Teorema Riesz-Fréchet

Propoziţia 7.1. *Fie H un spaţiu Hilbert. Dacă $u_n \to u$ şi $v_n \to v$ când $n \to \infty$, atunci $\langle u_n, v_n\rangle \to \langle u, v\rangle$ când $n \to \infty$.*

Demonstraţie. Într-adevăr

$$|\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| \leq |\langle u_n - u, v_n\rangle| + |\langle u, v_n - v\rangle| \leq$$
$$\leq \|u_n - u\| \|v_n\| + \|u\| \|v_n - v\| \to 0$$

când $n \to \infty$, deoarece şirul $(v_n)_n$ este mărginit. □

Elementele $x, y \in H$ se numesc *ortogonale* şi se notează $x \perp y$ dacă $\langle x, y\rangle = 0$.

Dacă S este un subspaţiu vectorial al lui H, atunci elementul $x \in H$ se numeşte *ortogonal pe S* dacă $x \perp y$ pentru orice $y \in S$. Evident $0_H \perp S$. Vom nota

$$S^\perp = \{y \in H \mid \langle y, x\rangle = 0, \text{ pentru orice } x \in S\}.$$

Mulţimea $S^\perp$ este un subspaţiu vectorial al lui H. Într-adevăr, fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y, z \in S^\perp$ şi $x \in S$. Atunci

$$\langle \alpha y + \beta z, x\rangle = \alpha \langle y, x\rangle + \beta \langle z, x\rangle = 0,$$

deci $\alpha y + \beta z \in S^\perp$.

Teorema 7.1. *Dacă S este un subspaţiu vectorial închis al spaţiului Hilbert H, atunci*

$$H = S \oplus S^\perp.$$

Demonstraţie. Vom arăta că orice element $x \in H$ se reprezintă în mod unic sub forma

$$x = y + z,\ y \in S \text{ şi } z \in S^\perp. \tag{7.1}$$

Vom demonstra mai întâi unicitatea acestei reprezentări. Se observă că dacă $v \in S \cap S^\perp$, atunci $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = 0$, deci $v = 0_H$. Prin urmare, dacă $x = y + z = y_1 + z_1$ cu y, $y_1 \in S$ şi z, $z_1 \in S^\perp$, atunci $y - y_1 = z_1 - z$. Cum $y - y_1 \in S$ şi $z_1 - z \in S^\perp$, după observaţia anterioară, vom avea $y = y_1$ şi $z_1 = z$. Unicitatea reprezentării (7.1) este dovedită.

Vom arăta acum cum se obţine reprezentarea (7.1).

Dacă $x \in S$, atunci $x = x + 0_H$. Presupunem acum că $x \notin S$. Fie

$$d = \inf_{y \in S} \|x - y\|^2 .$$

Există un şir $(y_n)_n \subset S$ astfel ca

$$\|x - y_n\|^2 = d_n \to d \text{ când } n \to \infty. \tag{7.2}$$

Fie u un element oarecare din S. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, $y_n + tu \in S$, deci

$$\|x - y_n - tu\|^2 \geq d,$$

sau $\langle x - y_n - tu, x - y_n - tu \rangle \geq d$ care se mai scrie

$$\|u\|^2 t^2 - 2 \langle x - y_n, u \rangle t + d_n - d \geq 0 \text{ pentru orice } t \in \mathbb{R}.$$

În consecinţă trebuie să avem

$$|\langle x - y_n, u \rangle| \leq \sqrt{d_n - d}\, \|u\| , \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.3}$$

Deoarece $y_n - y_m = (y_n - x) + (x - y_m)$, ţinând seama de (7.3), obţinem

$$|\langle y_n - y_m, u \rangle| \leq |\langle x - y_n, u \rangle| + |\langle x - y_m, u \rangle| \leq$$
$$\leq \left(\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d} \right) \|u\| .$$

Punând în această inegalitate $u = y_n - y_m$ şi simplificând cu $\|y_n - y_m\|$, ajungem la inegalitatea

$$\|y_n - y_m\| \leq \sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}.$$

Având în vedere (7.2), rezultă că şirul $(y_n)_n \subset S$ este fundamental. Spaţiul H fiind complet, rezultă că există $y \in H$ astfel ca $y_n \to y$ când $n \to \infty$. Mai mult, $y \in S$, deoarece subspaţiul S este închis.

Trecând la limită în (7.3), se obţine

$$\langle x - y, u \rangle = 0 \text{ pentru orice } u \in S. \tag{7.4}$$

Notăm $z = x - y$. Conform (7.4), avem $z \in S^{\perp}$.

Prin urmare, $x = y + z$, $y \in S$ şi $z \in S^{\perp}$. □

Definiţia 7.1. *Unicul element $y \in S$ din reprezentarea (7.1) a unui element $x \in H$ se numeşte* ***proiecţia elementului*** *x pe subspaţiul S. Subspaţiile S şi $S^{\perp}$ se numesc subspaţii complementare.*

Teorema 7.2. (*Teorema de reprezentare a lui Riesz-Fréchet-1907*)
Fie $\varphi \in H^*$. Atunci există şi este unic $f \in H$ astfel încât

$$\langle \varphi, u \rangle = \langle f, u \rangle \text{ , pentru orice } u \in H.$$

Mai mult,

$$\|f\| = \|\varphi\|_{H^*} . \tag{7.5}$$

Demonstraţie. Unicitatea reprezentării lui φ ca un produs scalar este imediată.

Presupunem că $\langle \varphi, u \rangle = \langle f, u \rangle = \langle g, u \rangle$ pentru orice $u \in H$. Atunci $\langle f - g, u \rangle = 0$ pentru orice $u \in H$. Punând $u = f - g$, obţinem $\|f - g\| = 0$, adică $f = g$ şi unicitatea reprezentării este demonstrată.

Dacă $\ker \varphi = H$, atunci φ coincide cu aplicaţia nulă $\theta : H \to \mathbb{R}$, $\theta(x) = 0$, pentru orice $x \in H$. În acest caz putem lua $f = 0_H$ şi demonstraţia se încheie.

Presupunem acum că $\varphi \neq \theta$, deci $\ker \varphi$ nu este tot H. Deoarece φ este continuă, $\ker \varphi$ este subspaţiu închis al lui H. Conform teoremei 7.1, are loc descompunerea

$$H = \ker \varphi \oplus (\ker \varphi)^{\perp},$$

unde $(\ker \varphi)^{\perp} \neq \{0_H\}$. Fie $w \in (\ker \varphi)^{\perp}$, $w \neq 0_H$. În consecinţă $\langle \varphi, w \rangle \neq 0$.

Fie u un element arbitrar din H. Construim elementul $g = u - \frac{\langle \varphi, u \rangle}{\langle \varphi, w \rangle} w \in H$.

Se verifică uşor că $\langle \varphi, g \rangle = 0$, deci $g \in \ker \varphi$. Cum $w \perp \ker \varphi$, rezultă că $\langle g, w \rangle = 0$.

Dezvoltând produsul scalar, obţinem

$$\langle u, w \rangle - \frac{\langle \varphi, u \rangle}{\langle \varphi, w \rangle} \|w\|^2 = 0,$$

de unde rezultă reprezentarea lui φ ca produs scalar

$$\langle \varphi, u \rangle = \left\langle u, \frac{\langle \varphi, w \rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle = \langle u, f \rangle,$$

unde $f = \frac{\langle \varphi, w \rangle}{\|w\|^2} w$.

Din expresia lui f se obţine imediat că $\|f\| \leq \|\varphi\|_{H^*}$. Totodată, din inegalitatea lui Cauchy-Schwarz rezultă

$$|\langle \varphi, u \rangle| \leq |\langle f, u \rangle| \leq \|f\| \cdot \|u\|,$$

deci $\|\varphi\|_{H^*} \leq \|f\|$, adică (7.5).

Teorema este demonstrată. □

Corolar 7.1. *Orice spaţiu Hilbert este reflexiv.*

Demonstraţie. Dualul unui spaţiu Hilbert H este, de asemenea un spaţiu Hilbert, norma fiind indusă de un produs scalar definit după cum urmează.

Fie $\varphi, \psi \in H^*$. Conform teoremei Riesz, există $f \in H$ respectiv $g \in H$ astfel ca

$$\begin{array}{l} \langle \varphi, u \rangle = \langle f, u \rangle, \text{ pentru orice } u \in H \\ \langle \psi, u \rangle = \langle g, u \rangle, \text{ pentru orice } u \in H \end{array}.$$

Definim pe H^* următorul produs scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle_* = \langle f, g \rangle, \text{ pentru orice } \varphi, \psi \in H^*.$$

Fie $T \in H^{**} = (H^*)^*$. Conform teoremei Riesz, există $\psi \in H^*$ astfel ca

$$T(\varphi) = \langle \varphi, \psi \rangle_*, \text{ pentru orice } \varphi \in H^*.$$

Există $g \in H$ astfel ca $\langle \psi, u \rangle = \langle g, u \rangle$, $\forall u \in H$. Fie $\varphi \in H^*$ oarecare. Există f_φ astfel ca $\langle \varphi, u \rangle = \langle f_\varphi, u \rangle$, $\forall u \in H$. În particular $\langle \varphi, g \rangle = \langle f_\varphi, g \rangle$.

Atunci

$$T(\varphi) = \langle \varphi, \psi \rangle_* = \langle f_\varphi, g \rangle = \langle \varphi, g \rangle = \langle Jg, \varphi \rangle,$$

unde $J : H \to H^{**}$ este injecţia canonică. Aşadar $T = Jg$, $g \in H$, deci J este surjecţie. Prin urmare H este reflexiv. □

8. Teorema Lax-Milgram

Fie H un spaţiu Hilbert real.

DEFINIŢIA 8.1. *O formă biliniară $a : H \times H \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***continuă*** (***mărginită***) *dacă există o constantă C astfel încât*

$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\|, \text{ pentru orice } u, v \in H. \tag{8.1}$$

Forma biliniară a se numeşte ***coercivă*** *dacă există o constantă $\alpha > 0$ astfel încât*

$$|a(v,v)| \geq \alpha \|v\|^2, \text{ pentru orice } v \in H. \tag{8.2}$$

Demonstraţia teoremei Lax-Milgram se bazează pe următorul rezultat clasic:

TEOREMA 8.1. (*Teorema de punct fix a lui Banach - metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard*) *Fie X un spaţiu metric complet şi $S : X \to X$ o contracţie strictă, adică există $k < 1$ astfel încât*

$$d(Su, Sv) \leq kd(u,v), \text{ pentru orice } u, v \in X.$$

Atunci S are un punct fix unic, $u = Su$.

TEOREMA 8.2. (*Lax-Milgram*) (*Peter Lax, Arthur Milgram 1954*) *Fie $a : H \times H \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică, continuă şi coercivă pe H. Atunci, pentru orice $\varphi \in H^*$ există un element unic $u \in H$ astfel încât*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \text{ pentru orice } v \in H. \tag{8.3}$$

Mai mult, elementul u este caracterizat de proprietatea

$$u \in H \text{ şi } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \tag{8.4}$$

În plus are loc

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\varphi\|_{H^*}.$$

DEMONSTRAŢIE. *Pasul 1.*Vom arăta că există un operator liniar şi continuu $A : H \to H$ astfel încât

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle, \forall v \in H. \tag{8.5}$$

Fie $u \in H$ fixat. Considerăm funcţionala

$$\psi : H \to \mathbb{R}, \ \psi(v) = a(u,v), \ v \in H. \tag{8.6}$$

Din biliniaritatea lui a rezultă că funcţionala ψ este liniară. Într-adevăr

$$\psi(\alpha v_1 + \beta v_2) = a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2) = \alpha \psi(v_1) + \beta \psi(v_2),$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in H$.

Pe de altă parte, forma biliniară a fiind continuă, din (8.1) obţinem

$$|\psi(v)| = |a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \text{ pentru orice } v \in H.$$

În consecinţă

$$\|\psi\|_{H^*} = \sup_{\|v\|=1} |\psi(v)| \leq C \|u\| < \infty.$$

Prin urmare $\psi \in H^*$.

Conform teoremei Riesz-Fréchet, există un unic $u_\psi \in H$ astfel încât

$$\psi(v) = \langle u_\psi, v \rangle, \forall v \in H. \tag{8.7}$$

Definim operatorul

$$A : H \to H,\ Au = u_\psi,\ u \in H. \tag{8.8}$$

Din (8.6), (8.7), (8.8) se obţine (8.5).

Liniaritatea lui A este consecinţă a liniarităţii în primul argument al formei biliniare a:

$$\langle A(\alpha u_1 + \beta u_2), v\rangle = a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) =$$

$$= \alpha \langle Au_1, v\rangle + \beta \langle Au_2, v\rangle = \langle \alpha Au_1 + \beta Au_2, v\rangle,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2, v \in H$. Prin urmare

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha Au_1 + \beta Au_2,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u_1, u_2 \in H,$$

adică operatorul A este liniar.

Continuitatea lui A este consecinţă a continuităţii formei biliniare a. Într-adevăr:

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = a(u, Au) \le C\|u\|\|Au\| \text{ pentru orice } u \in H.$$

Prin urmare

$$\|Au\| \le C\|u\|,\ \forall u \in H, \tag{8.9}$$

deci operatorul A este continuu.

Pasul 2. Vom arăta că operatorul A este inversabil şi A^{-1} este liniar şi continuu.

Operatorul A este injectiv. Într-adevăr, din (8.2), (8.5) şi inegalitatea lui Cauchy-Schwarz obţinem succesiv

$$\alpha\|v\|^2 \le |a(v, v)| = |\langle Av, v\rangle| \le \|Av\|\|v\|,$$

deci

$$\alpha\|v\| \le \|Av\|,\ \forall v \in H. \tag{8.10}$$

Deci $\ker A = \{0_H\}$, deci A este injectiv.

Pentru a arăta că A este surjectiv folosim teorema de punct fix a lui Banach.

Fie $f \in H$. Vom arăta că există $u \in H$ astfel încât $Au = f$.

Vom încerca să găsim $\rho \ne 0$ astfel ca

$$T : H \to H,\ Tv = v - \rho(Av - f),\ v \in H,$$

să fie o contracţie strictă. Dar, dacă $v = v_1 - v_2$, atunci

$$\|Tv_1 - Tv_2\|^2 = \|v - \rho Av\|^2 = \|v\|^2 - 2\rho\langle Av, v\rangle + \rho^2\|Av\|^2.$$

Ţinând seama de (8.2) şi (8.9), rezultă că

$$\|Tv_1 - Tv_2\|^2 \le \left(1 - 2\alpha\rho + C^2\rho^2\right)\|v_1 - v_2\|^2.$$

Din (8.1) şi (8.2) este imediat că $C \ge \alpha$; putem presupune că $C > \alpha$, deci $c_\rho = 1 - 2\alpha\rho + C^2\rho^2 > 0$ deoarece discriminantul expresiei este negativ. Totodată $c_\rho < 1$ dacă $\rho \in \left(0, \frac{2\alpha}{C^2}\right)$. Aşadar pentru orice $\rho \in \left(0, \frac{2\alpha}{C^2}\right)$ T este o contracţie, deci are un punct fix unic. Pentru un ρ astfel ales există un unic $u \in H$ astfel ca $Tu = u$ sau încă $Au = f$.

Prin urmare, operatorul A este surjectiv, deci este inversabil. Operatorul A^{-1} este, evident, liniar. Pentru a arăta că A^{-1} este continuu este suficient să arăt

că este mărginit. Deoarece pentru orice $v \in H$ există un unic $u \in H$ astfel ca $v = A^{-1}u$. Înlocuind în (8.10), rezultă că

$$\left\|A^{-1}u\right\| \leq \frac{1}{\alpha}\|u\|, \tag{8.11}$$

deci A^{-1} este mărginit şi $\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

Pasul 3. Vom arăta că ecuaţia (8.3) are soluţie unică. Deoarece $\varphi \in H^*$, conform teoremei Riesz, există $f \in H$ unic, astfel încât

$$\langle \varphi, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in H \tag{8.12}$$

şi $\|\varphi\| = \|f\|$.

Ţinând seama de (8.5) şi (8.12), ecuaţia (8.3) se mai scrie sub forma

$$\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle, \forall v \in H,$$

de unde rezultă că ecuaţia (8.3) este echivalentă cu ecuaţia $Au = f$, care admite o soluţie şi numai una deoarece A este inversabil. Deci $u = A^{-1}f$. Conform (8.11), avem

$$\|u\| = \left\|A^{-1}f\right\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\| = \frac{1}{\alpha}\|\varphi\|,$$

adică (8.12).

Pasul 4. Arătăm că u este soluţie a problemei de minim (8.4). Fie $F : H \to \mathbb{R}$, $F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v\rangle$, $v \in H$. Fie u soluţie a ecuaţiei (8.3). Punând $v = u$ în (8.3), obţinem

$$a(u, u) = \langle \varphi, u\rangle.$$

Atunci

$$a(u - v, u - v) = a(u, u) - 2a(u, v) + a(v, v) =$$

$$= \langle \varphi, u\rangle - 2\langle \varphi, v\rangle + a(v, v) = \langle \varphi, u\rangle + 2F(v).$$

Prin calcul direct se obţine

$$F(v) - F(u) = \frac{1}{2}a(u - v, u - v) \geq 0, \forall v \in H.$$

Prin urmare, u este soluţie a problemei de minim (8.4).

Teorema este demonstrată. □

Observaţia 8.1. 1) *În multe aplicaţii, funcţionala J dată de*

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u\rangle, \ u \in H,$$

(*care apare în* (10.44)) *reprezintă o energie. De exemplu, în mecanica mediilor continue, considerăm un corp elastic deformat în urma unei încărcări externe.*

Atunci $\frac{1}{2}a(u, u)$ este energia elastică de deformare în configuraţia de echilibru, iar $-\langle \varphi, u\rangle$ este energia potenţială datorată încărcării externe.

2) *Problema determinării unui $u \in H$ care satisface* (8.3) *se numeşte* ***formulare variaţională****.*

9. Aplicaţii ale teoremei Lax-Milgram

EXEMPLUL 9.1. (***Condiţie Dirichlet omogenă***) *Considerăm problema la limită*

$$\left\{\begin{array}{l} -u''+u=f \text{ în } I=(0,1) \\ u(0)=u(1)=0 \end{array}\right. , \tag{9.1}$$

unde f este o funcţie dată din $L^2(I)$.

Condiţia la limită $u(0)=u(1)=0$ se numeşte condiţie Dirichlet omogenă.

Precizăm pentru început cadrul funcţional. Reamintim

$$H^1(I)=\left\{u\in L^2(I) \mid \begin{array}{c} \text{există } g\in L^2(I) \text{ astfel încât} \\ \int_\Omega u\varphi' dx=-\int_\Omega g\varphi dx,\ \forall\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(I) \end{array}\right\}.$$

Pentru $u\in H^1(I)$ definim $u'=g$.

Spaţiul $H^1(I)$, înzestrat cu produsul scalar

$$\langle u,v\rangle_{H^1(I)}=\int_I uv\ dx+\int_I u'v'\ dx,$$

este un spaţiu Hilbert.

Norma asociată este

$$\|u\|_{H^1(I)}=\left(\|u\|^2_{L^2(I)}+\|u'\|^2_{L^2(I)}\right)^{1/2}.$$

Spaţiul $H_0^1(I)$ se defineşte ca fiind închiderea lui $\mathcal{C}_0^1(I)$ în $H^1(I)$. Înzestrat cu norma indusă de $H^1(I)$ este un spaţiu Banach reflexiv. Se poate arăta că $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ este dens în $H_0^1(I)$. Prin urmare se poate defini $H_0^1(I)$ ca fiind închiderea lui $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ în $H^1(I)$.

Are loc

TEOREMA 9.1. ([**1**, Teorema VIII.11]) *Fie $u\in H^1(I)$. Atunci $u\in H_0^1(I)$ dacă şi numai dacă $u(0)=u(1)=0$.*

În particular are loc inegalitatea lui Poincaré (teorema 5.3). Presupunem că I este un interval mărginit. Atunci există o constantă C (depinzând de lungimea lui I) astfel încât

$$\|u\|_{L^2(I)}\le C\|u'\|_{L^2(I)}, \text{ pentru orice } u\in H_0^1(I).$$

În consecinţă, expresia $\|u'\|_{L^2(I)}$ este o normă pe $H_0^1(I)$ care este echivalentă cu norma $\|u\|_{H^1(I)}$ (corolar 5.1); pe $H_0^1(I)$ expresia $\int_\Omega u'v'\ dx$ este un produs scalar care induce norma $\|u'\|_{L^2(I)}$ echivalentă cu norma $\|u\|_{H^1(I)}$.

*O **soluţie clasică** a problemei (9.1) este o funcţie $u\in\mathcal{C}^2(\overline{I})$ care verifică (9.1) în sens uzual. O **soluţie slabă** a lui (9.1) este o funcţie $u\in H_0^1(I)$, care satisface*

$$\int_I u'v'dx+\int_I uvdx=\int_I fvdx, \text{ pentru orice } v\in H_0^1(I). \tag{9.2}$$

Are loc

PROPOZIŢIA 9.1. *Pentru orice $f \in L^2(I)$, există şi este unic $u \in H_0^1(I)$ soluţie a problemei* (9.2). *În plus u se obţine prin*

$$\min_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I \left(v'^2 + v^2 \right) dx - \int_I f v dx \right\}.$$

Acesta este ***principiul lui Dirichlet***.

DEMONSTRAŢIE. Se aplică teorema Lax-Milgram în spaţiul Hilbert $H = H_0^1(I)$ înzestrat cu norma $\|u'\|_{L^2(I)}$, cu forma biliniară

$$a(u,v) = \int_I u'v'dx + \int_I uvdx = \langle u, v \rangle$$

şi cu funcţionala liniară φ: $v \mapsto \int_I f v dx$. □

EXEMPLUL 9.2. (***Condiţie Dirichlet neomogenă***) *Fie problema la limită*

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + u = f \text{ în } I = (0,1) \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta \end{array} \right., \tag{9.3}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt date şi f este o funcţie dată din $L^2(I)$.

PROPOZIŢIA 9.2. *Fiind date $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $f \in L^2(I)$, există o unică funcţie $u \in H^1(I)$ care satisface* (9.3). *În plus, u se obţine prin*

$$\min_{\substack{v \in H^1(I) \\ u(0)=\alpha, u(1)=\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \int_I \left(v'^2 + v^2 \right) dx - \int_I f v dx \right\}.$$

Dacă, în plus, $f \in \mathcal{C}\left(\overline{I}\right)$, atunci $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{I}\right)$.

DEMONSTRAŢIE. Fixăm o funcţie netedă w astfel încât $w(0) = \alpha$ şi $w(1) = \beta$.

Putem lua, de exemplu, $w(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$. Introducem funcţia necunoscută $v = u - w$. Atunci v satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} -v'' + v = f + w'' - w \\ v(0) = 0,\ v(1) = 0 \end{array} \right..$$

Problema se reduce astfel la cazul anterior pentru funcţia v. □

EXEMPLUL 9.3. (***Condiţie Neumann omogenă***) *Considerăm problema la limită*

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + u = f \text{ în } I = (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{array} \right., \tag{9.4}$$

unde f este o funcţie dată din $L^2(I)$.

Condiţia la limită $u'(0) = u'(1) = 0$ se numeşte ***condiţie Neumann omogenă***.

O ***soluţie clasică*** *a problemei* (9.4) *este o funcţie $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{I}\right)$ care verifică* (9.4) *în sens uzual. O* ***soluţie slabă*** *a lui* (9.4) *este o funcţie $u \in H^1(I)$, care satisface*

$$\int_I u'v'dx + \int_I uvdx = \int_I f v dx, \text{ pentru orice } v \in H^1(I). \tag{9.5}$$

Este convenabil să lucrăm în spaţiul Hilbert $H^1(I)$ şi nu în $H_0^1(I)$ ca mai sus, deoarece $u(0)$ şi $u(1)$ sunt a priori necunoscute.

Are loc

PROPOZIŢIA 9.3. *Pentru orice $f \in L^2(I)$, există şi este unic $u \in H^1(I)$ soluţie a problemei* (9.5). *În plus u se obţine prin*

$$\min_{v \in H^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I \left(v'^2 + v^2 \right) dx - \int_I f v dx \right\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Se aplică teorema Lax-Milgram în spaţiul Hilbert $H = H^1(I)$ cu forma biliniară

$$a(u,v) = \int_I u'v'dx + \int_I uvdx = \langle u, v \rangle$$

şi cu funcţionala liniară φ: $v \mapsto \int_I f v dx$.

Folosind inegalitatea lui Schwarz, obţinem

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq 2 \|u\|_{H^1(I)} \|v\|_{H^1(I)},$$

deci forma biliniară a este mărginită.

Pe de altă parte

$$a(u,u) = \|u'\|^2_{L^2(I)} + \|u\|^2_{L^2(I)} = \|u\|^2_{H^1(I)},$$

deci a este coercivă.

De asemenea, din inegalitatea lui Schwarz, obţinem

$$|\langle \varphi, v \rangle| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{H^1(I)}.$$

Prin urmare, φ este o funcţională liniară şi mărginită, deci continuă pe $H^1(I)$. □

OBSERVAŢIA 9.1. *Dacă soluţia problemei* (9.5) *este de clasă $\mathcal{C}^2$, atunci este soluţie clasică. Într-adevăr, cum $u \in H^2(I)$, integrând prin părţi în primul termen din (9.5), deducem*

$$\int_I (-u'' + u - f) v dx + u'(1) v(1) - u'(0) v(0) = 0, \forall v \in H^1(I). \tag{9.6}$$

Dacă aleg în (9.6) *$v \in H^1_0(I)$, obţinem $-u'' + u = f$ a.p.t. Revenind la* (9.6), *găsim*

$$u'(1) v(1) - u'(0) v(0) = 0, \text{ pentru orice } v \in H^1(I).$$

Deoarece $v(0)$ şi $v(1)$ sunt arbitrare, deducem că $u'(0) = u'(1) = 0$.

EXEMPLUL 9.4. (***Problema Dirichlet omogenă bidimensională***) *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi mărginită. Căutăm o funcţie $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ care verifică*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}, \tag{9.7}$$

unde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{laplacianul lui } u$$

şi f este o funcţie dată pe Ω. ***Condiţia pe frontieră*** *$u = 0$ pe Γ se numeşte* ***condiţie Dirichlet*** (*omogenă*).

Precizăm pentru început cadrul funcţional. Reamintim

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \begin{array}{c} \text{există } g_1, g_2 \in L^2(\Omega) \text{ astfel încât} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = -\int_\Omega g_1 \varphi dx \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = -\int_\Omega g_2 \varphi dx \end{array}, \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega) \right\}.$$

Pentru $u \in H^1(\Omega)$ *definim* $\dfrac{\partial u}{\partial x} = g_1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = g_2$.

Spaţiul $H^1(\Omega)$ *este înzestrat cu produsul scalar*

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega uv\ dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx,$$

unde $\nabla u \cdot \nabla v = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}$. *Este un spaţiu Hilbert, deci este reflexiv.*

Norma asociată este

$$\|u\|_{H^1(I)} = \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2(I)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2_{L^2(I)}\right)^{1/2}.$$

Spaţiul $H^1_0(\Omega)$ *se defineşte ca fiind închiderea lui* $\mathcal{C}^1_0(\Omega)$ *în* $H^1(\Omega)$. *Înzestrat cu norma indusă de* $H^1(\Omega)$ *este un spaţiu Banach reflexiv. Se poate arăta că* $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ *este dens în* $H^1_0(\Omega)$. *Prin urmare se poate defini* $H^1_0(\Omega)$ *ca fiind închiderea lui* $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ *în* $H^1(\Omega)$.

Funcţiile din $H^1_0(\Omega)$ *sunt "în mare" funcţiile din* $H^1(\Omega)$, *care se anulează pe* $\Gamma = \partial\Omega$. *Are loc*

TEOREMA 9.2. *(*[**1**, Teorema IX.17]*) Presupunem că* Ω *este cu fontieră suficient de netedă. Fie* $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $u = 0$ *pe* Γ*;*

(ii) $u \in H^1_0(\Omega)$.

Şi în acest caz are loc inegalitatea lui Poincaré (teorema 5.3). Presupunem că Ω *este un deschis mărginit. Atunci există o constantă* C *(depinzând de* Ω*) astfel încât*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \text{ pentru orice } u \in H^1_0(\Omega).$$

În particular, expresia $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ *este o normă pe* $H^1_0(\Omega)$ *care este echivalentă cu norma* $\|u\|_{H^1(\Omega)}$*; pe* $H^1_0(\Omega)$ *expresia* $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx$ *este un produs scalar care induce norma* $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ *echivalentă cu norma* $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

O ***soluţie clasică*** *a problemei* (9.7) *este o funcţie* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *care verifică* (9.7). *O* ***soluţie slabă*** *a problemei* (9.7) *este o funcţie* $u \in H^1_0(\Omega)$ *care verifică*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx + \int_\Omega uv\ dx = \int_\Omega fv\ dx, \text{ pentru orice } v \in H^1_0(\Omega).$$

Orice soluţie clasică este soluţie slabă. Într-adevăr, $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *şi* $u = 0$ *pe* Γ, *deci* $u \in H^1_0(\Omega)$ *conform teoremei 9.2. Pe de altă parte, dacă* $v \in \mathcal{C}^1_0(\Omega)$ *avem*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx + \int_\Omega uv\ dx = \int_\Omega fv\ dx$$

şi, prin densitate, această egalitate rămâne valabilă pentru orice $u \in H^1_0(\Omega)$. *Pentru existenţa şi unicitatea soluţiei slabe vom aplica teorema Lax-Milgram.*

TEOREMA 9.3. *(****Principiul lui Dirichlet****) (Dirichlet, Riemann, Hilbert) Pentru orice* $f \in L^2(\Omega)$ *există şi este unică o soluţie slabă* $u \in H^1_0(\Omega)$ *a problemei* (9.7). *În plus,* u *este soluţie a problemei de minim*

$$\min_{v \in H^1_0(\Omega)} \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right) dx - \int_\Omega fv dx\right\}.$$

Demonstraţie. Se alege în teorema Lax-Milgram $H = H_0^1(\Omega)$ cu norma $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, forma biliniară simetrică

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{dx} + \int_\Omega uv \ \mathrm{dx}$$

şi funcţionala liniară φ: $v \mapsto \int_\Omega fvdx$.

Folosind inegalitatea lui Schwarz şi inegalitatea lui Poincaré, obţinem

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$\leq \left(1 + C^2\right) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \left(1 + C^2\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

deci forma biliniară a este mărginită.

Pe de altă parte

$$a(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

deci a este coercivă.

De asemenea, din inegalitatea lui Schwarz şi inegalitatea lui Poincaré, obţinem

$$|\langle \varphi, v \rangle| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Prin urmare, φ este o funcţională liniară şi mărginită, deci continuă pe $H_0^1(\Omega)$. □

Exemplul 9.5. *(**Problema Neumann omogenă**) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi mărginită, cu frontiera suficient de netedă. Căutăm o funcţie $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ care verifică*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{pe } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right., \tag{9.8}$$

*unde f este o funcţie dată pe Ω; $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ reprezintă derivata normală exterioară a lui u, adică $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \overrightarrow{n}$, unde $\overrightarrow{n}$ este versorul normalei exterioare la Γ. **Condiţia pe frontieră** $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ pe Γ se numeşte **condiţie Neumann** (omogenă).*

*O **soluţie clasică** a problemei (9.8) este o funcţie $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ care satisface (9.8). O **soluţie slabă** a problemei (9.8) este o funcţie $u \in H^1(\Omega)$ care verifică*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx + \int_\Omega uv \ dx = \int_\Omega fv \ dx, \text{ pentru orice } v \in H^1(\Omega).$$

Orice soluţie clasică este soluţie slabă. Pentru aceasta, din formula lui Green avem

$$\int_\Omega (\Delta u) \, vdx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} vd\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx,$$

pentru orice $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ şi pentru orice $v \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Dacă u este soluţie clasică a lui (9.8), atunci $u \in H^1(\Omega)$ şi avem

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx + \int_\Omega uv \ dx = \int_\Omega fv \ dx, \text{ pentru orice } v \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

Atunci (9.8) se obţine prin densitate.

Pentru existenţa şi unicitatea soluţiei slabe vom aplica teorema Lax-Milgram.

TEOREMA 9.4. *Pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ există şi este unică o soluţie slabă $u \in H^1(\Omega)$ a problemei* (9.8). *În plus, u este soluţie a problemei de minim*

$$\min_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v|^2 \right) dx - \int_\Omega f v dx \right\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Se alege în teorema Lax-Milgram $H = H^1(\Omega)$, forma biliniară simetrică

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{dx} + \int_\Omega uv \ \mathrm{dx}$$

şi funcţionala liniară φ: $v \mapsto \displaystyle\int_\Omega f v dx$.

Folosind inegalitatea lui Schwarz, obţinem

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

deci forma biliniară a este mărginită.

Pe de altă parte

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

deci a este coercivă.

De asemenea, din inegalitatea lui Schwarz, obţinem

$$|\langle \varphi, v \rangle| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Prin urmare, φ este o funcţională liniară şi mărginită, deci continuă pe $H^1(\Omega)$. $\square$

CAPITOLUL 4

PROGRAMAREA UNOR PROBLEME SIMPLE DE ELEMENT FINIT

1. O problemă unidimensională

1.1. Formularea problemei. In cele ce urmează este exemplificată utilizarea metodei elementului finit pentru rezolvarea unei probleme bilocale pe intervalul I=(0,1). Prezentarea este concepută a fi de sine stătătoare deşi o parte din cele ce urmează este conţinută în capitolul 3 (vezi exemplul 9.1 , pag. 90).

Fie $I = [0,1]$ şi fie $H^m(I)$ completarea spaţiului $C^\infty(I)$ faţă de norma

$$\|f\|_m = \left(\int_I f^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_I f'^2(x)\,\mathrm{d}x + ... + \int_I f^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

Notăm cu $H_0^m(I)$ completarea în aceeaşi normă a spaţiului $C_0^\infty(I)$. Elementele din $H_0^m(I)$ au ca restricţie pe zero la capetele intervalului. In exemplul nostru soluţia problemei va fi în spaţiul $H_0^1(I)$, spaţiu pe care îl notăm în cele ce urmează cu V. Mai multe detalii despre spaţiile Sobolev H^m se găsesc în capitolul 3.

Propoziţia 1.1. *a)Există o constantă C_0 astfel ca pentru orice $f \in C_0^\infty(I)$ avem*

$$\int_I f^2(x)\,dx \le C_0 \int_I f'^2(x)\,dx \tag{1.1}$$

b)Pentru $c : [0,1] \to R$, $c \ge 0$, mărginită şi integrabilă, normele

$$\|f\|_{1a} = \left(\int_I c(x) f^2(x)\,dx + \int_I f'^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

şi

$$\|f\|_{1b} = \left(\int_I f^2(x)\,dx + \int_I f'^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

sunt echivalente pe V.

Demonstraţie. a)Pentru a demonstra inegalitatea (1.1) procedăm astfel

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \left(\int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1\mathrm{d}t\right)^{1/2} \le \left(\int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Avem acum

$$\begin{aligned}\int_o^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 dx \\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right) dx \le \int_0^1 \left(\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}x\right) dt = \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Putem deci lua constanta C_0 egală cu 1.

b) este consecinţă a lui a). Anume avem

$$\begin{aligned}\|f\|_{1a}^2 &\le (\max|c|)+1)\,\|f\|_{1b}^2 \\ \|f\|_{1b}^2 &\le (\max|c|\cdot C_0+1)\,\|f\|_{1a}\end{aligned}$$

□

Problema căreia îi căutăm o soluţie este următoarea

$$\text{(p)} \qquad \begin{cases} -u''(x)+c(x)\,u(x)=f(x) \quad x\in(0,1),\ c(x)\ge 0 \\ u(0)=0,\ u(1)=0 \end{cases},$$

unde c şi f sunt continue pe I (vezi şi exemplul de la pagina 90). Soluţiile clasice ale acestei probleme sunt funcţii $u\in C^2(I)\cap C^0\left(\bar{I}\right)$ care verifică cerinţele (p).

Definim $a: V\times V\to R$, $L: V\to R$, $J: V\to R$ prin

$$a(u,v)=\int_I \left(u'(x)\,v'(x)+c(x)\,u(x)\,v(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$L(v)=\int_I f(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-L(v)$$

Din propoziţia 1.1 rezultă că a este un produs scalar pe V echivalent cu produsul standard. Vom nota

$$\|u\|_a=\sqrt{a(u,u)}$$

norma pe V indusă de produsul scalar a. L şi J sunt aplicaţii continue pe V, L fiind în plus liniară.

In continuare considerăm următoarele probleme

$$\text{(pv)} \qquad \begin{cases} u\in V \\ a(u,v)=L(v) \quad \forall v\in V \end{cases}$$

$$\text{(mv)} \qquad \begin{cases} u\in V \\ J(u)=\inf\limits_{v\in V} J(v) \end{cases}$$

Avem următorul rezultat

Propoziţia 1.2. *a)Problemele (pv) şi (mv) sunt echivalente.*
b) Dacă problema (p) are soluţia u atunci u este soluţie şi pentru problemele (pv) şi (mv).
c) Dacă una din problemele (pv) sau (mv) are o soluţie de clasă C^2 atunci aceea este soluţie şi pentru problema (p) .

Demonstraţie. a) Acest punct rezultă din teorema Lax-Milgram (vezi teorema 8.2, pag. 88 sau exemplul 9.1, pag. 90), dar dăm o demonstraţie directă. Dacă u este o soluţie a problemei (pv) atunci pentru orice $v \in V$

$$\begin{aligned} J(u+v) - J(u) &= \frac{1}{2}a(u+v, u+v) - L(u+v) - \left(\frac{1}{2}a(u,u) - L(u)\right) \\ &= \frac{1}{2}a(v,v) + \underbrace{a(u,v) - L(v)}_{=0} = \frac{1}{2}a(v,v) \geq 0 \end{aligned}$$

deci $J(u) = \inf_{w \in V} J(w)$, adică problema (mv). Invers, dacă u este soluţie a problemei (mv) atunci $J(u+\theta v) - J(u) \geq 0$ pentru orice $v \in V$ şi orice $\theta \in R$. Explicitând pe J rezultă

$$\frac{1}{2}a(v,v)\theta^2 + (a(u,v) - L(v))\theta \geq 0$$

pentru orice $v \in V$ şi orice $\theta \in R$. Această funcţie de gradul 2 în θ ia doar valori mai mari sau egale ca zero dacă şi numai dacă $a(u,v) - L(v) = 0$. Cum această condiţie trebuie îndeplinită pentru orice $v \in V$ rezultă că u este soluţie a problemei (pv). Punctul a) este demonstrat.
b) Dacă u este soluţie a problemei (p) atunci din $-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ rezultă pentru orice $v \in V$ relaţia

$$\int_0^1 (-u''(x) + c(x)u(x))v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

şi prin integrare prin părţi în primul membru (ţinem seama că u(0)=u(1)=0) obţinem forma echivalentă

$$\int_0^1 (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

pentru orice $v \in V$, adică

$$a(u,v) = L(v) \text{ pentru orice } v \in V$$

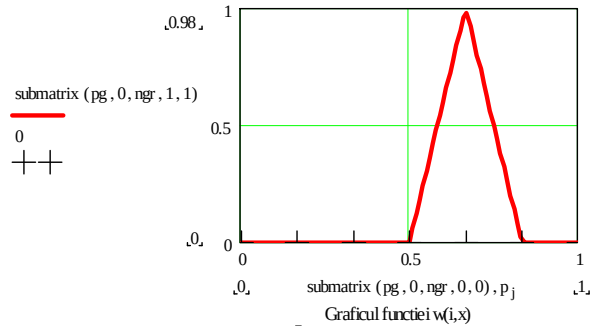
deci u este soluţie a problemei (pv) şi din punctul a) este şi soluţie a problemei (mv) .
c) Dacă una din problemele (pv) sau (mv) are o soluţie u de clasă C^2 atunci din a) u este soluţie a problemei (pv) deci are loc egalitatea (1.3) pentru orice $v \in V$, echivalentă cu (1.2) şi din lema fundamentală a calculului variaţional (vezi de exemplu lema 3.1, pag. 72 sau lema 1.2, pag. 41) rezultă $-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$. □

1.2. Metoda numerică. Când nu avem posibilitatea de rezolvare exactă a problemei (p) căutăm soluţii aproximative. In cazul nostru vom defini pentru $h \in R$, $h > 0$, un spaţiu finit dimensional $V_h \subset V$ şi vom căuta în V_h o funcţie u_h care să fie soluţie a unei probleme asemănătoare cu problema (pv). Vom arăta pe urmă că $h \to 0$ implică $u_h \to u$.

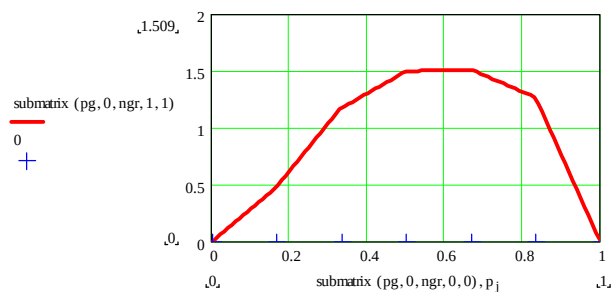
Pentru definirea spaţiului V_h alegem $h = \frac{1}{n+1}$, $n \in N^*$ şi divizăm intervalul [0,1] prin punctele $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = 1$ cu $x_i - x_{i-1} = h$ pentru orice $i \in \overline{1..n+1}$. Definim acum funcţiile $w_i : [0,1] \to R$ prin

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \hat{in}\ rest \end{cases} \tag{1.4}$$

pentru i=1, 2,..., n. Graficul unei asemenea funcţii arată astfel (graficul este luat din Mathcad)



Fie V_h spaţiul vectorial generat de funcţiile w_i de mai sus. Este un spaţiu finit dimensional, de dimensiune n şi o funcţie din V_h este liniară pe orice interval $[x_{i-1},\ x_i]$. Graficul unei astfel de funcţii arată ca în figura următoare:



Graficul unei funcţii din V_h

Pentru $v \in V_h$ avem dezvoltarea $v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)\, w_i$ pentru că în ambii membri avem funcţii liniare pe intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ şi care iau în punctele x_i valorile $v(x_i)$. Definim problema următoare asemănătoare cu (pv)

$$\text{(ph)} \qquad \begin{cases} u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h) = L(v_h)\ ,\ \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

In spaţiul finit dimensional V_h avem

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \tag{1.5}$$

Problema (ph) devine

$$a\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i, w_j\right) = L(w_j)\ ,\ j = \overline{1..n}$$

sau

$$A\lambda = B,\ A \in M(n, n, R)\ ,\ B \in M(n, 1, R)$$

$$A_{i,j} = A_{j,i} = a(w_i, w_j) = a(w_j, w_i) = \int_I \left(w_i'(x)\, w_j'(x) + c(x)\, w_i(x)\, w_j(x)\right) \mathrm{d}x$$

$$B_i = L(w_i) = \int_I f(x)\, w_i(x)\, \mathrm{d}x$$

Avem $\lambda = A^{-1}B$ (inversarea matricei A este posibilă deoarece este matricea asociată produsului scalar a în baza $\{w_1, w_2, ...w_n\}$. Cu aceste valori λ determinate avem soluţia aproximativă u_h dată de (1.5).

OBSERVAŢIA 1.1. *In cazul funcţiilor w_i date de (1.4) avem $w' \approx 1/h$ ceea ce face ca să avem $A_{i,j} \approx \frac{C}{h}$. Pentru a evita ca $A_{i,j} \to \infty$ când $h \to 0$ putem înmulţi sistemul $A\lambda = B$ cu h şi atunci noua matrice $A^1 = hA$ va avea componentele mărginite când $h \to 0$.*

PROPOZIŢIA 1.3. *Dacă u este soluţia clasică a problemei (p) şi u_h este soluţia problemei (ph) atunci $u - u_h$ este perpendicular pe V_h în raport cu produsul scalar a, deci u_h este proiecţia ortogonală a lui u pe V_h.*

DEMONSTRAŢIE. Conform (1.2) punctul b) avem $a(u, v) = L(v)$ pentru orice $v \in V$, iar din (ph) avem $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ pentru orice $v_h \in V_h \subset V$, de unde prin scădere $a(u - u_h, v_h) = 0$ pentru orice $v_h \in V_h$. □

OBSERVAŢIA 1.2. *Spaţiul V_h fiind finit dimensional este închis în V şi avem descompunerea ortogonală unică faţă de produsul scalar a, $u = v_h + (u - v_h)$, cu $v_h \in V_h$, $u - v_h \in V_h^{\perp}$ (vezi teorema 7.1, pag. 85).*

In ce priveşte calitatea aproximării soluţiei exacte a problemei (p) de către soluţia u_h a problemei (ph) avem teorema

TEOREMA 1.1. *Dacă problema p are soluţia $u \in C^2(I) \cap C^0(\bar{I})$ atunci soluţia u_h a problemei (ph) satisface o inegalitate de forma $||u - u_h||_{L^2} \leq Ch$, unde constanta C este independentă de h.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru o funcţie u, continuă pe I, definim $\tilde{u} \in V_m$ prin

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) w_i$$

Avem pentru $x \in (x_i, x_{i+1})$

$$u(x_{i+1}) = u(x) + u'(x)(x_{i+1} - x) + \frac{u''(\xi)}{2}(x_{i+1} - x)^2$$

$$u(x_i) = u(x) + u'(x)(x_i - x) + \frac{u''(\eta)}{2}(x_i - x)^2$$

Prin scăderea celor două relaţii şi divizarea rezultatului la h, ţinând seama că $x_{i+1} - x_i = h$ obţinem

$$\left| \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} - u'(x) \right| \leq \max |u''| \cdot h$$

sau

$$|\tilde{u}'(x) - u'(x)| \leq \max |u''| \cdot h$$

de unde ţinând seama de (1.1) şi mărginirea funcţiei c obţinem

$$\|u - \tilde{u}\|_a = (a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}))^{1/2} \tag{1.6}$$

$$= \left(\int_0^1 (u'(x) - \tilde{u}'(x))^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^1 c(x)(u(x) - \tilde{u}(x)) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \tag{1.7}$$

$$\leq C_1 \left(\int_0^1 (u'(x) - \tilde{u}'(x))^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \leq C_1 \max |u''| \cdot h \tag{1.8}$$

Pe de altă parte din propoziţia (1.3) rezultă

$$\|u - u_h\|_a \leq \|u - \tilde{u}\|_a \tag{1.9}$$

Inegalităţile (1.6)-(1.8) şi (1.9) dau

$$\|u - u_h\|_a \leq C_1 \max |u''| \cdot h \tag{1.10}$$

Pe de altă parte din (1.1) există o constantă C_2 (se poate lua $C_2 = 1$) astfel ca

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_2 \|u - u_h\|_a \tag{1.11}$$

Din (1.11) şi (1.10) rezultă

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C_2 C_1 \max |u''| \cdot h$$

□

1.3. Programul Mathcad. In cele ce urmează apare programul corespunzător metodei numerice descrise mai sus pentru problema $-u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x)$ pe intervalul $(0,1)$, cu condiţiile $u(0) = u(1) = 0$. Am luat $c(x) = 1 + x$ şi $f(x) = -2 + 6x + x^2 - x^4$. Am ales aceste funcţii pentru că atunci soluţia exactă este $u(x) = x^2 - x^3$. In acest program indicii vectorilor încep cu zero.

$s := 0 \qquad d := 1 \qquad n := 5 \qquad h := \dfrac{d - s}{n + 1}$

$i := 0..n + 1 \qquad p_i := s + h \cdot i$

$$w(i,x) := \begin{cases} \dfrac{x - p_{i-1}}{h} & \text{if } p_{i-1} \leq x \leq p_i \\ \dfrac{p_{i+1} - x}{h} & \text{if } p_i \leq x \leq p_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad dw(i,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{h} & \text{if } p_{i-1} \leq x \leq p_i \\ \dfrac{-1}{h} & \text{if } p_i \leq x \leq p_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$c(x) := 1 + x \qquad f(x) := -2 + 6 \cdot x + x^2 - x^4 \qquad uex(x) := x^2 - x^3$

Matricea sistemului liniar (indicii sunt intre 0 si n-1)

$i := 1..n \qquad j := 1..n$

$$A_{i-1,\,j-1} := \int_{p_{i-1}}^{p_{i+1}} (dw(i,x) \cdot dw(j,x) + c(x) \cdot w(i,x) \cdot w(j,x))\, dx$$

$$i := 1..n \qquad B_{i-1} := \int_s^d f(x) \cdot w(i,x)\, dx$$

$$A = \begin{pmatrix} 12.13 & -5.965 & 0 & 0 & 0 \\ -5.965 & 12.148 & -5.961 & 0 & 0 \\ 0 & -5.961 & 12.167 & -5.956 & 0 \\ 0 & 0 & -5.956 & 12.185 & -5.951 \\ 0 & 0 & 0 & -5.951 & 12.204 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -0.162 \\ 0.017 \\ 0.198 \\ 0.373 \\ 0.533 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := A^{-1} \cdot B$$

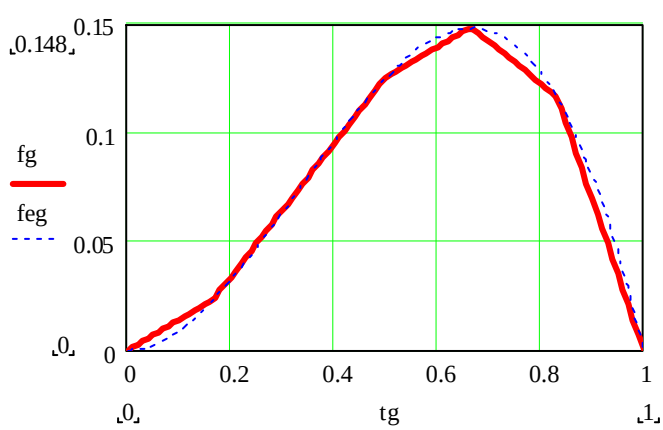
$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.023 \\ 0.074 \\ 0.125 \\ 0.149 \\ 0.116 \end{pmatrix}$$

$$uh(x) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i-1} \cdot w(i, x)$$

Graficul soluţiei

Graficul solutiei aproximative si al solutiei exacte

$$k := 0..ngr \qquad tg_k := \left(s + k \cdot \frac{d-s}{ngr}\right) \qquad fg_k := uh\left(tg_k\right) \qquad feg_k := uex\left(tg_k\right)$$



Se vede că diferenţa dintre soluţia exactă şi cea aproximativă este suficient de mică deşi am utilizat doar n=5 elemente finite.

2. O problemă bidimensională

2.1. Formularea problemei. Problema pe care o programăm în această secţiune este:

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \cdot u = f \\ u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C^{(0)}(\bar{\Omega}) \\ c, f \in C^{(0)}(\bar{\Omega}) \\ c \geq 0 \\ u \mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Problema este un caz particular al problemei (1.1)-(1.3 cap. 2, pag. 40) unde $\Gamma_0 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 = \emptyset$ şi este cunoscută sub numele de problema Dirichlet omogenă (vezi şi exemplul 9.4 cap. 3, pag. 93). O să urmăm paşii de la problema unidimensională, indicând rezultatele matematice pe care se bazează metoda numerică. Pentru ca expunerea să aibă un grad de autonomie vom relua unele din demonstraţiile din capitolele anterioare, date în situaţii mai generale. Vom nota un punct din plan prin (x, y), iar măsura Lebesgue prin $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Notăm cu $H^1(\Omega)$ spaţiul Sobolev (vezi pag. 79) al funcţiilor reale pe Ω de pătrat integrabil care au aproape peste tot derivate parţiale de ordinul 1 de pătrat integrabil. Produsul scalar în acest spaţiu este

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.1}$$

Conform teoremei 5.2, pag. 81, $H^1(\Omega)$ este închiderea spaţiului $C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$ în raport cu norma dată de produsul scalar (2.1). Notăm $H_0^1(\Omega)$ închiderea în $H^1(\Omega)$ a mulţimii $C_0^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$. Spaţiul $H_0^1(\Omega)$ este format din acele elemente din $H^1(\Omega)$ care au restricţia la frontieră nulă (vezi pag. 81). In cele ce urmează vom nota spaţiul $H_0^1(\Omega)$ cu V. Pe V introducem următoarele trei forme biliniare simetrice; forma (2.1) şi următoarele două

(2.2)
$$(u, v)_1 = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u(x, y) \cdot \operatorname{grad} v(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2.3)
$$(u, v)_a = a(u, v) = \iint\limits_{\Omega} \left(\operatorname{grad} u(x, y) \cdot \operatorname{grad} v(x, y) + c(x, y)\, u(x, y)\, v(x, y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

unde $c \geq 0$. Din inegalitatea Friederichs-Poincaré (vezi teorema 5.3, pag. 81) avem propoziţia

Propoziţia 2.1. *Cele trei forme simetrice (2.1),(2.2), (2.3) sunt produse scalare pe $V = H_0^1(\Omega)$ şi normele date de ele sunt echivalente.*

Demonstraţie. Ca urmare a inegalităţii Friederichs-Poincaré detaliată sub forma

$$\iint\limits_{\Omega} u^2(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq c_\Omega \iint\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.4}$$

pentru $u \in H_0^1(\Omega)$

şi a faptului că c este continuă, mărginită şi pozitivă pe Ω avem

$$(u,u)_1 \leq (u,u)_{H^1(\Omega)} \leq (c_\Omega + 1)(u,u)_1$$
$$(u,u)_1 \leq (u,u)_a \leq (1 + c_\Omega \max c)(u,u)_1$$

ceea ce arată că formele $(u,v)_1$ şi $(u,v)_a$ sunt şi ele pozitiv definite şi dau norme echivalente cu $\|\|_{H^1(\Omega)}$. □

Definim ca şi în cazul unidimensional $L : V \to R$

$$L(v) = \iint_\Omega f(x,y) \cdot v(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

şi $J : V \to R$ prin

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$$

Definim de asemenea alte două probleme

$$\text{(PV)} \qquad \begin{cases} u \in V \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

$$\text{(MV)} \qquad \begin{cases} u \in V \\ J(u) = \inf\limits_{v \in V} J(v) \end{cases}$$

care sunt formal identice cu problemele (pv), (mv) din cazul unidimensional. Avem următoarea propoziţie

Propoziţia 2.2. *a) Problemele (PV) şi (MV) sunt echivalente.*
b) Dacă problema (P) are soluţia u, atunci u este soluţie pentru problemele (PV) şi (MV).
c) Dacă una din problemele (PV) sau (MV) are o soluţie de clasă C^2 atunci aceea este soluţie şi pentru problema (P) .

Demonstraţie. a) Echivalenţa (PV) şi (MV) este analoagă cu punctul a) a propoziţiei 1.2.

b) Dacă $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \cdot u = f$, $u \in V$ atunci pentru orice $v \in V$ avem prin integrare prin părţi (lema 1.1, pag. 41)

$$0 = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu - f \right) v\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.5}$$

$$= \underbrace{\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + cuv - fv \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{a(u,v)-L(v)} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} v\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{v}dx \right)}_{=0} \tag{2.6}$$

$$= a(u,v) - L(v)$$

ceea ce arată că că u este soluţie a problemei (PV) deci din a) şi a problemei (MV).

c) Dacă $u \in C^2(\bar{\Omega})$ este soluţie a problemei (PV) atunci termenul din (2.6) este zero, deci şi membrul drept din (2.5) este zero pentru orice $v \in V$ şi conform lemei fundamentale a calculului variaţional $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu - f = 0$ în Ω. □

2.2. Metoda numerică. Metoda numerică a elementului finit pentru rezolvarea problemei (P) este descrisă într-un caz mai general în cap. 2, pag. 45 (metoda elementului Lagrange de gradul 1). Recapitulăm aici etapele de calcul.

a) Se divide domeniul Ω în triunghiuri astfel ca două trunghiuri să fie ori disjuncte ori să aibă în comun o latură sau un vârf. Notăm $\mathcal{T}_h$ mulţimea acestor triunghiuri.

b) Considerăm spaţiul finit dimensional V_h al funcţiilor continue $u : \bar{\Omega} \to R$ astfel ca $u|_{\partial\Omega} = 0$ şi în interiorul fiecărui triunghi din $\mathcal{T}_h$, u este funcţie de gradul 1 în x şi y. Pe un triunghi $K \in \mathcal{T}_h$ care are vârfurile $P_iP_jP_k$ în ordine trigonometrică, funcţia u este dată de formula ($P \in K$):

$$u(P) = u(P_i)\frac{\text{aria}(PP_jP_k)}{\text{aria}(P_iP_jP_k)} + u(P_j)\frac{\text{aria}(PP_kP_i)}{\text{aria}(P_iP_jP_k)} + u(P_k)\frac{\text{aria}(PP_iP_j)}{\text{aria}(P_iP_jP_k)}$$

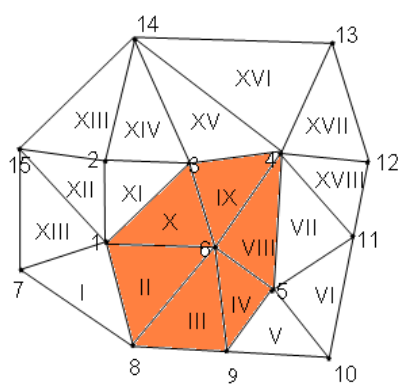
Conform exemplului 4.6, pag. 77 $V_h \subset V$. Funcţiile $\varphi_i^K, \varphi_j^K, \varphi_k^K : K \to R$ definite prin

$$\varphi_i^K(P) = \frac{\text{aria}(PP_jP_k)}{\text{aria}(P_iP_jP_k)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_j & x_k \\ y & y_j & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_j & y_j & y_k \end{vmatrix}}$$

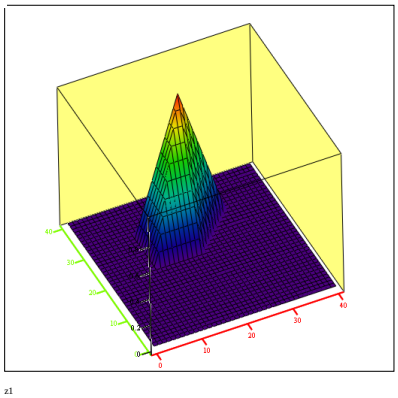
şi analoagele (P are coordonatele (x, y), P_i are coordonatele (x_i, y_i) etc.) se numesc coordonatele baricentrice ale punctului P faţă de triunghiul K. Dacă numerotăm vârfurile triunghiurilor interioare domeniului Ω prin P_1, P_2,...P_n atunci mulţimea de funcţii $\{w_1, w_2, ...w_n\} \subset V_h$, unde

$$w_i(P) = \begin{cases} \varphi_i^K(P) & \text{dacă } P \in K \text{ şi } P_i \text{ este vârf al triunghiului } K \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

formează o bază în V_h . Funcţia w_i are valoarea 1 în vârful P_i şi valoarea zero în celelalte vârfuri, iar suportul funcţiei este reuniunea triunghiurilor care îl au pe P_i ca vârf (vezi figura următoare)



Suportul funcţiei w_6



Graficul unei funcţii w_i

Pentru o funcţie $u \in V_h$ avem dezvoltarea

$$u \in V_h \implies u = \sum_{i=1}^{n} u(P_i) w_i$$

c) Definim analog cu problema (ph) din cazul unidimensional problema

$$\text{(Ph)} \qquad \begin{cases} u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \ \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

La fel ca în cazul problemei bilocale avem $u_h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$, iar (Ph) devine

$$\begin{aligned} &A\lambda = B \\ &A \in M(n, n, R), \ B \in M(n, 1, R) \end{aligned}$$

cu

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= A_{j,i} = a(w_i, w_j) = a(w_j, w_i) \\ B_i &= L(w_i) \end{aligned}$$

Propoziţia 1.3 şi observaţia 1.2 se aplică şi în cazul problemei bidimensionale considerate.

Propoziţia 2.3. *Dacă u este soluţia clasică a problemei (P) şi u_h este soluţia problemei (Ph) atunci $u - u_h$ este perpendicular pe V_h în raport cu produsul scalar a, deci u_h este proiecţia ortogonală a lui u pe V_h.*

d) Notăm cu h cel mai mare diametru al unui triunghi din $\mathcal{T}_h$. Studiem convergenţa soluţiilor u_h către soluţia u a problemei iniţiale (P). Avem următoarea teoremă

Teorema 2.1. *Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*
i) problema (P) are soluţia u
ii) unghiurile triunghiurilor din $\mathcal{T}_h$ sunt toate mai mari ca $\theta_0 \in (0, \pi)$,
atunci există constantele C şi D, independente de $\mathcal{T}_h$ astfel ca

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch\sqrt{1 + Dh^2},$$

unde u_h este soluţia problemei (Ph)

Demonstraţie. Demonstraţia este dată în cap. 2, secţiunea "Evaluarea erorii". Reluăm unele puncte ale demonstraţiei pentru cazul nostru particular. Fie u soluţia problemei (P). La fel ca în teorema 1.1 definim

$$\tilde{u}_h = \sum_{i=1}^{n} u(P_i) w_i \in V_h$$

Funcţia u_h este în V_h şi coincide cu u în vârurile P_i ale triangularizării. Ţinând seama de propoziţia 2.1 şi de faptul că $(u - u_h) \perp V_h$ faţă de produsul scalar a, avem

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \|u - u_h\|_a \leq C_0 \|u - \tilde{u}_h\|_a \tag{2.7}$$

Inegalităţile (5.27), pag. 62, se scriu mai în detaliu pe triunghiul K (u_K din formula (5.27), cap. 2 este $\tilde{u}_h$ restricţionat la K):

$$\|u - \tilde{u}_h\|_\infty \le \tilde{C} M_2^{(K)} h_K^2$$
$$\|Du - D\tilde{u}_h\|_\infty \le \tilde{\tilde{C}} M_2^{(K)} \frac{h_K^2}{\rho_K}$$

unde h_K este diametrul triunghiului K, ρ_K este raza cercului înscris în K, $\tilde{C}$ şi $\tilde{\tilde{C}}$ sunt constante independente de triunghi, $M_2^{(K)}$ este

$$M_2^{(K)} = \max_{(x,y)\in K} \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \right\|_2$$

Considerând toate triunghiurile $K \in \mathcal{T}_h$ obţinem pe tot domeniul Ω

$$\|u - \tilde{u}_h\|_\infty \le \tilde{C} M_2 h^2 \tag{2.8}$$

$$\|Du - D\tilde{u}_h\|_\infty \le \tilde{\tilde{C}} M_2 \left(\max_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K} \right) h \tag{2.9}$$

unde $h = \max_K h_K$ este diametrul maxim al triunghiurilor din $\mathcal{T}_h$, iar M_2 este

$$M_2 = \max_{(x,y)\in\Omega} \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix} \right\|_2$$

Rezultă din formula (**??**), pag. **??** că

$$\max_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K} \le \frac{2}{\sin\theta_h}$$

unde θ_h este cel mai mic unghi al unui triunghi $K \in \mathcal{T}_h$. Cu aceasta inegalitatea (2.9) devine

$$\|Du - D\tilde{u}_h\|_\infty \le \tilde{\tilde{C}} M_2 \frac{2h}{\sin\theta_h} \tag{2.10}$$

iar dacă toate unghiurile sunt mai mari ca θ_0 atunci

$$\|Du - D\tilde{u}_h\|_\infty \le \tilde{\tilde{C}} M_2 \frac{2h}{\sin\theta_0} \tag{2.11}$$

Avem acum ca în observaţia (5.1), cap. 2, utilizând (2.8), (2.11) şi definiţia produsului a

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_h\|_a^2 &= \iint_\Omega \|Du - D\tilde{u}_h\|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_\Omega c\,|u - \tilde{u}_h|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\le \mathrm{aria}\,(\Omega) \cdot \left(\tilde{\tilde{C}} M_2 \frac{2h}{\sin\theta_0} \right)^2 + \max c \cdot \mathrm{aria}\,(\Omega) \cdot \left(\tilde{C} M_2 h^2 \right)^2 \end{aligned}$$

sau

$$\|u - \tilde{u}_h\|_a^2 \le C_1 h^2 + C_2 h^4 \tag{2.12}$$

Inegalităţile (2.7) şi (2.12) ne dau $\|u - u_h\|_{L^2} \le Ch\sqrt{1 + Dh^2}$ cu C şi D independente de $\mathcal{T}_h$. □

Teorema pune în evidenţă faptul că dacă se fac triangularizări $\mathcal{T}_h$ din ce în ce mai fine ($h \to 0$) astfel ca unghiurile triunghurilor să nu se apropie de zero ci să rămână deasupra unui anumit nivel θ_0 atunci $u_h \to u$ în $L^2(\Omega)$.

2.3. Programul Mathcad. Programul prezentat în continuare rezolvă ecuaţia $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \cdot u = f$ în Ω , $u|_\Omega = 0$ cu Ω un dreptunghi. Divizarea domeniului Ω în triunghiuri se face în afara programului. Programul preia datele a trei fişiere ce conţin informaţii despre triangularizare:

i) în matricea ig se introduc (citesc) pentru fiecare triunghi, indicii vârfurilor, vârfurile fiind enumerate în sens trigonometric pozitiv

ii) în vectorul xg se citesc coordonatele x ale vârfurilor

iii) în vectorul yg se citesc coordonatele y ale vârfurilor

Prin convenţie primele vârfuri sunt cele interioare, ultimele cele de pe frontieră. Numărul total de vârfuri este Q, din care N interioare. Divizarea în elemente finite (deci construcţia matricelor ig, xg, yg) s-a făcut manual.

ORIGIN $\equiv 1$

$c(x,y) := x + y$ $\qquad$ $f(x,y) := 10x^2 - 5y$

Nodurile pentru fiecare element, in sens trigonometric pozitiv

ig := READPRN ("E:\PV\Seminarul catedrei\2008-2009\Mcad\exig.txt")

npie := 3 numrul nodurilor pe un element

Coordonatele varfurilor sunt in doua fisiere

xg := READPRN ("E:\PV\Seminarul catedrei\2008-2009\Mcad\exxg.txt")

yg := READPRN ("E:\PV\Seminarul catedrei\2008-2009\Mcad\exyg.txt")

N := 9 numarul de noduri pe interioare

Q := 25 numarul total de noduri

ne := rows (ig) $\qquad$ ne = 32 numarul de triunghiuri

Reprezentarea grafica

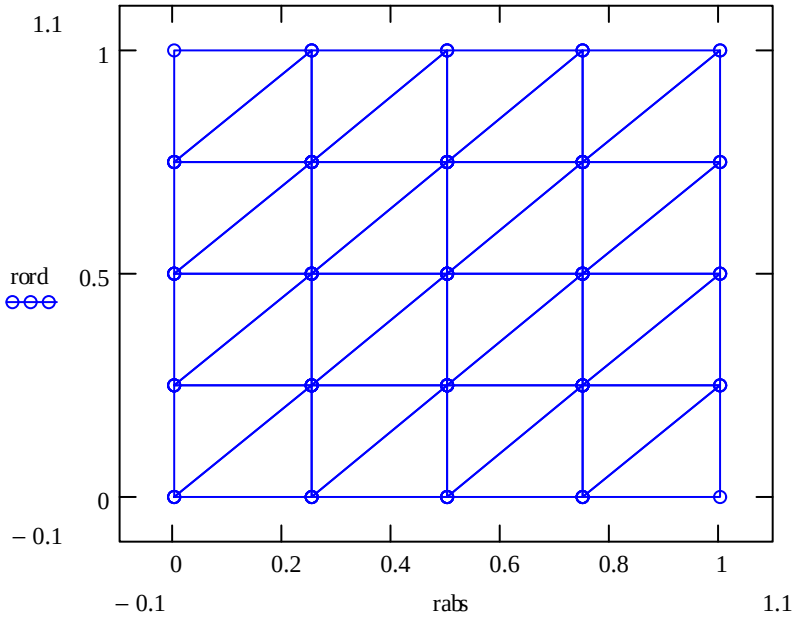
$i := 1..npie \qquad j := 1..ne \qquad abscisa_{i,j} := xg_{(ig_{j,i})} \qquad ordonata_{i,j} := yg_{(ig_{j,i})}$

$extrasa := submatrix(abscisa, 1, 1, 1, cols(abscisa))$

$extraso := submatrix(ordonata, 1, 1, 1, cols(ordonata))$

$rabs := stack(abscisa, extrasa)$

$rord := stack(ordonata, extraso)$



Ariile triunghiurilor

$$ie := 1..ne \qquad S_{ie} := \frac{\left|\begin{bmatrix} 1 & xg_{(ig_{ie,1})} & yg_{(ig_{ie,1})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,2})} & yg_{(ig_{ie,2})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,3})} & yg_{(ig_{ie,3})} \end{bmatrix}\right|}{2}$$

Coordonatele baricentrice pe elementul ie

$$
\mathrm{bar}(k, ie, x, y) := \left|
\begin{array}{l}
v \leftarrow 0 \\
v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & xg_{(ig_{ie,2})} & yg_{(ig_{ie,2})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,3})} & yg_{(ig_{ie,3})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} \quad \text{if } k = 1 \\
v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & xg_{(ig_{ie,3})} & yg_{(ig_{ie,3})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,1})} & yg_{(ig_{ie,1})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} \quad \text{if } k = 2 \\
v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & xg_{(ig_{ie,1})} & yg_{(ig_{ie,1})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,2})} & yg_{(ig_{ie,2})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} \quad \text{if } k = 3 \\
v
\end{array}
\right|
$$

Baza de funcţii pentru V_h

```
w(i,x,y) := | v ← 0
            | for ie ∈ 1..ne
            |   for k ∈ 1..3                    if (bar(1,ie,x,y) ≥ 0) ∧ (bar(2,ie,x,y) ≥ 0) ∧ (bar(3,ie,x,y) ≥ 0)
            |     return bar(k,ie,x,y) if ig_{ie,k} = i
            | v
```

Derivatele funcţiilor coordonate baricentrice

$$\mathrm{dxbar}(k, ie, x, y) := \left\| \begin{array}{ll} v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & xg_{(ig_{ie,2})} & yg_{(ig_{ie,2})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,3})} & yg_{(ig_{ie,3})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} & \text{if } k = 1 \\ v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & xg_{(ig_{ie,3})} & yg_{(ig_{ie,3})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,1})} & yg_{(ig_{ie,1})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} & \text{if } k = 2 \\ v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & xg_{(ig_{ie,1})} & yg_{(ig_{ie,1})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,2})} & yg_{(ig_{ie,2})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} & \text{if } k = 3 \\ v & \end{array} \right\|$$

$$\mathrm{dybar}(k, ie, x, y) := \left\| \begin{array}{ll} v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & xg_{(ig_{ie,2})} & yg_{(ig_{ie,2})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,3})} & yg_{(ig_{ie,3})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} & \text{if } k = 1 \\ v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & xg_{(ig_{ie,3})} & yg_{(ig_{ie,3})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,1})} & yg_{(ig_{ie,1})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} & \text{if } k = 2 \\ v \leftarrow \dfrac{\left|\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & xg_{(ig_{ie,1})} & yg_{(ig_{ie,1})} \\ 1 & xg_{(ig_{ie,2})} & yg_{(ig_{ie,2})} \end{bmatrix}\right|}{2 \cdot S_{ie}} & \text{if } k = 3 \\ v & \end{array} \right\|$$

Matricea sistemului este calculată după formula din teorie. Integrala unei funcţii F pe triunghiul ABC este calculată după formula aproximativă $\iint\limits_{ABC} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx F\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_b+y_C}{3}\right)\mathrm{aria}(ABC)$.

```
m_s := | for i ∈ 1.. N
         for j ∈ 1.. N
           A[i,j] ← 0
       for ie ∈ 1.. ne
         for k1 ∈ 1.. npie
           for k2 ∈ 1.. npie
             | i ← ig[ie,k1]
             | j ← ig[ie,k2]
             | x ← (xg(ig[ie,1]) + xg(ig[ie,2]) + xg(ig[ie,3]))/3
             | y ← (yg(ig[ie,1]) + yg(ig[ie,2]) + yg(ig[ie,3]))/3
             | A[i,j] ← A[i,j] + (dxbar(k2,ie,x,y)·dxbar(k1,ie,x,y) + dybar(k2,ie,x,y)·dybar(k1,ie,x,y) ... )·S[ie]  if (1 ≤ i ≤ N) ∧ (1 ≤ j ≤ N)
             |                   + c(x,y)·bar(k2,ie,x,y)·bar(k1,ie,x,y)
       | A
```

$$A := m_s$$

Reprezentăm matricea A prin nuanţe de gri. Zonele mai închise reprezintă valori mai mari în modul, alb înseamnă zero.

$$B := \overrightarrow{|A|} \qquad vm := \max(B)$$

$$255 - \frac{255}{vm}\cdot B$$

Se vede că elementele nenule ale matricei A sunt concentrate de-a lungul diagonalei principale.

Calculăm termenii liberi.

$$
t_lib := \left\| \begin{array}{l}
\text{for } i \in 1..N \\
\quad B_i \leftarrow 0 \\
\text{for } ie \in 1..ne \\
\quad \text{for } k \in 1..npie \\
\qquad \left\| \begin{array}{l}
x \leftarrow \dfrac{xg\left(ig_{ie,1}\right) + xg\left(ig_{ie,2}\right) + xg\left(ig_{ie,3}\right)}{3} \\
y \leftarrow \dfrac{yg\left(ig_{ie,1}\right) + yg\left(ig_{ie,2}\right) + yg\left(ig_{ie,3}\right)}{3} \\
i \leftarrow ig_{ie,k} \\
B_i \leftarrow B_i + f(x,y)\cdot bar\,(k,ie,x,y)\cdot S_{ie} \quad \text{if } 1 \le i \le N
\end{array} \right. \\
B
\end{array} \right.
$$

$$B := t_lib$$

Rezolvăm sistemul

$$\lambda := A^{-1}\cdot B$$

Scriem formula soluţiei aproximative

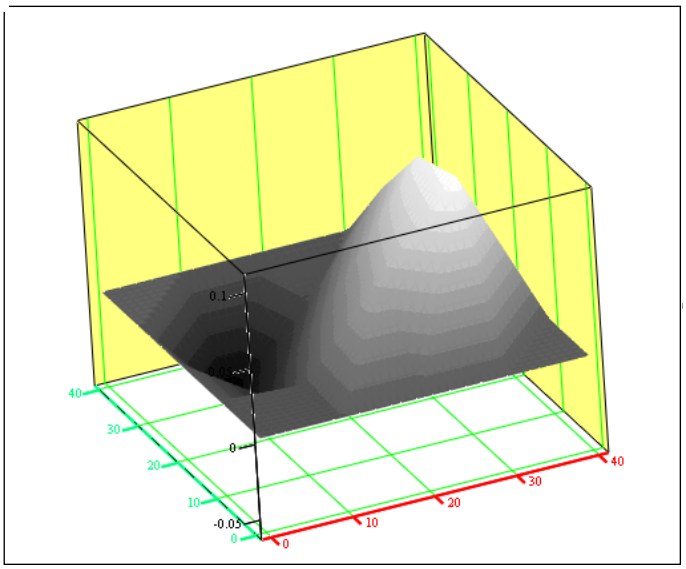
$$ua\,(x,y) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cdot w(i,x,y)$$

Graficul soluţiei aproximative

$$ng := 41 \qquad pas := \frac{1}{ng-1} \qquad ix := 1..ng \qquad xrg_{ix} := pas\cdot(ix-1)$$

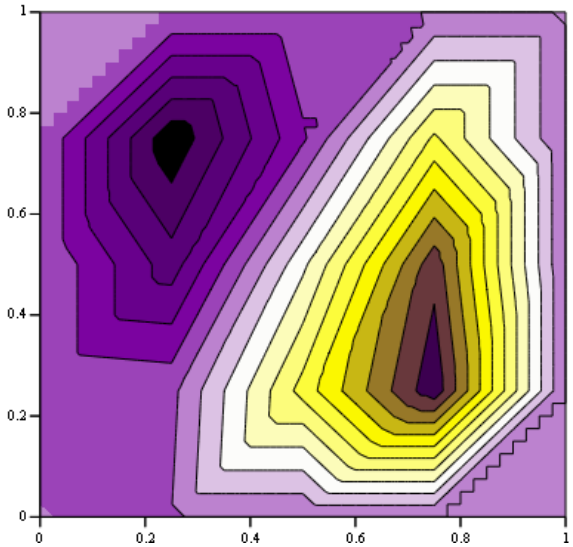
$$iy := 1..ng \qquad yrg_{iy} := pas\cdot(iy-1)$$

$$z1_{ix,iy} := ua\left(xrg_{ix}, yrg_{iy}\right)$$



z1

Graficul soluţiei aproximative



z1

Liniile de nivel pentru soluţia aproximativă

Cu aceasta se încheie varianta simplă de programare în mathcad a unei probleme la limită bidimensionale. In [**10**] se găseşte programul mathcad cu elemente Lagrange de ordinul 2 pentru ecuaţia $\Delta u = f$ cu condiţii Dirichlet pe unele porţiuni ale frontierei şi condiţii Neumann pe alte porţiuni.

Pentru divizarea domeniului în elemente finite se poate utiliza un program gratuit, *easymesh*, de la Universitatea din Trieste, program ce poate fi descărcat de la http://www-dinma.univ.trieste.it/~nirftc/research/easymesh/. Programul primeşte ca dată de intrare un fişier text cu informaţii despre domeniu şi furnizează trei fişiere text cu informaţii despre vârfurile, laturile şi triunghiurile divizării. Pe baza informaţiilor din aceste fişiere se pot construi matricele ig, xg, yg pe care în programul nostru le-am citit din fişiere externe, apoi se pot continua calculele ca mai sus. Pe pagina web a programului *easymesh* se găsesc informaţii despre modul de utilizare, informaţii ilustrate cu exemple concrete.

===

Bibliografie

[1] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, Paris, 1983.

[2] T. J. CHANG, *Finite analysis in fluid dinamics*, McGraw-Hill, Inc., 1978.

[3] M. CROUZEIX, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Institute Mathématique de Rennes, Université de Rennes I.

[4] G. DINCĂ, *Metode variaţionale şi aplicaţii*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[5] D. EUVRARD, *Introduction à l'analyse fonctionnelle et aux éléments finis*, École Nationale Supèrieure de Techniques Avancées, 1978.

[6] G. GROZA, *Analiză numerică*, MatrixRom, Bucureşti, 2005.

[7] S. G. MIHLIN, *Ecuaţii liniare cu derivate parţiale* , Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.

[8] C. P. NICULESCU, *Calculul integral al funcţiilor de mai multe variabile. Teorie şi aplicaţii*, Editura Universitaria, Craiova, 2002.

[9] G. PĂLTINEANU, P. MATEI, R. TRANDAFIR, *Bazele analizei numerice*, Editura Printech, Bucureşti, 2001.

[10] I. DRAGOTA,V. PETREHUŞ, *Metode numerice pentru ecuaţii diferenţiale*, Editura Orizonturi Universitare, Timişoara, 2002.

[11] T. PETRILA, C. GHEORGHIU, *Metode element finit şi aplicaţii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1987.

[12] V. I. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare, vol. V*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963.

[13] V. S. VLADIMIROV, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

[14] ZIENKIEVICZ, O.C., MORGAN K, *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, New-York, 1983.