Universitatea Tehnică de Construcții București
Departamentul de matematică și informatică

Concursul de matematică TRAIAN LALESCU, UTCB, Anul 1, etapa locală

17.04.2021

1) a) Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n^2+1}{n^2}$.

b) Este seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n^2+1}{n^2}$ absolut convergentă?

c) Să se afle domeniul de convergență al seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n^2+1}{n^2}\, x^n$.

2) a) Să se arate că funcția

$F:\mathbf{R}^3\setminus\{(x,0,z);\, x,z\in\mathbf{R}\}\to\mathbf{R},\ F(x,y,z)=x^2y+2xz-\frac{x}{y}+e^{xz}-\frac{5}{2}$

definește în vecinătatea punctului $(1,2)$ funcția implicită $z=z(x,y)$ cu $z(1,2)=0$.

b) Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,2)$ și $d\,z(1,2)$.

c) Să se scrie polinomul Taylor de ordinul 2 asociat funcţiei $z=z(x,y)$ în punctul $(1,2)$.

3) Se consideră punctele $A(3,1,3)$ şi $B(1,7,-1)$ şi familia de plane

$\pi_\lambda:\ (4-\lambda)x-\lambda y+2z+3\lambda-1=0,\ \lambda\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că planele π_λ conţin o dreaptă comună.

b) Să se determine planul care trece prin intersecţia planelor π_1 şi π_2 şi prin punctul A.

c) Să se arate că planul π_3 este planul mediator al segmentului $[AB]$.

d) Să se determine ecuaţiile dreptei paralele cu planele π_1 şi π_2 care trece prin proiecţia punctului B pe planul π_3.

4) Fie $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3,\ f(x,y,z)=(-2x+y+z,\, x-2y+z,\, x+ay-2z),\ a\in\mathbf{R}$.

a) Să se afle $a\in\mathbf{R}$ astfel încât $\operatorname{Ker} f\neq(0,0,0)$.

b) Pentru $a=2$ arătați că f este bijectivă și determinați f^{-1}.

c) Pentru $a=1$ scrieți matricea asociată lui f în baza canonică a spaţiului $\mathbf{R}^3$.

d) Fie $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai lui A și să se aducă matricea A la forma diagonală.

Observaţie. Se vor rezolva trei probleme din cele patru. Timp de lucru 2 ore şi 30 minute.