Concursul de matematică TRAIAN LALESCU, UTCB, Anul 2, etapa locală

17.04.2021

1) Se consideră funcția complexă $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2} e^{\frac{1}{z}}$.

a) Determinați punctele singulare izolate ale lui f și precizați natura lor.

b) Notăm $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ și $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Dezvoltați g și h în jurul punctului $z = 0$.

c) Calculați reziduurile funcției f în punctele singulare izolate.

d) Calculați $I = \displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)^2} e^{\frac{1}{z}} dz$.

2) Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{5+3\cos x}$.

a) Dezvoltați f în serie Fourier.

b) Folosind punctul a), calculați $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \cos\frac{n\pi}{3}$.

3) a) Calculați transformata Laplace a funcției $f(t) = t\sin t$, $t \geq 0$.

b) Determinați funcția original corespunzătoare imaginii Laplace $F(p) = \dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^3}$.

c) Folosind punctele a) și b), rezolvați problema Cauchy
$y'' + y = t\sin t$, $y(0) = y'(0) = 0$ $(t \geq 0)$.

4) Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin x\, e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

a) Să se determine transformata Fourier a funcţiei f.

b) Folosind transformata Fourier inversă, reprezentați f printr-o integrală.

c) Calculați $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\left(2-u^2\right)\cos u + 2u\sin u}{u^4+4} du$.

Observaţie: Se vor rezolva trei probleme din cele patru. Timp de lucru 2 ore şi 30 minute.