MINISTERUL EDUCAȚIEI

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul naţional studenţesc de matematică "Traian Lalescu"
Timişoara, 12 - 14 mai 2022

Barem de corectare: Secţiunea C

Subiectul 1. Fie funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{1010}y^{1011}}{x^{2022}+y^{2022}}\sin(xy), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Eventual folosind inegalitatea mediilor, arătaţi că f este o funcţie continuă şi calculaţi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Este funcţia f diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$? Justificaţi răspunsul.

c) Studiaţi natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(n^{-\alpha}, 1\right)$, pentru $\alpha > 0$.

Barem: Start **1p**

a) $0 \leq |f(x,y)| \leq \left|\dfrac{\sin(xy)}{xy}\right| \cdot \left|\dfrac{y}{2}\right| \xrightarrow[x,y\to 0]{} 0$ **2.5p**

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ **0.5p**

b) $\omega(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **0.5p**

Nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \omega(x,y)$ **2p**

f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$ **0.5p**

c) Compară cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1011\alpha}}$ **2p**

Seria este convergentă pentru $\alpha > \dfrac{1}{1011}$ **0.5p**

Seria este divergentă pentru $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{1011}$ **0.5p**

Subiectul 2. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

a) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f pe cercul $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$. Aflaţi valorile extreme ale funcţiei f pe discul $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2$.

b) Dezvoltaţi în serie Taylor în jurul originii funcţia $g(x) = \operatorname{arctg} f(x,0)$.

c) Calculaţi integrala $\displaystyle\int_0^{\infty} f\left(x^{\frac{1}{8}}, x^{\frac{1}{8}}\right) \cdot \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$.

Barem: Start **1p**

a) Determină punctele staţionare, $A(1,1)$ şi $B(3,3)$ **1p**

Obţine A punct de minim, B punct de maxim **1p**

Nu există puncte de extrem în interiorul discului **0.5p**

$f_{\min} = 2, f_{\max} = 18$ **0.5p**
b) Dezvoltă în serie $h(y) = \operatorname{arctg} y$ **2p**
$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$ **1p**
c) Arată că integrala este $2\beta\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ **1.5p**
Integrala este egală cu $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ **1.5p**

Subiectul 3. Fie transformarea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(a, b, c) = (a', b', c')$, unde $P'(a', b', c')$ este proiecţia punctului $P(a, b, c)$ pe dreapta $d: \ x = -y = 2z$.

a) Demonstraţi că T este operator liniar.

b) Aflaţi o bază a nucleului şi o bază a imaginii endomorfismului T.

c) Determinaţi o bază ortonormată a subspaţiului Ker(T).

d) Fie $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică ce are în baza canonică matricea $A = 9M$, unde M este matricea endomorfismului T în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Aflaţi matricea lui q în baza

$$B = \{f_1 = (2, 1, 1), f_2 = (1, 2, 1), f_3 = (1, 1, 2)\}.$$

e) Stabiliţi signatura formei pătratice q.

Barem: Start **1p**
a) $T(a, b, c) = \left(\frac{4}{9}a - \frac{4}{9}b + \frac{2}{9}c, \ -\frac{4}{9}a + \frac{4}{9}b - \frac{2}{9}c, \ \frac{2}{9}a - \frac{2}{9}b + \frac{1}{9}c\right)$ **1p**
Verifică liniaritatea **1p**
b) Bază în Ker T **1p**
Bază în Im T **1p**
c) Bază ortonormată în Ker T **1p**
d) Matricea M a endomorfismului T **0.5p**
$A' = {}^TC \cdot A \cdot C$ **0.5p**
Aflarea matricei A' (calcule) **1p**
e) *Metoda I:*
Valorile proprii $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ **1.5p**
Signatura **0.5p**
Metoda II:
Metoda Gauss **1.5p**
Signatura **0.5p**

Subiectul 4. Se consideră planele

$$\pi_1 : x - y + 3 = 0$$
$$\pi_2 : 2x - y + z + 3 = 0$$
$$\pi_3 : 3x - y + 2z + 3 = 0$$

şi dreapta $d : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

a) Demonstraţi că cele trei plane conţin o dreaptă comună Δ şi precizaţi ecuaţiile parametrice ale acesteia.

b) Există plane ce conţin dreapta Δ care formează unghi de $30°$ cu dreapta d? Justificare.

c) Există plane ce trec prin origine perpendiculare pe fiecare dintre planele π_1, π_2, π_3? În caz afirmativ, scrieţi ecuaţiile lor.

d) Determinaţi ecuaţiile sferelor de rază $2\sqrt{2}$ tangente la π_1, cu centrele pe dreapta d.

Barem: Start **1p**
a) $\Delta: \quad x = -t,\ y = 3 - t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$ **2p**
b) Fasciculul de plane ce conţin Δ **0.5p**
Vector normal la planele ce conţin Δ **0.25p**
Vector director al dreptei d **0.25p**
Aplicarea formulei pentru unghiul dintre o dreaptă şi un plan **1p**
Rezolvarea ecuaţiei (ecuaţia planelor căutate) $x - y + 3 = 0;\ y + z - 3 = 0$ **1p**
c) Condiţia de perpendicularitate **1p**
Planul căutat $x + y - z = 0$ **1p**
d) Centrul sferei $C(1 - t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}$ **0.5p**
Condiţia de tangenţă **0.5p**
Sferele căutate $S_1 : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 8,\ S_2 : (x + 6)^2 + (y - 1)^2 + (z - 7)^2 = 8$ **1p**

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.