MINISTERUL EDUCAȚIEI

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concursul naţional studenţesc de matematică "Traian Lalescu"
Timişoara, 12 - 14 mai 2022

Barem de corectare: Secţiunile D şi E

Subiectul 1 *Determinaţi f funcţie olomorfă în $\mathbb{C}$, $f = u + iv$, dacă*

$$\int_0^x u(t,y)dt + 2\int_0^y v(x,t)dt = 2xy,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Barem: Start ..... (**1p**)

Se derivează relaţia în raport cu x, apoi în raport cu y şi se obţine

$\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2$ ..... (**1p**)

Din relaţiile Cauchy-Riemann, se găseţe $v = 2x + \varphi(y)$ ..... (**2p**)

Se impune condiţia v armonică şi se obţine $\varphi(y) = C_1 y + C_2$ ..... (**2p**)

Se găseşte $f(z) = (C_1 + 2i)z + C_3$ ..... (**2p**)

Se identifică u şi v, se verifică relaţia din enunţ şi se obţine $f(z) = 2iz$ ..... (**2p**)

Subiectul 2 *Să se calculeze:*

$$\int_{|z|=1} \frac{(\operatorname{sh}\pi z)^{2021}}{(e^{\pi z}-1)^{2023}\,(e^{\pi z}-e^{\pi})}dz.$$

Barem: Start ..... (**1p**)

Prin schimbarea de variabilă $e^{\pi z} = w$, cercul unitate $|z| = 1$ se transformă conform în curba γ ce conţine punctele $e^{\pm\pi}, -1$: ..... (**2p**)

Se obţine $I = \dfrac{1}{2^{2021}\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{(w+1)^{2021}}{w^{2022}\,(w-1)^2\,(w-e^{\pi})}\,dw.$ ..... (**1p**)

Se aplică Teorema semireziduurilor şi se obţine $I = \dfrac{1}{2^{2021}\pi}\left(2\pi i\mathrm{Rez}\,(\mathrm{g},1) + \pi\mathrm{iRez}\,(\mathrm{g},\mathrm{e}^{\pi})\right)$. ..... (**2p**)

Se calculează reziduurile şi se găseşte $I = \dfrac{i}{(e^{\pi}-1)^2}\left(2023e^{\pi} - 2025 + \dfrac{(1+e^{\pi})^{2021}}{e^{2022\pi}}\right)$. ..... (**4p**)

Subiectul 3 *Se consideră originalele Laplace f şi g, astfel încât $g(0) = 0$, g este derivabilă, iar g' este un original Laplace. Notăm cu F şi G transformatele Laplace ale originalelor f şi respectiv g, şi fie $a > 0$, $b > 0$.*

(i) Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^\infty f(ax)\,dx \int_0^\infty \frac{g'(by)}{ax+by}\,dy = \frac{1}{ab}\int_0^\infty sF(s)G(s)\,ds.$$

(ii) Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin(2x)sa(y)}{2x+y}\,dy,$$

unde $sa(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y}{y}, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$.

Barem: Start ..... **(1p)**

(i) Cu substituţia $ax + by = t$ se obţine:

$\int_0^\infty f(ax)dx \int_0^\infty \frac{g'(by)}{ax+by}dy = \frac{1}{b}\int_0^\infty f(ax)dx \int_0^\infty \frac{g'(t-ax)}{t}dt =$ ..... **(1p)**

$= \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{1}{t}dt \int_0^\infty f(ax)g'(t-ax)dx = \frac{1}{ab}\int_0^\infty \frac{1}{t}dt \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau =$ ..... **(1p)**

$= \frac{1}{ab}\int_0^\infty \frac{1}{t}(f * g')(t)dt = \frac{1}{ab}\int_0^\infty \mathcal{L}\{(f*g')(t)\}(s)ds = \frac{1}{ab}\int_0^\infty sF(s)G(s)ds$ ..... **(2p)**

(ii) Pentru $a = 2$, $b = 1$, $f(t) = \sin t$, $g'(t) = sa(t)$, deci $g(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x}dx$ ..... **(2p)**

$F(s) = \frac{1}{s^2+1}$, $G(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - arctgs\right)$, deci: $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{s^2+1} - \frac{arctgs}{s^2+1}\right)ds$ ..... **(2p)**

$I = \frac{\pi^2}{16}$ ..... **(1p)**

Subiectul 4 *(i) Să se arate că dezvoltarea în serie de cosinuşi a funcţiei*

$$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(2\sin x)$$

este

$$\ln(2\sin x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n}.$$

(ii) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin x)\, dx$$

Barem: Start ..... **(1p)**

(i) Din $\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$, pentru $z = re^{it}, r < 1$, se obţine $\ln\left(1 - re^{it}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{itn}}{n}$ **(2p)**

Egalând părţile reale, se găseşte $\ln\left(1 - 2r\cos t + r^2\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos nt}{n}$. ..... **(1p)**

Pentru $r \nearrow 1$ se obţne $\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n}$ de unde relaţia cerută ..... **(1p)**

(ii) Din (4), se găseşte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(2\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)\cos(2mx)}{mn} \overset{ortogonalitate}{=}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2nx)\, dx = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{24}$ ..... **(2p)**

Se integrează $\ln^2(2\sin x) = \ln^2 2 + 2\ln 2 \cdot \ln(\sin x) + \ln^2(\sin x)$ ..... **(1p)**

Se calculează $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$ ..... **(1p)**

Se obţine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin x)\, dx = \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2}\ln^2 2$ ..... **(1p)**

Subiectul 5 *Pentru $a > 0$ şi $n \in \mathbb{Z}$ se consideră funcţiile*

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(at - n\pi)}{at - n\pi}, & t \neq \dfrac{n\pi}{a} \\ \\ 1, & t = \dfrac{n\pi}{a} \end{cases}.$$

a) Calculaţi transformata Fourier pentru $f_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) Calculaţi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \cdot f_m(t)\, dt$, pentru $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$.

Barem: Start ..... (**1p**)

a)$\mathcal{F}\Big[\dfrac{\sin t}{t}\Big](\omega) = \begin{cases} \pi, & \omega \in (-1, 1) \\ 0, & \omega \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \dfrac{\pi}{2}, & \omega = \pm 1 \end{cases}$ ..... (**3p**)

$\mathcal{F}\Big[\dfrac{\sin(at - n\pi)}{at - n\pi}\Big](\omega) = e^{-in\omega\pi} \cdot \mathcal{F}\Big[\dfrac{\sin(at)}{at}\Big](\omega) = \dfrac{1}{a} \cdot e^{-in\omega\pi} \cdot \mathcal{F}\Big[\dfrac{\sin t}{t}\Big]\Big(\dfrac{\omega}{a}\Big)$ ..... (**2p**)

$\mathcal{F}\Big[f_n(t)\Big](\omega) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{a} \cdot e^{-in\frac{\omega}{a}\pi}, & \omega \in (-a, a) \\ 0, & \omega \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \\ \dfrac{\pi}{2a} \cdot e^{-in\frac{\omega}{a}\pi}, & \omega = \pm a \end{cases}$ ..... (**1p**)

b) Se foloseşte formula lui Parseval $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \cdot f_m(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n(\omega) \cdot \widehat{f}_m(\omega) d\omega = 0$ ..... (**3p**)

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.