Concursul de matematică "Traian Lalescu"
Faza naţională, Secţiunea D, 2021-2022

Problema 1 Fie $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 şi $u : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$u(x, y) = \varphi\left(x^2 y^2\right).$$

Să se determine funcţia olomorfă $f : D \to \mathbb{C}$, unde $D = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$, ştiind că $\operatorname{Re} f = u$, $f(1+i) = 2$ şi $f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \frac{1}{2}$.

Problema 2 Să se calculeze

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{(\operatorname{sh} z)^{2019} + (\operatorname{sh} z)^{2021}}{(\operatorname{ch} z - 1)^{2020}} \, \mathrm{d}z.$$

Problema 3 Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π, dată prin

$$f(x) = \ln(2 + \cos x).$$

Problema 4 Fie funcţia periodică de perioadă $T = 2$ dată prin

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [0, 1), \\ -1, & \text{dacă } t \in [1, 2). \end{cases}$$

(a) Să se afle imaginea funcţiei f prin transformarea Laplace.

(b) Să se rezolve în clasa originalelor Laplace problema Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} + x = f(t), & t \in (0, \infty), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$