Concursul de matematică TRAIAN LALESCU, UTCB, etapa locală
05.04.2025

1) Fie seria de puteri $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{\alpha^{2n}(2n+1)}$, $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

a) Să se afle mulțimea de convergență a seriei.
b) Pentru $\alpha = 2$, să se calculeze suma seriei.

c) Să se afle suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}$.

2) Fie funcția $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + z^2 - 3xy - 2z$.

a) Să se arate că ecuația $f(x, y, z) = 0$ definește funcția implicită $z = z(x, y)$ în vecinătatea punctului $(0, 0)$, cu $z(0, 0) = 1$ și să se scrie expresia polinomului Taylor de ordin doi asociat funcției implicite $z(x, y)$ în $(0, 0)$.

b) Să se verifice dacă punctul $(0, 0)$ este punct de extrem pentru funcția implicită z definită la a).

c) Să se afle punctele de extrem local ale funcției $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $g(x, y, z) = f(x, y, z) + 2z$.

3) Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ definit prin

$$T(P)(X) = XP'(X) - P''(X),\ P \in \mathbb{R}_3[X]$$

şi $V = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ T(P)(X) = P(X+1)\} \subset \mathbb{R}_3[X]$ un subspaţiu vectorial, unde $\mathbb{R}_3[X]$ este spaţiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult 3 cu coeficienţi reali.

a) Să se determine matricea $A \in M_4(\mathbb{R})$ asociată endomorfismului T în raport cu baza canonică $\{1, X, X^2, X^3\}$ a spaţiului $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Să se determine valorile proprii şi subspaţiile proprii ale endomorfismului T. Este T diagonalizabil? Justificaţi.

c) Să se arate că $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^2)$, unde $T^2 = T \circ T$.

d) Să se stabilească dacă $V \oplus \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}_3[X]$.

4) Se consideră dreapta

$$(d): \frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{2} = \frac{z-3}{\beta}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

şi planele

$$\begin{aligned} &(\pi_1): 2x - y + z + 3 = 0 \\ &(\pi_2): x - y + z - 2 = 0 \\ &(\pi_3): mx - y + z - 1 = 0, \ m \in \mathbb{R} \end{aligned} .$$

a) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât planul (π_1) să conțină dreapta (d).

b) Pentru valorile α, β găsite la a), să se determine simetricul punctului $M(\alpha, \beta, 1)$ faţă de planul (π_2).

c) Să se stabilească poziţia relativă a planelor $(\pi_1), (\pi_2)$ şi (π_3) în funcţie de valorile parametrului real m.

Observaţie Se vor rezolva trei probleme din cele patru. Timp de lucru 2 ore şi 30 minute.