MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Concursul Național Studențesc de Matematică „Traian Lalescu”

Constanța, 8-10 Mai 2025

BAREM - SECȚIUNEA C

Problema 1

Fie $k \in \{0,1,2,\dots,12\}$ și $n \in \mathbb{N}$. Se consideră funcțiile $f_{k,n}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_{k,n}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^k y^{12-k}}{(x^2+y^2)^n}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

și $g_n: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g_n(x,y) = (x^2+y^2)^n$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Stabiliți pentru ce $k \in \{0,1,2,\dots,12\}$, funcția $f_{k,1}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Stabiliți dacă funcția $f_{6,6}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției $f_{6,0}$ cu legătura $g_1(x,y) = 2$.

c) Determinați valoarea numărului real $I_k = \int_0^1 f_{k,1}(x,1-x) \cdot g_1^2(x,1-x)dx$.

Barem:

Start 1p

a) Funcția $f_{k,1}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$, pentru orice $k \in \{0,1,2,\dots,12\}$ 2p

Funcția $f_{6,6}$ este discontinuă în $(0,0)$ 1p

b) $g_1(x,y) = 2$ implică $x = \sqrt{2}\cos(t)$ și $y = \sqrt{2}\sin(t)$, cu $t \in [0,2\pi)$. Problema de extrem din enunț este echivalentă cu determinarea punctelor de extrem ale funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $h(t) = \sin^6(2t)$. Punctele de extrem $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\}$. 3p

$(0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, 0)$ sunt puncte de minim, iar $(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ sunt puncte de maxim local ... 1p

Altă metodă: multiplicatori Lagrange sau substituția $y^2 = 2 - x^2$.

c) $I_k = \int_0^1 x^{k+2}(1-x)^{12-k}dx + \int_0^1 x^k(1-x)^{14-k}dx = B(k+3, 13-k) + B(k+1, 15-k)$. 1p

În final, $I_k = \frac{\Gamma(k+3)\cdot\Gamma(13-k)}{\Gamma(16)} + \frac{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(15-k)}{\Gamma(16)} = \frac{(k+2)!(12-k)!+k!(14-k)!}{15!}$. 1p

Problema 2

Fie $n \in \mathbb{N}$ cu $n > 1$. Se consideră funcția $f(x,y) = x^n \cdot y^n - ny + y - 1$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Să se arate că ecuația $f(x,y) = 0$ definește implicit o unică funcție $y = y(x)$ în vecinătatea punctului $(x,y) = \left(\sqrt[n]{n}, 1\right)$ și determinați $y'\left(\sqrt[n]{n}\right)$.

b) Scrieți polinomul Taylor de grad 2 pentru funcția $y = y(x)$ în jurul punctului $x = \sqrt[n]{n}$, în cazul particular $n = 2$.

c) Studiați natura seriei

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(y'\left(\sqrt[n]{n}\right)\right)^{2n}.$$

Barem:

Start 1p

a) Verificarea condițiilor teoremei funcțiilor implicite 1p

Calculul $y'\left(\sqrt[n]{n}\right) = -\frac{n^{\frac{2n-1}{n}}}{n^2-n+1}$. 2p

b) Calculul $y''\left(\sqrt{2}\right) = \frac{46}{27}$. 3p

Polinomul Taylor $T(X) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(X - \sqrt{2}\right) + \frac{23}{27}\left(X - \sqrt{2}\right)^2$. 1p

c) Seria este $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{4n-2}}{(n^2-n+1)^{2n}}$.....0,5p

Criteriul comparației..... ..... 1p

Seria este convergentă. 0,5p

Problema 3

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $T: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit prin $T(X) = X \cdot A + A^t \cdot X$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că T este operator liniar.

b) Determinați $\ker(T)$ și $\mathrm{Im}(T)$. Verificați dacă $\ker(T) + \mathrm{Im}(T) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Determinați o bază ortonormată în $\mathrm{Im}(T)$, considerând $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ca spațiu euclidian înzestrat cu produsul scalar $< A, B >= \mathrm{Tr}(A \cdot B^t)$, unde $\mathrm{Tr}(C)$ reprezintă urma matricei C.

Barem:

Start 1p

a) Verificare. 2p

b) $\ker(T) = \left\{x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ 1,5p

$\mathrm{Im}(T) = \left\{\begin{pmatrix} 2a - b - c & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$. 1,5p

Verificare: adevărat 1p

c) O bază în $\mathrm{Im}(T)$. 1p

Ortonormare 2p

Problema 4

Fie sfera S: $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=10$ și fasciculul de plane

$$\pi_{\alpha,\beta}: \alpha x-(3\alpha+2\beta)y+\beta z+\alpha+\beta=0, \text{ unde } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

a) Determinați ecuațiile parametrice ale dreptei comune d a planelor $\pi_{\alpha,\beta}$ și studiați poziția dreptei d față de sfera S.

b) Determinați ecuațiile planelor perpendiculare pe d tangente la sfera S.

c) Determinați ecuația planului din fascicul care intersectează sfera S după un cerc de rază maximă.

Barem:

Start 1p

a) Ecuațiile parametrice ale dreptei d. 2p

Dreapta intersectează sfera S în două puncte distincte. 1p

b) Ecuația unui plan π perpendicular pe d este $3x+y+2z+\lambda=0, \lambda\in\mathbb{R}$. 1p

Condiția de tangență $dist(C,\pi)=R$, unde C este centrul sferei S. 1p

Planele sunt $3x+y+2z-2\pm\sqrt{140}=0$. 1p

c) Cercul de rază maximă implică $C\in\pi_{\alpha,\beta}$. 1p

$x-9y+3z+4=0$ 2p